



بررسی پایداری مگنتوهیدرودینامیک در توکامک دماوند با نسبت منظر بزرگ

فاطمه دینی*^۱، سینا خراسانی^۲

۱- پژوهشکده فیزیک پلاسما و گداخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۵۱۱۱۳-۱۴۳۹۹، تهران-ایران
۲- دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، صندوق پستی: ۹۳۶۳-۱۱۳۶۵، تهران-ایران

چکیده: تعادل مگنتوهیدرودینامیک آرمانی توکامک ممکن است تحت تأثیر عوامل ناپایدارساز متعددی قرار گیرد. ناپایداری‌ها باعث واپس‌نش سطوح مغناطیسی و مرزهای آن می‌شود و نیروی محرک آن‌ها، اصولاً از گرادیان شعاعی چگالی جریان چنبره‌ای سرچشمه می‌گیرد. در عددهای مدی خاص، شاهد مدهای کینک داخلی خواهیم بود و بررسی آن‌ها بر طبق اصل انرژی، که در آن تغییر انرژی پتانسیل در اثر آشفستگی پلاسما محاسبه می‌شود، امکان‌پذیر خواهد بود. در این پژوهش، برای مطالعه‌ی پایداری پلاسمای توکامک دماوند، که دارای نسبت منظر بزرگ است، تحلیل جدیدی از تعادل مگنتوهیدرودینامیک و پایداری ارائه می‌دهیم. بدین منظور، ضمن ادغام روش‌های پریشیدگی و توابع گرین اقدام به یافتن آرایش تعادلی می‌کنیم. در این مرحله، پروفیل‌های پلاسما برحسب توابع بسل به طور صریح محاسبه می‌شوند و رابطه‌ی ساده‌ای برای جریان کل چنبره‌ای پلاسما به دست می‌آید. سپس سایر پروفیل‌های پلاسما از جمله شار مغناطیسی قطبی، ضریب ایمنی و چگالی جریان چنبره‌ای محاسبه و ترسیم می‌شود. در مرحله‌ی بعد به محاسبات پایداری می‌پردازیم و مدهای پایدار و ناپایدار در پلاسمای دماوند را مشخص می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توکامک دماوند، مگنتوهیدرودینامیک، پایداری پلاسما، پروفیل‌های شعاعی پلاسما، محصورسازی پلاسما، ناپایداری، تابع گرین، نظریه اختلال، شار مغناطیسی، نسبت منظر

Study of Magnetohydrodynamic Stability in Damavand Tokamak with Large Aspect Ratio

F. Dini*¹, S. Khorasani²

1- Plasma Physics and Nuclear Fusion Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOI, P.O. Box: 14399-51113, Tehran-Iran
2- School of Electrical Engineering, Sharif University of Technology, P.O. Box: 11365-9363, Tehran-Iran

Abstract: Ideal magnetohydrodynamic (MHD) equilibrium is vulnerable to numerous unstabilizing mechanisms. Instabilities introduce distortions to the plasma magnetic surfaces and their boundaries, their driving force being the radial gradient of plasma toroidal current density. For certain modal numbers, internal kink modes may develop, and their study is feasible according to the energy principle, in which the change in total potential energy is evaluated due to the disturbance. In this paper, we present a new analysis of MHD equilibrium and stability, and apply it to Damavand Tokamak which has a large aspect ratio. For this purpose, we combine the perturbation and Green's function methods to solve the equilibrium configuration problem. At this stage, plasma profiles are found explicitly in terms of Bessel functions, and we present a simple expression for estimation of total toroidal plasma current. Then the rest of plasma profiles, including poloidal magnetic flux, safety factor, and toroidal current density, are obtained and plotted. In the next step, we turn to the stability calculations and characterize the stable and unstable ideal MHD modes of Damavand plasma.

Keywords: Damavnd Tokamak, Magnetohydrodynamic, Plasma Stability, Plasma Radial Profiles, Plasma Confinement, Instability, Green Function, Perturbation Theory, Magnetic Flux, Aspect Ratio

*email: fdini@aeoi.org.ir



۱- مقدمه

گرادیان‌های جریان و فشار، نیروهای اصلی ناپایدارساز در توکامک به شمار می‌روند و ناپایداری‌های ممکن در دو گروه مدهای آرمانی و مدهای غیرآرمانی یا مقاومتی قرار می‌گیرند. هر عضو از این مجموعه توسط اعداد مدی (m و n) مربوط به خودش مشخص می‌شود. به طور کلی عواملی چون خمیدگی خطوط میدان مغناطیسی، تراکم آن‌ها و انحنای خوب میدان مغناطیسی می‌توانند اثرات پایدارساز داشته باشند. در نتیجه، حالت تشدید و پایدارسازی خطوط میدان مغناطیسی، پارامتری تحت عنوان ضریب ایمنی یا q را مطرح می‌سازد. همان‌طور که خواهیم دید در سطحی که تشدید رخ می‌دهد داریم $q=m/n$. بیش‌ترین مقدار q در مرز پلازما، معمولاً بین ۳ و ۴، و کم‌ترین مقدار آن در مرکز پلازما به دلیل نوسانات دندانانه اراه‌ای برابر واحد می‌باشد. در حال حاضر ضریب ایمنی در مرز پلاسمای توکامک‌های ایتر (اولین رآکتور گداخت بین‌المللی در حال ساخت) و جت (بزرگ‌ترین توکامک موجود) در حدود ۳ است [۱ و ۲]. انتخاب پروفیل شعاعی q از مسایل مهم و مطرح در تحقیقات تجربی توکامک به شمار می‌رود.

ناپایداری‌های مشهود در توکامک آن‌هایی هستند که در ساده‌ترین شکل خود توسط مدل مگنتوهیدرودینامیک پلازما توصیف می‌شوند. با استفاده از معادلات مگنتوهیدرودینامیک می‌توان پایداری یا ناپایداری یک تعادل مشخص در برابر پریشیدگی‌های به دلخواه کوچک را مورد بررسی قرار داد. روش اصل انرژی، محاسبه‌ی توابع و ویژه‌مقدارها، و حل معادله‌ی مرزی معمولاً سه روش نظری برای تعیین پایداری در توکامک‌ها هستند [۳ تا ۱۰]. تاکنون در این زمینه، تجزیه و تحلیل‌های ریاضی بسیاری با بهره‌گیری از شکل وردشی معادلات صورت گرفته است. این شیوه از بررسی ناپایداری‌ها به اصل انرژی موسوم است. این شیوه‌ی وردشی در تعیین پایداری مدها خیلی دقیق بوده [۱۱]، و تجزیه و تحلیل توسط آن نیز ساده می‌باشد، ولی در مورد آهنگ رشد مدها تنها قادر به تخمین مرتبه‌ی آن‌ها است [۱۲ و ۱۳].

تعادل مگنتوهیدرودینامیک عبارت از توازن کامل نیروها در هر نقطه از فضا می‌باشد. ناپایداری، در حقیقت گرایش به دور شدن از حالت تعادل به واسطه‌ی یک پریشیدگی کوچک دلخواه سرعت است. اصل انرژی مگنتوهیدرودینامیک آرمانی بر این مفهوم استوار است که اگر در اثر وقوع پریشیدگی فیزیکی

مجازی در حالت تعادل، انرژی پتانسیل کاهش یابد، حالت تعادل موجود ناپایدار شده و پلازما به سرعت گسترش می‌یابد. ناپایداری‌هایی که به این ترتیب مورد بررسی قرار می‌گیرند، مدهای آرمانی نام دارند. تغییر انرژی پتانسیل توسط یک جابه‌جایی دلخواه را می‌توان با استفاده از معادلات مگنتوهیدرودینامیک به دست آورد، مشروط بر این‌که پروفیل‌های شعاعی پلازما در دسترس باشد.

در این‌جا، به کمک روش اصل انرژی، برای انرژی پتانسیل در دستگاه مختصات شار و در تقریب نسبت منظر بزرگ یا توکامک مستقیم، به یک شکل انتگرالی دست می‌یابیم [۱۲] و [۱۳]. تحت این شرایط، ناپایداری‌های ایجاد شده با فشار نقش خاصی نداشته و تنها ناپایداری‌های راه‌اندازی شده با جریان، مهم هستند. برای ارزیابی پروفیل‌های تعادلی پلازما در پلاسمای توکامک دماوند با نسبت منظر بزرگ، تحلیل جدیدی از تعادل مگنتوهیدرودینامیک ارائه داده، و نشان می‌دهیم که پروفیل‌های پلازما بر حسب توابع بسل نوع اول به طور صریح قابل بیان هستند. هم‌چنین رابطه‌ی ساده‌ای برای جریان کل چنبره‌ای پلازما به دست می‌آوریم. سپس سایر پروفیل‌های پلازما از جمله شار مغناطیسی قطبی، ضریب ایمنی، و شدت جریان چنبره‌ای را محاسبه می‌کنیم.

در نهایت، محاسبات پایداری را ارائه داده و نشان می‌دهیم که پلاسمای دماوند نسبت به پریشیدگی دست کم نیمی از مدهای مگنتوهیدرودینامیک آرمانی مقاوم است. در این میان، تمام مدهای $n \geq m$ در پلاسمای توکامک دماوند پایدار هستند، در حالی که تنها برای برخی از مدهای $n < m$ پایداری وجود دارد. خواهیم دید که در مقابل عامل ناپایدارساز اصلی، که همان گرادیان شعاعی جریان چنبره‌ای پلازما است، پایدارسازی پلاسمای توکامک در این قسمت توسط ضریب ایمنی تأمین می‌شود که به دلیل حضور جریان چنبره‌ای پلاسمای توکامک است. جریان چنبره‌ای موجب القای میدان مغناطیسی قطبی شده و پروفیل مناسب برای ضریب ایمنی را تأمین می‌نماید. از میان مدهای مورد مطالعه می‌توان به مد خاص $(m,n)=(2,1)$ اشاره نمود که عامل اصلی گسیختگی‌ها در توکامک به شمار می‌رود، و پلاسمای دماوند نسبت به آن ناپایدار است و نیاز به کنترل فعال با پس‌خور دارد. در مورد سایر مدهای آرمانی پایدار، مادامی که جریان چنبره‌ای در اثر القای هسته‌ی مرکزی به صفر نرسیده و ولتاژ حلقه تغییر علامت نداده است، پلاسمای دماوند عمدتاً مقاوم و پایدار خواهد بود.

برای بررسی پایداری در دستگاه‌های چنبره‌ای محصورسازی چون توکامک و به ویژه توکامک دماوند از دستگاه مختصات مناسب برای ساده‌سازی عبارت انرژی پتانسیل استفاده می‌کنیم. در این مورد، دستگاه مختصات شار با مختصه‌های (ζ, θ, α) انتخاب بسیار مناسبی است، که در آن α مختصه‌ی شار (مثلاً شعاع یا حجم سطوح شار مغناطیسی) و مختصه‌های θ و ζ مانند دستگاه مختصات چنبره‌ای بیان‌گر زاویه‌ی قطبی و چنبره‌ای هستند. در این حالت می‌توان نوشت [۱۱]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int (Q + \xi^1 \frac{j \nabla a}{|\nabla a|^2})^2 + \gamma P_0 (\nabla \cdot \xi)^2 - K (\xi^1)^2 dV \quad (3)$$

که در آن با در نظر گرفتن علامت جملات، به شرط کافی $K < 0$ برای پایداری می‌رسیم. Q میدان مغناطیسی پریشیده است، یعنی $B_1 = \nabla \times [\xi \times B_0] = Q$ ، و ما پریشیدگی میدان را کوچک در نظر می‌گیریم، یعنی $|B_0| \gg |B_1|$. بردار جابه‌جایی عنصری از پلاسما است که مؤلفه‌های آن در دستگاه مختصات شار را به شکل $\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3$ نمایش می‌دهیم. در رابطه‌ی (۳)، ξ^1 مؤلفه‌ی بردار در راستای مختصه‌ی شار α دستگاه مختصات شار (ζ, θ, α) می‌باشد. اما بردار K به شکل زیر تعریف می‌شود

$$K = \frac{j^2}{|\nabla a|^2} + P'' - \frac{[B \nabla a]}{|\nabla a|^2} \nabla \times \frac{[j \nabla a]}{|\nabla a|^2}$$

حال با توجه به روابط موجود در دستگاه مختصات منحنی‌الخط، پس از محاسبه‌ی ضرایب متری، با عملیات جبر برداری میان مؤلفه‌های ناورد، تک‌تک جملات رابطه‌ی (۳) را محاسبه و جای‌گذاری می‌کنیم. به این ترتیب، به عبارت زیر می‌رسیم [۱۱]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \{g_{11}(Q^1)^2 + 2g_{12}Q^1Q^2 + g_{22}(Q^2)^2 + 2g_{13}Q^1Q^3 + 2g_{23}Q^2Q^3 + 2g_{33}(Q^3)^2 + 2Q^2F_2\xi^1 + 2Q^3F_3\xi^1 + \gamma P(\nabla \cdot \xi)^2 + F_0(\xi^1) - K(\xi^1)^2\} dV \quad (4)$$

که در آن، g_{ij} ضرایب متری، Q^i مؤلفه‌های ناوردای میدان پریشیده هستند. هم‌چنین توابع F_i عبارت‌اند از

در تقریب مگنتوهیدرودینامیک غیرآرمانی، رسانایی الکتریکی محدود پلاسما موجب پارگی و به هم پیوستن خطوط مغناطیسی و در نتیجه تشکیل جزایر مغناطیسی می‌گردد. بدیهی است که هنوز امکان گسترش مدهای مگنتوهیدرودینامیک غیرآرمانی یا مقاومتی در پلاسما دماوند وجود دارد، ولی آهنگ رشد مدهای مقاومتی بسیار کندتر از مدهای آرمانی است. در هر صورت، امکان رشد یک مد غیرآرمانی (m, n) حتی وقتی که مد آرمانی (m, n) مربوطه پایدار شده است، وجود دارد. در ادامه به تشریح اصل انرژی و چگونگی کاربرد آن پرداخته شده است. سپس نتایج محاسبات تعادل و پایداری ارایه شده‌اند. در پایان، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری آورده شده است. هم‌چنین محاسبات مربوط به تعادل در پیوست الف و چگونگی استخراج پروفیل ضریب ایمنی در پیوست ب آورده شده‌اند.

۲- اصل انرژی

تغییر انرژی در اثر جابه‌جایی پلاسما، $\xi(x)$ ، از انتگرال حجمی زیر به دست می‌آید [۳ تا ۱۰]

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \xi \cdot F dV \quad (1)$$

$F(x)$ نیروی ناشی از جابه‌جایی است. با توجه به شکل خطی پریشیدگی، از معادلات مگنتوهیدرودینامیک، برای فشار P ، چگالی جریانی الکتریکی j و میدان مغناطیسی B داریم $(B_0 = \nabla \times (\xi \times B_0))$ ، $B_1 = \nabla \times (\xi \times B_0)$ ، و نیز $j_1 = \nabla \times B_1 / \mu_0$. هم‌چنین فشار پریشیده عبارت است از $P_1 = -\gamma P_0 \nabla \cdot \xi - \xi \cdot \nabla P_0$. زیرنویس‌های صفر و یک به ترتیب نشانه‌های مربوط به تعادل و پریشیدگی‌اند. پس می‌توان تغییر انرژی پتانسیل، δW ، را به صورت زیر نوشت

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [\gamma P_0 (\nabla \cdot \xi)^2 + (\xi \cdot \nabla P_0) \nabla \cdot \xi + \frac{1}{\mu_0} B_1^2 - j_0 \cdot (B_1 \times \xi)] dV + \frac{1}{2} \int (P_1 + \frac{1}{\mu_0} B_0 \cdot B_1) \xi \cdot dS \quad (2)$$

به طور کلی، با توجه به شکل دستگاه و نوع بررسی، عبارت‌های مختلفی برای انرژی پتانسیل وجود دارد. در این جا



اگر مؤلفه‌های موازی و عمود بر میدان مغناطیسی بردار جابه‌جایی یعنی، $u = \xi_{\perp}$ و $u_{\parallel} = \lambda$ را در نظر بگیریم، رابطه‌ی بین ξ_{\perp} و u چنین است $\xi_{\perp}' = \phi'$ برای λ نیز داریم $\frac{\partial u}{\partial \theta} = u'_{\theta} = \xi_{\perp}'$. از آن‌جا که میدان چنبره‌ای در مقایسه با میدان قطبی بسیار بزرگ است، پریشیدگی این میدان ناچیز و در حدود صفر می‌باشد. پس $u'_a = \lambda - \tilde{\lambda}$ را تعریف و برای پریشیدگی تابع شار چنین دست می‌آوریم $\Psi = \mu u'_{\theta} + u_{\xi}$. از بازنویسی تمامی جملات رابطه‌ی (۶) با توجه به تعاریف و کمیت‌های جدید، برای مؤلفه‌های Q^i ، و توابع F_0, F_1, F_2 به ترتیب داریم $Q^1 = (\sqrt{g})^{-1} \partial \psi / \partial \theta$ ، $Q^2 = -(\sqrt{g})^{-1} \partial \tilde{\lambda} / \partial \theta$ و $Q^3 = (\sqrt{g})^{-1} (\partial \tilde{\lambda} / \partial \xi - \partial \psi / \partial a)$ ، $F_0 = (\sqrt{g})^{-1} (F' \phi'' + \mathfrak{I}' \chi'')$ که در آن‌ها \mathfrak{I}' و F' ، به ترتیب، مشتق جریان چنبره‌ای و قطبی نسبت به α می‌باشند.

در این جا، ناپایداری‌هایی را در نظر می‌گیریم که در نبود گرادیان فشار پدید می‌آیند. لذا در روابط بالا P' را صفر در نظر می‌گیریم. اگر این مقادیر را در معادله‌ی (۶) قرار دهیم، رابطه‌ی انرژی پتانسیل برحسب دو متغیر پریشیده یعنی تابع شار Ψ و پریشیدگی میدان طولی $\tilde{\lambda}$ در دستگاه مختصات شار این است

$$\delta W = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)^2 + \frac{R^2}{\alpha} (\partial \tilde{\lambda} / \partial \theta)^2 + R \xi^2 [F'(a) \phi''(a) + \mathfrak{I}'(a) \chi''(a)] - 2RF'(a) \xi \left(\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \theta}\right) + 2R \xi \mathfrak{I}'(a) \left(\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial a}\right) \right\} da d\theta d\xi \quad (7)$$

برای تعیین علامت δW نسبت به این پریشیدگی‌ها، با توجه به معادله‌ی اویلر، اصل وردشی تابع زیر انتگرال را نسبت به این متغیرها کمینه می‌کنیم. معادله‌ی اویلر برای W عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \lambda'_{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda'_{\theta}} = \frac{\partial W}{\partial \lambda} \quad (8)$$

$$F_0 = \frac{P'}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial a} - \left[j^2 \frac{\partial}{\partial a} (\sqrt{g} B^3) - j^3 \frac{\partial}{\partial a} (\sqrt{g} B^2) \right]$$

$$F_2 = \sqrt{g} j^3$$

$$F_3 = -\sqrt{g} j^2$$

رابطه‌ی (۴) یک رابطه‌ی کلی برای هر سیستم چنبره‌ای از جمله استلاراتور می‌باشد. در توکامک با توجه به تقارن محوری، ضرایب متری کاهش می‌یابند، یعنی $g_{12} = g_{21}$ و $g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0$ بنابراین، رابطه‌ی (۴) برای توکامک به صورت زیر درمی‌آید

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \{ g_{11} (Q^1)^2 + 2g_{12} Q^1 Q^2 + g_{22} (Q^2)^2 + 2g_{33} (Q^3)^2 + 2Q^2 F_2 \xi^1 + 2Q^3 F_3 \xi^1 + F_0 (\xi^1)^2 \} dV \quad (5)$$

حال مسأله را برای پلاسمای تراکم‌ناپذیر در نظر می‌گیریم، یعنی $\nabla \xi = 0$. با فرض توکامکی با نسب منظر بزرگ، یعنی $R/\alpha \gg 1$ ، برای ضرایب متری و دیگر کمیت‌ها خواهیم داشت $g_{11} = 1$ ، $g_{22} = \alpha^2$ ، $g_{33} = R^2$ و $\sqrt{g} = Ra$. برای عنصر حجم نیز داریم $dV = \sqrt{g} da d\theta d\xi$. از این رو، می‌توان نوشت

$$\delta W = \frac{1}{2} \int Ra da d\theta d\xi \{ (Q^1)^2 + \alpha^2 (Q^2)^2 + 2R^2 (Q^3)^2 + 2\xi Q^2 F_2 + 2\xi Q^3 F_3 + F_0 \xi^2 \} \quad (6)$$

اینک می‌خواهیم رابطه‌ی بالا را با توجه به تابع شار مغناطیسی قطبی χ و شار مغناطیسی چنبره‌ای ϕ بنویسیم. با توجه به این واقعیت که این توابع تنها تابعی از مختصه‌ی شار می‌باشند، می‌توان نوشت $\phi' = \phi'(a)$ و $\chi' = \chi'(a) = -\psi'(a)$. بنابراین داریم $\chi(a) = \psi - \psi(a)$ که در آن ψ یک ثابت و بیان‌گر شار مغناطیسی بر روی محور پلازما $\alpha = 0$ است. از سوی دیگر با توجه به تعریف ضریب ایمنی، برای پارامتر انتقال چرخشی خواهیم داشت $\mu = \chi' / \phi' = -\psi' / \phi'$ [۲، ۳، ۴]. برای محاسبه‌ی این تابع احتیاج به شناخت آرایش تعادلی پلازما داریم و این مطلب در پیوست‌های الف و ب بیان شده است.

برای این منظور جابه‌جایی معمولاً به صورت یک سری فوریه در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_m \sum_n \xi_{m,n}(a) \cos(m\theta - n\zeta) \\ \psi(a, \theta) &= \sum_m \sum_n \psi_{m,n}(a) \cos(m\theta - n\zeta) \\ \delta W &= \sum_m \sum_n \delta W_{m,n} \end{aligned} \quad (11)$$

که در دو راستای قطبی و چنبره‌ای با دامنه‌ی $\xi_{m,n}(a)$ می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی شار پریشیده و جابه‌جایی می‌توان نوشت

$$\xi = \frac{\psi}{\phi'} \left(\mu - \frac{n}{m} \right)^{-1} \quad (12)$$

با توجه به روابط (11) و (12)، رابطه‌ی (10) را می‌توان برای حالتی که تنها پریشیدگی مد (m,n) وجود دارد نوشت

$$\begin{aligned} \delta W_{m,n} &= \int \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{a} \psi' m' \sin^2(m\theta - n\zeta) \right. \\ &+ R \phi' \zeta' \mu' \frac{\psi'^2}{(\phi')^2 (\mu - n/m)} \cos^2(m\theta - n\zeta) \\ &- 2R \zeta' \left(\frac{\psi}{\phi'} \right) \frac{\psi'}{(\mu - n/m)} \cos^2(m\theta - n\zeta) \\ &\left. + a(\psi')^2 \cos^2(m\theta - n\zeta) \right\} da d\theta d\zeta \end{aligned} \quad (13)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا روی زوایای θ و ζ داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(m\theta - n\zeta) d\theta d\zeta &= \frac{1}{2} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta - n\zeta) d\theta d\zeta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس از انتگرال‌گیری و پاره‌ای محاسبات، رابطه‌ی (13) به این صورت درمی‌آید

$$\delta W_{m,n} = \int \frac{da}{4\pi R} \left\{ \frac{m^2 \psi^2}{a} + a(\psi')^2 - \frac{R \zeta'}{\phi'} \left(\frac{\psi^2}{\mu - \frac{n}{m}} \right)' \right\} \quad (14)$$

با توجه به رابطه‌های (7) و (8) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \delta W_{\min}(\tilde{\lambda}) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[2a \left(\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial a} \right) + 2R \zeta' \mathfrak{Z}'(a) \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{2R^2}{a} \left(\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \theta} \right) - 2F'(a) \xi \right] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

با توجه به تقریب ممکن نسبت منظر $\alpha/R \ll 1$ ، جملات رابطه‌ی بالا را مرتبه‌بندی می‌کنیم. این روش در توکامک‌های با بتای پایین مانند توکامک دماوند صادق است، زیرا در آن داریم $\beta \propto \alpha/R$ ، لذا می‌توان نوشت

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{2}{R} \zeta' \mathfrak{Z}'(a) \right] = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{2}{a} \left(\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \theta} \right) \right]$$

در نتیجه، مرتبه‌ی $\tilde{\lambda}$ عبارت خواهد بود از $\tilde{\lambda} \propto \frac{a}{R} \xi \chi'(a)$. پس در تقریب نسبت منظر بزرگ، پریشیدگی میدان طولی $\tilde{\lambda}$ نسبت به بزرگی میدان طولی بسیار کوچک است و می‌توان از آن در عبارت پتانسیل صرف نظر کرد. در این صورت انرژی پتانسیل (رابطه‌ی 9)، به شکل ساده‌ی زیر تنها تابع شار ψ است

$$\begin{aligned} \delta W &= \int \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 + a \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)^2 - 2R \zeta' \mathfrak{Z}'(a) \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right) \right. \\ &\left. + R \xi'^2 [F'(a) \phi''(a) + \mathfrak{Z}'(a) x''(a)] \right\} da d\theta d\zeta \end{aligned} \quad (10)$$

جمله‌ی آخر معادله‌ی بالا را می‌توان با توجه به معادله‌ی تعادل در توکامک بر حسب مشتق کمیت انتقال چرخشی μ' نوشت، یعنی

$$\delta W = \int \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 + a \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)^2 - 2R \zeta' \mathfrak{Z}'(a) \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right) + R \xi'^2 \mathfrak{Z}'(a) \phi'(a) \mu'(a) \right\} da d\theta d\zeta \quad (10)$$

با توجه به ارتباط موجود میان پارامترهایی چون تابع شار، ψ ، و جابه‌جایی پلاسما، ξ ، رابطه‌ی (10) ساده‌تر شده و با میانگین‌گیری روی هر سطح شار و روی زوایای قطبی و چنبره‌ای، θ و ζ ، انتگرال فوق تنها بر حسب a به دست می‌آید.



۳- نتایج

برای حل عددی معادله‌ی (۱۵)، شناخت مقادیر عددی تمامی پارامترها ضروری است. برخی از این پارامترها بر اساس داده‌های طراحی و یا تجربی توکامک دماوند در دسترس هستند. برای توکامک دماوند، $B_0 = 1.1 \text{ T}$ ، $R = 37 \text{ cm}$ ، $a = 7 \text{ cm}$. اگر ضریب ایمنی روی مرز پلاسما را $q(\alpha) = q_{\max} = 4$ فرض کنیم آن‌گاه با حل توأم معادله‌ی (ب-۹) پیوست ب روی مرز پلاسما ($\rho = a$) و معادله‌ی (ب-۱۱) پیوست ب روی محور پلاسما $\rho = 0$ پارامترهای باقی‌مانده را می‌توان محاسبه کرد

$$\Psi_c = 5.72 \times 10^{-3} \text{ Wb} \quad (1-17)$$

$$k = 49.1 \text{ m}^{-1} \quad (2-17)$$

برای اطمینان از صحت نتایج، می‌توان جریان پلاسما را نیز محاسبه کرد. با انتگرال‌گیری مستقیم از رابطه‌ی (۱۶-۳) خواهیم داشت

$$I_p \approx \int_0^a J(\rho) 2\pi\rho d\rho = \frac{2\pi k \Psi_c a}{\mu_0 R} J_1(ka) \quad (18)$$

با جای‌گذاری مقادیر عددی چنین به دست می‌آید

$$I_p = 43.1 \times 10^3 \text{ A} \quad (19)$$

مقدار حقیقی به دست آمده از اندازه‌گیری تجربی برای توکامک دماوند حدود $I_p = 40 \times 10^3 \text{ A}$ می‌باشد که صحت نتایج و مدل را با خطایی در حدود ۷.۵٪ تأیید می‌نماید.

در شکل ۱ تغییرات شار قطبی برحسب شعاع فرعی نمایش داده شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود مقدار شار قطبی در مرکز پلاسما برابر صفر بوده و در مرز به حداقل می‌رسد. از این نظر شار قطبی با شعاع فرعی دارای روند نزولی است. شکل ۲ نشان‌دهنده‌ی تغییرات ضریب ایمنی بر روی محور پلاسما می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار ضریب ایمنی روی محور پلاسما با شروع از واحد، روندی مطلقاً صعودی دارد. در شکل ۳ تغییرات چگالی جریان چنبره‌ای برحسب شعاع فرعی ترسیم شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود شدت جریان

به کمک روابط $\phi' = 2\pi a B_t$ و $\psi' = 2\pi a j_t$ ، رابطه‌ی (۱۴) برای انرژی پتانسیل مدهای آرمانی چنین خواهد بود

$$\delta W_{m,n} = \frac{1}{4\pi R_0} \int \rho \left\{ (\psi')^2 + \frac{m^2 \psi^2}{\rho^2} - \frac{RJ}{\rho B_0} \left(\mu - \frac{n}{m} \right) \right\} d\rho \quad (15)$$

که در آن به جای j_t از j ، به جای B_t از B_0 ، و به جای a از ρ استفاده شده است. در این‌جا، علامت پریم نشانه‌ی مشتق نسبت به ρ است. اکنون با ارزیابی عددی رابطه‌ی (۱۵) و با در نظر گرفتن نوع پروفیل جریان می‌توان به بررسی پایداری پرداخت.

با توجه به نتایج پیوست‌های الف و ب داریم

$$\psi(\rho) = \psi_c [J_0(k\rho) - 1] \quad (1-16)$$

$$\mu(\rho) = \frac{k \psi_c J_1(k\rho)}{2\sqrt{\pi} B_{t0}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{n!} \frac{\rho^{2n+1}}{R_0^{2n}} \right]^{-1} \quad (2-16)$$

هم‌چنین بر اساس معادله‌ی گراد-شفرانف و رابطه‌ی (الف-۹) پیوست الف می‌توان نوشت

$$-\mu_0 R J \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi$$

و از آن‌جا با استفاده از رابطه‌ی (۱-۱۶) داریم

$$J(\rho) \approx \frac{k \Psi_c}{2\mu_0 R_0 \rho} \{ k \rho [J_0(k\rho) - J_2(k\rho)] + 2J_1(k\rho) \} \quad (3-16)$$

از رابطه‌ی فوق به سادگی می‌توان دید که (بیشینه) چگالی جریان چنبره‌ای روی محور پلاسما عبارت است از

$$J(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} J(\rho) = \frac{k^2 \Psi_c}{\mu_0 R_0} \quad (4-16)$$

در بخش بعد به تشریح نتایج عددی مدل می‌پردازیم.

با در اختیار داشتن مقادیر عددی تمامی پارامترها و توابع مورد نیاز، به کمک رابطه‌ی (۱۵) می‌توان تغییرات انرژی، $\delta W_{m,n}$ ، را برای m و n داده شده به دست آورد. در انتگرال رابطه‌ی (۱۵) می‌توان نوشت

$$\delta W_{m,n} = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 \quad (20)$$

که در آن

$$\delta W_1 = \frac{1}{4\pi R_0} \int_0^a \psi'^2 \rho d\rho = \frac{a^3}{12\pi R_0} \psi_c \left[{}_1F_2\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}, \left\{1, \frac{5}{2}\right\}; -\frac{1}{4}k^2 a^2\right) - 1 \right] \quad (1-21)$$

$$\delta W_2 = \frac{1}{4\pi R_0} \int_0^a \frac{m^2}{\rho} \psi' d\rho = -\frac{ak^2 \psi_c}{4\pi R_0} {}_1F_2\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}, \left\{\frac{5}{2}, 2\right\}; -\frac{1}{4}k^2 a^2\right) \quad (2-21)$$

$$\delta W_3 = -\frac{1}{4\pi B_0} \int_0^a J \left(\frac{\psi^2}{\mu - n/m} \right)' d\rho \quad (3-21)$$

در این جا، ${}_1F_2(a,b;z)$ توابع فوق هندسی گاوسی هستند [۱۶]. حل عددی معادله‌ی (۳-۲۱) با توجه به شکل تابع $\mu(\rho)$ دشوار است، ولی با انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت

$$\delta W_3 = -\frac{1}{4\pi B_0} \int_0^a J \left(\frac{\psi^2}{\mu - \frac{n}{m}} \right)' d\rho = -\frac{1}{4\pi B_0} \left[\frac{J\psi^2}{\mu - \frac{n}{m}} \right]_{\rho=0}^{\rho=a} + \frac{1}{4\pi B_0} \int_0^a \frac{\psi^2}{\mu - \frac{n}{m}} J d\rho$$

اما با توجه به این که، $J(\alpha) = 0$ و $\psi(0) = 0$ داریم

$$\delta W_3 = \frac{1}{4\pi B_0} \int_0^a \frac{\psi^2}{\mu - n/m} J' d\rho \quad (22)$$

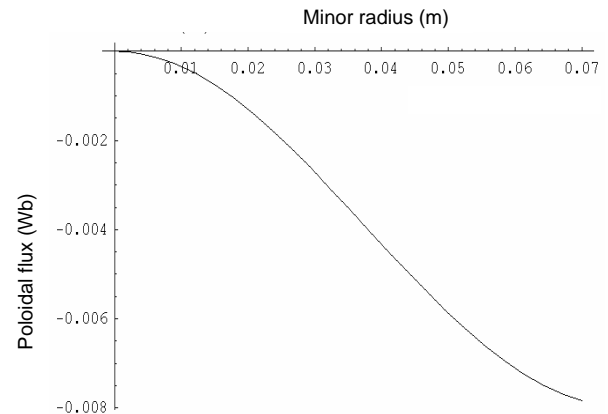
از نظر عددی حل معادله‌ی (۲۲) ساده‌تر از معادله‌ی (۳-۲۱) می‌باشد.

شرایط پایداری و ناپایداری به قرار زیر هستند

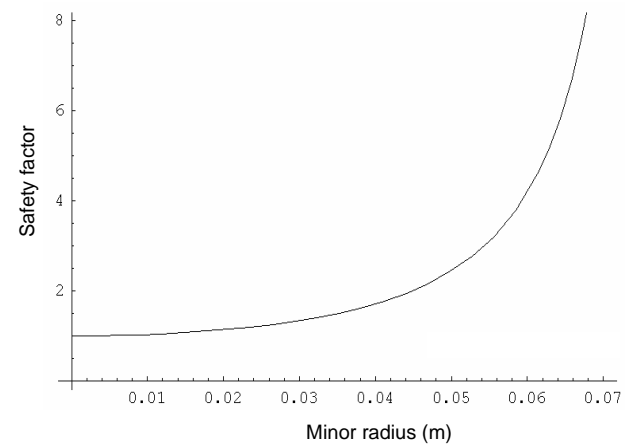
$$\delta W_{m,n} > 0 \quad (1-23) \quad \text{تعادل پایدار}$$

$$\delta W_{m,n} < 0 \quad (2-23) \quad \text{تعادل ناپایدار}$$

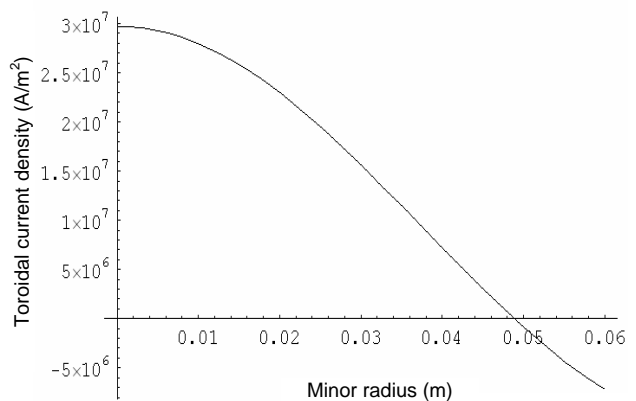
چنبره‌ای در مرکز پلاسما به بیشینه مقدار خود رسیده و طبق رابطه‌ی (۱۶-۴)، $J(\psi) = 2.97 \times 10^7 \text{ Am}^{-2}$



شکل ۱- تغییرات شار قطبی برحسب شعاع فرعی در توکامک دماوند.



شکل ۲- تغییرات ضریب ایمنی برحسب شعاع فرعی در توکامک دماوند.



شکل ۳- تغییرات چگالی جریان چنبره‌ای برحسب شعاع فرعی در توکامک دماوند.



جدول ۱- نمایش پایداری آرایش تعادل چنبره‌ای دماوند نسبت به مدهای مختلف؛ U برای نمایش مد ناپایدار و S برای مد پایدار به کار رفته است. خانه‌هایی که دارای پس‌زمینه‌ی سیاه هستند متعلق به مدهایی هستند که خارج از پلاسما قرار دارند.

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	S	U	U	U	U	U	U	U	U	U
2	S	S	S	U	U	U	U	U	U	U
3	S	S	S	S	U	U	U	U	U	U
4	S	S	S	S	S	S	S	U	S	S
5	S	S	S	S	S	S	S	S	U	U
6	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
7	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
8	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
9	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
10	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S

مطابق جدول ۱، توکامک دماوند نسبت به غالب مدها پایدار است. می‌توان مشاهده کرد که تمامی مدهای (m,n) با $n \geq m$ پایدار هستند. دلیل آن این است که در رابطه‌ی (۲۰) جمله‌ی غالب همان δW_3 است که علامت آن را به سادگی می‌توان با کمی دقت تعیین نمود. در تعیین علامت δW_3 باید دقت کرد که در داخل انتگرال ψ^2 مثبت بوده و z' به دلیل روند مطلقاً نزولی‌اش (مطابق شکل ۳) دارای علامت منفی است. اما چون برای آرایش دماوند مطابق شکل ۲، $q \geq 1$ است می‌توان دید که همواره $1 \leq q^{-1} = \mu$. بنابراین وقتی $n/m \geq 1$ باشد خواهیم داشت $0 < \mu - n/m$. اصولاً این دسته از مدها در داخل یا در خارج پلاسما دچار تشدید نمی‌شوند، زیرا با توجه به $q \geq 1$ و $n/m \geq 1$ هیچ سطح مغناطیسی، $q(r) = m/n$ را برآورد نمی‌کند و امکان تشدید وجود ندارد. این بدان معنی است که برای مدهای $n \geq m$ عبارت داخل انتگرال در رابطه‌ی (۲۲) همواره مثبت، و $\delta W_{m,n} \propto \delta W_3$ و مثبت خواهد بود که به پایداری مد اشاره می‌کند. این‌ها شامل مدهای $m=1$ نیز هستند که با کارکرد در زیر حد مارتین-کروسکال [۳، ۱۲ و ۱۳] پایدار می‌شوند. اما در دماوند این شرط به دلیل $q(a) > 1$ به خودی خود برقرار است و در نتیجه این مدها نیز مطابق جدول ۱ پایداراند.

مدهای ناپایدار در آرایش توکامک دماوند همگی دارای m بزرگ و n کوچک هستند و در نامساوی $m > n$ صدق می‌کنند. نکته‌ی جالب توجه دیگر آن است که آرایش تعادلی دماوند نسبت به پریشیدگی مد آرمانی $(2,1)$ ، که عموماً عامل

ضمن محاسبات عددی مشاهده شد که تقریب $\delta W_{m,n} = \delta W_3$ معمولاً با دقت خوبی برای پلاسماهای دماوند با نسبت منظر بزرگ برقرار است. این بدان معنی است که وضعیت پایداری پلاسما به شدت به تابع z' یا گرادیان شعاعی چگالی جریان چنبره‌ای وابسته است. این نتیجه با این موضوع که در تقریب توکامک مستقیم تنها مدهای راه‌اندازی شده با جریان ایفای نقش می‌کنند [۱۲ و ۱۳]، هم‌خوانی دارد. در نتیجه، اگر در یک آرایش مغناطیسی جریان فاقد گرادیان باشد، تعادل درست در مرز ناپایداری و پایداری قرار می‌گیرد. خروج از این بن‌بست در آرایش توکامک، با القای جریان چنبره‌ای صورت می‌گیرد که ضمن القای میدان مغناطیسی قطبی، موجب می‌شود ضریب ایمنی شعاع فرعی چنبره روند افزایشی داشته، و z' نیز غیر صفر باشد. خواهیم دید که این تکنیک در توکامک برای مصون‌سازی پلاسما نسبت به بسیاری از مدهای آرمانی کافی است.

نکته‌ی دیگر امکان حضور صفر در مخرج کسر در انتگرال رابطه‌ی (۲۲) است. اگر پلاسماهای توکامک برای (m,n) داده شده و در شعاع فرعی خاصی دارای شرط $\mu - n/m = 0$ باشد، مد پریشیدگی روی سطح مربوطه دچار تشدید می‌شود. تحت این شرایط، امکان ناپایداری وجود دارد. ولی همان‌طور که خواهیم دید در عمل بسیاری از مدهایی که دارای تشدید در درون پلاسما هستند موجب گسترش ناپایداری در پلاسما نمی‌شوند، زیرا غالباً تغییرات انرژی پتانسیل مربوطه به شکلی است که مصونیت پلاسما را تضمین می‌نماید؛ این دسته از مدها تحت عنوان مدهای کینک داخلی شناخته می‌شوند. هم‌چنین پاره‌ای از مدهای پریشیدگی (m,n) به گونه‌ای هستند که تشدید آن‌ها در خارج از پلاسما رخ می‌دهد و تحت عنوان مدهای کینک خارجی شناخته می‌شوند، و عموماً ناپایدار هستند.

نتایج محاسبه‌ی عددی پایداری مدها برای $n,m=1..10$ بر اساس تعیین علامت δW در جدول ۱ آورده شده است. در این جا U برای نمایش مد ناپایدار و S برای مد پایدار به کار رفته است. خانه‌هایی که دارای پس‌زمینه‌ی سیاه هستند متعلق به مدهایی هستند که خارج از پلاسما قرار دارند و بنابراین طبق بحث فوق غیرفیزیکی هستند.

آمده، پریشیدگی را به شکل سری در نظر گرفته و با وارد کردن کمیت انتقال چرخشی و اعداد مدی m و n پس از میانگین گیری روی زوایای قطبی و چنبره‌ای به رابطه‌ای رسیدیم که شامل فقط پروفیل‌های شار مغناطیسی قطبی، ضریب ایمنی و چگالی جریان چنبره‌ای است. برای محاسبه‌ی پروفیل‌های مورد نظر از روش جدیدی برای محاسبه‌ی تعادل استفاده کرده‌ایم که منجر به روابطی ساده و صریح برای پروفیل‌های گوناگون شعاعی پلاسما گردید. هم‌چنین جریان کل چنبره‌ای پلاسما به دست آورده شد. از طریق برآزش با داده‌های موجود برای دماوند توانستیم پروفیل‌های حقیقی را محاسبه و ترسیم نماییم و در نهایت شرایط پایداری را نسبت به مدهای گوناگون آرمانی به دست آوریم. نشان دادیم که پلاسماهای دماوند نسبت به مدهایی که یکی از شرایط $m/n \leq 1$ یا $m/n \geq 4$ را برآورد می‌کنند به ترتیب اصولاً پایدار و یا فاقد سطح تشدید در درون خود است. در ارتباط با سایر مدهایی که با $1 < m/n < 4$ مشخص می‌شوند، تنها تعداد معدودی امکان ایجاد ناپایداری و گسترش آن را دارند.

پیوست الف- شار قطبی

در این جا به بررسی تعادل پلاسماهای توکامک با استفاده از معادله‌ی گراد-شفرانف می‌پردازیم و از مدل تعادلی و دستگاه مختصات مناسب استفاده می‌کنیم. برای اولین بار نشان می‌دهیم که حل تحلیلی معادله‌ی گراد-شفرانف در تقریب خطی از طریق ادغام روش‌های پریشیدگی و توابع گرین به صورت صریح قابل انجام است. در تقریب توکامک با سطح مقطع دایره‌ای و نسبت منظر بزرگ به رفتار مورد انتظار دست می‌یابیم.

در هندسه‌ی چنبره‌ای متقارن محوری شکل تعمیم یافته، معادله‌ی گراد-شفرانف در دستگاه مختصات استوانه‌ای (R, Z, φ) چنین است [۳]

$$\Delta^* \psi = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_e R J_t = -\mu_e R \left[\frac{\partial F(\psi)}{\partial \psi} - \mu_e I(\psi) \frac{\partial I(\psi)}{\partial \psi} \right] \quad (\text{الف-1})$$

که در آن، $F(\psi)$ فشار پلاسما است. هم‌چنین داریم

$$I(\psi) = RB_t / \mu_0 \quad (\text{الف-2})$$

گسیختگی در توکامک‌ها است، ناپایدار بوده و بایستی توسط مدار پس‌خور کنترل و پایدار گردد. ضمناً اگر $q_{\max} \leq m/n$ برقرار باشد، آن‌گاه سطح تشدید در خارج از مرز فیزیکی پلاسما قرار می‌گیرد. تحت این شرایط برای مدهای کینک خارجی $\mu - n/m > 0$ است و بنابراین با توجه به بحث‌های فوق $\delta W_{m,n} \propto \delta W_p$ و منفی خواهد بود که به ناپایداری مد اشاره می‌کند. این دسته از مدها در جدول ۱ با پس‌زمینه‌ی سیاه نمایش داده شده‌اند و همگی ناپایداراند.

در نهایت بر اساس اطلاعات جدول ۱ می‌توان دریافت که برای مدهای $n, m=1..10$ در توکامک دماوند وخیم‌ترین ناپایداری‌ها که دارای سطح تشدید در درون پلاسما هستند عبارت‌اند از $(m=2, n=1)$ و $(m=3, n=1)$ ، $(m=4, n=2)$ ، $(m=5, n=2)$ ، $(m=3, n=3)$ ، $(m=4, n=4)$ ، $(m=5, n=4)$ و $(m=9, n=5)$. از بین مدهای ناپایدار آن‌هایی که دارای نسبت m/n کوچک‌تر هستند در سطوح درونی‌تر پلاسما دچار تشدید شده و وخیم‌تراند. بنابراین از میان مدهای نام برده شده، مد $(m, n) = (5, 3)$ با نسبت $n/m \approx 1.7$ دچار شدیدترین ناپایداری خواهد شد.

همان‌طور که در مقدمه نیز اشاره شد در تقریب مگنتوهیدرودینامیک غیر آرمانی، رسانایی الکتریکی محدود پلاسما موجب پارگی و به هم پیوستن خطوط مغناطیسی و در نتیجه تشکیل جزایر مغناطیسی می‌گردد. تحت این شرایط هنوز امکان گسترش مدهای مگنتوهیدرودینامیک غیر آرمانی یا مقاومتی وجود خواهد داشت، ولی چون آهنگ رشد مدهای مقاومتی بسیار کندتر از مدهای آرمانی و در حد چند تا چند صد میکروثانیه است، معمولاً به کمک مدارهای پس‌خور کنترل فعال می‌توان آن‌ها را پایدار نمود. در هر صورت امکان رشد یک مد غیر آرمانی (m, n) حتی وقتی که مد آرمانی (m, n) مربوطه پایدار شده است وجود دارد.

۴- نتیجه گیری

در این پژوهش بر اساس روش اصل انرژی، تابع انرژی پتانسیل پلاسما را به دست آوردیم. در این جا از دستگاه مختصات شار در توکامک‌هایی با نسبت منظر بزرگ، یا توکامک مستقیم استفاده کرده‌ایم. برای دست‌یابی به شرط پایداری از عبارت به دست آمده، لازم است با توجه به اصل وردشی، تابع زیرانتگرال را نسبت به پریشیدگی کمینه کرد و علامت عبارت حاصل را به دست آورد. برای این منظور پس از ساده‌سازی عبارت به دست



$$I(\psi) \frac{\partial}{\partial \psi} I(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \psi^n \approx I_0 + I_1 \psi + I_2 \psi^2 \frac{\partial}{\partial \psi} F(\psi)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n \psi^n \approx F_0 + F_1 \psi + F_2 \psi^2 \quad (\text{الف-۸})$$

به گونه‌ای که

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi_0 \approx -A_0 - A_1 \psi_0 - A_2 \psi_0^2 \quad (\text{الف-۹-۱})$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \psi_1 \approx \frac{\cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \psi_0 -$$

$$r \cos \theta (B_0 + B_1 \psi_0 + B_2 \psi_0^2 - (A_1 + 2A_2 \psi_0) \psi_1) \quad (\text{الف-۹-۲})$$

که در آن، $B_n = \nu \mu_0 R_0 F_n$ و $A_n = \mu_0 (R_0 F_n + \mu_0 I_n)$ ، شرایط اولیه برای معادله‌های (الف-۹) عبارت‌اند

$$\psi_0 \Big|_{r=0} = \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (\text{الف-۱۰-۱})$$

$$\psi_1 \Big|_{r=0} = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (\text{الف-۱۰-۲})$$

در نتیجه در تقریب خطی برای شار مغناطیسی در درون پلاسما داریم

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + A_1 \right] \psi_0 = -A_0 \quad (\text{الف-۱۱-۱})$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + A_1 \right] \psi_1 \approx \frac{\cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \psi_0 -$$

$$r \cos \theta (B_0 + B_1 \psi_0) \quad (\text{الف-۱۱-۲})$$

لذا، حل تحلیلی معادله‌ی (۱-۱۱) به کمک توابع بسل امکان‌پذیر خواهد بود

$$\psi_0(r) = \psi_c [J_0(kr) - 1] \quad (\text{الف-۱۲})$$

در این جا، $k = \sqrt{A_1}$ و $\psi_c = A_0/A_1$. در شکل ۱ نتایج حاصل از حل معادله‌ی (الف-۱۲) دیده می‌شود که با رفتار واقعی شار مغناطیسی قطبی کاملاً مطابقت می‌کند. رابطه‌ی (الف-۱۲) برای

در این جا، B_1 میدان مغناطیسی چنبره‌ای است. از مدل تعادلی سولوویو^(۱) [۴ و ۱۴] برای نسبت منظر بزرگ استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل پارامتری مختصات شبه چنبره‌ای (r, θ, ϕ) و دستگاه مختصات استوانه‌ای (R, φ, z) داریم

$$(R, \varphi, z) = (R_0 + r \cos \theta, \phi, r \sin \theta) \quad (\text{الف-۳})$$

لذا معادله‌ی (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \psi - \frac{1}{R_0 + r \cos \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi =$$

$$- \mu_0 (R_0 + r \cos \theta)^2 \frac{\partial F(\psi)}{\partial \psi} - \mu_0^2 I(\psi) \frac{\partial I(\psi)}{\partial (\psi)} \quad (\text{الف-۴})$$

در آرایش تعادلی سولوویو و در دستگاه مختصات شبه چنبره‌ای (r, θ, ϕ) ، سطوح شار مغناطیسی تقریباً به صورت دایره‌های هم‌مرکز دیده می‌شوند. به عنوان یک تقریب مناسب در این دستگاه می‌توان نوشت

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) + \psi_1(r, \theta) \quad (\text{الف-۵})$$

که در آن

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \psi_0(r) = -\mu_0 R_0^2 \frac{\partial F(\psi_0)}{\partial \psi_0} - \mu_0^2 I(\psi_0) \frac{\partial I(\psi_0)}{\partial \psi_0}$$

(الف-۶)

پس برای تابع پربیشیدگی $\psi_1(r, \theta)$ با فرض

$$|\psi_1(r, \theta)| \ll |\psi_0(r)|$$

می‌توان نوشت

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \psi_1(r, \theta) \approx \frac{\cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \psi_0 - 2\mu_0 R_0 r \cos \theta \frac{\partial F(\psi_0)}{\partial \psi_0}$$

$$- \frac{1}{\partial \psi_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_0 R_0^2 \frac{\partial F(\psi_0)}{\partial \psi_0} - \mu_0^2 I(\psi_0) \frac{\partial I(\psi_0)}{\partial \psi_0} \right] \psi_1 \quad (\text{الف-۷})$$

توابع توزیع $F(\psi)$ و $I(\psi)$ از بسط چند جمله‌ای آن‌ها به دست می‌آید. از آن جا که $F(\psi)$ و $I(\psi)$ توابع نامعین هستند، داریم

که در آن، $r = r(\rho, \theta)$ بردار مکان است که نسبت به محور پلاسما سنجیده می شود. طبق شکل رایج برای تعادل سولوویو داریم [۱۴، ۱۸ و ۱۹]

$$B_t(\mathbf{r}) = \frac{B_{t_0}}{1 + \frac{\rho}{R_0} \cos \theta} \quad (2-ب)$$

که در آن، B_{t_0} میدان مغناطیسی چنبره ای بر روی محور پلاسما و R_0 شعاع اصلی چنبره است. در تقریب نسبت منظر بزرگ داریم $\rho \ll R_0$. بنابراین، رابطه ی (ب-۲) را می توان به صورت زیر نوشت

$$B_t(\mathbf{r}) = B_{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\rho}{R_0} \cos \theta \right)^n \quad (3-ب)$$

از جانشانی رابطه ی (ب-۳) در رابطه ی (ب-۱) و استفاده از اتحاد های

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n+1} d\theta = 0 \quad (1-4-ب)$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n} d\theta = \frac{2\sqrt{\pi}}{n!} \Gamma(n+1/2) \quad (2-4-ب)$$

که در آن $\Gamma(\cdot)$ تابع گامای اوایلر است، داریم

$$\phi(r) = 2\sqrt{\pi} B_{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \int_0^r \left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{2n} \rho d\rho \quad (5-ب)$$

پس از ساده سازی خواهیم داشت

$$\phi(r) = \sqrt{\pi} B_{t_0} r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{(n+1)!} \left(\frac{r}{R_0}\right)^{2n} \quad (6-ب)$$

رابطه ی (ب-۶) را می توان به صورت هم ارز زیر هم نوشت

$$\phi(r) = \pi r^2 B_{t_0} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 + \frac{3}{24} \left(\frac{r}{R_0}\right)^4 + \dots \right] \quad (7-ب)$$

همان طور که دیده می شود به عنوان تقریب مرتبه ی صفر داریم $\phi(r) \approx \pi r^2 B_{t_0}$ که نشان می دهد شار مغناطیسی چنبره ای تقریباً برابر با حاصل ضرب مساحت سطح مغناطیسی در میدان مغناطیسی چنبره ای روی محور اصلی پلاسما است.

توکامک هایی که دارای سطوح مغناطیسی دایره ای و نسبت منظر بزرگ هستند دقیق است [۱۱].

جالب توجه است که معادله ی (الف-۱۱-۲) را نیز می توان به کمک حل (الف-۱۲) و روش توابع گرین [۱۵ و ۱۶] حل نمود. بدین منظور تابع گرین را مطابق رابطه ی زیر تعریف می کنیم

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \right] G(r, r') = -\delta(r-r') \delta(\theta-\theta') \quad (الف-۱۳)$$

که در آن $r = r(\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{z})$ بردار مکان است که نسبت به محور پلاسما در صفحه ی ϕ ثابت سنجیده می شود. با توجه به شباهت (الف-۱۳) به انتشار موج در فضای دو بعدی تابع گرین به دست می آید [۱۶]

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \text{Re} \left[\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \right] \quad (الف-۱۴)$$

در (الف-۱۴)، $H_0^{(1)}$ تابع هنکل نوع اول مرتبه ی صفر است. بنابراین خواهیم داشت

$$\psi(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^r G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') r' d\theta' dr' \quad (الف-۱۵-۱)$$

$$f(\mathbf{r}) = \cos \theta \left\{ R_0^{-1} k \psi_c J_1(kr) + r [(B_0 - B_1 \psi_c) + B_1 \psi_c J_0(kr)] \right\} \quad (الف-۱۵-۲)$$

بنابراین می توان دید که حل صریح معادله ی گراد-شفرانف در ناحیه ی خطی از طریق ادغام روش های پریشیدگی و توابع گرین انجام شدنی است. جالب توجه است که اخیراً از ادغام این دو روش برای مطالعه ی سولیتون های (۲) اتلافی در امواج غیرخطی پلاسما نیز استفاده شده است [۱۷]

پیوست ب- ضریب ایمنی

در این قسمت به محاسبه ی تابع ضریب ایمنی بر حسب شعاع فرعی می پردازیم. برای این منظور کافی است ابتدا تابع شار مغناطیسی چنبره ای برای توکامک با سطح مقطع دایره ای را مطابق تعریف زیر بیابیم

$$\phi(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} B_t(\mathbf{r}) \rho d\theta d\rho \quad (ب-۱)$$



پی‌نوشت‌ها:

- ۱- Solov'ev
۲- Solitons

References:

1. <http://www.iter.org/>
2. <http://www.jet.efda.org/>
3. J. Wesson, "Tokamaks," Clarendon Press, Oxford (2004).
4. T.J. Dolan, "Fusion Research," rev. ed, Pergamon Press (2001).
5. W.M. Stacey, "Fusion Plasma Physics," Wiley-VCH Press (2005).
6. G. Bateman, "MHD Instabilities," MIT Press, Cambridge (1978).
7. R.O. Dendy, "Plasma Physics: An Introductory Course," Cambridge University Press (1993).
8. K. Miyamoto, "Plasma Physics for Nuclear Fusion," MIT, Cambridge (1980).
9. K. Miyamoto, "Controlled Fusion and Plasma Physics," Taylor & Francis, New York (2007).
10. W.D. D'haeseleer, W.N.G. Hitchon, J.D. Callen, J.L. Shohet, "Flux coordinates and magnetic field structure-A guide to a fundamental tool of the plasma theory," Edited by R. Glowinski, M. Holt, P. Hut, H.B. Keller, J. Killeen, S.A. Orszag and V.V. Rusanov, Springer-Verlag, Berlin (1991).
11. ف. دینی، "پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (بهمن ۱۳۷۵).
12. J.P. Freidberg, "Ideal magnetohydrodynamics," Plenum Press, New York (1987).
13. J.P. Freidberg, "Plasma physics and fusion energy," Cambridge University Press, Cambridge (2007).
14. L.S. Solov'ev, "The theory of hydromagnetic stability of toroidal plasma configurations," Sov. Phys. JETP 26, 400-407 (1968).

با استفاده از رابطه‌های (الف-۱۲) و (ب-۷) و بر مبنای تعریف ضریب ایمنی

$$q(r) = \frac{1}{\mu(r)} = -\frac{\phi'(r)}{\psi'(r)} \quad (\text{ب-۸})$$

داریم

$$q(r) = \frac{2\sqrt{\pi}B_{t_0}}{k\psi_c J_1(kr)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{n!} \frac{r^{2n+1}}{R_0^{2n}} \quad (\text{ب-۹})$$

جالب توجه خواهد بود اگر به ضریب ایمنی بر روی محور پلاسما ($r \sim 0$) نگاهی بیاندازیم. تحت این شرایط داریم $J_1(kr) \sim \frac{1}{2}kr$ رابطه‌ی (ب-۷) صرف نظر کرد. آن‌گاه خواهیم داشت

$$q(r \rightarrow 0) = \frac{4\pi B_{t_0}}{k^2 \psi_c} \quad (\text{ب-۱۰})$$

به دلیل حضور ناپایداری دندان‌اره‌ای در توکامک‌ها [۳] معمولاً ضریب ایمنی بر روی محور پلاسما برابر واحد است و در نهایت رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\frac{4\pi B_{t_0}}{k^2 \psi_c} = 1 \quad (\text{ب-۱۱})$$

اما طبق تعریف k در پیوست الف داریم $k = \sqrt{A_1}$ و بنابراین می‌توان معادله‌ای برای محاسبه‌ی ثابت A_1 به دست آورد

$$A_1 = \frac{4\pi B_{t_0}}{\psi_c} \quad (\text{ب-۱۲})$$

مطالعه‌ی تحلیلی کاملی از تعادل توکامک در منابع [۲۰، ۲۱ و ۲۲] آمده است.

تشکر و قدردانی

بدین وسیله، مؤلفین از داوران محترم مقاله که ضمن مطالعه‌ی دقیق موجبات رفع نواقص، و بهبود قابل توجهی در کیفیت آن را فراهم آورده‌اند تشکر می‌نمایند.

- 15.F. Dini, S. Khorasani, R. Amrollahi, "On the green function of axisymmetric magnetostatics," Iranian J. Sci. Technol, Transaction A 28, 197-204 (2004).
- 16.G. Arfken, "Mathematical methods for physicists," Academic Press, 3rd ed (1985).
- 17.F. Dini, M. Molaei Emamzadeh, S. Khorasani, J.L. Bobin, R. Amrollahi, M. Sodagar, M. Khoshnegar, "Analytical study of dissipative solitary waves," Phys. Scr. 77, 025504 (2008).
18. ف. دینی و س. خراسانی، "محاسبه ضریب هدایت نئوکلاسیک با استفاده از کسر ذرات به دام افتاده برای پلاسمای توکامک کشیده دماوند،" مجله علوم و فنون هسته‌ای ۴۰، ۳۳-۲۵ (۱۳۸۶).
19. ف. دینی و س. خراسانی، "مشاهده آرایش جداساز در شبیه‌سازی ترابرد توکامک کشیده دماوند،" مجله علوم و فنون هسته‌ای، پذیرفته شده (۱۳۸۷).
- 20.P.J. Mc Carthy, "Analytical solutions to the Grad-Shafranov equation for tokamak equilibrium with dissimilar source functions," Phys. Plasmas 6, 3554-3560 (1999).
- 21.C.V. Atanasiu, S. Gunter, K. Lackner, I.G. Miron, "Analytical solutions to the Grad-Shafranov equation," Phys. Plasmas 11, 3510 (2004).
- 22.S. Wang and J. Yu, "An exact solution of the Grad-Shafranov-Helmholtz equation with central current density reversal," Phys. Plasmas 12, 062501 (2005).