

# DOMAIN DECOMPOSITION METHOD FOR INVERSE ANALYSIS OF NONLINEAR THERMOELASTIC PROBLEMS

S. Khajepour M. R. Hematiyan M. R. Zare

Mechanical Engineering Department, Shiraz University, Shiraz, Iran

**Abstract:** In this paper a new method for solving nonlinear inverse problems is presented. In order to overcome severe nonlinear behaviors, the domain is divided into several sub-domains. In each sub-domain, by using an optimization method and finite element method and also by employing the information obtained by the previous sub-domain, the unknown boundary conditions are determined.

To show the efficiency of the proposed method, an inverse non-linear heat conduction problem and an inverse non-linear thermoelastic problem are analyzed by both the whole domain and the present methods. According to the obtained results, it is shown that the presented domain decomposition method is more efficient and accurate than the whole domain method.

## روش تفکیک دامنه برای تحلیل مسائل معکوس ترموالاستیک غیر خطی

سالار خواجه پور، محمدرحیم همتیان و محمودرضا زارع

**چکیده:** در این مقاله روشی جهت حل مسائل معکوس غیر خطی ارائه شده است. در این روش به منظور غلبه بر رفتار شدید غیرخطی، دامنه مسأله به زیر دامنه‌های کوچکتر تقسیم شده و در هر قسمت با بکارگیری یک روش بهینه سازی به همراه روش اجزاء محدود و با استفاده از اطلاعات بدست آمده از دامنه قبل به تعیین شرط مرزی مجهول پرداخته شده است.

به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی، یک مسأله معکوس هدایت حرارت و یک مسأله معکوس ترموالاستیسیته غیر خطی با هر دو روش تمام دامنه و تفکیک دامنه مورد تحلیل قرار گرفته است. با توجه به نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی تفکیک دامنه در مقایسه با روش تمام دامنه از بازده و دقت بیشتری برخوردار است و زمان محاسبات را کاهش می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی:** مسأله معکوس، اجزاء محدود، تفکیک دامنه، ترموالاستیسیته

تاریخ وصول: ۸۶/۶/۱۲

تاریخ تصویب: ۸۸/۷/۲۰

سالار خواجه پور، بخش مهندسی مکانیک دانشگاه شیراز، skhajepour@gmail.com

دکتر محمدرحیم همتیان، بخش مهندسی مکانیک دانشگاه شیراز، mhemat@shirazu.ac.ir

محمودرضا زارع، بخش مهندسی مکانیک دانشگاه شیراز، zare.mahmood@gmail.com

## ۱. مقدمه

امروزه در بسیاری از کاربردهای مهندسی با پدیده‌های ترمومکانیکی سر و کار داریم. به عنوان مثالهایی از مهمترین زمینه‌های مسائل ترموالاستیسیته در صنایع، می‌توان به تحلیل تنشهای حرارتی در نیروگاه‌ها، صنایع هوافضا و فرآیندهای ساخت و تولید و جلوگیری از خستگی حرارتی در رآکتورها و تجهیزات هسته‌ای اشاره کرد. به طور کلی در تحلیل یک مسأله مستقیم با اطلاع از ابعاد هندسی، خواص فیزیکی، شرایط مرزی و بارگذاری به عنوان معلومات مسأله و استفاده از معادلات حاکمه توزیع کمیت‌های میدانی محاسبه می‌شود، اما همواره این امکان وجود ندارد که از تمامی پارامترهای فوق اطلاعات دقیقی در دسترس باشد، به عنوان مثال اندازه‌گیری مقدار شار ورودی به دیواره‌ای از کوره که در معرض شعله قرار دارد و یا اندازه‌گیری شار ورودی به بدنه فضاپیماها هنگام بازگشت مجدد آنها به جو به راحتی امکان پذیر نمی‌باشد. در این قبیل مسائل سعی می‌کنیم با اتخاذ روشهایی که به روشهای تحلیل معکوس موسوم است، با اندازه‌گیری متغیر میدانی مورد نظر (در اینجا دما) در نقاط داخلی دامنه، شرایط مرزی مجهول را مشخص کنیم. یکی از مشکلات عمده که در حل مسائل معکوس با آن مواجه هستیم ناسالم (Ill-posed) بودن این دسته از مسائل است.

ناسالم بودن به این معنی است که حساسیت این مسائل نسبت به خطاهای اندازه‌گیری بسیار زیاد است و به ازای خطاهای هرچند ناچیز در مقادیر اندازه‌گیری نوسانات شدیدی در نتایج بوجود می‌آید. به همین دلیل در حل مسائل معکوس از روشهای هموارسازی استفاده می‌شود. میزان ناسالمی در مسائل غیر خطی بسیار شدیدتر از مسائل خطی است به نحوی که روشهای معکوس مورد استفاده برای مسائل غیر خطی بسیار زمان بر هستند و به حافظه زیادی برای تحلیل یک مسأله نه چندان پیچیده غیر خطی احتیاج دارند. علاوه بر آن، روشهای هموارسازی موجود در بعضی از موارد در بدست آوردن جواب با دقت مطلوب برای مسائل غیرخطی ناتوانند و یا حتی حین هموارسازی واگرا می‌شوند. لذا با توجه به دامنه گسترده کاربرد مسائل ترموالاستیسیته و با توجه به اینکه در اکثر مواقع خواص فیزیکی با دما تغییر می‌کنند ارائه روشی کارآمد برای تحلیل معکوس مسائل ترموالاستیسیته غیرخطی بسیار ضروری و سودمند به نظر می‌رسد.

بیشتر کارهای انجام گرفته جهت تحلیل مسائل معکوس در زمینه انتقال حرارت می‌باشد. از مقاله‌های ارائه شده در زمینه انتقال حرارت و ترموالاستیسیته می‌توان به مقاله نودا (Noda) اشاره کرد که در آن تحلیل معکوس ترموالاستیک یک استوانه بلند با تقارن محوری که به سطح جانبی آن حرارت داده شده است در حالت دینامیکی گذرا مورد بررسی قرار گرفته است [۱]. در مقاله دیگری که توسط نودا و همکارانش در سال ۱۹۸۹ ارائه شده است، یک روش تحلیلی برای آنالیز معکوس ترموالاستیک گذرا در یک قطعه

جامد سه بعدی با همسانگردی متقارن محوری (transversely isotropic) به دست آمده است [۲]. در مقاله زو (Xu) و همکارانش به بررسی آنالیز معکوس ترموالاستیک جهت تحلیل مسأله تماس در فرآیند برش متعام (Orthogonal cutting) پرداخته شده است [۳]. در مقاله‌ای که بوسیله تیلر (Taler) و همکارانش ارائه شده، روش جدیدی جهت محاسبه تنش‌های حرارتی ارائه شده است که مبتنی بر آنالیز معکوس انتقال حرارت است [۴]. در مقاله‌ای که توسط آشیدا (Ashida) و همکارانش ارائه شده است یک مسأله معکوس ترموالاستیک در یک دیسک کامپوزیتی با همسانگردی متقارن محوری که روی سطح بالایی آن لایه‌ای از پیروسرامیک چسبانده شده مورد بررسی قرار گرفته است [۵]. در مقاله چن (Chen) و همکاران، روشی جهت تخمین شار حرارتی روی سطح خارجی یک لوله جدار ضخیم با جریان داخلی بوسیله اندازه‌گیری دما در چند نقطه درون جریان ارائه شده است [۶]. در مقاله‌ای که توسط احمدآبادی و همکاران ارائه شده به بررسی روشی برای تحلیل مسائل معکوس انتقال حرارت که در آن منبع حرارتی وابسته به مکان است پرداخته شده است [۷]. جادامبا (Jadamba) و همکاران در مقاله خود به تحلیل یک مسأله معکوس الاستیسیته خطی به منظور تعیین ضرایب لامه (Lame coefficients) پرداخته‌اند [۸]. در تحقیق حاضر روشی متفاوت مبتنی بر تقسیمات مکانی دامنه برای مسائل غیرخطی ارائه شده است. به طور کلی می‌توان مسائل غیرخطی در ترموالاستیسیته را به دو دسته کلی تقسیم کرد:

۱- مسائلی که در آنها خواص فیزیکی تابع دما باشند.

۲- مسائلی که در آنها شرط مرزی غیر خطی باشد.

در این مقاله توجه خود را به دسته اول که بسیار عام‌تر می‌باشد معطوف می‌کنیم. در این حالت هرچه تغییرات دما بیشتر باشد خواص فیزیکی نیز تغییرات بیشتری دارند و بر میزان غیرخطی بودن مسأله افزوده می‌شود. در این حالت تقسیم دامنه به زیر دامنه‌های کوچکتر از دو جهت مفید می‌باشد:

۱- با تقسیم دامنه به زیر دامنه‌های کوچکتر، در هر زیر دامنه تغییرات دما و در نتیجه میزان غیرخطی بودن مسأله کاهش می‌یابد.

۲- با کوچکتر شدن دامنه، تعداد المان‌های بکار رفته در مدل‌سازی اجزاء محدود، تعداد گره‌ها، تعداد درجات آزادی، پهنای باند و در نتیجه حجم و زمان محاسبات به شدت کاهش می‌یابد.

## ۲. فرمولبندی و حل مسأله معکوس

در این مقاله به بررسی مسائل معکوس انتقال حرارت و ترموالاستیسیته پرداخته شده است. هدف تعیین شرط مرزی مجهول گرمایی و مکانیکی روی یکی از اضلاع دامنه با استفاده از اندازه‌گیری دما و جابجایی است. برای تحلیل مسأله معکوس، تابع

$$\mathbf{X}(\mathbf{P}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial P_1} & \frac{\partial T_1}{\partial P_2} & \frac{\partial T_1}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial P_N} \\ \frac{\partial T_2}{\partial P_1} & \frac{\partial T_2}{\partial P_2} & \frac{\partial T_2}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial T_2}{\partial P_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_I}{\partial P_1} & \frac{\partial T_I}{\partial P_2} & \frac{\partial T_I}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial T_I}{\partial P_N} \end{bmatrix} \quad (6)$$

برای بدست آوردن ماتریس حساسیت در مسائل غیر خطی می توان از روش تفاضل محدود استفاده کرد.

$$X_{ij} \cong \frac{T_i(P_1, P_2, \dots, P_j + \varepsilon P_j, \dots, P_N) - T_i(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_N)}{\varepsilon P_j} \quad (7)$$

مقدار  $\varepsilon$  بسته به نوع مسأله انتخاب می شود. برای اکثر مسائل مقدار  $10^{-5}$  یا  $10^{-6}$  می تواند مقدار مناسبی باشد. با خطی سازی بردار کمیت های محاسبه شده  $\mathbf{T}$ ، توسط بسط سری تیلور حول مقادیر تخمینی  $\mathbf{P}$  داریم:

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{T}(\mathbf{P}^k) + \mathbf{X}^k (\mathbf{P} - \mathbf{P}^k) \quad (8)$$

که در آن  $\mathbf{T}$  و  $\mathbf{X}$  به ترتیب بردار کمیت های محاسبه شده و ماتریس حساسیت در مرحله  $k$  ام هستند. با جایگذاری معادله (8) در معادله (5) و اندکی محاسبات، عبارت زیر برای روند تکرار شونده جهت به دست آوردن بردار پارامترهای مجهول بدست می آید [9]:

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \left[ (\mathbf{X}^k)^T \mathbf{X}^k \right]^{-1} (\mathbf{X}^k)^T [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}^k)] \quad (9)$$

همانطور که گفته شد با توجه به ناسالم بودن مسائل معکوس برای جلوگیری از ناپایداری و ایجاد نوسانات در جوابها باید از یکی از روشهای هموارسازی استفاده شود. در روش هموارسازی لونبرگ-مارکواردت می توان با تغییر رابطه فوق به شکل زیر هموارسازی را انجام داد [10 و 11]:

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \left[ (\mathbf{X}^k)^T \mathbf{X}^k + \lambda^k \mathbf{I} \right]^{-1} (\mathbf{X}^k)^T [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}^k)] \quad (10)$$

در روابط فوق  $\mathbf{I}$  یک ماتریس واحد است. عبارت ماتریسی  $\lambda^k \mathbf{I}$  به این دلیل در معادلات فوق اضافه شده است تا نوسانات و ناپایداری مربوط به ناسالمی ماتریس  $[\mathbf{X}^T \mathbf{X}]$ ، را با بزرگتر کردن درایه های قطری آن کاهش دهد. از آنجا که مسأله در مجاورت حدسهای اولیه برای پارامترهای مجهول کاملاً نوسانی و ناپایدار است، در مراحل ابتدایی روند تکرار پارامتر  $\lambda$  بزرگ انتخاب می شود. با این روش نیازی نیست تا ماتریس  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  در مراحل ابتدایی غیر منفرد باشد سپس با ادامه روند تکرار، پارامتر  $\lambda$  تدریجاً کاهش می یابد و روش لونبرگ-مارکواردت مشابه روش گوس عمل می کند.

مجهولی را که باید شناسایی شود، به صورت ترکیبی از توابع معلوم با ضرایب نامعین، بازنویسی می کنیم. سپس با استفاده از اطلاعات اضافی که از اندازه گیری کمیت میدانی در نقاط نمونه برداری به دست می آید، سعی در یافتن این ضرایب داریم. به عنوان مثال اگر تابع نامعلومی، مثلاً  $g$ ، مورد نظر باشد، می توانیم آن را به شکل زیر بازنویسی کنیم،

$$g(t) = \sum_{j=1}^N P_j C_j \quad (1)$$

در رابطه فوق  $P_j$  ها پارامترهای مجهول و  $C_j$  ها توابع دلخواه (مثلاً؛ چندجمله ای، مثلثاتی و ...) هستند. حال باید با حل مسأله معکوس، ضرایب  $P_j$  را شناسایی کرد. چنانچه کمیت میدانی اندازه گیری شده در مسائل ترموالاستیسیته که شامل دما و جابجایی می باشد را با نماد  $\mathbf{Y}$  مشخص کنیم می توانیم بردارهای معلوم و مجهول در تحلیل معکوس را بصورت زیر بنویسیم.

$$\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_I \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{Bmatrix} \quad (3)$$

برای اینکه از یک تحلیل معکوس جوابهای مناسب و قابل اعتمادی داشته باشیم لازم است که  $I > N$ .

مسأله معکوس را می توان بصورت یک مسأله بهینه سازی فرمول بندی کرد. بدین منظور تابع هدف را بصورت یک تابع خطا که مجموع نرم عادی مربعات تفاضل مقادیر محاسبه شده و مقادیر اندازه گیری شده می باشد، تعریف کرده و با استفاده از روشهای بهینه سازی بردار  $\mathbf{P}$  را به نحوی پیدا می کنیم که تابع هدف مینیمم شود. با استفاده از نماد  $\mathbf{T}$  برای کمیات محاسبه شده در نقاط نمونه برداری داریم:

$$S(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^I [Y_i - T_i(\mathbf{P})]^2 \quad (4)$$

برای حداقل سازی نرم داده شده در معادله فوق بایدگرادیان  $S(\mathbf{P})$  نسبت به بردار مجهولات  $\mathbf{P}$  را برابر صفر قرار دهیم. با انجام این عملیات معادله ماتریسی زیر نتیجه می شود:

$$-2 \mathbf{X}^T(\mathbf{P}) [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] = 0 \quad (5)$$

در رابطه فوق  $\mathbf{X}(\mathbf{P})$  ماتریس حساسیت بوده و بصورت زیر تعریف می شود.

مسأله معکوس در دامنه دوم در نظر گرفته و نیروی درونی مابین دامنه دوم و سوم را بدست می‌آوریم.  
۵- روند فوق را برای سایر دامنه‌ها ادامه می‌دهیم.

#### ۴. مثالهای حل شده و بررسی نتایج

در این قسمت برای بررسی کارایی و توانایی روش ارائه شده به حل دو مثال مختلف در زمینه‌های هدایت حرارت و ترموالاستیسیته و بررسی نتایج می‌پردازیم. مقایسه بین نتایج حاصل از روش تمام دامنه و روش پیشنهادی تفکیک دامنه از دو دیدگاه دقت محاسبات و زمان انجام عملیات، صورت پذیرفته است. برای حل مسأله مستقیم و محاسبه ضرایب حساسیت از نرم افزار اجزاء محدود ANSYS استفاده شده و برای تحلیل معکوس نیز برنامه‌ای تحت نرم‌افزار MATLAB تدوین گردیده است.

##### ۴-۱. مثال ۱

در شکل ۲ یک قاب دو بعدی مستطیل شکل با ابعاد  $150 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$  نمایش داده شده است. مرز بالایی تحت اثر یک شار حرارتی قرار گرفته که مقدار آن بصورت خطی از صفر تا  $4500 \text{ W/m}$  تغییر می‌کند. هر دو مرز سمت چپ و راست در معرض انتقال حرارت جابجایی با ضریب جابجایی  $h = 1 \text{ W/m}^2$  و دمای محیط  $T_s = 200^\circ \text{C}$  قرار دارند. در مرز پایین شار حرارتی خروجی وجود دارد که مقدار آن بصورت خطی از  $750 \text{ W/m}$  تا  $3750 \text{ W/m}$  تغییر می‌کند. در شکل ۳ نحوه مش‌بندی این مسأله در مدل اجزاء محدود نمایش داده شده است.

در مسأله معکوس، مقدار شار در مرز فوقانی را مجهول در نظر گرفته و با اندازه‌گیری دما در نقاط نمونه برداری سعی در تعیین مقدار آن داریم. برای بدست آوردن بارگذاری مجهول، مرز فوقانی را به شش قسمت تقسیم کرده و مقدار شار در هر قسمت ثابت در نظر گرفته شده است بدین ترتیب تعداد مجهولات مسأله معکوس جمعاً به ۶ پارامتر می‌رسد و نمونه برداری در ۸ نقطه انجام شده است. این مثال در دو حالت مختلف و با هریک از روشهای تمام دامنه و تفکیک دامنه حل شده است، در حالت دوم با ثابت نگه داشتن هندسه و بارگذاری، جنس به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که میزان تغییرات ضریب رسانایی با دما و در نتیجه میزان غیرخطی بودن مسأله افزایش یابد.

برای محاسبه شار مجهول ابتدا یکبار مسأله مستقیم را به ازای مقادیر معینی از شار حل کرده و مقادیر دما در نقاط مشخص شده بدست می‌آید، این مقادیر به عنوان مقادیر دقیق در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که در عمل هنگام اندازه‌گیری همواره مقداری خطا در مقادیر اندازه‌گیری شده وجود دارد هنگام حل مسأله معکوس مقداری خطای تصادفی در مقادیر دقیق وارد کرده و آنها را به عنوان مقادیر اندازه‌گیری شده در نظر می‌گیریم.

برای معیار توقف در روند تکرار فوق از اصل اختلاف [۱۲] استفاده می‌شود. بر اساس این اصل، روند تکرار زمانی متوقف می‌شود که معیار زیر ارضاء گردد:

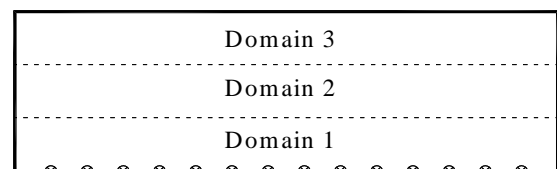
$$S(\mathbf{P}^{k+1}) < \varepsilon \quad (11)$$

که در اینجا مقدار تکرار  $\varepsilon$  طوری انتخاب می‌شود که جوابهایی به اندازه کافی پایدار ایجاد کند. مناسب ترین مقدار برای  $\varepsilon$ ، مقدار خطای اندازه‌گیری است یعنی روند تکرار را زمانی متوقف می‌کنیم که مقادیر اختلاف بین کمیت‌های اندازه‌گیری و تخمین زده شده، هم مرتبه خطاهای موجود در نمونه برداری شود.

#### ۳. روند حل مسأله معکوس با روش تفکیک دامنه

تحلیل یک مسأله معکوس با روش تفکیک دامنه شامل مراحل زیر است:

۱- ابتدا با توجه به ابعاد مسأله و میزان غیر خطی بودن آن تعداد زیر دامنه‌ها را مشخص می‌کنیم. در شکل ۱ یک دامنه بصورت شماتیک نشان داده شده است و فرض شده شرایط مرزی برای تمامی اضلاع به جز ضلع فوقانی مشخص باشد، هدف یافتن شرط مرزی فوقانی با استفاده از اطلاعات اضافی که از اندازه‌گیری کمیت میدانی روی مرز پایین بدست آمده، می‌باشد. همچنین نحوه تفکیک به سه زیر دامنه در شکل نشان داده شده است.



شکل ۱. نحوه تفکیک دامنه، علامتهای ۰ محل نقاط نمونه برداری را نشان می‌دهند.

۲- نیروهای درونی بین دامنه اول و دوم را به عنوان شرط مرزی مجهول برای دامنه اول در نظر می‌گیریم و با اندازه‌گیری کمیت میدانی در دامنه اول و به کمک روشهای تحلیل معکوس مقدار آنها تعیین می‌کنیم.

۳- نیروی بدست آمده از حل مرحله قبل را به عنوان شرط مرزی در نظر گرفته و با حل مسأله مستقیم توزیع کمیت میدانی را روی مرز فوقانی دامنه اول بدست می‌آوریم.

۴- قرینه نیروهای بدست آمده از حل دامنه اول را به عنوان شرط مرزی روی ضلع پایین دامنه دوم و توزیع کمیت میدانی بدست آمده در مرحله ۳ را به عنوان اطلاعات اضافی مورد نیاز برای حل

جدول ۳. شار پیش‌بینی شده با روش تفکیک دامنه، دامنه دوم

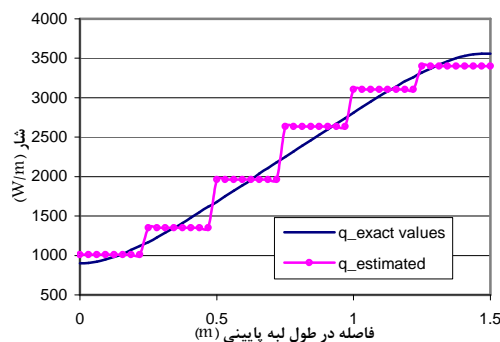
درصد خطای شار	مقدار دقیق شار (W/m)	مقدار شار پیش‌بینی شده (W/m)			منطقه مرزی
		مرحله ۳	مرحله ۲	مرحله ۱	
0.7	845.93	851.94	852.21	878.42	p <sub>1</sub>
5.4	1303.1	1233	1236.5	1242.4	p <sub>2</sub>
0.4	1924.9	1933.1	1940.1	1943.4	p <sub>3</sub>
5.2	2573.1	2706.6	2714.6	2711.9	p <sub>4</sub>
1.8	3190.9	3248.6	3245	3225.6	p <sub>5</sub>
3.6	3628.3	3498.7	3483.3	3470.3	p <sub>6</sub>

جدول ۴. شار پیش‌بینی شده با روش تفکیک دامنه، دامنه سوم

درصد خطای شار	مقدار دقیق شار (W/m)	مقدار شار پیش‌بینی شده (W/m)			منطقه مرزی
		مرحله ۳	مرحله ۲	مرحله ۱	
26.6	455.76	576.78	582.03	589.46	p <sub>1</sub>
12.4	1144.1	1002.4	1021	1043.6	p <sub>2</sub>
0.4	1880.1	1872.8	1881.5	1873.3	p <sub>3</sub>
5.7	2619.4	2767.7	2761.6	2765.3	p <sub>4</sub>
3.0	3355	3456.9	3447.5	3437.9	p <sub>5</sub>
5.3	4037.8	3825.8	3808.1	3792.6	p <sub>6</sub>

جدول ۵. مقادیر شار پیش‌بینی شده به روش تمام دامنه

درصد خطای شار	مقدار دقیق شار (W/m)	مقدار شار پیش‌بینی شده (W/m)			منطقه مرزی
		مرحله ۳	مرحله ۲	مرحله ۱	
17.7	455.76	536.25	540.4	547.22	p <sub>1</sub>
9.6	1144.1	1034.6	1032.2	1042.3	p <sub>2</sub>
0.7	1880.1	1893.7	1893.9	1897.9	p <sub>3</sub>
6.9	2619.4	2799.8	2798.9	2797.9	p <sub>4</sub>
3.2	3355	3462.9	3461.9	3453.2	p <sub>5</sub>
6.5	4037.8	3773.9	3773.6	3765.1	p <sub>6</sub>



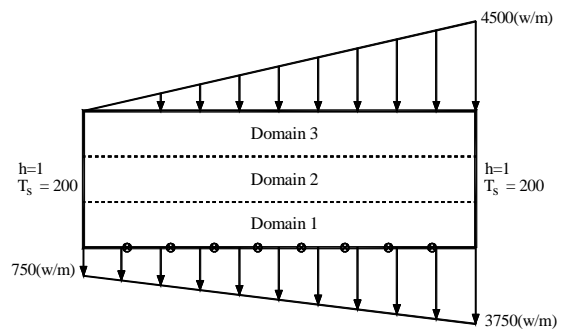
شکل ۴. شار بدست آمده با روش تفکیک دامنه در دامنه اول

۱-۴. هدایت حرارت با رفتار غیرخطی کم

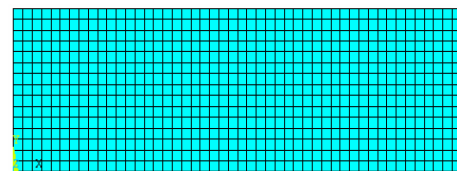
مشخصات جنس مورد استفاده در حالت اول در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. ضریب رسانایی بر حسب دما در حالت اول

دما (سانتیگراد)	26.8	126.8	326.8	526.8	726.8
ضریب رسانایی (W/m)	15.1	17.3	20	22.8	25.4



شکل ۲. شکل هندسی و شرایط مرزی، علامتهای O (محل نقاط نمونه برداری را نشان می‌دهند)



شکل ۳. نحوه المان‌بندی مثال ۱

در ادامه نتایج بدست آمده برای خطای تصادفی ۲٪ آورده می‌شود. نتایج روش تفکیک دامنه در شکلهای ۴ تا ۶ و جداول ۲ تا ۴ آورده شده است و نتایج بدست آمده از روش تمام دامنه در شکل ۷ و جدول ۵ آورده شده.

جدول ۲. شار پیش‌بینی شده با روش تفکیک دامنه، دامنه اول

درصد خطای شار	مقدار دقیق شار (W/m)	مقدار شار پیش‌بینی شده (W/m)			منطقه مرزی
		مرحله ۳	مرحله ۲	مرحله ۱	
2.4	1035.5	1010.5	1027.3	1047.6	p <sub>1</sub>
5.2	1426.8	1352.7	1347.4	1361.3	p <sub>2</sub>
0.2	1966.2	1962.1	1970.6	1974.8	p <sub>3</sub>
4.1	2531.2	2636	2628.4	2622.3	p <sub>4</sub>
1.3	3066.6	3105.8	3098.7	3092.3	p <sub>5</sub>
1.0	3437.9	3402.2	3397	3370.3	p <sub>6</sub>

جدول ۶. زمان کل محاسبات

زمان کل محاسبات (sec)	تعداد تکرار	زمان مربوط به یک مرحله (sec)	روش تمام دامنه
348	186	1.87	روش تمام دامنه
261	414	0.63	روش تفکیک دامنه

این مثال یک مرتبه دیگر و به ازای خطای اندازه گیری ۵٪ حل شده است. مشخصات جنس مورد استفاده در جدول ۷ آورده شده است. ابعاد هندسی و بارگذاری مشابه قسمت اول است. در این حالت شدت رفتار غیر خطی افزایش داده شده است.

جدول ۷. مقادیر ضریب رسانایی جنس ۲ بر حسب دما

ضریب رسانایی (W/m)	270	240	210	180	140	دما (سانتیگراد)
25	20	15	10	5		ضریب رسانایی (W/m)

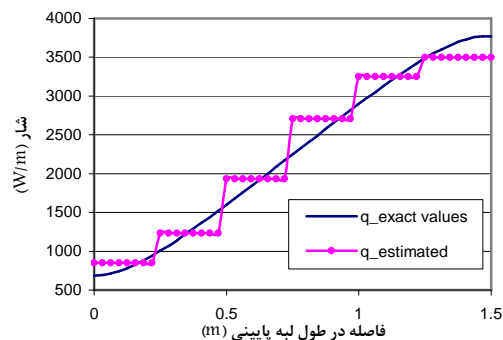
نتایج بدست آمده از روش تفکیک دامنه برای این حالت در شکل‌های ۸ تا ۱۰ و جداول ۸ تا ۱۰ آورده شده است و نتایج بدست آمده از روش تمام دامنه در شکل ۱۱ و جدول ۱۱ آورده شده.

جدول ۸. شار پیش‌بینی شده با روش تفکیک دامنه، دامنه اول

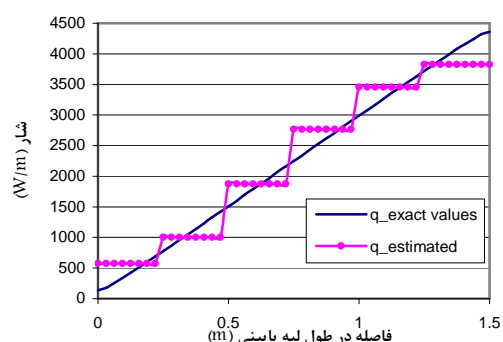
منطقه مرزی	مقدار شار پیش‌بینی شده (W/m)			مقدار دقیق شار (W/m)	درصد خطای شار
	مرحله ۱	مرحله ۲	مرحله ۳		
p <sub>1</sub>	938.91	907.42	919.6	1032.1	10.9
p <sub>2</sub>	1412	1406.4	1383.7	1426.6	3.0071
p <sub>3</sub>	1992.5	1998.8	2006.5	1966.6	2.0289
p <sub>4</sub>	2568.4	2570.7	2567.6	2531.4	1.43
p <sub>5</sub>	3057.7	3064.4	3063.4	3065.6	0.0718

جدول ۹. شار پیش‌بینی شده با روش تفکیک دامنه، دامنه دوم

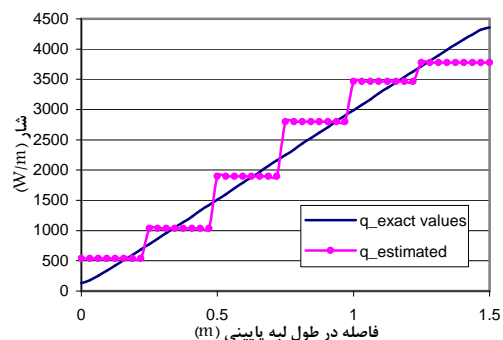
منطقه مرزی	مقدار شار پیش‌بینی شده (W/m)				مقدار دقیق شار (W/m)	درصد خطای شار
	مرحله ۱	مرحله ۲	مرحله ۳	مرحله ۴		
p <sub>1</sub>	813.75	784.83	819.91	813	843.83	3.7
p <sub>2</sub>	1262.3	1247.5	1180.2	1179.4	1302.8	9.5
p <sub>3</sub>	1950.4	1934.3	1880.5	1879.3	1924.9	2.4
p <sub>4</sub>	2656.6	2657.2	2622.3	2623.1	2573	1.9
p <sub>5</sub>	3235.9	3264.7	3345.4	3347.9	3190	4.9
p <sub>6</sub>	3547	3572.9	3615.7	3619.7	3626.9	0.2



شکل ۵. شار بدست آمده با روش تفکیک دامنه در دامنه دوم

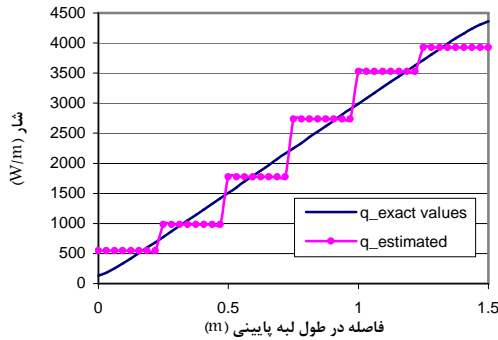


شکل ۶: شار بدست آمده با روش تفکیک دامنه در دامنه سوم

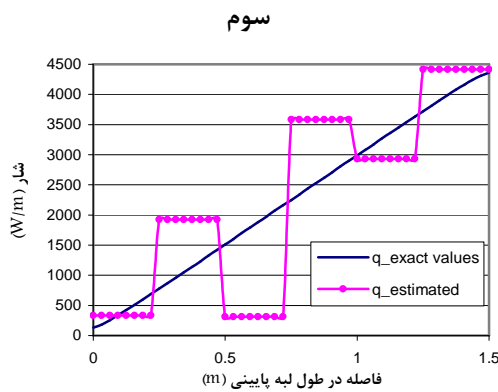


شکل ۷. شار بدست آمده با روش تمام دامنه

همانطور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود هر دو روش تمام دامنه و تفکیک دامنه جوابهای بسیار خوب و قابل قبولی برای مسائل معکوس با میزان رفتار غیرخطی کم ارائه می‌دهند اما از نظر زمان حل محاسبات روش پیشنهادی تفکیک دامنه به زمان بسیار کمتری احتیاج دارد که در مسائل با ابعاد بزرگ بسیار حائز اهمیت می‌باشد. تعداد تکرار و زمان کل محاسبات در جدول شماره ۶ آورده شده است.



شکل ۱۰. شار بدست آمده با روش تفکیک دامنه در دامنه سوم



شکل ۱۱. شار بدست آمده با روش تمام دامنه

جدول ۱۲. زمان کل محاسبات

	زمان مربوط به یک مرحله (sec)	تعداد تکرار	زمان کل محاسبات (sec)
روش تمام دامنه	1.87	276	516
روش تفکیک دامنه	0.63	348	219

۴-۲. مثال ۲

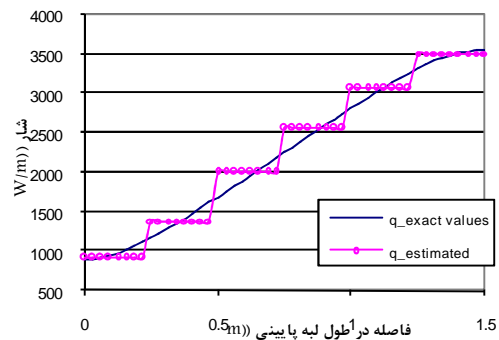
در شکل ۱۲ یک قاب دو بعدی مستطیل شکل با ابعاد  $150\text{cm} \times 150\text{cm}$  نمایش داده شده که تحت بارگذاری همزمان حرارتی و مکانیکی قرار گرفته است. مرز پایین تحت یک بار گسترده یکنواخت به مقدار  $1 \times 10^6$  (N/m) قرار گرفته و دو ضلع کناری بصورت سطح آزاد می‌باشند. شرایط تکیه گاهی در مرز فوقانی به نحوی است که نمی‌توان آنرا کاملاً گیردار در نظر گرفت. برای مدلسازی مسأله معکوس، مقادیر جابجایی مرز بالا در حل مستقیم با اضافه کردن یک دوزنقه از همان جنس و با اضلاع کناری  $50\text{cm}$  و  $100\text{cm}$  و بستن ضلع بالایی بدست آمده است. بارگذاری حرارتی به نحوی است که در ضلع پایین شار خروجی بصورت خطی از  $1000$  تا  $16000$  و در مرز فوقانی شار ورودی بصورت خطی از  $0$  تا  $17000$  تغییر می‌کند. هر دو مرز چپ و راست در معرض جابجایی با ضریب  $1$  ( $h=1 \text{ W/m}^2$ ) و دمای محیط  $100$  درجه قرار گرفته‌اند. ( $T_s=100^\circ\text{C}$ )

جدول ۱۰. شار پیش‌بینی شده با روش تفکیک دامنه، دامنه سوم

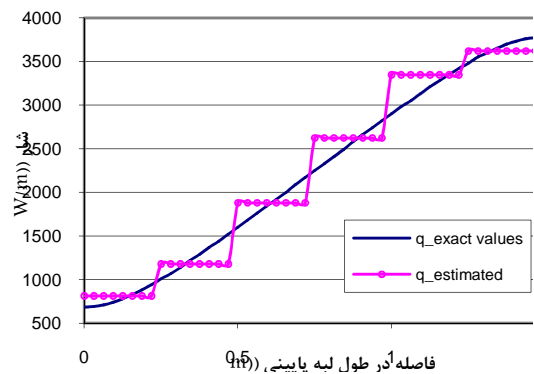
منطقه مرزی	مقدار شار پیش‌بینی شده (W/m)	مقدار شار دقیق (W/m)			
		مرحله ۴	مرحله ۳	مرحله ۲	مرحله ۱
P <sub>1</sub>	20.1	455.63	547.39	561.73	566.87
P <sub>2</sub>	14.2	1144.2	981.51	1003.5	1012.4
P <sub>3</sub>	5.6	1880.2	1774.3	1775.7	1807
P <sub>4</sub>	4.6	2619.4	2738.6	2734.2	2743.4
P <sub>5</sub>	5.2	3354.8	3528	3514.1	3491.7
P <sub>6</sub>	2.8	4038.4	3926.4	3907.5	3873.9

جدول ۱۱. مقادیر شار پیش‌بینی شده به روش تمام دامنه

منطقه مرزی	مقدار شار پیش‌بینی شده (W/m)	مقدار شار دقیق (W/m)			
		مرحله ۴	مرحله ۳	مرحله ۲	مرحله ۱
P <sub>1</sub>	27.0	455.63	332.65	338.07	361.29
P <sub>2</sub>	68.3	1144.2	1925.4	1928.8	2011.1
P <sub>3</sub>	83.4	1880.2	311.45	311.21	300.48
P <sub>4</sub>	36.9	2619.4	3584.8	3586.8	3787.5
P <sub>5</sub>	12.6	3354.8	2931.1	2931.3	2925.8
P <sub>6</sub>	9.3	4038.4	4412.8	4414	4086.6



شکل ۸. شار بدست آمده با روش تفکیک دامنه در دامنه اول



شکل ۹. شار بدست آمده با روش تفکیک دامنه در دامنه دوم

همانطور که در شکلها مشاهده می‌شود با افزایش شدت رفتار غیرخطی مسائل، روش تمام دامنه جوابهای ناهموار و نامناسبی می‌دهد اما روش پیشنهادی تفکیک دامنه بازم جوابهای خوب و قابل قبولی می‌دهد. همچنین از نظر زمان حل، روش تفکیک دامنه به زمان بسیار کمتری احتیاج دارد. زمان کل محاسبات در جدول ۱۲ آورده شده است.

جدول ۱۵. شار پیش بینی شده با روش تفکیک دامنه، دامنه اول

درصد خطای شار	مقدار دقیق شار (W/m)	مقدار شار پیش بینی شده (W/m)			منطقه مرزی
		مرحله ۲	مرحله ۱	مرحله ۱	
0.04	6362.4	6364.8	6415.3		p <sub>1</sub>
2.0	7001.5	6860.4	6859.2		p <sub>2</sub>
3.4	8009.6	7739.8	7711.8		p <sub>3</sub>
1.0	9122.6	9031.2	8972		p <sub>4</sub>
2.4	10086	10326	10251		p <sub>5</sub>

جدول ۱۶. شار پیش بینی شده با روش تفکیک دامنه، دامنه دوم

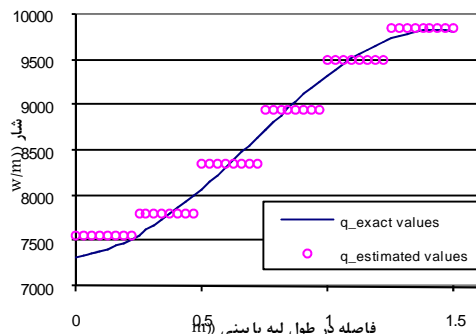
درصد خطای شار	مقدار دقیق شار (W/m)	مقدار شار پیش بینی شده (W/m)			منطقه مرزی
		مرحله ۲	مرحله ۱	مرحله ۱	
1.5	7446.4	7556.4	7680.9		p <sub>1</sub>
0.2	7824.9	7812.2	7930		p <sub>2</sub>
0.5	8403.5	8362.8	8360.5		p <sub>3</sub>
0.9	9032.7	8953.9	8914.3		p <sub>4</sub>
0.3	9540.4	9508.9	9427.4		p <sub>5</sub>
0.7	9777.1	9847.5	9703.6		p <sub>6</sub>

جدول ۱۷. شار پیش بینی شده با روش تفکیک دامنه، دامنه سوم

درصد خطای شار	مقدار دقیق شار (W/m)	مقدار شار پیش بینی شده (W/m)			منطقه مرزی
		مرحله ۳	مرحله ۲	مرحله ۱	
6.1	7367.6	7814.1	7834.3	7982.1	p <sub>1</sub>
6.3	7700.3	8188.8	8208.4	8276.3	p <sub>2</sub>
1.4	8603.1	8721.6	8734.8	8721.5	p <sub>3</sub>
3.6	9612.8	9268.2	9263	9219	p <sub>4</sub>
3.9	10166	9768.9	9747.2	9631.7	p <sub>5</sub>
5.8	10599	9982.5	9955.5	9822.1	p <sub>6</sub>

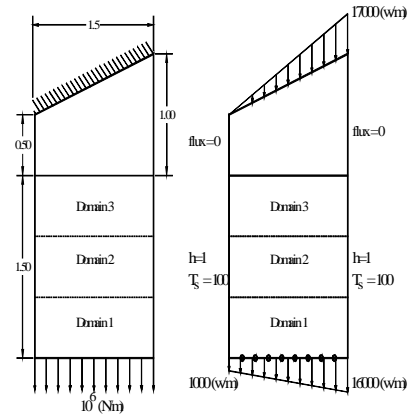
جدول ۱۸. مقادیر شار پیش بینی شده به روش تمام دامنه

درصد خطای شار	مقدار دقیق شار (W/m)	مقدار شار پیش بینی شده (W/m)			منطقه مرزی
		مرحله ۲	مرحله ۱	مرحله ۱	
230.9	7367.6	24449	13466		p <sub>1</sub>
217	7700.3	24487	6941.6		p <sub>2</sub>
185.5	8603.1	24509	1291.5		p <sub>3</sub>
156.6	9612.8	24514	2365.9		p <sub>4</sub>
142.3	10166	24500	10579		p <sub>5</sub>
134.6	10599	24728	18604		p <sub>6</sub>



شکل ۱۳. شار بدست آمده با روش تفکیک دامنه در دامنه اول

اول



شکل ۱۴. شکل هندسی و شرایط بارگذاری، علامتهای ۰ محل نقاط نمونه برداری را نشان می دهند.

در مسأله معکوس، مقدار شار و جابجایی در مرز فوقانی را مجهول در نظر گرفته و با اندازه گیری دما و جابجایی در نقاط نمونه برداری در مرز پایین سعی در تعیین مقدار آن داریم. ابتدا مسأله حرارتی را بدون در نظر گرفتن بارهای مکانیکی حل کرده و مشابه مثال قبل با تقسیم مرز فوقانی به ۶ قسمت مقدار شار را تعیین می کنیم و سپس با دانستن توزیع دما و بارگذاری حرارتی به حل مسأله معکوس الاستیسیته و یافتن جابجایی در مرز مجهول می پردازیم، برای این منظور مرز فوقانی را به دو قسمت تقسیم کرده و در هر ناحیه جابجایی را بصورت یک تابع درجه ۳ تقریب می زنیم. نحوه تغییر ضریب رسانایی جنس مورد استفاده با دما در جدول ۱۳ و تغییرات مدول الاستیسیته با دما در جدول ۱۴ آورده شده است. ضریب انبساط طولی  $\alpha = 11.5 \times 10^{-6}$  و نسبت پواسون  $\nu = 0.3$  می باشد:

جدول ۱۳. مقادیر ضریب رسانایی جنس ۲ بر حسب دما

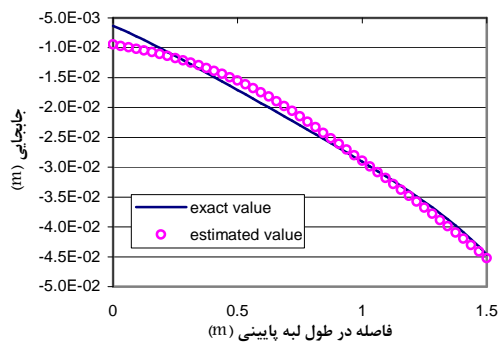
دما (سانتیگراد)	20	300	500	700	900
ضریب رسانایی (W/m)	38	25	16	8	2

جدول ۱۴. مقادیر مدول الاستیسیته بر حسب دما

دما (سانتیگراد)	21	93	204	316	427	538	649	760	871
مدول الاستیسیته (GPa)	210	205	199	190	179	161	153	123	103

مثال فوق به ازای ۵٪ خطای تصادفی در اندازه گیری دما و ۴٪ خطای تصادفی در اندازه گیری جابجایی حل شده است. نتایج حل گرمایی بدست آمده از روش تفکیک دامنه در شکلهای ۱۳ تا ۱۵ و جداول ۱۵ تا ۱۷ آورده شده است و نتایج بدست آمده از روش تمام دامنه در شکل ۱۶ و جدول ۱۸ آورده شده. با توجه به اینکه با بدست آوردن توزیع دما قسمت الاستیسیته به یک مسأله خطی تبدیل می شود، لذا برای حل آن از روش تمام دامنه استفاده شده است و نتایج در شکلهای ۱۷ و ۱۸ آورده شده است.





شکل ۱۸. جابجایی بدست آمده در جهت  $y$  با روش تمام دامنه

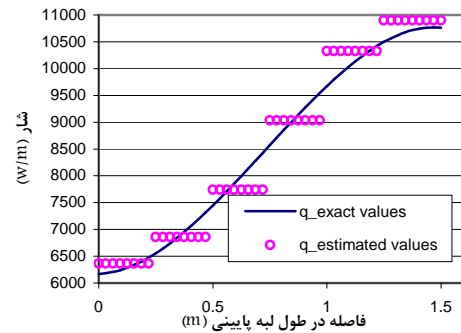
با توجه به نتایج ملاحظه می‌شود که روش تمام دامنه در حل قسمت گرمایی مسأله در مرحله سوم واگرا می‌شود اما روش پیشنهادی تفکیک دامنه با دقت بسیار خوبی قادر به پیش‌بینی شار گرمایی و حل قسمت گرمایی مسأله است، که این موضوع برتری روش پیشنهادی را در مسائل غیرخطی بخوبی نشان می‌دهد.

### ۵. نتیجه‌گیری

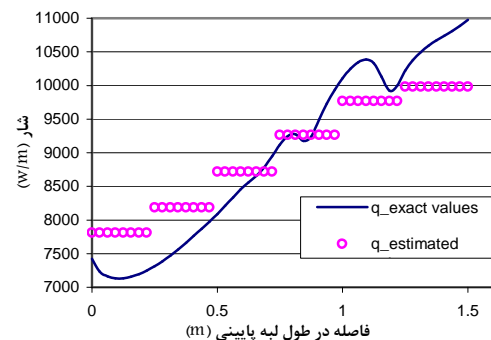
در این مقاله روشی برای تحلیل مسائل معکوس غیر خطی ارائه گردید و برای بررسی نقاط ضعف و قوت آن، دو مثال مختلف حل گردید. در مثال اول یک مسأله انتقال حرارت دو بعدی غیر خطی مورد مطالعه قرار گرفت و با تغییر جنس، خطای اندازه‌گیری و ابعاد، به بررسی اثر میزان غیرخطی بودن و دقت اندازه‌گیری در توانایی روش معمول و روش پیشنهادی برای ارائه جواب مطلوب پرداخته شد. در مثال دوم یک مسأله ترموالاستیسیته غیر خطی مورد مطالعه قرار گرفت. با استفاده از نتایج بدست آمده و مقایسه نتایج با جواب دقیق (exact solution) می‌توان گفت روش پیشنهادی تفکیک دامنه از نظر زمان محاسبات، دقت جوابها و میزان حافظه مورد نیاز کارآمدتر از روش تمام دامنه می‌باشد و هرچه بر میزان غیر خطی بودن مسأله افزوده شود این قابلیت‌ها بیشتر نمایان می‌شود، بطوریکه برای مسائل با رفتار غیر خطی زیاد ممکن است روش تمام دامنه واگرا شود اما روش تفکیک دامنه جوابهای قابل قبولی ارائه می‌دهد، علاوه بر این روش پیشنهادی با توجه به تقسیم بندی دامنه به دامنه‌های کوچکتر برای تحلیل مسائل با مرزهای هندسی پیچیده کارآمدتر از روش تمام دامنه می‌باشد.

### مراجع

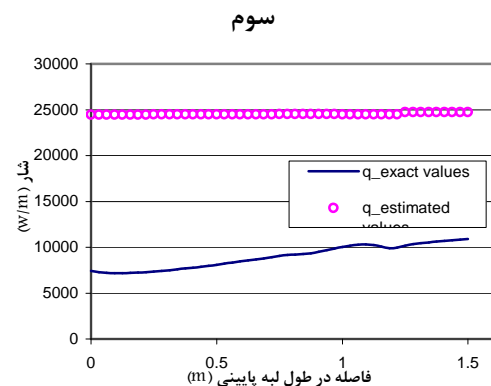
- [1] Noda, N., "An Inverse Problem of Coupled Thermal Stress in a Long Circular Cylinder", JSME Int. J. Series 1, Vol. 32, 1989, pp. 348-354.
- [2] Noda, N., Ashida, F., Tsuji, T., "An Inverse Transient Thermoelastic Problem for a Transversely-Isotropic



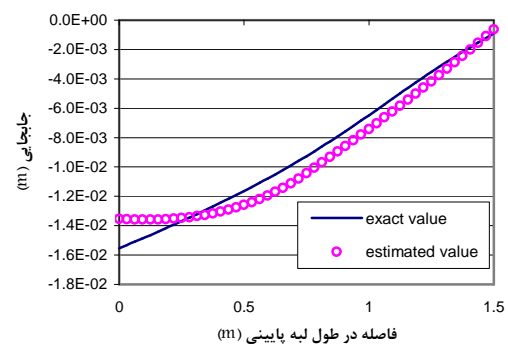
شکل ۱۴. شار بدست آمده با روش تفکیک دامنه در دامنه دوم



شکل ۱۵. شار بدست آمده با روش تفکیک دامنه در دامنه سوم



شکل ۱۶. شار بدست آمده با روش تمام دامنه



شکل ۱۷. جابجایی بدست آمده در جهت  $x$  با روش تمام

دامنه

- Body” J. of Applied Mechanics, ASME, Vol. 56, 1989, pp. 791-797.
- [3] Xu, W., Genin, J., Dong, Q., ”Inverse Method to Predict Temperature and Heat Flux Distribution in a Cutting Tool” J. of Heat Transfer, Vol. 119, 1997, pp. 655-659.
- [4] Taler, J., Weglowski, B., Zima, W., Gradziel, S., Zborowski, M., ”Analysis of Thermal Stresses in a Boiler Drum During Start-up” Transactions of the ASME, Vol. 121, 1999, pp. 84-93.
- [5] Ashida, F., sakata, S., Tauchert, T.R., Yamashita, Y., ”Inverse Transient Thermoelastic Problem for a Composite Circular Disc” J. of Thermal Stresses, Vol. 25, 2002, pp. 431-455.
- [6] Chen, C., Wu, L., Yang, Y., ”Estimation of Unknown Outer-Wall Heat Flux in Turbulent Circular Pipe Flow with Conduction in the Pipe Wall” International Journal of Heat and Mass Transfer, No. 48, 2005, pp. 3971-3981.
- [7] Nili Ahmadabadi, M., Arab, M., Maalek Ghaini, F.M., ”The Method of Fundamental Solutions for the Inverse Space-Dependent Heat Source Problem” Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009.
- [8] Jadamba B., Khan, A.A., Raciti, F., ”On the Inverse Problem of Identifying Lamé Coefficients in Linear Elasticity” Computers and Mathematics with Applications. No 56. 2008, pp. 431-443.
- [9] Beck, J.V., Arnold, K.J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*. New York: Wiley Interscience, 1977.
- [10] Levenberg, K., ”A Method for the Solution of Certain Nonlinear Problems in Least Squares” Quart. Appl. Math., Vol. 2, 1944, pp. 164-168.
- [11] Marquardt, D.W., ”An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters” J. Soc. Ind. Appl. Math., Vol. 11, 1963, pp. 431-441.
- [12] Alifanov, O.M., *Inverse Heat Transfer Problems*, New York: Springer-Verlag, 1994.