

مسأله مسیریابی وسایل نقلیه سبز و کاهش انتشار آلودگی

بهروز عبدلی، دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
سیدعلی میرحسینی*، دانشیار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
فرناز هوشمند، استادیار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: a_mirhassani@aut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۰۸/۰۱ - پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۲۰

صفحه ۲۱۵-۲۳۹

چکیده

انتشار آلودگی وسایل نقلیه عمدتاً به مقدار سوخت مصرفی، نوع سوخت و مسافت پیموده شده بستگی دارد. استفاده از منابع انرژی جایگزین یکی از راه‌های مقابله با گازهای گلخانه‌ای و آلودگی‌های زیست‌محیطی ناشی از مصرف سوخت است. کمبود زیرساخت‌هایی نظیر جایگاه‌های سوخت‌گیری، یکی از موانع اصلی پذیرش وسایل نقلیه با سوخت جایگزین است. در این مطالعه به‌عنوان یک رویکرد عملی در دوره گذر، مدلی برای گسترش مسأله مسیریابی به وسایل نقلیه سبز معرفی می‌کنیم. این یک مسأله NP - سخت است. بنابراین، حل نمونه‌های با اندازه واقعی در یک زمان مناسب به‌سختی امکان‌پذیر است. برای حل نمونه‌های بزرگ، روشی مبتنی بر الگوریتم تجزیه بندرز معرفی و آن را به کمک برش‌های معتبر بهبود می‌دهیم. اجرای الگوریتم پیشنهادی روی مسائل تصادفی نتایج قابل قبولی را در زمان مناسب ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مسیریابی وسایل نقلیه سبز، وسایل نقلیه با سوخت جایگزین، گازهای گلخانه‌ای، برش‌های معتبر، تجزیه بندرز

۱- مقدمه

پیموده‌شده توسط وسایل نقلیه و به تبع آن، کاهش استفاده از سوخت‌های فسیلی صورت گرفته‌اند. سایر تلاش‌ها بر معرفی سوخت‌های پاک مانند گازوئیل با گوگرد بسیار کم، و بهبود فن‌آوری، متمرکز هستند که نتیجه آنها کاهش انتشار آلودگی به‌ازای یک کیلومتر پیموده شده و یا مسافت طی شده به‌ازای یک واحد سوخت مصرفی است. با وجودی که هر یک از این تلاش‌ها مزیت خود را دارد، فقط یک رویکرد چندوجهی می‌تواند کاهش مورد نیاز در مصرف سوخت‌های فسیلی و آلودگی محیط زیست را تأمین کند. به عنوان بخشی از چنین

صنعت حمل و نقل نقشی اساسی و غیر قابل جایگزین در رشد اقتصادی هر کشور دارد. از سوی دیگر، شبکه حمل و نقل یکی از بزرگ‌ترین مصرف‌کننده‌های سوخت‌های فسیلی است و سهم بزرگی در آلودگی محیط زیست دارد. در ایالات متحده، ۹۷ درصد انرژی مورد نیاز بخش حمل و نقل از سوخت‌های فسیلی تأمین می‌شود. از این رو، بخش حمل و نقل سهم ۲۸ درصدی در انتشار گازهای گلخانه‌ای دارد. در طی دهه‌های اخیر تلاش بسیاری برای کاهش مصرف سوخت انجام شده است. برخی از این فعالیتها در راستای کاهش مسافت

نظر هزینه وسایل نقلیه، می‌تواند طرح‌های حمل و نقل پایدار را به‌خوبی مورد دسترسی قرار دهد. در این زمینه، طراحی یک شبکه توزیع سبز به‌وسیله مدل‌های مسیریابی وسایل نقلیه امری مهم و ضروری است (Canhong Lin, et al., 2014).

هدف مسائل مسیریابی وسایل نقلیه سبز (GVRP) این است که با معرفی مسیرهای مناسب و کارآمد، هزینه‌های مربوطه را کنترل و آن را با نگرانی‌های زیست محیطی و معیارهای مالی هماهنگ کنند. در سال‌های اخیر مسائل GVRP از جنبه نظری و کاربردهای عملی آن مورد توجه بوده‌اند. سیبھی و اگلس (Sbihi, A. & Eglese, R. W., 2007a; Sbihi, A. & Eglese, R. W., 2007b) و VRP وابسته به زمان با هدف کمینه‌کردن آلودگی در طی سفر را بررسی کرده‌اند. سلیمی‌فرد و همکاران (Salimifard, K., et al., 2012) یک گونه جدید از مسائل VRP را معرفی کرده‌اند که در آن، کنترل انتشار CO₂ و هزینه‌ها به‌طور همزمان در نظر گرفته شده است.

با توجه به اینکه طیف گسترده‌ای از مسائل وجود دارند که مربوط به حمل و نقل سبز می‌باشند، کان هونگ لین و همکاران (Canhong Lin, et al., 2014) سه دسته مهم برای مسائل VRP تعریف کرده‌اند که مشتمل بر مسائل VRP سبز (GVRP)، مسائل مسیریابی-آلودگی (PRP)، و VRP در لجستیک معکوس است. در ادامه این مقاله به بررسی موضوعات زیر می‌پردازیم: (۱) توسعه یک مدل جدید برای ناوگانی از وسایل نقلیه تک سوخته (۲) معرفی برش‌های معتبر مختلف جهت بهبود فرایند حل مسئله (۳) معرفی یک روش حل جدید برای مسئله GVRP مبتنی بر الگوریتم تجزیه بندرز و نیز راهکارهایی برای بهبود آن.

۲-پیشینه تحقیق

مسئله GVRP با مصرف سوخت در ارتباط است. قیمت سوخت بخش قابل ملاحظه‌ای از هزینه کل حمل و نقل را تشکیل می‌دهد (Xiao, Y., et al., 2012). کاهش مصرف

رویکردی، توجه ویژه‌ای به استفاده از منابع سوخت‌های جایگزین پاک مانند بیودیزل، الکتریسیته، اتانول، هیدروژن، متانول، گاز طبیعی و پروپان شده است. شهرداری‌ها، آژانس‌های دولتی، سازمان‌های غیرانتفاعی و شرکت‌های خصوصی در حال تجهیز ناوگان خود به وسایل نقلیه با سوخت جایگزین (AFV)^۱ هستند تا تأثیرات منفی زیست محیطی را کاهش داده و مقررات جدید را رعایت کنند. (Erdogan, S. & MillerHooks, E., 2012) آژانس‌های خدماتی برای انتخاب نوع وسایل نقلیه عوامل مختلفی را در نظر می‌گیرند، مشتمل بر در دسترس بودن سوخت و توزیع جغرافیایی ایستگاه‌های سوخت، دامنه حرکت^۲ وسیله نقلیه، قیمت وسیله نقلیه و سوخت، بهره‌وری سوخت و هزینه‌های نگهداری ناوگان. کمبود زیرساخت مناسب برای سوخت‌گیری وسایل نقلیه با سوخت جایگزین مانعی جدی برای پذیرش این نوع وسایل نقلیه توسط شرکت‌های خدماتی است. کمبود ایستگاه‌های سوخت جایگزین (AFS)^۳، توزیع نامناسب جغرافیایی آنها، و کوتاهی دامنه حرکت این وسایل از چالش‌های اصلی این حوزه می‌باشد. مسئله قدیمی مسیریابی وسایل نقلیه (VRP) بر تأثیر اقتصادی مسیر وسایل نقلیه در فرایند انجام خدمات توزیعی متمرکز است. در نظر گرفتن اهداف وسیع‌تر و محدودیت‌های عملیاتی بیشتر که مربوط به "حمل و نقل پایدار" است، مدل‌های جدید VRP و حوزه‌های کاربردی نوینی را معرفی می‌کند، که به‌طور طبیعی منجر به مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی پیچیده‌تر می‌شود. حمل و نقل سبز با فعالیت‌هایی نظیر توجه به اثرات زیست محیطی، کاهش مصرف انرژی، بازیافت پسماند و مدیریت مصرف سر و کار دارد (Sbihi, A. & Eglese, R. W., 2007a). بر این مبنای، گونه‌هایی از VRP به‌عنوان مسائل VRP سبز (GVRP)^۴ معرفی شده‌اند. انگیزه اصلی در طرح حمل و نقل سبز به این واقعیت برمی‌گردد که راهبردهای موجود تولیدی و توزیعی در بلندمدت پایدار نیستند. بنابراین، هنگام طراحی خط مشی‌های مربوطه علاوه بر هزینه‌های اقتصادی معمول، اثرات زیست‌محیطی، اکولوژیکی و اجتماعی نیز در نظر گرفته می‌شوند. استفاده بهتر از وسایل نقلیه و یک مسیریابی مؤثر از

نیاز بیشتری به دسترسی به جایگاه‌های سوخت داشته باشند. مقاله‌هایی که موقعیت جایگاه‌های سوخت را در تولید تورهای بهینه لحاظ کرده‌اند بسیار کم هستند. اردوغان و میلرهورکس (Erdogan, S. & MillerHooks, E., 2012) امکان سوخت‌گیری یک وسیله نقلیه روی یک تور را به منظور دسترسی به سوخت پاک علیرغم طولانی‌تر شدن مسیر در نظر گرفته‌اند. در این مقاله، باهدف کمینه کردن مسافت پیموده شده، مدل درصدی از بین بردن خطر بدون سوخت ماندن وسیله نقلیه است و زمان خدمت‌رسانی به مشتری‌ها و محدودیت حداکثر زمان طول تور در نظر گرفته شده است. اشنایدر و همکاران (Schneider, M., et al., 2012)، GVRP را به یک مدل با پنجره‌های زمانی گسترش داده‌اند.

۳- تعریف مسأله و فرمول‌بندی مدل

مسأله VRP کلاسیک و اکثر گونه‌های آن مربوط به شرکت‌ها و آژانس‌هایی هستند که یک ناوگان از وسایل نقلیه را برای خدمت‌رسانی به مشتری‌هایی که در یک ناحیه جغرافیایی گسترده پراکنده شده‌اند، به کار می‌گیرند. چنین شرکت‌هایی در تلاش برای تشکیل تورهایی با هزینه پایین به منظور صرفه‌جویی در هزینه و زمان سفر هستند. این تورها نوعاً از یک انبار مرکزی شروع و پس از ملاقات چندین مشتری به انبار ختم می‌شوند. مسأله GVRP چالش‌های اضافی مرتبط با به‌کارگیری ناوگانی از AFVها را لحاظ می‌کند که به مشکلات ناشی از محدودیت زیر ساخت‌های سوخت‌گیری برمی‌گردد. در این ناوگان، همواره خطر عدم دسترسی به‌موقع به سوخت پاک بحثی جدی و چالش‌برانگیز می‌باشد. در این مسائل علاوه بر تعیین مسیر بهینه، طرحی برای سوخت‌گیری نیز مورد توجه می‌باشد. فرض کنید در یک گراف کامل رأس‌ها مکان مشتریان، جایگاه‌های سوخت و انبار را نشان دهند. یک مسأله GVRP مجموعه‌ای از تورهای کمینه را جستجو می‌کند که از انبار شروع، مجموعه‌ای از مشتریان را ملاقات و با رعایت

سوخت و بهبود کارایی حمل و نقل در سطح عملیاتی بدیهی‌ترین اقدامی است که در زمینه کاهش هزینه سوخت می‌توان انجام داد. همچنین انتظار می‌رود که کاهش در مصرف سوخت‌های فسیلی بتواند کاهش معناداری در انتشار گازهای گلخانه‌ای ایجاد کند (Erdogan, S. & MillerHooks, E., 2012) و (Xiao, Y., et al., 2012). بنابراین، مصرف سوخت یک جنبه بسیار مهم در GVRP است (Kuo, Y., 2010) و برای گنجاندن این مبحث در مدل مسیریابی، توسعه یک روش برای محاسبه مقدار مصرف سوخت وسیله نقلیه بر حسب محدودیت عملیاتی وسیله نقلیه در حال سفر، سرعت سفر، وزن بار و نیز مسافت پیموده‌شده، ضروری به نظر می‌رسد. در مجموع، مطالعات موجود در زمینه مسائل VRP با هدف کمینه کردن مصرف سوخت بسیار کم هستند. کارا و همکاران (Kara, I., et al., 2007) یک هزینه حمل و نقل واقعی‌تر را در نظر گرفته‌اند که متأثر از میزان بار وسیله نقلیه و نیز مسافت پیموده‌شده است. آنها در مسأله VRP، تعیین کمینه انرژی را به عنوان هدف معرفی کرده‌اند که در آن، تابع هزینه عبارت است از حاصل ضرب کل بار در طول مسیر پیموده‌شده. بعداً، ژیاو و همکاران (Xiao, Y., et al., 2012) نرخ مصرف سوخت (FCR)^۱ را معرفی کرده و بر اساس آن توسعه‌ای از مسأله CVRP را ارائه کرده‌اند به نام "مسأله مسیریابی وسایل نقلیه سوخت‌محور" (FCVRP)^۲ که در آن، هدف عبارت است از کمینه‌کردن مصرف سوخت. در مقاله آنها، مسافت پیموده شده و بار، هر دو، به عنوان عوامل تعیین‌کننده هزینه‌های سوخت مد نظر قرار گرفته‌اند و FCR به‌عنوان تابعی خطی وابسته به بار در نظر گرفته شده است. کوئو (Kuo, Y., 2010) علاوه بر مسافت پیموده شده و وزن بار، سرعت حمل را نیز به مدل محاسبه مصرف سوخت در مسائل VRP وابسته به زمان اضافه کرده است. این حقیقت که دامنه حرکت وسایل نقلیه با سوخت پاک معمولاً خیلی کوتاه است و شبکه جایگاه‌های سوخت نیز غالباً شبکه‌ای تنگ است، باعث می‌شود که AFVها نسبت به وسایل نقلیه با سوخت معمولی

ملاقات، به مقدار لازم سوخت‌گیری و سپس به انبار مراجعه کنند، به طوری که کل GHG منتشرشده کمینه شود. بدیهی است که هر مشتری فقط یک بار ملاقات می‌شود درحالی‌که ممکن است به یک جایگاه سوخت چندین بار مراجعه شود. ابتدا مسأله GVRP را، با این فرض که وسایل نقلیه فقط به سوخت پاک مجهز هستند، به دو شکل مختلف فرمول‌بندی می‌کنیم. در مدل اول، برای مجاز دانستن چندین (و احتمالاً صفر) ملاقات برای جایگاه‌های سوخت‌گیری (AFS)، گراف $G = (V, E)$ را به گراف $G' = (V', E')$ با مجموعه‌ای از رأس $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ که هر یک نظیر یک نسخه از یک AFS است، گسترش می‌دهیم.

در واقع، متناظر با هر جایگاه سوخت $f \in F$ تعداد n_f رأس مصنوعی (n_f نسخه از جایگاه سوخت‌گیری f) در نظر گرفته می‌شود، که نشان‌دهنده تعداد دفعاتی است که جایگاه مربوطه می‌تواند ملاقات شود. n_f تا جایی که امکان دارد باید کوچک انتخاب شود به طوری که اندازه شبکه، و به تبع آن زمان حل مسأله، کاهش یابد.

از طرفی، n_f باید به اندازه کافی بزرگ اختیار شود به طوری که ملاقات‌های چندگانه AFS‌ها، که می‌تواند ضروری باشد، را محدود نکند. در مدل ارائه شده در (Erdogan, S., 2012) هم مانند AFS ها عمل می‌کند؛ یعنی وقتی انبار ملاقات می‌شود باک سوخت به طور کامل پر می‌شود. بنابراین، سطح اولیه سوخت موجود در باک هنگام حرکت از انبار برای تمام وسایل نقلیه کامل فرض می‌شود. این فرض در بسیاری از موارد عملی، واقعی نیست. بنابراین، فرض می‌کنیم که سوخت اولیه وسایل نقلیه در یک سطح متوسط، مثلاً به اندازه نصف ظرفیت کامل باک، باشد.

برای مدل ۱ (M1) نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم:

محدودیت‌های عملیاتی مدت سفر به انبار برمی‌گردند، بدون این‌که با مشکل کمبود سوخت مواجه شوند. بنابراین، لازم است که به وسایل نقلیه اجازه سوخت‌گیری داده شود. به این ترتیب، هر تور ممکن است شامل توقف‌هایی در یک یا چند AFS را نیز شامل شود. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف کامل بدون جهت باشد که مجموعه رأس‌های آن V ترکیبی از مجموعه مشتریان $I = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ انبار v_0 و مجموعه‌ای از تعداد $s \geq 0$ جایگاه سوخت جایگزین $F = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{n+s}\}$ باشد؛ یعنی:

$$V = \{v_0\} \cup I \cup F = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+s}\}$$

مجموعه $E = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ متناظر با یال‌هایی است که رأس‌های V را به هم متصل می‌کند. به هر یال (v_i, v_j) سه پارامتر نامنفی نسبت داده می‌شود که عبارتند از زمان سفر t_{ij} ، هزینه سفر c_{ij} و فاصله d_{ij} .

همچنین فرضیات زیر نیز پذیرفته می‌باشند: (۱) سرعت سفر روی هر یال ثابت است. (۲) تعداد دفعات توقف جهت سوخت‌گیری محدودیتی ندارد. (۳) جایگاه‌های سوخت‌گیری ظرفیت نامحدود دارند. (۴) وقتی سوخت‌گیری انجام می‌شود، باک به طور کامل پر می‌شود. (۵) محدودیت دامنه حرکت وسایل نقلیه به واسطه ظرفیت محدود باک سوخت، محدودیت دسترسی به سوخت به علت ناکافی بودن زیرساخت لازم، و محدودیت زمان طول تور به T_{max} ، به مسأله تحمیل می‌شود. (۶) زمان سرویس به هر مشتری و توقف در هر AFS به وضوح کمتر از T_{max} است و همه مشتریان باید تا زمان T_{max} سرویس‌دهی شوند.

مسأله GVRP در جستجوی یافتن حداکثر m تور است، که به هر یک از آنها یک وسیله نقلیه تخصیص داده می‌شود تا سفر خود را از انبار شروع، تعدادی از مشتریان را

	مجموعه‌ها
مجموعه مشتری‌ها و انبار	$I_0 = I \cup \{v_0\}$
مجموعه نسخه‌های جایگاه‌های سوخت (رأس‌های مصنوعی)	F_c
مجموعه جایگاه‌های سوخت (AFS‌ها) و نسخه‌های آنها	$F' = F \cup F_c$
مجموعه همه رأس‌های حقیقی و مصنوعی	$V' = V \cup F'$
	پارامترها
زمان سرویس در گره i	$p_i, i \in V$
نرخ مصرف سوخت وسایل نقلیه	r
تعداد وسایل نقلیه موجود	m
حداکثر زمان طول تورها	T_{max}
ظرفیت باک سوخت وسایل نقلیه	q
نرخ انتشار GHG سوخت مورد استفاده	e
طول یال (i, j)	$d_{ij}; (i, j) : i, j \in V' \& i \neq j$
زمان پیمایش یال (i, j)	$t_{ij}; (i, j) : i, j \in V' \& i \neq j$
	متغیرهای تصمیم
متغیر دودویی که مقدار آن ۱ است اگر یک وسیله نقلیه از گره i به گره j سفر کند، در غیر این صورت ۰ (i و j هر دو در F' نیستند).	$x_{ij}; i, j \in V' \& i \neq j$
متغیر سطح سوخت باقی مانده در باک وسیله نقلیه هنگام رسیدن به گره j ، که مقدار اولیه $\frac{q}{2}$ را اختیار می‌کند ($y_0 = q/2$).	$y_j; j \in V'$
متغیر زمان رسیدن وسیله نقلیه به گره j ، که مقدار اولیه صفر را اختیار می‌کند ($\tau_0 = 0$).	$\tau_j; j \in V'$
متغیر سطح سوخت باقی مانده در باک وسیله نقلیه هنگام رسیدن به انبار از طریق گره i .	$\gamma y_{i0}; i \in V' \setminus \{0\}$
متغیر زمان رسیدن وسیله نقلیه به انبار از طریق گره i .	$\tau \tau_{i0}; i \in V' \setminus \{0\}$

با توجه به نمادهای معرفی شده، لازم است شرایط زیر برای یال‌های مورد استفاده لحاظ شود:

$$\tau_j = \tau_i + (p_i + t_{ij}), \quad \text{if } x_{ij} = 1 \quad ; i \in V', \forall j \in V' \setminus \{0\} \text{ and } i \neq j \quad (1)$$

$$\tau \tau_{i0} = \tau_i + (p_i + t_{i0}), \quad \text{if } x_{i0} = 1 \quad ; \forall i \in V' \setminus \{0\} \quad (2)$$

$$y_j = y_i - rd_{ij}, \quad \text{if } x_{ij} = 1 \quad ; \forall j \in I \text{ and } i \in V', i \neq j \quad (3)$$

$$\gamma y_{i0} = y_i - rd_{i0}, \quad \text{if } x_{i0} = 1 \quad ; \forall i \in V' \setminus \{0\} \quad (4)$$

محدودیت های (۱) را با دو محدودیت

با استفاده از تکنیک M بزرگ، هر یک از این محدودیت ها را

می توان با دو محدودیت عادی جایگزین کرد. مثلاً، هر یک از

$$\tau_j \geq \tau_i + (p_i + t_{ij})x_{ij} - T_{max}(1 - x_{ij}), \quad i \in V', \forall j \in V' \setminus \{0\} \text{ and } i \neq j \quad (5)$$

$$\tau_j \leq \tau_i + (p_i + t_{ij})x_{ij} + T_{max}(1 - x_{ij}), \quad i \in V', \forall j \in V' \setminus \{0\} \text{ and } i \neq j \quad (6)$$

و هر یک از محدودیت های (۳) را با دو محدودیت

$$y_j \leq y_i - rd_{ij}x_{ij} + q(1 - x_{ij}), \quad \forall j \in I \text{ and } i \in V', i \neq j \quad (7)$$

$$y_j \geq y_i - rd_{ij}x_{ij} - q(1 - x_{ij}), \quad \forall j \in I \text{ and } i \in V', i \neq j \quad (8)$$

با در نظر گرفتن سایر فرضیات و الزامات مسأله، مدل M1

جایگزین می کنیم. البته در عمل و در هنگام پیاده سازی، همواره

به صورت زیر فرمول بندی می شود:

یکی از این جفت محدودیت ها زاید هستند (مثلاً محدودیت های

۶ و ۸) که می توانیم آنها را از مدل حذف کنیم. به این ترتیب و

$$M1: \quad \min \sum_{i,j \in V': i \neq j} e d_{ij} x_{ij} \quad (9)$$

s. t.

$$\sum_{j \in V': j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (10)$$

$$\sum_{j \in V': j \neq i} x_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in F' \quad (11)$$

$$\sum_{i \in V': i \neq j} x_{ji} - \sum_{i \in V': i \neq j} x_{ij} = 0, \quad \forall j \in V' \quad (12)$$

$$\sum_{j \in V' \setminus \{0\}} x_{0j} \leq m \quad (13)$$

$$\sum_{j \in V' \setminus \{0\}} x_{j0} \leq m \quad (14)$$

$$\tau_j \geq \tau_i + (p_i + t_{ij})x_{ij} - T_{max}(1 - x_{ij}), \quad i \in V', \forall j \in V' \setminus \{0\} \text{ and } i \neq j \quad (15)$$

$$\tau_{i0} \geq \tau_i + (p_i + t_{i0})x_{i0} - T_{max}(1 - x_{i0}), \quad \forall i \in V' \setminus \{0\} \quad (16)$$

$$\tau_0 = 0 \quad (17)$$

$$\tau_{i0} \leq T_{max}, \quad \forall i \in V' \setminus \{0\} \quad (18)$$

$$y_j \leq y_i - rd_{ij}x_{ij} + q(1 - x_{ij}), \quad \forall j \in I \text{ and } i \in V', i \neq j \quad (19)$$

$$y_{i0} \leq y_i - rd_{i0}x_{i0} + q(1 - x_{i0}), \quad \forall i \in V' \setminus \{0\} \quad (20)$$

$$y_0 \geq rd_{0j}x_{0j}, \quad \forall j \in F' \quad (21)$$

$$y_i \geq r \sum_{j \in F'} d_{ij} x_{ij}, \quad \forall i \in I \quad (22)$$

$$y_0 = q/2 \quad (23)$$

$$y_j = q, \quad \forall j \in F' \quad (24)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in V', i \neq j \quad (25)$$

$$y_i, \tau_i \geq 0, \quad \forall i \in V' \quad (26)$$

$$\gamma y_{i0}, \tau \tau_{i0} \geq 0, \quad \forall i \in V' \setminus \{0\} \quad (27)$$

محدودیت‌های (۲۱) و (۲۲) ایجاب می‌کنند که سطح سوخت در انبار و نزد هر مشتری برای حرکت به سمت یک جایگاه سوخت، بایستی به اندازه کافی باشد.

محدودیت‌های کنترل زمان (۱۵) و (۱۶) و محدودیت‌های تنظیم سطح سوخت (۱۹) و (۲۰) تشکیل تور کامل را نیز تضمین می‌کنند. محدودیت (۲۳) سطح سوخت در زمان حرکت از انبار را برابر $q/2$ قرار می‌دهد. محدودیت‌های (۲۴) سطح سوخت در هر AFS را برابر با q قرار می‌دهد. محدودیت‌های (۲۵) دودویی بودن متغیرهای x_{ij} را نشان می‌دهند، و محدودیت‌های (۲۶) و (۲۷) نامنفی بودن متغیرهای $y_i, \tau_i, \gamma y_{i0}$ و $\tau \tau_{i0}$ را بیان می‌کنند.

با بررسی اولیه مدل MI مشخص می‌شود که:

وارد کردن رأس‌های مصنوعی اندازه مدل را افزایش داده و آن را از نظر محاسباتی پیچیده می‌کند.

این فرمول‌بندی به یک مقدار مناسب و قابل قبول برای n_f نیاز دارد، در حالی که پیش‌گویی یک مقدار مناسب برای n_f مشکل است. از یک طرف، یک مقدار کوچک نامناسب برای n_f ممکن است منجر به یک جواب زیربهبین شود و از سوی دیگر، یک مقدار بزرگ برای n_f موجب بزرگی شبکه خواهد شد. برای رفع این مشکلات، مدل ۲ (M2) را معرفی می‌کنیم که در آن رأس‌های مصنوعی حذف و متغیرهای تصمیم بدون نیاز به نسخه‌برداری از AFS‌ها تعریف می‌شوند. در نتیجه، اندازه مدل n_f نداریم. برای معرفی مدل M2 به نمادهای زیر نیز نیاز داریم:

تابع هدف (۹) درصدد کمینه‌کردن کل GHG منتشر شده به‌وسیله ناوگان در یک روز مشخص است.

محدودیت‌های (۱۰) تضمین می‌کنند که هر مشتری دقیقاً یک رأس بعدی دارد که عبارت است از یک رأس مشتری، یک AFS، یا انبار. محدودیت‌های (۱۱) تضمین می‌کنند که هر AFS (و رأس‌های مصنوعی مربوط به آن) حداکثر یک رأس بعدی دارد که عبارت است از یک رأس مشتری یا انبار.

محدودیت‌های (۱۲) بقای جریان را نشان داده و متضمن این هستند که تعداد ورود به هر رأس با تعداد خروج از آن برابر است. محدودیت (۱۳) تضمین می‌کند که حداکثر m وسیله نقلیه حرکت خود را از انبار شروع می‌کنند و محدودیت (۱۴) ایجاب می‌کند که در یک روز معین حداکثر m مشتری به انبار باز می‌گردند. زمان رسیدن به هر رأس توسط هر وسیله نقلیه از طریق محدودیت‌های (۱۵) و (۱۶) پیگیری می‌شود. به‌علاوه، محدودیت‌های (۱۵) و (۱۶) به همراه محدودیت‌های (۱۸) تضمین می‌کنند که هر وسیله نقلیه تا لحظه زمانی T_{max} به انبار باز می‌گردد. محدودیت (۱۷) زمان عزیمت از انبار را مساوی صفر قرار می‌دهد. محدودیت‌های (۱۹) و (۲۰) سطح سوخت یک وسیله نقلیه هنگام رسیدن به یک رأس را بر اساس ترتیب قرار گرفتن و نوع آن (مشتری یا انبار) دنبال می‌کنند.

زیاد افزایش نمی‌یابد که از نظر محاسباتی مزیت دارد. به‌علاوه، برای معرفی مدل M2 نیازی به تعیین یک مقدار مشخص برای

	مجموعه‌ها
عدم سوخت‌گیری روی یک یال	$0'$
مجموعه جایگاه‌های سوخت‌گیری و $0'$	$F_0 = F \cup \{0'\}$
	پارامترها
زمان صرف‌شده برای سفر از i به j وقتی در جایگاه سوخت f بین i و j سوخت‌گیری می‌کنیم.	$t_{ifj}; i, j \in I_0 \& i \neq j, f \in F_0$
مسافت طی‌شده وقتی از i به j سفر کرده و در جایگاه سوخت f بین i و j سوخت‌گیری می‌کنیم.	$d_{ifj}; i, j \in I_0 \& i \neq j, f \in F_0$
	متغیرهای تصمیم
متغیر دودویی که مقدار آن ۱ است اگر وسیله نقلیه از گره i به گره j سفر کرده و در جایگاه f بین i و j سوخت‌گیری کند؛ در غیر این صورت ۰ است.	$x_{ifj}; i, j \in I_0 \& i \neq j, f \in F$
متغیر دودویی که مقدار آن ۱ است اگر یک وسیله نقلیه بدون سوخت‌گیری از گره i به گره j سفر کند؛ در غیر این صورت ۰ است.	$x_{i0'j}; i, j \in I_0 \& i \neq j$
همانند مدل M1	y_j and $\tau_j; j \in I_0$
متغیر سطح سوخت باقی‌مانده در باک وسیله نقلیه هنگام رسیدن به انبار از طریق مشتری i	$yy_{i0}; i \in I$
متغیر زمان رسیدن وسیله نقلیه به انبار از طریق مشتری i	$\tau\tau_{i0}; i \in I$

که در آن، پارامترهای t_{ifj} و d_{ifj} به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$t_{ifj} = \begin{cases} p_i + t_{if} + p_f + t_{fj} & f \in F \\ p_i + t_{ij} & f = 0' \end{cases} \quad i, j \in I_0 \& i \neq j, f \in F_0 \quad (28)$$

$$d_{ifj} = \begin{cases} d_{if} + d_{fj} & f \in F \\ d_{ij} & f = 0' \end{cases} \quad i, j \in I_0 \& i \neq j, f \in F_0 \quad (29)$$

با توجه به نمادهای معرفی شده، لازم است شرایط زیر برای حرکت بین گره‌ها لحاظ شود:

$$\tau_j = \tau_i + t_{ifj}, \quad \text{if } x_{ifj} = 1; \quad \forall f \in F_0, i \in I_0, \forall j \in I \text{ and } i \neq j \quad (30)$$

$$\tau\tau_{i0} = \tau_i + t_{if0}, \quad \text{if } x_{if0} = 1; \quad \forall f \in F_0, \forall i \in I \quad (31)$$

$$y_j = q - rd_{fj}, \quad \text{if } x_{ifj} = 1; \quad \forall f \in F, i \in I_0, \forall j \in I \text{ and } i \neq j \quad (32)$$

$$yy_{i0} = q - rd_{f0}, \quad \text{if } x_{if0} = 1; \quad \forall f \in F, \forall i \in I \quad (33)$$

$$y_j = y_i - rd_{ij}, \quad \text{if } x_{i0'j} = 1; \quad i \in I_0, \forall j \in I \text{ and } i \neq j \quad (34)$$

$$yy_{i0} = y_i - rd_{i0}, \quad \text{if } x_{i0'0} = 1; \quad \forall i \in I \quad (35)$$

کرد. از طرفی، با توجه به این که برای هر $i \in I_0$ داریم:

مشابه مدل M1، می توان شرایط فوق را به شکل محدودیت های عادی بازنویسی و محدودیت های زاید را حذف

$$\sum_{j \in I_0: j \neq i, f \in F_0} x_{ifj} \leq 1 \quad (36)$$

هر یک از دسته محدودیت های عادی مربوطه را می توانیم روی تمام مقادیر f تجمیع کنیم. مثلاً، دسته محدودیت های

$$\tau_j \geq \tau_i + t_{ifj} x_{ifj} - T_{max}(1 - x_{ifj}), \quad \forall f \in F_0, i \in I_0, \forall j \in I \text{ and } i \neq j \quad (37)$$

را می توانیم به صورت

$$\tau_j \geq \tau_i + \sum_{f \in F_0} t_{ifj} x_{ifj} - T_{max} \left(1 - \sum_{f \in F_0} x_{ifj} \right), \quad i \in I_0, \forall j \in I \text{ and } i \neq j \quad (38)$$

تجمیع و بازنویسی کنیم. با رعایت این ملاحظات و با در نظر گرفتن فرضیات و الزامات مسأله، مدل M2 به صورت زیر فرمول بندی می شود:

$$\text{M2: } \min \sum_{i, j \in I_0: i \neq j, f \in F_0} e d_{ifj} x_{ifj} \quad (39)$$

s. t.

$$\sum_{j \in I_0: j \neq i, f \in F_0} x_{ifj} = 1, \quad \forall i \in I \quad (40)$$

$$\sum_{i \in I_0: i \neq j, f \in F_0} x_{jfi} - \sum_{i \in I_0: i \neq j, f \in F_0} x_{ifj} = 0, \quad \forall j \in I_0 \quad (41)$$

$$\sum_{j \in I, f \in F_0} x_{0fj} \leq m \quad (42)$$

$$\sum_{j \in I, f \in F_0} x_{jf0} \leq m \quad (43)$$

$$\tau_j \geq \tau_i + \sum_{f \in F_0} t_{ifj} x_{ifj} - T_{max} \left(1 - \sum_{f \in F_0} x_{ifj} \right), \quad i \in I_0, \forall j \in I \text{ and } i \neq j \quad (44)$$

$$\tau_{i0} \geq \tau_i + \sum_{f \in F_0} t_{if0} x_{if0} - T_{max} \left(1 - \sum_{f \in F_0} x_{if0} \right), \quad \forall i \in I \quad (45)$$

$$\tau_0 = 0 \quad (46)$$

$$\tau_{i0} \leq T_{max}, \quad \forall i \in I \quad (47)$$

$$y_j \leq q - r \sum_{f \in F} d_{fj} x_{ifj} + q \left(1 - \sum_{f \in F} x_{ifj} \right), \quad i \in I_0, \forall j \in I \text{ and } i \neq j \quad (48)$$

$$y_{i0} \leq q - r \sum_{f \in F} d_{f0} x_{if0} + q \left(1 - \sum_{f \in F} x_{if0} \right), \quad \forall i \in I \quad (49)$$

$$y_j \leq y_i - rd_{ij}x_{i0'j} + q(1 - x_{i0'j}), \quad i \in I_0, \forall j \in I \text{ and } i \neq j \quad (50)$$

$$yy_{i0} \leq y_i - rd_{i0}x_{i0'0} + q(1 - x_{i0'0}), \quad \forall i \in I \quad (51)$$

$$\sum_{j \in I_0: j \neq i, f \in F} rd_{if}x_{ifj} \leq y_i, \quad \forall i \in I \quad (52)$$

$$\sum_{f \in F} rd_{0f}x_{0fj} \leq y_0, \quad \forall j \in I \quad (53)$$

$$y_0 = q/2 \quad (54)$$

$$x_{ifj} \in \{0,1\}, \quad \forall f \in F_0, \quad \forall i, j \in I_0 \text{ and } i \neq j \quad (55)$$

$$x_{i0'j} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in I_0 \text{ and } i \neq j \quad (56)$$

$$y_i, \tau_i \geq 0, \quad \forall i \in I_0 \quad (57)$$

$$yy_{i0}, \tau\tau_{i0} \geq 0, \quad \forall i \in I \quad (58)$$

می‌کند که سطح سوخت در انبار و هر رأس مشتری برای حرکت به سمت یک جایگاه سوخت، بایستی به اندازه کافی باشد. محدودیت‌های کنترل زمان (۴۴) و (۴۵) و نیز محدودیت‌های تنظیم سطح سوخت (۴۸) تا (۵۱) از تولید تور ناقص جلوگیری می‌کنند.

محدودیت (۵۴) سطح سوخت در زمان حرکت از انبار را برابر $q/2$ تعیین می‌کند. محدودیت‌های (۵۵) و (۵۶) دودویی بودن متغیرهای x_{ifj} و $x_{i0'j}$ را نشان می‌دهند، و محدودیت‌های (۵۷) و (۵۸) مبین نامنفی بودن متغیرهای y_i, τ_i, yy_{i0} و $\tau\tau_{i0}$ هستند.

۴-برش‌های معتبر

حل کارآمد مسائل MIP قویاً وابسته به اندازه و ساختار مدل است. کران‌های خوب ابزارهای بسیار مهمی برای حل کارآمد مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح هستند، به‌ویژه هنگامی این رو، برای تسریع فرایند حل، نامساوی‌های معتبر را براساس اطلاعات مسأله و ساختار مدل به‌دست می‌آوریم. نمادهای زیر برای تعریف نامعادلات معتبر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تابع هدف (۳۹) درصد کمینه کردن کل GHG منتشر شده به وسیله ناوگان در یک روز مشخص است. محدودیت‌های (۴۰) تضمین می‌کنند که هر مشتری دقیقاً یک رأس بعدی دارد که عبارت است از یک رأس مشتری، یک AFS، یا انبار. بقای جریان به وسیله محدودیت‌های (۴۱) تضمین می‌شود. محدودیت (۴۲) تضمین می‌کند که حداکثر m وسیله نقلیه حرکت خود را از انبار شروع می‌کنند و محدودیت (۴۳) ایجاب می‌کند که در یک روز معین حداکثر m مشتری به انبار بازمی‌گردند. زمان رسیدن به هر رأس مشتری یا انبار توسط هر وسیله نقلیه از طریق محدودیت‌های (۴۴) و (۴۵) پیگیری می‌شود. به‌علاوه، محدودیت‌های (۴۴) و (۴۵) به همراه محدودیت‌های (۴۷) تضمین می‌کنند که هر وسیله نقلیه تا لحظه زمانی T_{max} به انبار باز می‌گردد. محدودیت (۴۶) زمان عزیمت از انبار را مساوی صفر قرار می‌دهد. محدودیت‌های (۴۸) تا (۵۱) سطح سوخت و وسیله نقلیه هنگام رسیدن به یک رأس را محاسبه می‌کنند. محدودیت‌های (۵۲) و (۵۳) ایجاب که روش شاخه و کران به‌کار گرفته می‌شود. علاوه بر این، غالباً انواعی از نامساوی‌های معتبر برای تسهیل فرایند حل دقیق مسائل به‌کار گرفته می‌شوند (Jin, M., et al., 2007) و (Rojowski, R. & Pinto, J. M., 2004) را ببینید. از

	$D_1 = \{d_{ij}: i, j \in I_0 \& i \neq j\}$
	$D_2 = \{d_{ij}: (i \in I_0 \& j \in F) \text{ or } (i \in F \& j \in I_0)\}$
مجموعه D_1 به ترتیب غیرکاهشی	$\{a_k\}$
مجموعه D_2 به ترتیب غیرکاهشی	$\{b_k\}$
زمان سرویس AFS ها به ترتیب غیرکاهشی	$\{s_k\}$
سرعت متوسط وسایل نقلیه	v

فرض کنیم m_0 حداقل تعداد تور مورد نیاز (که مقداردهی مورد نیاز (که مقدار دهی اولیه به صفر می‌شود) باشد. مشاهده اولیه به ۱ می‌شود) و f_0 کمترین تعداد دفعات سوخت‌گیری می‌کنیم که اگر

$$\frac{1}{v} \sum_{k=1}^{|I|+m_0-f_0} a_k + \sum_{i \in I} p_i + \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{2f_0} b_k + \sum_{k=1}^{f_0} s_k > m_0 T_{max} \quad (*)$$

آنگاه، دست‌کم $m_0 + 1$ تور باید در نظر گرفته شود. همچنین اگر

$$r \sum_{k=1}^{|I|+m_0-f_0} a_k + r \sum_{k=1}^{2f_0} b_k > m_0 \frac{q}{2} + f_0 q \quad (**)$$

آنگاه، دست‌کم $f_0 + 1$ دفعه سوخت‌گیری مورد نیاز است. این فرایند با دادن یک مقدار ثابت به m_0 شروع شده، با محاسبه یک مقدار درست برای f_0 دنبال می‌شود و تا زمانی که کمترین تعداد تورها و کمترین تعداد دفعات سوخت‌گیری مورد

$$r \sum_{k=1}^{|I|+m_0-f_0} a_k + r \sum_{k=1}^{2f_0} b_k \leq m_0 \frac{q}{2} + f_0 q \quad (59)$$

و

$$\frac{1}{v} \sum_{k=1}^{|I|+m_0-f_0} a_k + \sum_{i \in I} p_i + \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{2f_0} b_k + \sum_{k=1}^{f_0} s_k \leq m_0 T_{max} \quad (60)$$

تورهای (وسایل نقلیه) مورد نیاز واقعی در بهینگی ممکن است بزرگتر از m_0 باشد، f_0 مربوطه را به ازای مقادیر $m_0 < k \leq m$ (تعداد تورها است) محاسبه کرده و سپس کمترین مقدار در بین آنها را به عنوان بهترین تخمین f_0 مورد

در شاخه اصلی سمت چپ این فلوچارت (نمودار گردشی) m_0 و f_0 مربوط به آن را در محتاطانه‌ترین حالت محاسبه می‌کنیم. سپس در شاخه اصلی سمت راست، در حالتی که m_0 تخمین زده شده کوچک‌تر از m است، به این دلیل که تعداد

زمان حل را کاهش دهد، همچنان که در جدول ۲ گزارش شده است.

استفاده قرار می‌دهیم. یک تخمین دقیق m_0 و f_0 به نامساوی-های معتبر زیر منجر می‌شود که می‌تواند فاصله LP-IP و نیز

نامعادله معتبر ۱ :

$$\sum_{j \in I, f \in F_0} x_{0fj} \geq m_0 \quad (VC1)$$

نامعادله معتبر ۲ :

$$\sum_{i, j \in I_0, f \in F} x_{ifj} \geq f_0 \quad (VC2)$$

مساوی با تعداد تورها ضرب در $\frac{q}{2}$ به اضافه تعداد دفعات سوخت‌گیری ضرب در q است. بنابراین، نامعادلات معتبر زیر نیز می‌توانند در روند حل مسأله مفید و مؤثر باشند:

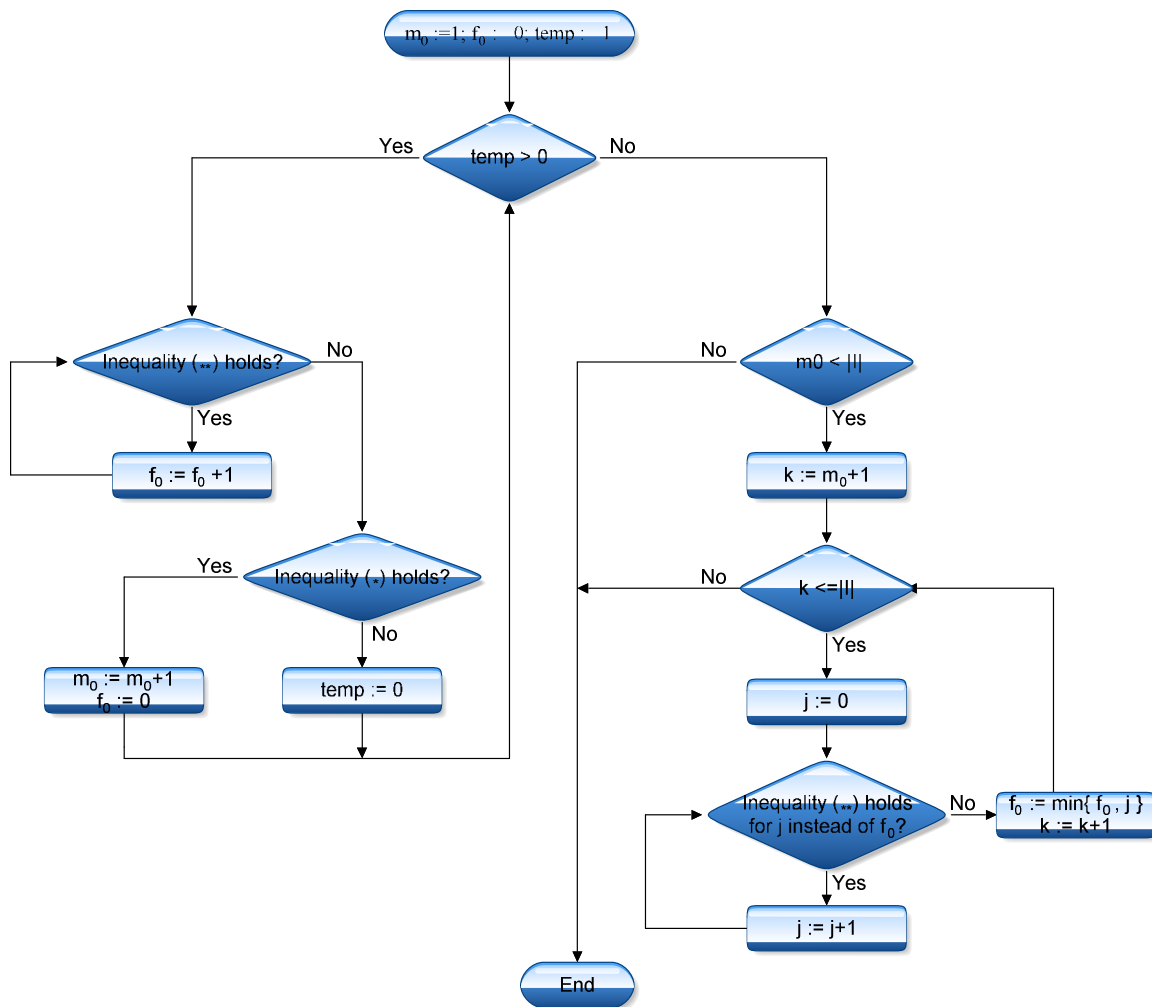
علاوه بر نامعادلات ۱ و ۲ محدودیت‌های دیگری نیز می‌توان معرفی کرد. مثلاً واضح است که کل زمان سفر وسایل نقلیه کمتر یا مساوی با تعداد تورها ضرب در T_{max} است. همچنین کل سوخت مصرف شده توسط وسایل نقلیه کمتر یا

نامعادله معتبر ۳ :

$$\sum_{i, j \in I_0: i \neq j, f \in F_0} t_{ifj} x_{ifj} \leq T_{max} \sum_{f \in F_0, j \in I} x_{0fj} \quad (VC3)$$

نامعادله معتبر ۴ :

$$\sum_{i, j \in I_0: i \neq j, f \in F_0} rd_{ifj} x_{ifj} \leq \frac{q}{2} \sum_{f \in F_0, j \in I} x_{0fj} + q \sum_{i, j \in I_0: i \neq j, f \in F} x_{ifj} \quad (VC4)$$



شکل ۱. نمودار گردش تعیین حداقل تعداد تورها و حداقل تعداد دفعات سوخت‌گیری

۵- الگوریتم تجزیه بندرز

است. در هر تکرار، با مقداره‌ی مناسب به متغیرهای صحیح، مسأله اولیه با فقط متغیرهای پیوسته یک "زیرمسأله" بندرز می‌شود که به سادگی قابل حل است. مسأله "اصلی" بندرز تنها شامل متغیرهای صحیح و یک متغیر کمکی خواهد بود. یک جواب بهینه مسأله اصلی بندرز یک کران پایین (کمینه‌سازی) فراهم می‌کند. با حل مجدد زیرمسأله، یک کران بالا به دست می‌آید. سپس یک برش بندرز ساخته شده و به مسأله اصلی بندرز اضافه می‌شود. تکرار الگوریتم به‌طور پیوسته انجام

هر چند با استفاده از برش‌های معتبر می‌توانیم روند حل مسأله را تسریع کنیم، ولی حل نمونه‌های واقعی مسأله در یک زمان مناسب کماکان غیرممکن است. برای برخورد با نمونه‌های واقعی مسأله می‌توانیم از راهکارهایی نظیر تجزیه بندرز استفاده کنیم. الگوریتم تجزیه بندرز که در سال ۱۹۶۲ به وسیله بندرز (Benders, J. F., 1962) معرفی شده است، یک روش تجزیه است که از آن برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته (MILP) پیچیده می‌توان استفاده کرد. این روش بر مبنای ایده افراز مسأله و تولید بعضی از محدودیت‌ها با تأخیر

می‌شود تا اختلاف بین کران پایین و کران بالا به قدر کافی کوچک شود.

بدون از دست رفتن کلیت، مسأله برنامه ریزی خطی صحیح زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{M3: } \min c^T u + d^T v \quad (61)$$

s.t.

$$Au + Bv \geq b \quad (62)$$

$$v \geq \mathbf{0} \quad (63)$$

$$u \in \{0,1\} \quad (64)$$

با ثابت گرفتن مقادیر متغیرهای دودویی u در مقادیر \bar{u} ($u = \bar{u}$) شکل عمومی زیرمسأله بندرز به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{M4: } \min d^T v \quad (65)$$

s.t.

$$Bv \geq b - A\bar{u} \quad (66)$$

$$v \geq \mathbf{0} \quad (67)$$

مسأله دوگان زیرمسأله بندرز را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{M5: } \max w^T (b - A\bar{u}) \quad (68)$$

s.t.

$$B^T w \leq d \quad (69)$$

$$w \geq \mathbf{0} \quad (70)$$

اگر W مجموعه چند وجهی تعریف شده به وسیله (69) و (70) باشد، یعنی:

$$W = \{w | B^T w \leq d, w \geq \mathbf{0}\} \quad (71)$$

آنگاه شکل عمومی مسأله اصلی بندرز به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{M6: } \min c^T u + z \quad (72)$$

s.t.

$$w^T (b - Au) \leq z, \quad \forall w \in P \subseteq W \quad (73)$$

$$w^T (b - Au) \leq \mathbf{0}, \quad \forall w \in R \subseteq W \quad (74)$$

Ierapetritou, M. G., 2009b; Saharidis, G. K. D., et al., 2011; Saharidis, G. K. D., et al., 2010) کوردئو و همکاران (Cordeau, J. F., et al., 2006; Cordeau, J. F., et al., 2000) و آندره آس و همکاران (Andreas, A. K. & Smith, J. C., 2009) را ببینید). این رویکردها سه محور عمده دارند که عبارتند از :

- تقویت برش‌های بندرز کلاسیک
 - تولید همزمان چندین برش
 - افزودن نامساوی‌های معتبر به مسأله اصلی
- بندرز

۶- بهبود الگوریتم با برش‌های ترکیبیاتی

همان‌طور که گفتیم، مهم‌ترین دلیل همگرایی کند روش تجزیه بندرز کم بودن تعداد برش‌های بهینگی در مقایسه با برش‌های شدنی می‌باشد. روش بندرز ترکیبیاتی شکل اصلاح شده‌ای از روش بندرز کلاسیک است که ما را از حل دوگان زیرمسأله بی‌نیاز می‌کند و ممکن است با بازرسی جواب تولید شده بتوان در مورد حذف آن تصمیم گرفت. در مسأله مورد مطالعه، اگر در تکراری جواب حاصل از حل مسأله اصلی بندرز منجر به یک جواب شدنی برای زیرمسأله نشود، به وسیله برش ترکیبیاتی (۸۶) از فضای شدنی حذف می‌شود. با توجه به این‌که متغیرهای زیرمسأله در تابع هدف مشارکت ندارند اولین جواب شدنی برای زیرمسأله، جواب بهین برای مسأله اصلی خواهد بود.

فرض کنیم M7 یک مسأله برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته (MIP) با ساختار زیر باشد :

M7:

$$Au + Bv \geq b \quad (۷۶)$$

$$v \geq 0 \quad (۷۸)$$

$$u \in \{0,1\} \quad (۷۹)$$

که در آن، P و R به ترتیب مجموعه‌های نقاط رأسی و شعاع‌های رأسی W هستند، و Z یک متغیر کمکی است. برای حل مدل M2 با روش تجزیه بندرز، متغیرهای x_{ifj} در حکم متغیرهای دودویی u و متغیرهای زمان τ_i و τ_{i0} و متغیرهای سطح سوخت y_i و y_{i0} در حکم متغیرهای پیوسته v هستند. همچنین، در این مدل داریم $d = 0$ ؛ یعنی تابع هدف فقط بر حسب متغیرهای دودویی x_{ifj} است و به متغیرهای پیوسته τ_i ، τ_{i0} ، y_i و y_{i0} بستگی ندارد. بنابراین، عملاً اگر در یک تکرار به ازای x^* ، جواب بهینه مسأله اصلی M6، زیرمسأله M4 دارای یک جواب شدنی y^0 باشد آنگاه (x^*, y^0) یک جواب بهینه مسأله خواهد بود. هر چند الگوریتم تجزیه بندرز در بسیاری از موارد به‌خوبی کار می‌کند، ولی در مجموع همگرایی کندی دارد که به دلایل زیر می‌باشد: (۱) کیفیت برش‌های تولیدی (۲) نامناسب بودن کیفیت کران‌های تولیدی (۳) افزایش بیش از حد برش‌های شدنی در مقایسه با برش‌های بهینگی. برای سرعت بخشیدن به الگوریتم تجزیه بندرز رویکردهای مختلفی پیشنهاد شده است (برای نمونه، مک دانیل و همکاران (McDaniel, D. & Devine, M., 1977) مگنانتی و همکاران (Magnanti, T. & Wong, R., 1981) ون روی (Van Roy, T. J., 1983) کوته و همکاران (Cote, G. & Laughton, M., 1984)، زاکری و همکاران (Zakeri, G., et al., 1998)، ری و همکاران (Rei, W., et al., 2006)، ساهاریدیس و همکاران (Saharidis, G. K. D. & Ierapetritou, M. G., 2009a; Saharidis, G. K. D. & Ierapetritou, M. G., 2013; Saharidis, G. K. D. & Ierapetritou, M. G., 2009b; Saharidis, G. K. D., et al., 2011; Saharidis, G. K. D., et al., 2010)

$$\min c^T u + d^T v \quad (۷۵)$$

s.t.

$$Du \leq e \quad (۷۷)$$

بستگی ندارد. در این حالت، می‌توانیم مسأله M7 را به صورت زیر به دو بخش افراز کنیم:

$$\text{M8: } \min c^T u \quad (80)$$

s.t.

$$Du \leq e \quad (81)$$

$$u \in \{0,1\} \quad (82)$$

• مسأله اصلی بندرز:

$$\text{M9: } \min 0^T v \quad (83)$$

$$\text{s.t. } Bv \geq b - A\bar{u} \quad (84)$$

$$v \geq 0 \quad (85)$$

• زیرمسأله بندرز:

این که $d = 0$ ، (u^*, v^*) به وضوح یک جواب بهین M7 خواهد بود. در غیر این صورت آن را با نامعادله خطی زیر در فضای u که برش بندرز ترکیبیاتی (CB) نامیده می‌شود، حذف می‌کنیم.

$$\sum_{i \in I: u_i^* = 0} u_i + \sum_{i \in I: u_i^* = 1} (1 - u_i) \geq 1 \quad (86)$$

فرض کنیم مسأله اصلی M8 را حل کنیم. اگر معلوم شود که این مسأله نشدنی است آنگاه مسأله M7 نیز چنین خواهد بود. در غیر این صورت، فرض کنیم u^* جواب بهین باشد. اگر زیرمسأله M9 دارای جواب بهین v^* باشد، آنگاه با توجه به

فرض کنیم $C \subseteq I$ ، زیر مجموعه‌ای از عوامل مؤثر در تغییر جواب باشد. آنگاه به برش قوی‌تر (87) دست می‌یابیم:

$$\sum_{i \in C: u_i^* = 0} u_i + \sum_{i \in C: u_i^* = 1} (1 - u_i) \geq 1 \quad (87)$$

۷- زیرسیستم نشدنی کمین

باشد. فرض کنیم عنصر غیرصفر سطر i ام A واقع در ستون j باشد. با این فرض، محدودیت‌های زیرمسأله M9 به صورت:

$$B^{(i)}v \geq b_i - a_{i,j} u_{i,j}^*, \quad i \in I \quad (88)$$

$u_{i,j}$ تغییر کند. بدین منظور، بنا بر آنچه در بخش قبلی گفتیم، برش ترکیبیاتی زیر باید به مسأله اصلی M8 افزوده شود:

فرض کنیم در مسأله M7 معرفی شده در بخش قبلی ماتریس A دارای دقیقاً یک درایه غیرصفر در هر سطر خود

خواهند بود. اگر زیرمسأله M9 نشدنی باشد، آنگاه دست‌کم یکی از نامعادلات (88) برقرار نیستند. بنابراین، برای رد کردن جواب نشدنی جاری باید مقدار دست‌کم یکی از متغیرهای

$$\sum_{i \in I: u_{i,j}^* = 0} u_{i,j} + \sum_{i \in I: u_{i,j}^* = 1} (1 - u_{i,j}) \geq 1 \quad (89)$$

وقتی زیرمسئله نشدنی است، می توان یک زیرمجموعه حتی الامکان کوچک از سیستم نامعادلات (88) را که با هم سازگار نیستند تعیین کرد و برش بندرز ترکیباتی را متناسب با آن نوشت. درعمل، یک زیرسیستم نشدنی کمین (MIS)⁹ از محدودیت های زیرمسئله M9 را جستجو می کنیم که شامل

$$\sum_{i \in C: u_{i,j}^* = 0} u_{i,j} + \sum_{i \in C: u_{i,j}^* = 1} (1 - u_{i,j}) \geq 1 \quad (90)$$

از طرفی، اگر محدودیت های ارتباط دهنده متغیرهای دودویی و متغیرهای پیوسته به شکل کلی

$$B^{(i)}v \geq b_i - M(1 - u_{i,j}), \quad i \in I \quad (91)$$

باشند که در آن، M یک عدد مثبت به اندازه کافی بزرگ است، در عمل برش قوی تر زیر در نظر گرفته می شود:

$$\sum_{i \in C: u_{i,j}^* = 1} (1 - u_{i,j}) \geq 1 \quad (92)$$

بیان شود: یک سیستم نشدنی از نامعادلات خطی، مثلاً سیستم $\tilde{B}v \geq \tilde{b}$ داده شده است؛ یک زیرمجموعه کمین (مینیمال) از سطرهای آن را پیدا کنید که نشدنی باشد.

در این بخش یک الگوریتم مؤثر برای یافتن یک MIS یک سیستم خطی نشدنی را شرح می دهیم (Parker, M. & Ryan, J., 1996). جستجوی MIS می تواند به صورت زیر

مسئله برنامه ریزی خطی

$$\text{M10:} \quad \min \quad \mathbf{0}^T v \quad (93)$$

$$\text{s.t.} \quad \tilde{B}v \geq \tilde{b} \quad (94)$$

و دوگان آن

$$\text{M11:} \quad \max \quad w^T \tilde{b} \quad (95)$$

$$\text{s.t.} \quad w^T \tilde{B} = \mathbf{0}^T \quad (96)$$

$$w \geq 0 \quad (97)$$

وجود یک جواب دوگان w^* به طوری که $w^{*T} \tilde{b} > 0$ (در نتیجه kw^* ، به ازای یک مقدار مثبت به اندازه کافی بزرگ k ، یک جواب شدنی برای دوگان با مقدار هدف به اندازه دلخواه بزرگ است). بنابراین، می توانیم تابع هدف مسئله دوگان M11 را با محدودیت زیر جایگزین کنیم:

را در نظر می گیریم. می دانیم اگر مسئله اولیه نشدنی باشد، آنگاه مسئله دوگان متناظر آن می تواند نامحدود یا نشدنی باشد. در اینجا مسئله دوگان M11 شدنی است ($w = 0$) یک جواب شدنی برای دوگان M11 است، لذا نشدنی بودن مسئله اولیه M10 متناظر است با نامحدود بودن مسئله دوگان M11، یعنی

$$w^T \bar{b} = 1 \quad (98)$$

کافی است بردار متغیرهای دودویی δ با مؤلفه‌های $i \in I, \delta_i$ را معرفی کرده و با جایگزینی محدودیت‌های $\bar{B}v \geq \bar{b}$ با محدودیت‌های $\bar{B}v - M\delta \geq \bar{b}$ ، تابع هدف دوگان $\sum_i \delta_i$ را کمینه کنیم (M یک عدد ثابت مثبت به اندازه کافی بزرگ و I ماتریس همانی است).

۸- حل مدل M2 به روش بندرز ترکیبیاتی

برای حل مدل M2 با روش تجزیه بندرز ترکیبیاتی، متغیرهای x_{ifj} در حکم متغیرهای دودویی u و متغیرهای زمان τ_i و τ_{i0} و متغیرهای سطح سوخت γ_i و γ_{i0} در حکم متغیرهای پیوسته v هستند. در این مدل، C برداری با مؤلفه‌های ed_{ifj} است و $d = 0$. محدودیت‌های (۴۴) و (۴۵) و محدودیت‌های (۴۸) تا (۵۲) در حکم محدودیت‌های ارتباط دهنده (۷۶) و محدودیت‌های (۴۰) تا (۴۳) و (۵۳) در حکم محدودیت‌های (۷۷) هستند. برای حل این مسأله با روش بندرز ترکیبیاتی می‌توانیم برش‌های معتبر $VC1$ تا $VC4$ را از همان ابتدا به مسأله اصلی M8 اضافه کنیم. فرض کنیم در یک تکرار، جواب بهینه مسأله اصلی M8 بردار x^* باشد و این صورت برش ترکیبیاتی (۹۰) به صورت رابطه (۹۹) می‌باشد:

$$\sum_{(i,f,j) \in I: x_{ifj}^* = 0} x_{ifj} + \sum_{(i,f,j) \in I: x_{ifj}^* = 1} (1 - x_{ifj}) \geq 1 \quad (99)$$

یا به شکل قوی‌تر

$$\sum_{(i,f,j) \in C: x_{ifj}^* = 0} x_{ifj} + \sum_{(i,f,j) \in C: x_{ifj}^* = 1} (1 - x_{ifj}) \geq 1 \quad (100)$$

قبلی اشاره کردیم، به جای این برش می‌توان از برش قوی‌تر زیر استفاده کرد:

$$\sum_{(i,f,j) \in C: x_{ifj}^* = 1} (1 - x_{ifj}) \geq 1 \quad (101)$$

این مسأله دوگان تعدیل شده درصدد یافتن یک ترکیب خطی از سطرهای $\bar{B}v \geq \bar{b}$ است که به یک نامساوی معتبر $w^{*T} \bar{B}v \geq w^{*T} \bar{b}$ ، با همه ضرایب سمت چپ مساوی صفر و سمت راست اکیداً مثبت، منجر می‌شود که نتجتاً نشدنی بودن $\bar{B}v \geq \bar{b}$ را اثبات می‌کند. وجود w^* برای سیستم‌های نشدنی، بنا بر لم فارکاس^۱، تضمین شده است.

می‌دانیم که هر رأس چند وجهی دوگان تعریف شده به‌وسیله (۹۶)، (۹۷) و (۹۸) یک MIS را مشخص می‌کند (Gleesonand, J. & Ryan, J., 1990). در عمل، در جستجوی یک جواب w^* هستیم که یک محمل^{۱۱} کوچک در مجموعه محدودیت‌های ارتباط‌دهنده (۷۶) داشته باشد. این مطلب استفاده از تابع هدف ابتکاری $\sum_i \omega_i w_i$ و کمینه‌کردن آن را پیشنهاد می‌کند. با انتخاب مناسب وزن‌های ω_i می‌توانیم MIS‌های مختلفی را پیدا کرده و از آنها برای تولید چندین برش ترکیبیاتی همزمان در هر بار فراخوانی الگوریتم استفاده کنیم. رویکرد دیگری که معمولاً می‌تواند منجر به تقویت برش‌های بندرز ترکیبیاتی شود این است که به جای کمینه‌کردن ترکیب خطی $\sum_i \omega_i w_i$ ، تعداد w_i ‌های مثبت (مساوی ۱) را کمینه کنیم. بدین ترتیب یک مجموعه کمین (مینمال) با کمترین تعداد از محدودیت‌های نشدنی (ناسازگار) از سیستم خطی $\bar{B}v \geq \bar{b}$ مشخص می‌شود. برای این منظور،

خواهد بود که در آن، مجموعه اندیس C متناظر با یک MIS محدودیت‌های زیرمسأله M9 است. همان‌طور که در بخش

۱ و در غیر این صورت دارای مقدار ۰ باشد. به علاوه فرض کنیم $i, j \in I_0: i \neq j, P_2(st, i, j)$ یک پارامتر دودویی باشد؛ به طوری که اگر به ازای یک $f \in F_0$ داشته باشیم $x_{ifj}^* = 1$ و (i, f, j) واقع بر زیرتور شماره st باشد، دارای مقدار ۱ و در غیر این صورت ۰ باشد. با این فرضیات و نماد گذاری ها، برخی از برش های معتبر اختصاصی که می توانند در حل مسأله مورد استفاده قرار بگیرند عبارتند از:

• **برش های عدم تکرار زیرتور**

اگر در یک تکرار یک زیرتور تولید شده باشد، آنگاه آن زیرتور و معکوسش (در جهت پیمایش عکس) در تکرارهای بعدی تولید نشوند. برش های مورد نیاز عبارتند از:

$$\sum_{i,j \in I_0: P_2(st,i,j)=1} \left(1 - \sum_{f \in F_0} x_{ifj} \right) \geq 1 \quad (102)$$

$$\sum_{i,j \in I_0: P_2(st,i,j)=1} \left(1 - \sum_{f \in F_0} x_{jfi} \right) \geq 1 \quad (103)$$

بعدی تولید نشوند. برش های مورد نیاز عبارتند از:

$$\sum_{i,j \in I_0, f \in F_0: P_1(st,i,f,j)=1} (1 - x_{ifj}) \geq 1 \quad (104)$$

$$\sum_{i,j \in I_0, f \in F_0: P_1(st,i,f,j)=1} (1 - x_{jfi}) \geq 1 \quad (105)$$

$$\sum_{i,j \in I_0, f \in F} P_1(st, i, f, j) = 0$$

علاوه بر برش های معتبر عمومی (VC1) تا (VC4) و نیز برش های MIS، می توانیم از برش های معتبر دیگری که مختص روش بندرز ترکیببانی برای حل مدل M2 هستند نیز استفاده کنیم. این برش ها به فراخور نیاز هر زمان که لازم باشد به مسأله افزوده می شوند. فرض کنیم در یک تکرار، جواب بهینه مسأله اصلی M8 بردار x^* باشد. به علاوه، فرض کنیم که جواب بهینه x^* شامل تعداد m' تور کامل $m_0 \leq m' \leq m$ (با نماد $t = 1, 2, \dots, m', x_t^*$ و تعداد m'' زیرتور m'' می تواند صفر باشد) با نماد $st = 1, 2, \dots, m', x_{st}^*$ باشد. همچنین فرض کنیم $i, j \in I_0: i \neq j, P_1(t, i, f, j)$ یک پارامتر دودویی باشد؛ به طوری که اگر $f, j \in F_0$ ، $x_{ifj}^* = 1$ و (i, f, j) واقع بر تور شماره t باشد، دارای مقدار

• **برش های رعایت حداکثر زمان T_{max}**

اگر در یک تکرار یک تور با زمان پیمایش بزرگ تر از T_{max} تولید شده باشد، آنگاه آن تور و تور معکوس آن در تکرارهای

به علاوه، اگر در خلال تور t هیچ سوخت گیری انجام نشده باشد، یعنی:

آنگاه به جای برش های (104) و (105) می توان برش های قوی تر زیر را به کار برد:

$$\sum_{i,j \in I_0, f \in F_0: P_1(st, i, 0', j) = 1} \left(1 - \sum_{f \in F_0} x_{ifj} \right) \geq 1 \quad (1.6)$$

$$\sum_{i,j \in I_0, f \in F_0: P_1(st, i, 0', j) = 1} \left(1 - \sum_{f \in F_0} x_{jfi} \right) \geq 1 \quad (1.7)$$

دقیق نمونه‌های بزرگ و واقعی این مسأله مشکل خواهد بود. برای مقایسه عملکرد و کارایی مدل M1 و مدل M2 آزمایش‌هایی عددی انجام داده‌ایم که نتایج آن در جدول ۱ خلاصه شده است. در جدول ۲، میانگین صرفه‌جویی زمانی حاصل از افزودن برش‌های معتبر عمومی مختلف به مدل M2 را مشاهده می‌کنیم. همچنین در جدول ۳، روش حل مستقیم و روش تجزیه بندرز ترکیبیاتی با برش‌های MIS و نیز همراه با سایر برش‌های معتبر اختصاصی، برای حل مدل M2، از نظر تعداد تکرار و زمان حل مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. در همه آزمایش‌ها، فرض بر این است که از وسایل نقلیه تک‌سوخته با سوخت جایگزین گاز طبیعی فشرده (CNG) استفاده می‌شود. فرض می‌کنیم که ظرفیت کامل باک همه وسایل نقلیه ۹۰ لیتر (معادل ۲۲/۸ متر مکعب، یا ۱۶/۷ کیلوگرم) است. همچنین بر مبنای مقادیر میانگین برای وسایل نقلیه با سوخت جایگزین CNG، نرخ مصرف سوخت و نرخ انتشار GHG به ترتیب ۰/۳ لیتر بر کیلومتر و ۰/۱۵ گرم بر کیلومتر در نظر گرفته شده است. سرعت متوسط وسایل نقلیه ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت در نظر گرفته شده و حداکثر زمان طول همه تورها به ۸ ساعت محدود شده است. زمان‌های سرویس مشتری‌ها و جایگاه‌های سوخت را به ترتیب ۳۰ و ۱۵ دقیقه در نظر می‌گیریم. جواب‌های دقیق به وسیله پیاده‌سازی مدل با استفاده از نرم افزار "ایمز" (AIMMS) (Bisschop, J., 2012)، نسخه ۳/۱۳، با بهینه‌یاب CPLEX، نسخه ۱۲/۵، به دست آمده‌اند. آزمایش‌ها روی یک لپ تاپ ۶۴ بیتی با CPU ۵ هسته‌ای 2450M با سرعت پردازش ۲/۵۰ گیگا هرتز و ۴/۰۰ گیگا بایت RAM اجرا شده است.

• برش‌های مراقبت در خالی نماندن باک سوخت

- اگر در یک تکرار در یک تور تولید شده، سوخت مصرفی تا زمان رسیدن به اولین جایگاه سوخت‌گیری، یا سوخت مصرفی تا زمان رسیدن به انبار در صورتی که اصلاً سوخت‌گیری انجام نشود، از نصف ظرفیت باک ($\frac{q}{2}$) بیشتر باشد، آنگاه این قسمت از جواب در تکرارهای بعدی ایجاد نشود.
- اگر در یک تکرار در یک تور تولید شده، سوخت مصرفی پس از آخرین سوخت‌گیری تا زمان رسیدن به انبار، یا سوخت مصرفی از ابتدای حرکت تا زمان رسیدن به انبار در صورتی که اصلاً سوخت‌گیری انجام نشود، از نصف ظرفیت باک ($\frac{q}{2}$) بیشتر باشد، آنگاه معکوس این قسمت از جواب در تکرارهای بعدی ایجاد نشود.
- اگر در یک تکرار در یک تور تولید شده، سوخت مصرفی پس از حرکت از یک جایگاه سوخت‌گیری تا زمان رسیدن به جایگاه سوخت‌گیری بعدی یا انبار از ظرفیت باک (q) بیشتر باشد، آنگاه این قسمت از جواب (و معکوس آن) در تکرارهای بعدی ایجاد نشود.

۹- نتایج محاسباتی

مسأله VRP که حالت خاصی از مسأله GVRP است به عنوان یک مسأله NP-سخت شناخته می‌شود، بنابراین GVRP نیز NP-سخت است. بنابراین، به دست آوردن جواب

حاصل از اطلاعات این جدول، وقتی از روش بندرز ترکیبای با برش MIS به جای روش بندرز کلاسیک استفاده کرده‌ایم تعداد تکرارها و زمان حل به ترتیب ۲۲٪ و ۷۹٪ کاهش یافته‌اند، و وقتی علاوه بر برش MIS از سایر برش‌ها نیز استفاده کرده‌ایم به ترتیب ۵۵٪ و ۸۸٪ کاهش در تعداد تکرارها و زمان حل حاصل شده است. این یافته‌ها، حداقل برای این نمونه مسائل کوچک، مبین برتری روش بندرز ترکیبای بر روش بندرز کلاسیک است؛ به شرطی که از برش‌های MIS و سایر برش‌های معتبر دیگر استفاده شود.

۱۰- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل جدید برای GVRP معرفی شده است که برای مسائل آزمایش شده، هم از جهت فاصله LP-IP و هم از نظر زمان حل، بر مدل قبلی برتری دارد. برای حل مسائل بزرگتر با روش‌های تجزیه، می‌توانیم از برش‌های معتبری نظیر برش‌های معرفی شده در این متن استفاده کنیم. افزودن چنین برش‌هایی می‌تواند به کاهش قابل ملاحظه‌ای در زمان حل منجر شود. در این مقاله، برای نمونه مسائل آزمایش شده، برتری روش تجزیه بندرز ترکیبای (با برش‌های MIS و سایر برش‌ها) بر روش بندرز کلاسیک تأیید شده است. برای اثبات ادعای برتری مدل M2 بر مدل M1 و نیز اثبات کارایی روش بندرز ترکیبای برای حل مسأله، نیاز است که آزمایش‌های مربوطه برای نمونه‌هایی بزرگ و واقعی از مسأله، انجام شود. در این راستا، یکی از کارهایی که می‌توان انجام داد این است که سعی کنیم برش‌های موجود را تقویت کرده یا از برش‌های قوی‌تر دیگر استفاده کنیم. همچنین، ترکیب این روش با یک الگوریتم ابتکاری مناسب می‌تواند در این زمینه کارساز و مفید باشد.

در آزمایش‌های انجام شده، مشتری‌ها و جایگاه‌های سوخت را در یک ناحیه مربعی به مرکز انبار در نظر گرفته و ده رده از مسائل GVRP، که با C2, C1, ... و C10 نشان داده شده‌اند، را حل کرده‌ایم. مشخصات هر یک از این رده‌ها شامل C (تعداد مشتری‌ها)، F (تعداد جایگاه‌های سوخت) و V (تعداد وسایل نقلیه)، در جدول ۱ گزارش شده است. هر یک از این رده‌ها شامل ۶ نمونه به‌طور تصادفی تولید شده است. همچنین در جدول ۱ مدل‌های M1 و M2 مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. در این جدول تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری و محدودیت‌ها، زمان‌های حل، کران‌های پایین "برنامه‌ریزی خطی آزاد"^۱ (Z_{LP})، مقادیر بهینه هدف (Z_{IP})، و فاصله بین Z_{LP} و Z_{IP} ^۲ برای دو مدل، به‌طور میانگین، گزارش شده است. به‌علاوه، ستون آخر این جدول میانگین درصد کاهش زمان حل را وقتی از مدل M2 به جای مدل M1 استفاده می‌شود نشان می‌دهد. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که مقدار فاصله در مدل M2 حدود ۲/۳ درصد کمتر از مدل M1 است. این خاصیت، وقتی که روش شاخه و کران برای حل مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌تواند سودمند باشد. علاوه بر این، به‌عنوان نتیجه‌ای از داشتن مقادیر بهتر برای Z_{LP} و کوچک‌تر بودن اندازه مدل، زمان حل مدل M2 کمتر بوده و در مقایسه با مدل M1 به‌طور میانگین حدود ۱/۷۲ درصد صرفه جویی دارد. اثر استفاده از برش‌های معتبر در جدول ۲ نشان داده شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که استفاده از برش (VC1) حدود ۲۸ درصد، برش‌های (VC1) و (VC2) حدود ۴۲ درصد، برش‌های (VC1)، (VC2) و (VC3) حدود ۴۴ درصد و برش‌های (VC1)، (VC2)، (VC3) و (VC4) حدود ۶۰ درصد صرفه جویی در زمان حل ایجاد می‌کند.

همچنین در جدول ۳، روش تجزیه بندرز ترکیبای با برش‌های MIS و نیز همراه با سایر برش‌های معتبر اختصاصی، برای حل مدل M2 و رده مسائل C1 تا C5، از نظر تعداد تکرار و زمان حل مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. بنا بر نتایج

جدول ۱. مقایسه کارایی مدل M1 و مدل M2

رده مسأله	C×F×V	Z _{IP}	مدل M1					مدل M2					صرفه جویی زمانی
			متغیر	محدودیت	زمان	Z _{LP}	شکاف LP-IP	متغیر	محدودیت	زمان	Z _{LP}	شکاف LP-IP	
C1	۷×۲×۲	۱۰۳/۴۸	۱۱۸	۴۲۱	۰/۴۸	۶۱/۶۱	۴۰/۰/۵	۱۱۷	۳۸۳	۰/۵۹	۶۴/۴۱	۳۷/۰/۸	-۲۲/۰/۹
C2	۸×۲×۲	۱۱۰/۳۴	۱۴۸	۵۵۸	۲/۶۶	۵۵/۲۹	۴۹/۰/۹	۱۴۲	۴۸۵	۲/۳۵	۵۹/۲۲	۴۶/۰/۳	۱۱/۰/۷
C3	۹×۲×۲	۱۲۰/۹۴	۱۹۰	۷۴۶	۶/۸۰	۶۳/۵۰	۴۷/۰/۵	۱۷۷	۶۰۰	۵/۲۵	۶۸/۶۳	۴۳/۰/۳	۲۲/۰/۸
C4	۱۰×۲×۲	۱۱۵/۹۹	۲۱۷	۸۸۴	۱۸/۸۰	۶۷/۲۹	۴۱/۰/۹	۲۱۸	۷۴۸	۱۷/۱۵	۶۷/۹۳	۴۱/۰/۴	۸/۰/۸
C5	۱۱×۲×۲	۱۱۵/۸۶	۲۴۸	۹۱۰	۲۷/۶۴	۶۰/۴۹	۴۷/۰/۸	۲۹۲	۸۶۴	۲۷/۱۷	۶۰/۸۵	۴۷/۰/۵	۱/۰/۷
C6	۱۲×۲×۳	۱۳۱/۸۱	۲۹۱	۱۱۸۲	۲۱۱	۶۵/۵۵	۵۰/۰/۳	۲۹۸	۱۰۱۳	۲۷۸	۶۷/۱۳	۴۹/۰/۱	-۳۱/۰/۸
C7	۱۳×۲×۳	۱۳۸/۶۲	۲۹۱	۱۰۹۳	۶۴۴	۷۹/۸۴	۴۲/۰/۴	۳۳۹	۱۱۷۳	۵۲۹	۸۶/۷۲	۳۷/۰/۴	۱۷/۰/۹
C8	۱۴×۲×۳	۱۸۷/۴۹	۳۴۸	۱۵۱۹	۲۰۱۸	۸۹/۰/۹	۵۲/۰/۵	۳۴۵	۱۳۴۶	۴۲۱	۹۰/۹۵	۵۱/۰/۵	۷۹/۰/۱
C9	۱۵×۳×۳	۱۸۹/۰/۷	۳۶۶	۱۸۴۱	۵۴۱۶	۹۴/۲۲	۵۰/۰/۲	۳۶۲	۱۵۳۰	۲۴۳۶	۹۹/۲۱	۴۷/۰/۵	۵۵/۰/۰
C10	۱۶×۳×۴	۱۹۳/۶۶	۴۰۸	۲۰۱۲	۱۰۸۸۰	۱۰۰/۴۵	۴۸/۰/۱	۴۲۹	۱۷۳۰	۱۶۴۳	۱۰۳/۴۳	۴۶/۰/۶	۱۸/۰/۳
میانگین	-	۱۴۰/۷۳	۲۶۲	۱۱۱۷	۱۹۲۲	۷۳/۷۳	۴۷/۰/۱	۲۷۲	۹۸۷	۵۳۶	۷۶/۸۵	۴۴/۰/۸	۷۲/۰/۱

جدول ۲. مقایسه صرفه جویی زمانی تحت برش های معتبر مختلف

رده مسأله	بدون برش	با برش ۱		با برش های ۱ و ۲		با برش های ۱، ۲، ۳		با برش های ۱، ۲، ۳، ۴	
		زمان	صرفه جویی	زمان	صرفه جویی	زمان	صرفه جویی	زمان	صرفه جویی
C1	۰/۴۷	۰/۳۱	٪۳۴	۰/۲۷	٪۴۳	۰/۰۹	٪۸۰	۰/۰۸	٪۸۳
C2	۲/۳۵	۰/۹۰	٪۶۲	۰/۷۵	٪۶۸	۰/۴۸	٪۸۰	۰/۳۰	٪۸۷
C3	۵/۲۵	۱/۰۳	٪۸۰	۰/۹۹	٪۸۱	۰/۵۴	٪۹۰	۰/۵۶	٪۸۹
C4	۱۷/۱۵	۵/۳۴	٪۶۹	۴/۷۴	٪۷۲	۳/۳۳	٪۸۱	۲/۲۷	٪۸۷
C5	۲۷/۱۷	۱۵/۷۵	٪۴۲	۹/۳۲	٪۶۶	۶/۶۴	٪۷۶	۳/۹۸	٪۸۵
C6	۲۷۸	۱۲۵	٪۵۵	۸۳	٪۷۰	۴۹	٪۸۲	۶۳	٪۷۷
C7	۵۲۹	۳۰۷	٪۴۲	۱۵۲	٪۷۱	۱۸۱	٪۶۶	۸۴	٪۸۴
C8	۴۲۱	۴۳۹	-٪۴	۳۲۱	٪۲۴	۴۷۴	٪۱۳	۲۷۱	٪۳۶
C9	۲۴۳۵	۱۶۳۲	٪۳۳	۱۱۹۳	٪۵۱	۱۰۱۱	٪۵۸	۹۳۰	٪۶۲
C10	۱۶۴۲	۱۳۲۳	٪۱۹	۱۳۳۸	٪۱۹	۱۲۵۱	٪۱۲	۷۷۶	٪۵۳
میانگین	۵۳۶	۱۳۸۵	٪۲۸	۳۱۰	٪۴۲	۲۹۸	٪۴۴	۲۱۳	٪۶۰

جدول ۳. مقایسه روش‌های حل از نظر تعداد تکرار و زمان حل

رده مسأله	بندرز کلاسیک		بندرز ترکیبیاتی با برش MIS		بندرز ترکیبیاتی با برش MIS و سایر برش‌ها	
	تکرار	زمان	تکرار	زمان	تکرار	زمان
C1	۷۹	۲۶/۳۳	۴۰	۱۰/۸۳	۱۹	۶/۱۲
C2	۴۱۳	۱۱۹۴	۳۰۶	۹۰۲	۱۳۳	۲۴۶
C3	۵۴۷	۸۶۵۲	۵۶۴	۱۸۴۷	۱۹۱	۷۴۰
C4	۷۹۵	۱۱۴۲۲	۵۶۰	۲۱۸۴	۵۳۷	۱۴۵۶
C5	۶۷۹	۴۹۰۰	۴۹۲	۴۷۲	۲۴۹	۶۵۹
میانگین	۵۰۳	۵۲۳۹	۳۹۲	۱۰۸۳	۲۲۶	۶۲۱

۱۱- پی‌نوشت‌ها

8. Combinatorial Benders
9. Minimal Infeasible Subsystem
10. Farkas Lemma
11. Support
12. LP-Relaxation
13. LP-IP Gap

1. Alternative Fuel Vehicles
2. Driving Range
3. Alternative Fuel Stations
4. Green Vehicle Routing Problems
5. Pollution Routing Problems
6. Fuel Consumption Rate
7. Fuel Consumption VRP

۱۱-مراجع

-Bisschop, J., (2012), "AIMMS-optimization Modeling". Harlem: Paragon Decision Technology., s.l.: s.n.

-Canhong Lin, et al., (2014), "Survey of Green Vehicle Routing Problem: Past and future trends". Expert Systems with Applications, Volume 41, pp. 1118-1138.

-Andreas, A. K. & Smith, J. C., (2009), "Decomposition algorithms for the design of a nonsimultaneous capacitated evacuation tree network. Networks", Volume 53(2), pp. 91-103.

-Benders, J. F., (1962), "Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. Numerische Mathematik", Volume 4(1), pp. 238-252.

- McDaniel, D. & Devine, M., (1977), "A modified Benders partitioning algorithm for mixed integer programming". *Management Science*, Volume 24, pp. 312-319.
- Parker, M. & Ryan, J., (1996), "Finding the Minimum Weight IIS Cover of an Infeasible System of Linear Inequalities". *Ann. Math. Artificial Intelligence*, Volume 17, pp. 107-126.
- Rei, W., Gendreau, M., Cordeau, J. F. & Soriano, P., (2006), "Accelerating Benders decomposition by local branching". Montreal, s.n.
- Rojowski, R. & Pinto, J. M., (2004), "Efficient MILP Formulations and Valid Cuts for Multiproduct Pipeline Scheduling". *Computers and Chemical Engineering*, Volume 28, No. 8, pp. 1511-1528.
- Saharidis, G. K. D. , Boile, M. & Theofanis, S., (2011), "Initialization of the Benders master problem using valid inequalities applied to fixed-charge network problems". *Expert Systems with Applications*, Volume 38(6), pp. 6627-6636.
- Saharidis, G. K. D. & Ierapetritou, M. G., (2013), Speed-up Benders decomposition using maximum density cut (MDC) generation. *Ann Oper Res*, Volume 210, pp. 101-123.
- Saharidis, G. K. D. , Minoux, M. & Ierapetritou, M. G., (2010), "Accelerating Benders method using covering cut bundle generation". *International Transactions in Operational Research*, Volume 17, pp. 221-237.
- Saharidis, G. K. D. & Ierapetritou, M. G., (2009a), "Resolution method for mixed integer bi-level linear problems based on decomposition technique. *Journal of Global Optimization*, Volume 44(1), pp. 29-51.
- Saharidis, G. K. D. & Ierapetritou, M. G., (2009b), "Scheduling of loading and unloading of crude oil in a refinery with optimal mixture
- Cordeau, J. F., Pasin, F. & Solomon, M. M., (2006), "An integrated model for logistics network design". *Annals of Operations Research*, Volume 144(1), pp. 59-82.
- Cordeau, J. F., Soumis, F. & Desrosiers, J., (2000), "A Benders decomposition approach for the locomotive and car assignment problem". *Transportation Science*, Volume 34(2), pp. 133-149.
- Cote, G. & Loughton, M., (1984), "Large-scale mixed integer programming: Benders-type heuristics". *European Journal of Operational Research*, Volume 16, pp. 327-333.
- Erdogan, S. & MillerHooks, E., (2012), "A Green Vehicle Routing Problem". *Transportation Research Part E*, Volume 48, pp. 100-114.
- Gleesonand, J. & Ryan, J., (1990), "Identifying Minimally Infeasible Subsystems of Inequalities". *ORSA Journal on Computing*, 2(1), pp. 61-63.
- Jin, M., Liu, K. & Bowden, R., (2007), "A two stage algorithm with valid inequalities for the split delivery vehicle routing problem". *International journal of production economics*, Volume 105, pp. 228-242.
- Kara, I., Kara, B. & Yetis, M., (2007), Energy minimizing vehicle routing problem. *Lecture notes in computer science*, Volume 4616, pp. 62-71.
- Kuo, Y., (2010), "Using simulated annealing to minimize fuel consumption for the time-dependent vehicle routing problem". *Computers & Industrial Engineering*, Volume 59(1), pp. 157-165.
- Magnanti, T. & Wong, R., (1981), Accelerating Benders decomposition algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operational Research*, Volume 29, pp. 464-484.

- Schneider, M., Stenger, A. & Goeke, D., (2012), "The electric vehicle routing problem with time windows and recharging stations, Kaiserslautern, Germany", Technical Report, University of Kaiserslautern.
- Van Roy, T. J., (1983), "Cross decomposition for mixed integer programming". *Mathematical Programming*, Volume 25, pp. 46-63.
- Xiao, Y., Zhao, Q., Kaku, I. & Xu, Y., (2012), "Development of a fuel consumption optimization model for the capacitated vehicle routing problem". *Computers & Operations Research*, Volume 39(7), pp. 1419-1431.
- Zakeri, G., Philpott, A. B. & Ryan, D. M., (1998), "Inexact cuts in Benders decomposition". *SIAM Journal on Optimization*, Volume 10(3), pp. 643-657.
- preparation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Volume 48(5), pp. 2624-2633.
- Salimifard, K., Shahbandarzadeh, H. & Raeesi, R., (2012), "Green transportation and the role of operationS research". Singapore, s.n.
- Sbihi, A. & Eglese, R. W., (2007a), *Combinatorial Optimization and green logistics. 4OR: A Quarterly Journal of Operations Research*, Volume 5, pp. 99-116.
- Sbihi, A. & Eglese, R. W., (2007b), "The relationship between vehicle routing and scheduling and green logistics – a literature survey". Working paper, Department of Management Science, Lancaster University Management School, LA14YX, UK.