

تحلیل حساسیت فرکانس‌های طبیعی سازه خط آهن با تکیه‌گاه‌های مجزا

جبارعلی ذاکری*، دانشیار، دانشکده مهندسی راه‌آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
 رضا بختیاری، دانش‌آموخته کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی راه‌آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
 پست الکترونیکی نویسنده مسئول: zakeri@iust.ac.ir
 دریافت: ۱۳۹۳/۰۸/۱۰ - پذیرش: ۱۳۹۴/۰۱/۲۵

چکیده

شناخت رفتار سازه خط آهن، به تحلیل دینامیکی آن و ارزیابی پارامترهای تأثیرگذار در رفتار دینامیکی بستگی دارد. یکی از پارامترهای مهم و مؤثر بر سازه خط آهن، فرکانس طبیعی آن است. با توجه به متفاوت بودن سختی تکیه‌گاهی در خطوط بالاستی و محدوده مجاز تغییرات آن، فرکانس طبیعی سازه خط تابعی از آن سخت خواهد بود. هدف این مقاله تعیین و محاسبه فرکانس‌های طبیعی سازه خط است. در این مقاله ریل به صورت تیر بر روی تکیه‌گاه‌های مجزا مدل شده است. با تغییر سختی یا مدول بستر ریل، ماتریس‌های جرم و سختی محاسبه شده و از روی آن فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده است. همچنین با توجه به نوع تکیه‌گاه انتخابی، تحلیل حساسیت بر روی فرکانس‌های طبیعی با تغییر سختی خط صورت گرفته است.

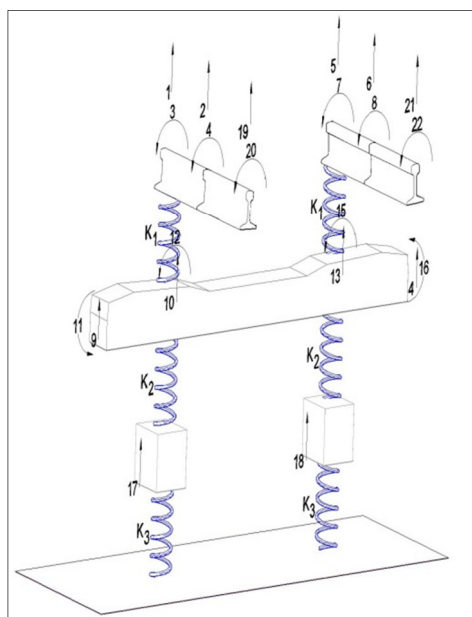
واژه‌های کلیدی: تحلیل دینامیکی، فرکانس طبیعی سازه، تحلیل حساسیت، خط بالاستی، تکیه‌گاه مجزا

۱- مقدمه

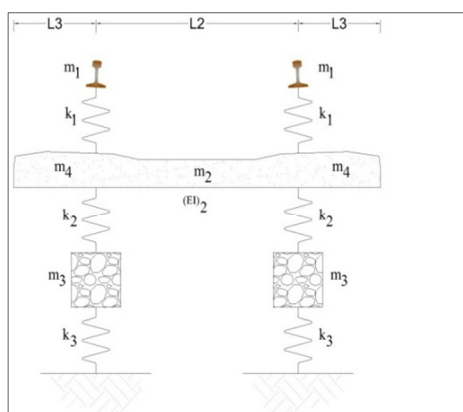
یک لایه ارتجاعی متصل است و هر دو روی یک محیط نیمه‌بی‌نهایت الاستیک و دارای جرم قرار گرفته‌اند تحلیل کرد. فرکانس‌های طبیعی، همانند محیط جرم‌دار زیرین، به مشخصات لایه تکیه‌گاهی هم وابسته است. سازه خط نیز سازه به طول بی‌نهایت است که در آن ریل بر روی تکیه‌گاه‌های مجزا قرار دارد. در این زمینه مطالعات محدودی صورت گرفته که می‌توان به تحقیقات Patil (1987) و Hosking et al. (2004) اشاره کرد. بررسی‌های تکمیلی با الگو قرار دادن سازه ترکیبی خط آهن و قطار به صورت بررسی اندرکنش دینامیکی صورت گرفته است که می‌توان به پژوهش‌های Cai et al. (1994) و Zakeri and Xia (2008) مراجعه کرد. با توجه به متفاوت بودن مدول بستر ریل در دوره بهره‌برداری سعی شده است به پرسش زیر پاسخ داده شود: تغییرات فرکانس‌های طبیعی سازه خط با افزایش مدول بستر ریل چگونه خواهد بود؟ همچنین با فرض

رفتار دینامیکی خط آهن تحت اثر بار متحرک، اولین بار توسط تیموشینکو در سال ۱۹۲۶ بررسی شد. او خط آهن را به صورت یک تیر که بر روی یک فونداسیون بدون جرم وینکلر (Winkler) قرار گرفته، مدل کرد و با این کار به رابطه‌ای ساده برای فرکانس طبیعی به صورت جذر نسبت ثابت وینکلر به جرم واحد طول تیر رسید. مطالعات مختلف دیگر (Hryniewicz, 1980)، در مورد ارتعاش پایه‌های متکی به پی، نشان داده است که جرم پی، تأثیر مهمی در پاسخ دینامیکی پایه‌ها دارد. بنابراین در نظر گرفتن جرم بستر ریل در محاسبه فرکانس‌های طبیعی خط امری مهم است. مطالعات بعدی (Hryniewicz, 1981; Oien, 1971)، در مورد نوار صلب با طول نامتناهی که به محیط نیمه‌بی‌نهایت ساکن متصل است، صورت گرفته است. همان‌طور که انتظار می‌رود، چنین سازه‌ای دارای فرکانس طبیعی نیست. در سال ۱۹۷۹ "گاز، تاس" ارتعاش یک نوار صلب را که به

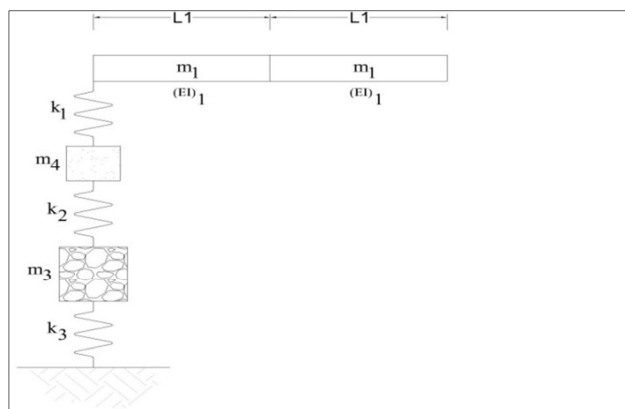
واگن معادل ۳۰ متر بسط داده شده است. با توجه به فاصله بین تراورس‌ها تعداد المان پایه در هر تحلیل مشخص می‌شود.



شکل ۱. نمای سه بعدی المان پایه مدل شده



شکل ۲. نمای عرضی مدل با پارامترهای جرم و سختی مدل شده



شکل ۳. نمای جانبی مدل در راستای طولی و تعداد المان و نحوه قرارگیری ریل

صرف‌نظر از ناهمواری‌های خط، تماس چرخ - ریل به‌صورت خطی (خطی هرتز) مدلسازی می‌شود. هدف این تحقیق، تعیین و محاسبه فرکانس‌های طبیعی سازه خط در حالت تکیه‌گاه‌های مجزا است؛ بنابراین یک مدل تیر بر روی تکیه‌گاه‌های مجزا انتخاب می‌شود. با تغییر سختی یا مدول بستر ریل، ماتریس‌های جرم و سختی محاسبه شده و از روی آن فرکانس‌های طبیعی به‌دست می‌آید.

۲- مدل سازه خط انتخابی

ساختار خط در این مقاله به تعریف المان‌های پایه مطابق شکل‌های ۱ تا ۳ مدلسازی شده است. در این مدل ریل از مرکز یک تراورس شروع می‌شود و تا مرکز تراورس بعدی ادامه پیدا می‌کند. این المان به‌صورت پیوسته و در دو جزء مدل شده است. هر جزء دارای چهار درجه آزادی، دو درجه آزادی در راستای قائم و دو درجه آزادی چرخشی است. درجات آزادی محل اتصال گیردار در دو جزء یکسان‌اند. پد زیر ریل و پابند و آلات اتصال نیز در طرفین مقطع خط با یک درجه آزادی در راستای قائم فرض شده‌اند. تراورس نیز به‌صورت تیر پیوسته با هشت درجه آزادی در چهار نقطه مدل شده که درجات آزادی آنها در راستای قائم و چرخشی است. همچنین بالاست به‌صورت جرم متمرکز در طرفین مقطع عرضی با یک درجه آزادی در راستای قائم مدل شده است و در نهایت بستر با یک درجه آزادی در راستای قائم مشاهده می‌شود. کل درجات آزادی سیستم ۲۲ درجه است. سیستم مذکور یک المان پایه است که برای به‌دست آوردن ماتریس سختی و جرم حداقل ۱/۵ برابر طول

به دست آمده به عنوان درایه‌های ماتریس سختی به دست می‌آیند. همچنین برای به دست آوردن ماتریس جرم سازه به ترتیب مذکور شتاب انتقالی در محل درجات آزادی اعمال شده و نیروهای اینرسی مربوطه تعیین می‌شود. با توجه به تعداد درجات آزادی در نظر گرفته شده برای مدل ماتریس‌های سختی و جرم برای این المان پایه به صورت 22×22 درایه به دست می‌آید. این ماتریس‌ها در صفحات پیوست ۱ ارائه شده‌اند.

۳- روش تحلیل

برای داشتن ماتریس‌های سختی و جرم کل سازه باید تعداد المان پایه در هر آنالیز را با توجه به فاصله تراورس‌ها به دست آورد. با توجه به ماتریس المان پایه و تعداد به نسبت زیاد المان پایه کوپل شده به یکدیگر ماتریس سختی و جرم کل سازه دارای ابعاد بزرگی است که برای سهولت در حل مسئله این محاسبات در برنامه گنجانده شده است. حال با معلوم بودن ماتریس‌های سختی و جرم، مجهول مسئله تعیین اسکالر ω_n است. از این رو از رابطه:

$$\det ([k] - \omega_n^2 [m]) = 0 \quad (3)$$

در صورت بسط دترمینان یک چندجمله‌ای از درجه n بر حسب ω_n^2 به دست می‌آید. معادله بالا دارای n ریشه حقیقی برای ω_n است. n ریشه معادله بالا فرکانس طبیعی ω_n را تعیین می‌کند. همه محاسبات بالا، به وسیله برنامه‌ای در محیط نرم افزار مت لب انجام گرفته است.

۴- نتایج و تفسیر آنها

۴-۱- فاصله تراورس‌ها

با توجه به اینکه طول خط مورد تحلیل ۱/۵ برابر طول وسیله نقلیه فرض شده است، افزایش فاصله بین تراورس‌ها، تعداد المان‌ها را کاهش می‌دهد. این امر سبب حذف تعدادی تراورس و آلات اتصال می‌شود که کاهش مقدار سختی کل سیستم را در بر خواهد داشت. همان‌گونه که از شکل ۴ پیداست با افزایش فاصله تراورس‌ها مقدار فرکانس طبیعی در همه مودها کاهش می‌یابد.

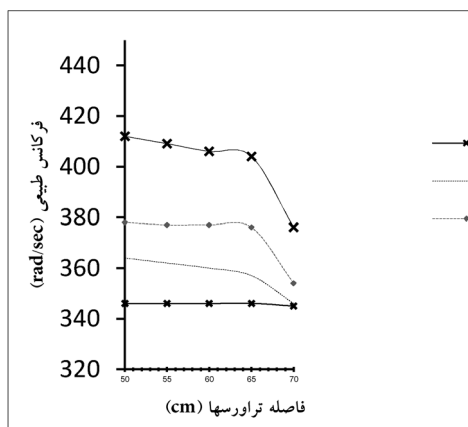
در المان ریل، M جرم واحد طول ریل و EI حاصل ضرب مدول ارتجاعی و ممان اینرسی مقطع ریل است. سختی ریل به عنوان یک المان پیوسته از ماتریس زیر به دست می‌آید:

$$[k] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

همچنین برای به دست آوردن جرم ریل می‌توان از ماتریس زیر استفاده کرد:

$$[m] = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22l & -13l \\ 54 & 156 & 13l & -22l \\ 22l & 13l & 4l^2 & -3l^2 \\ -13l & -22l & -3l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

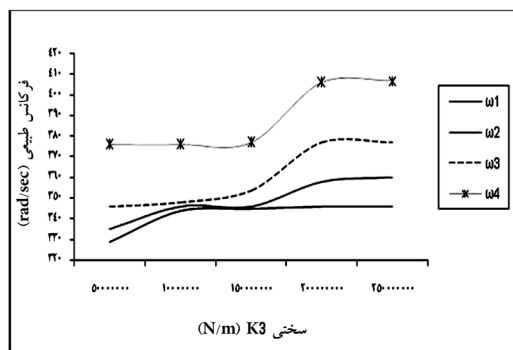
در این مقاله برای محاسبه جرم ریل از ماتریس رابطه ۲ استفاده شده و درایه‌های سختی مربوط به ریل با \hat{K} و درایه‌های مربوط به جرم ریل با \hat{M} در ماتریس اصلی نشان داده شده‌اند. در این مقاله تراورس همانند یک تیر پیوسته مدل شده است که دارای چهار گره و هر گره دارای ۲ درجه آزادی است. برای محاسبه سختی تراورس به عنوان یک تیر از ماتریس ذکر شده در رابطه ۱ و برای محاسبه جرم آن از ماتریس رابطه ۲ استفاده شده است. در این محاسبات طول تراورس به سه قسمت شامل دو قسمت قرینه که خارج از فاصله دو ریل قرار گرفته و یک قسمت تراورس محصور شده بین دو ریل تقسیم شده است. درایه‌های مربوط به سختی تراورس در قسمت داخلی با \bar{K} و در قسمت خارجی با K و نیز جرم قسمت بیرونی تراورس با m و قسمت داخلی با \bar{m} در ماتریس المان پایه مشخص شده‌اند. تغییر مکان واحد در محل درجه آزادی شماره یک اعمال شده به گونه‌ای که تغییر مکان در سایر درجات آزادی برابر صفر است. در این حالت نیروهای الاستیک به وجود آمده در سیستم معادل K_{ij} به دست می‌آیند. با انتخاب درجه آزادی شماره دو و نیز بسته نگاه داشتن سایر درجات آزادی نیروهای



شکل ۴. تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به فاصله بین تراورسها

جدول ۱. مقادیر فرکانس طبیعی با تغییر فاصله بین تراورسها

فاصله تراورسها (cm)	مقادیر فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
۵۰	۳۴۶	۳۶۴	۳۷۸	۴۱۲
۵۵	۳۴۶	۳۶۲	۳۷۷	۴۰۹
۶۰	۳۴۶	۳۶۰	۳۷۷	۴۰۶
۶۵	۳۴۶	۳۵۷	۳۷۶	۴۰۴
۷۰	۳۴۵	۳۴۶	۳۵۴	۳۷۶



شکل ۵. تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به سختی پد و

آلات اتصال

جدول ۲. مقادیر فرکانس طبیعی با تغییر سختی پد و آلات اتصال

K1	مقادیر فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
۵۰۰۰۰۰۰۰	۳۲۹	۳۴۶	۳۴۶	۳۷۶
۱۰۰۰۰۰۰۰	۳۴۴	۳۴۶	۳۴۸	۳۷۶
۱۵۰۰۰۰۰۰	۳۴۵	۳۴۶	۳۵۴	۳۷۷
۲۰۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۵۸	۳۷۷	۴۰۶
۲۵۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۶۰	۳۷۷	۴۰۷

۴-۲- سختی پد و پایند

با افزایش مقدار سختی پد و آلات اتصال مقادیر فرکانس طبیعی در همه مودها رو به افزایش است. این افزایش به دلیل افزایش مقدار کلی سختی خط در المان پایه و به تبع آن در کل طول خط مورد مطالعه است. با کاهش مقدار این سختی مقادیر فرکانس در مودهای مختلف به یکدیگر نزدیک می‌شوند و با افزایش آن، این مقادیر از یکدیگر فاصله می‌گیرند.

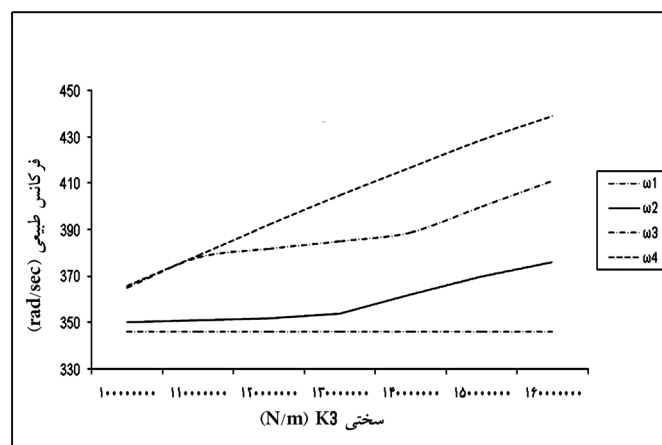
۴-۳- سختی بالاست

تقریباً به صورت خطی است. یعنی با افزایش مقدار سختی بالاست تغییرات فرکانس طبیعی به صورت خطی افزایش می‌یابد.

همان‌گونه که از شکل ۶ پیداست، با افزایش سختی بالاست، مقادیر فرکانس طبیعی در مودهای مختلف رو به افزایش است. این موضوع به علت افزایش سختی کل سیستم است. البته روند افزایشی فرکانس در این مورد

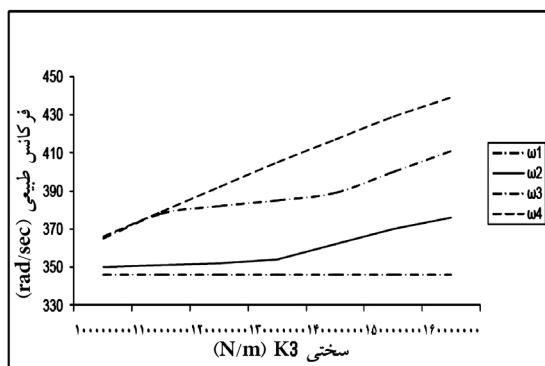
جدول ۳. مقادیر فرکانس طبیعی با تغییر سختی بالاست

K2	مقادیر فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
۶۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۵۱	۳۷۴	۴۰۴
۷۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۵۴	۳۷۷	۴۰۵
۸۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۵۷	۳۷۹	۴۰۵
۹۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۵۹	۳۸۰	۴۰۶
۱۰۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۶۰	۳۸۱	۴۰۶



شکل ۶. تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به سختی بالاست

۴-۴- سختی بستر

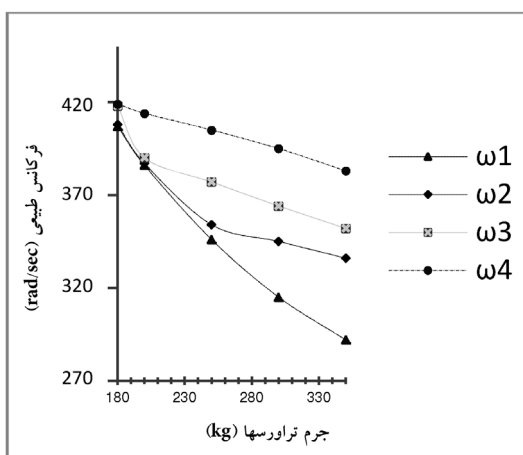


شکل ۷. تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به سختی بستر

اهمیت سختی بستر در خط راه آهن بسیار مهم است. همان‌گونه که از شکل ۷ پیداست با افزایش سختی بستر، مقدار فرکانس طبیعی افزایش چشمگیری نشان می‌دهد. مقادیر فرکانس در مودهای مختلف با کاهش سختی بستر به یکدیگر نزدیک و با افزایش آن از یکدیگر دور می‌شوند. این مسئله به خوبی بیانگر معضلات بستر نرم در خطوط بالاستی راه آهن است.

جدول ۴. مقادیر فرکانس با تغییر سختی بستر

K3	مقادیر فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
۱۰۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۵۰	۳۶۵	۳۶۶
۱۱۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۵۱	۳۷۸	۳۷۹
۱۲۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۵۲	۳۸۲	۳۹۲
۱۳۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۵۴	۳۸۵	۴۰۵
۱۴۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۶۲	۳۸۹	۴۱۷
۱۵۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۷۰	۴۰۰	۴۲۹
۱۶۰۰۰۰۰۰	۳۴۶	۳۷۶	۴۱۱	۴۳۹



شکل ۸. تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به جرم تراورس

۴-۵- جرم تراورس

با توجه به اینکه مقدار جرم با مقدار فرکانس طبیعی نسبت عکس دارد، این موضوع به خوبی در شکل ۸ مشخص است. با افزایش جرم تراورس مقدار فرکانس طبیعی در مودهای مختلف کاهش و با کاهش جرم تراورس مقدار فرکانس افزایش می‌یابد. همچنین با کاهش جرم تراورس مقادیر فرکانس مودهای مختلف به یکدیگر نزدیک و با افزایش جرم فرکانس‌های مودهای مختلف با کاهش بیشتری از یکدیگر دور می‌شوند.

جدول ۵. مقادیر فرکانس طبیعی با تغییر جرم تراورس

جرم تراورس (kg)	مقادیر فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
۱۵۰	۴۲۶	۴۲۷	۴۲۸	۴۲۹
۱۸۰	۴۰۷	۴۰۸	۴۱۸	۴۱۹
۲۰۰	۳۸۶	۳۸۷	۳۹۰	۴۱۴
۲۵۰	۳۴۶	۳۵۴	۳۷۷	۴۰۵
۳۰۰	۳۱۵	۳۴۵	۳۶۴	۳۹۵
۳۵۰	۲۹۲	۳۳۶	۳۵۲	۳۸۳

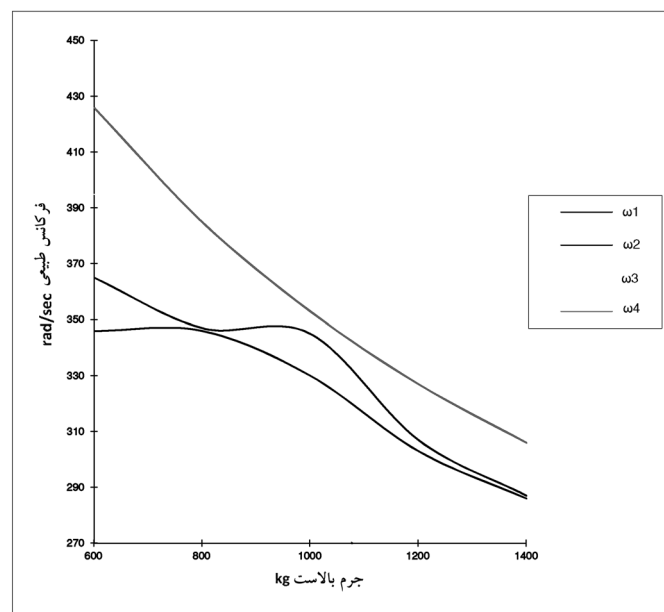
در مقادیر فرکانس طبیعی در مودهای مختلف با افزایش جرم بالاست بیشتر است. همچنین با کاهش بسیار زیاد مقدار جرم بالاست مقادیر فرکانس طبیعی در مودهای مختلف به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

۴-۶- جرم بالاست

آنچه در خصوص جرم تراورس بیان شد، در مورد جرم بالاست نیز صادق است البته با توجه به مقدار جرم بالاست در مقایسه با جرم تراورس در خط روند کاهش

جدول ۶. مقادیر فرکانس طبیعی با تغییر جرم بالاست

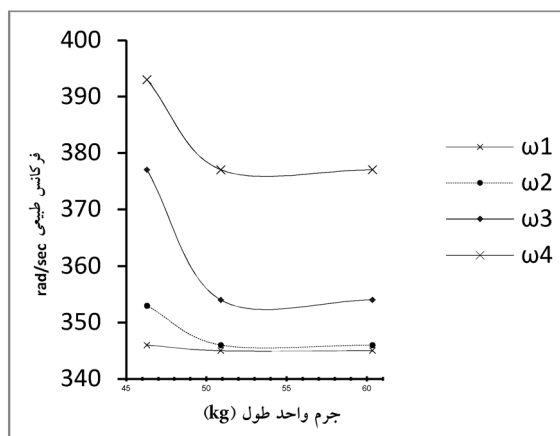
جرم بالاست (kg)	مقادیر فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
۶۰۰	۳۴۶	۳۶۵	۳۹۵	۴۲۶
۸۰۰	۳۴۶	۳۴۷	۳۶۰	۳۸۵
۱۰۰۰	۳۳۰	۳۴۵	۳۴۶	۳۵۳
۱۲۰۰	۳۰۳	۳۰۷	۳۲۶	۳۲۷
۱۴۰۰	۲۸۶	۲۸۷	۳۰۵	۳۰۶



شکل ۹. تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به جرم بالاست

۴-۷- جرم ریل

آنچه از نتایج آنالیز جرم بالاست و جرم تراورس به دست آمد تأییدی بر کاهش مقادیر فرکانس طبیعی با افزایش این جرم‌ها بود. اگرچه این کاهش در مورد جرم ریل نیز صادق است، این کاهش به بزرگی کاهشی در بالاست و تراورس نیست. دلیل این امر این است که با افزایش مقدار جرم ریل مقدار EI ریل نیز افزایش یافته است که این امر سبب شده فرکانس‌ها با روند کمتری نسبت به بالاست و تراورس کاهش داشته باشند. اگرچه در نهایت جرم ریل نسبت به EI آن غالب بوده است. شایان ذکر است که در مورد تراورس با افزایش جرم، مقدار EI ثابت نگه داشته شده بود.



شکل ۱۰. تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به مقطع و جرم ریل

جدول ۷. مقادیر فرکانس طبیعی با تغییر مقطع و جرم ریل

EI ریل	جرم ریل (kg)	مقادیر فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
۳۲۵۴۸۰۰	۴۶/۳	۳۴۶	۳۵۳	۳۷۷	۳۹۳
۴۱۵۲۹۶۰	۵۰/۹	۳۴۵	۳۴۶	۳۵۴	۳۷۷
۶۲۹۳۳۰۰	۶۰/۳۴	۳۴۵	۳۴۶	۳۵۴	۳۷۷

۵- نتیجه گیری

— محمدزاده، س. و یلداشخان، م. (۱۳۸۵) "اصول مهندسی راه آهن" نشر طاهر.

— S.P.Patil. (1984) "Natural Frequencies of a Railroad Track"; A.M.ASME; Association of American Railroads ; Transportation Test Center.

— R.j.Hosking , Saiful Azmi Husain , F.milinzano. (2004) "Natural flexural vibrations of a continuous beam on discrete elastic supports"; Journal of Sound and Vibration; Vol. 272.

— Z. Cai, G. P. Raymond , R. J. Bathurst (1994) "Natural vibration analysis of rail track as a system of elastically coupled beam structures on Winkler foundation"; Computers & Structures; Vol. 53, No. 6.

— L. Baeza, J. Fayos, A. Roda, R. Insa (2008) "High frequency railway vehicle-track dynamics through flexible rotating wheel sets"; Vehicle System Dynamics; Vol. 46.

— Zakeri J.A, Xia H. (2008) "Sensitivity analysis of track parameters on train-track dynamic interaction" ; Iran , China; Journal of Mechanical Science and Technology; Vol.22.

— R. Alam (2012) "Analysis at a three – Dimensional Railway vehicle – track system and development at a smart wheel set" Ph. D Thesis , Concordia university, Canada

در این مقاله اثر سختی اجزای روسازی خط در تغییر فرکانس‌های طبیعی سازه خط بررسی شده است نتایج مدلسازی و تحلیل عددی نشان می‌دهد که افزایش جرم موجب کاهش مقادیر فرکانس طبیعی و افزایش سختی موجب افزایش مقادیر آنها می‌شوند. در این حال جرم بالاست در مقایسه با جرم تراورس و جرم ریل از تأثیرگذاری بیشتری برخوردار است. سختی‌هایی نظیر سختی بستر نیز تأثیر زیادی دارند.

به‌طور خلاصه افزایش سختی‌های پد، آلات اتصال و فنرهای پابند، سختی بالاست و سختی بستر سبب روند افزایشی فرکانس طبیعی در مودهای مختلف می‌شود. افزایش جرم‌های تراورس و بالاست و ریل روند کاهش فرکانس‌های طبیعی را در پی خواهد داشت. در این بین سختی بستر در میان سختی‌ها بیشترین تأثیر در افزایش فرکانس و جرم تراورس بیشترین تأثیر کاهش را منجر می‌شوند.

۶- مراجع

— چوپرا، آ. (۱۳۸۸) "دینامیک سازه‌ها و تعیین نیروهای زلزله"، ترجمه شاپور طاحونی، انتشارات علم و ادب.

— لادیسلاو ف. (۱۳۸۳) "دینامیک پل‌های راه آهن" ترجمه جبارعلی ذاکری، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران.

