J. of Nuclear Sci. and Tech.
No. 60-1, pp. 31-39, 2012

مجله علوم و فنون هسته‌ای
شماره ۱-۶۰، صفحات ۳۹-۳۱، ۱۳۹۱

# محاسبه‌ی غنای بحرانی رآکتور کروی مدل ZPR-III با استفاده از رهیافت نمای لیاپانوف

**محسن شایسته[۱]، سهراب بهنیا[۲]، اکبر عبدی سرای*[۱]**
**۱. گروه فیزیک، دانشگاه امام حسین (ع)، صندوق پستی: ۱۶۵۷۵-۳۴۷، تهران ـ ایران**
**۲. گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، صندوق پستی: ۵۷۱۵۷-۴۱۹، ارومیه ـ ایران**

**چکیده:** با به کارگیری نظریه‌ی آشوب به مطالعه‌ی مرز پایداری رآکتورهای هسته‌ای پرداخته شده است. با در نظر گرفتن غنای سوخت به عنوان پارامتر کنترل و از طریق محاسبه‌ی نمای لیاپانوف، میزان غنای بحرانی که مشخص‌کننده‌ی مرز پایداری رآکتورهای هسته‌ای است، مورد توجه قرار گرفته است. با استفاده از نمای لیاپانوف غنای بحرانی برای رآکتور کروی مدل ZPR-III تعیین شده است.

***کلیدواژه‌ها:* *غنای بحرانی، نظریه‌ی آشوب، نمای لیاپانوف، رآکتور کروی مدل ZPR-III***



# Critical Enrichment Calculation of Spherical Reactor- ZPR-III Model Using Lyapunov Exponent

**M. Shayesteh[1], S. Behnia[2], A. Abdi Saray*[1]**
**1. Department of Physics, Imam Hossein University, P.O.Box: 347-16575, Tehran – Iran**
**2. Department of Physics, Urmia University of Technology, P.O.Box: 419-57157, Urima – Iran**

**Abstract:** By considering the chaos theory, the condition for stability of nuclear reactor is studied. By considering the enrichment fuel as a control parameter, the lyapunov exponent is used for the study of the critical condition. This study, as an example, will focus on the special type of spherical ZPR-III nuclear reactor.

***Keywords:*** ***Critical Enrichment, Chaos Theory, Lyapunov Exponent, Spherical Reactor- ZPR-III Model***

---

*email: aabdisaray@yahoo.com

تاریخ دریافت مقاله: ۸۹/۱۲/۱  تاریخ پذیرش مقاله: ۹۰/۹/۳۰

## ۱. مقدمه

پایداری رآکتورهای هسته‌ای، یکی از بنیادی‌ترین مسایل در دینامیک رآکتورها است. در چند دهه‌ی اخیر، تحلیل پایداری رآکتورهای هسته‌ای به یکی از موضوعات جذاب و جالب توجه تبدیل شده است. در سال‌های اخیر، کدهای محاسباتی متفاوتی توسعه یافته و آزمایش‌های زیادی برای مطالعه و بررسی پایداری رآکتورهای هسته‌ای انجام شده است [۱ و ۲]. ولی تلاش چندانی برای تعیین مرزهای پایداری یک سیستم مشخص، انجام نگرفته است و در تعداد کمی از مقالات به پایداری مرزها اشاره شده است [۳ و ۴]. باید توجه داشت که رآکتورهای هسته‌ای و به تبع آن شکافت هسته‌ای، رفتار پیچیده‌ای با طبیعت غیرخطی دارند. بنابراین معرفی روش‌های غیرخطی در بررسی پایداری، عامل بزرگی در عملکرد ایمنی رآکتورهای هسته‌ای و تجهیزات اساسی‌شان به حساب می‌آید [۵، ۶ و ۷]. تاکنون روش‌های جدیدی برای مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی با متغیرهای میدانی پیوسته نظیر رآکتورهای هسته‌ای معرفی شده است [۸ و ۹]. نگاشت‌های تزویج یافته‌ی شبکه (CML)[1] روشی بر پایه‌ی یک سیستم دینامیکی با متغییرهای میدانی پیوسته است که در مکان و زمان گسسته‌اند [۱۰]. در این مقاله به معرفی یک مدل نگاشت تزویج یافته‌ی شبکه از معادله‌ی پخش نوترون پرداخته شده است. این مدل نقطه‌ی شروع برای محاسبه‌ی دینامیکی غیرخطی رآکتورهای هسته‌ای است. در روش شبکه‌ی نگاشت تزویج یافته، بیش‌تر فرایندهای دینامیکی معمولاً در نگاشت‌ها فرمول‌بندی می‌شوند [۱۱]. در این روش فرض بر این است که جمعیت نوترونی، با فیزیک و دینامیک خاص کنترل و بررسی می‌شود که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد. هم‌چنین در این مقاله از طیف نمای لیاپانوف[2]، که ابزار تشخیص دینامیکی مفیدی برای رآکتورهای هسته‌ای است، استفاده شده است [۱۲ تا ۱۵].

## ۲. معادله‌ی پخش نوترون

معادله‌ی ترابرد نوترون اساسی‌ترین توصیف از توزیع انرژی، زاویه‌ای، فضایی و زمانی نوترون‌ها می‌باشد و نقطه‌ی شروع برای بررسی رفتار نوترون‌ها است [۱۶]. معادله‌ی ترابرد نوترون یکی از اجزای پایه‌ای برای توسعه و طراحی رآکتورهای هسته‌ای و هم‌چنین مدیریت سوخت می‌باشد. این معادله مبنای توسعه‌ی تئوری پخش نوترون می‌باشد که بیش‌ترین کاربرد را در محاسبات مرتبط با رآکتورهای هسته‌ای دارد. در معادله‌ی پخش بر خلاف نظریه‌ی ترابرد جهت حرکت نوترون در هر لحظه مورد توجه نمی‌باشد و توزیع نوترون‌ها با تابع شار نوترون که به طور عام تابعی از فضا و زمان و انرژی می‌باشد توصیف می‌شود و آن، چیزی جز حاصل‌ضرب چگالی جمعیت نوترون‌ها در سرعت آن‌ها نیست [۱۷].

معادله‌ی ترابرد نوترون یک معادله‌ی دیفرانسیلی- انتگرالی غیرخطی است که به روش تحلیلی قابل حل نمی‌باشد. لذا با استفاده از فرض‌های ساده‌کننده، می‌توان توزیع زاویه‌ای شار نوترون را در محل‌هایی که میزان جذب نوترون پایین است، با حذف متغیرهای جهتی (سمتی) از تابع چگالی نوترون و با ساده‌سازی به معادله‌ی پخش تبدیل نمود و امکان استفاده از روش‌های حل عددی برای سیستم‌های پیچیده را فراهم ساخت [۱۶].

معادله‌ی پخش نوترون یک معادله‌ی دیفرانسیلی جزیی است که رفتار نوترون را در داخل رآکتور هسته‌ای توصیف می‌کند. برای حل معادله‌ی پخش که در آن شار و سطح مقطع تابع انرژی‌اند، لازم است جمعیت نوترونی به گروه‌های انرژی زیادی تقسیم شود که در آن هر گروه انرژی نوترون‌هایی را در اثر کند شدن از گروه‌های با انرژی بالاتر به دست می‌آورد و گروه‌های با انرژی بالاتر نوترون‌هایی را مستقیماً از شکافت دریافت می‌نماید. نوترون‌ها در اثر کندشدن از گروهی به گروه پایین‌تر از طریق جذب (که در بعضی موارد به شکافت هسته‌ای منجر می‌شود) و یا بر اثر نشت از قلب رآکتور، از بین می‌روند. در روش چند گروهی که در آن گستره‌ی انرژی نوترون‌های مورد بررسی معمولاً از حدود ۰٫۰۱ eV تا ۱۰ MeV گسترده است، به تعداد متناهی بازه یا گروه تقسیم می‌شود. فرض می‌شود سطح مقطع‌ها در هر گروه ثابت‌اند یعنی روی انرژی میانگین‌گیری شده‌اند و در هر گروه مستقل از انرژی هستند، هر چند که تابعی از مکان‌اند.

معادله‌ی پخش نوترون برای گروه انرژی gام می‌تواند به شکل زیر نوشته شود [۱۶ و ۱۷]

$$\frac{1}{V_g}\frac{\partial \Phi_g}{\partial t} - \vec{\nabla}.D_g\vec{\nabla}\Phi + \Sigma_{tg}\Phi_g(\vec{r},t) = \sum_{g'=1}^{G}\Sigma_{sg'g}\Phi_{g'} + x_g\sum_{g'=1}^{G}\upsilon_{g'}\Sigma_{fg'}\Phi_{g'} + S_g$$

g=1,2,3, …, G

(۱)

که در آن g نشان‌دهنده‌ی گروه gام،

$V_g$ سرعت نوترون‌های گروه g،

$\Phi_g$ شار نوترون‌های گروه g،

$D_g$ ضریب پخش نوترون‌های گروه g،

$\Sigma_{tg}$ سطح مقطع کل برای نوترون‌های گروه g،

$\Sigma_{sg'g}$ سطح مقطع پراکندگی نوترون از گروه َg به g،

$x_g$ طیف نوترون‌های آنی گروه g،

$\upsilon_{g'}$ تعداد نوترون‌های آنی گروه g

$\Sigma_{fg'}$ سطح مقطع شکافت برای نوترون‌های گروه g،

$\Phi_{g'}$ شار نوترون‌های گروه َg، و

$S_g$ چشمه‌ی خارجی است.

در یک سیستم هسته‌ای، معادله‌ی پخش نوترون برای به دست آوردن اطلاعات مربوط به حالت‌های ناشناخته‌ی رآکتور شبیه‌سازی می‌شود. روش نگاشت تزویج یافته‌ی شبکه سه‌بعدی به طور قابل توجهی قادر است معادله‌ی پخش نوترون را بهتر از روش‌های حل عددی و تحلیلی مثل روش مونت‌کارلو و روش اجزای محدود[۳] و ... حل نماید [۱۸ تا ۲۲]. این روش هم‌چنین قادر است مقدار غنای سوخت را برای یک رآکتور با ابعاد معین پیش‌بینی کند. در مطالعه‌ی حاضر، از شکل گسسته‌ی معادله‌ی پخش نوترون در قالب روش نگاشت تزویج یافته‌ی شبکه استفاده شده است (پیوست).

## ۳. روش کار

### ۱.۳ ضریب تکثیر مؤثر سیستم

یکی از پارامترهای مهم هر سیستم شکافت‌پذیر، ضریب تکثیر مؤثر آن است. این ضریب که تغییر خالص تعداد نوترون‌های گرمایی از یک نسل به نسل بعد را به دست می‌دهد، به صورت زیر تعریف می‌شود

$k_{eff}$ =(تعداد نوترون گرمایی در نسل i+1) / (تعداد نوترون گرمایی در نسل i)

(۲)

ضریب تکثیر در یک سیستم پایا بعد از چند دور که سیستم به حالت تعادلی رسید و شیوه‌ی اصلی شار غالب گردید، به مقدار ثابتی رسیده و مستقل از نسل می‌گردد [۱۷]. چنان‌چه این ضریب دقیقاً برابر ۱٫۰ باشد، سیستم در یک قدرت ثابت کار می‌کند و آن را بحرانی می‌نامند. در صورتی‌که این ضریب کوچک‌تر از ۱٫۰ باشد، تعداد شکافت‌ها با زمان کاهش یافته و سرانجام پس از گذشت یک فاصله‌ی زمانی معین که به طول عمر نوترون بستگی دارد، به صفر می‌رسد و اگر این ضریب بزرگ‌تر از ۱٫۰ باشد، تعداد شکافت یا قدرت سیستم با زمان افزایش می‌یابد. راه‌های مختلفی برای محاسبه‌ی ضریب تکثیر مؤثر سیستم وجود دارد که روش مونت‌کارلو و کدهای هسته‌ای چون کد MCNP، ANISN، DOT، ... از آن جمله‌اند. در این مقاله برای اولین بار غنای بحرانی سوخت اورانیم ۲۳۵، برای یک رآکتور کروی، با استفاده از نمای لیاپانوف محاسبه شده است.

### ۲.۳ نظریه‌ی آشوب[۴]

آشوب، یک رفتار طولانی مدت غیردوره‌ای در یک سیستم قطعی است که وابستگی زیاد به شرایط اولیه نشان می‌دهد. منظور از رفتار طولانی مدت غیردوره‌ای در سیستم‌های دینامیکی آن است که مسیرهایی در فضای فاز بسته وجود دارند که وقتی زمان به بی‌نهایت میل می‌کند، این مسیر به نقاط ثابت، مدارهای دوره‌ای و یا مدارهای شبه‌دوره‌ای منتهی نمی‌شوند [۲۲]. قطعیت گویای آن است که سیستم دارای پارامترها یا ورودی‌های کاتوره‌ای نیست ولی رفتار بی‌نظم این سیستم‌ها از غیرخطی بودن ناشی می‌شود. منظور از حساس بودن به شرایط اولیه در سیستم‌های دینامیکی این است که مسیرهای مجاور از هم جدا می‌شوند. در واقع این خصوصیت، تفاوت اصلی سیستم‌های دینامیکی آشوبناک با سیستم‌های دینامیکی غیرآشوبناک است و محیط عمل پدیده‌ی آشوب، سیستم‌های دینامیکی است [۲۰]. یکی از راه‌های حل تئوری آشوب، استفاده از نمای لیاپانوف است.

### ۳.۳ نمای لیاپانوف

نمای لیاپانوف یک ابزار بسیار قوی برای شناسایی آشوب می‌باشد که در کنترل پایداری معادلات دیفرانسیل غیرخطی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. این، مطالعه‌ی پایداری معادلات دیفرانسیل را بدون حل آن‌ها امکان‌پذیر می‌سازد [۲۳ تا ۲۶]. برای مطالعه‌ی یک سیستم دینامیکی غیرخطی لازم است آن را با استفاده نگاشت‌ها مورد مطالعه قرار داد. نمای لیاپانوف، مطالعه‌ی رفتار سیستم به وسیله‌ی نگاشت را به صورت عددی میسّر می‌سازد. در این بخش نمای لیاپانوف برای معادله‌ی پخش

نوترون به دست آورده می‌شود. به منظور بررسی ویژگی‌های نمای لیاپانوف، ماتریس ژاکوبی زیر معرفی می‌شود که پایداری خطی و بی‌نظمی متغییرهای میدانی سیستم را نشان می‌دهد [۲۶ و ۲۷]. در ضمن برای مسئله‌ی مورد بحث، این ماتریس (به خاطر استفاده از دو گروه انرژی) از ۴ قسمت تشکیل شده است که بدین ترتیب، تأثیر نوترون‌های هر گروه بر خودش و تأثیر نوترون‌های یک گروه بر گروه دیگر را نیز نشان می‌دهد.

$$B_{n,N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1^{n+1}}{\partial\Phi_1^n} & \frac{\partial\Phi_1^{n+1}}{\partial\Phi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1^{n+1}}{\partial\Phi_N^n} & \frac{\partial\Phi_1^{n+1}}{\partial\Psi_1^n} & \frac{\partial\Phi_1^{n+1}}{\partial\Psi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1^{n+1}}{\partial\Psi_N^n} \\ \frac{\partial\Phi_2^{n+1}}{\partial\Phi_1^n} & \frac{\partial\Phi_2^{n+1}}{\partial\Phi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Phi_2^{n+1}}{\partial\Phi_N^n} & \frac{\partial\Phi_2^{n+1}}{\partial\Psi_1^n} & \frac{\partial\Phi_2^{n+1}}{\partial\Psi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Phi_2^{n+1}}{\partial\Psi_N^n} \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ \frac{\partial\Phi_N^{n+1}}{\partial\Phi_1^n} & \frac{\partial\Phi_N^{n+1}}{\partial\Phi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Phi_N^{n+1}}{\partial\Phi_N^n} & \frac{\partial\Phi_N^{n+1}}{\partial\Psi_1^n} & \frac{\partial\Phi_N^{n+1}}{\partial\Psi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Phi_N^{n+1}}{\partial\Psi_N^n} \\ \frac{\partial\Psi_1^{n+1}}{\partial\Phi_1^n} & \frac{\partial\Psi_1^{n+1}}{\partial\Phi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_1^{n+1}}{\partial\Phi_N^n} & \frac{\partial\Psi_1^{n+1}}{\partial\Psi_1^n} & \frac{\partial\Psi_1^{n+1}}{\partial\Psi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_1^{n+1}}{\partial\Psi_N^n} \\ \frac{\partial\Psi_2^{n+1}}{\partial\Phi_1^n} & \frac{\partial\Psi_2^{n+1}}{\partial\Phi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_2^{n+1}}{\partial\Phi_N^n} & \frac{\partial\Psi_2^{n+1}}{\partial\Psi_1^n} & \frac{\partial\Psi_2^{n+1}}{\partial\Psi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_2^{n+1}}{\partial\Psi_N^n} \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ \frac{\partial\Psi_{N-1}^{n+1}}{\partial\Phi_1^n} & \frac{\partial\Psi_{N-1}^{n+1}}{\partial\Phi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{N-1}^{n+1}}{\partial\Phi_N^n} & \frac{\partial\Psi_{N-1}^{n+1}}{\partial\Psi_1^n} & \frac{\partial\Psi_{N-1}^{n+1}}{\partial\Psi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{N-1}^{n+1}}{\partial\Psi_N^n} \\ \frac{\partial\Psi_N^{n+1}}{\partial\Phi_1^n} & \frac{\partial\Psi_N^{n+1}}{\partial\Phi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_N^{n+1}}{\partial\Phi_N^n} & \frac{\partial\Psi_N^{n+1}}{\partial\Psi_1^n} & \frac{\partial\Psi_N^{n+1}}{\partial\Psi_2^n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_N^{n+1}}{\partial\Psi_N^n} \end{pmatrix} \quad (۳)$$

که در آن $\Phi_i^n$ و $\psi_i^n$ پارامترهای دینامیکی قابل مشاهده، با $n$ به عنوان گام زمانی و $i$ به عنوان مکان فضایی می‌باشند. در واقع دو گروه انرژی ($\Phi$ و $\Psi$ نشان‌دهنده‌ی شار نوترون‌های مربوط به گروه ۱ و ۲ می‌باشند) وجود دارد. ویژه مقدارهای ماتریس ژاکوبین $B_{n,N}$ که با $\left\{E_1^n, E_2^n, E_3^n, \cdots, E_N^n\right\}$ نشان داده می‌شوند، نماهای لیاپانوف می‌باشند. با متوسط‌گیری از این نماها، متوسط نمای لیاپانوف از رابطه‌ی

$$\lambda^n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Ln}\left|E_i^n\right| \qquad (i=1,2,3,\ldots N) \qquad (۴)$$

و یا از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۱۹]

$$\lambda^n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Ln}\left|B_{n,N}\right| \qquad (۵)$$

که در آن $\left|B_{n,N}\right|$ دترمینان ماتریس $B_{n,N}$ است. از هر دو رابطه جواب یکسان به دست می‌آید [۲۵، ۲۶ و ۲۷].

برای نوشتن درایه‌های این ماتریس ابتدا معادله‌ی پخش نوترون را با استفاده از روش تفاضل محدود به شکل گسسته در آورده می‌شود. سپس مطابق درایه‌های ماتریس ژاکوبی، از شکل گسسته‌ی معادله‌ی پخش نوترون مشتق گرفته شده و با جای‌گذاری در درایه‌های مربوطه دترمینان ماتریس به دست می‌آید. آن‌گاه از روی آن نمای لیاپانوف به دست می‌آید. مقادیر منفی نمای لیاپانوف نشان‌دهنده‌ی این است که ضریب تکثیر مؤثر سیستم کوچک‌تر از یک بوده ($k < ۱$) و رآکتور زیر بحرانی است. برای مقادیر مثبت نمای لیاپانوف، آشوب خواهیم داشت که نشان می‌دهد سیستم، آشوبناک بوده و واکنش زنجیره‌ای شکافت واگرا شده و چگالی نوترون و آهنگ شکافت افزایش می‌یابند. در این حالت که ضریب تکثیر مؤثر سیستم بزرگ‌تر از یک می‌باشد ($k > ۱$) رآکتور را فوق بحرانی می‌گویند. و نهایتاً در حالت بحرانی ($k = ۱$)، نمای لیاپانوف صفر شده و واکنش زنجیره‌ای شکافت پایا می‌شود [۱۵ و ۲۸].

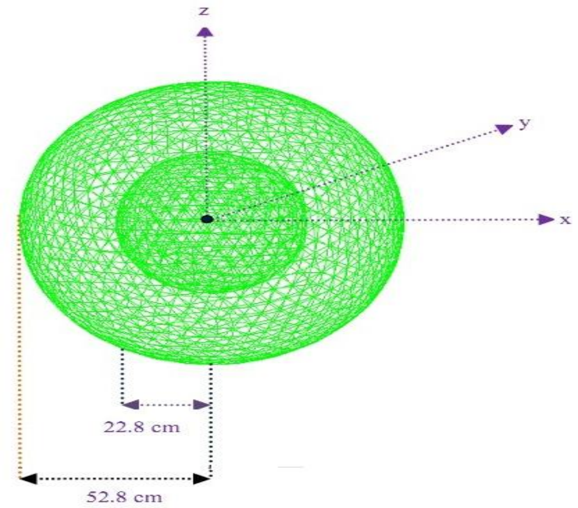
## ٤. نتایج و پیشنهادات

برای نشان دادن کارآیی محاسبات غنای سوخت رآکتور با استفاده از نمای لیاپانوف، یک رآکتور کروی مدل ZPR-III با تقارن سمتی و قطبی در نظر گرفته شد. برای ساده‌تر نمودن محاسبات از دو گروه انرژی استفاده شد. قطر قلب رآکتور مورد بحث، ۴۵٫۶ سانتی‌متر و ضخامت پوشش اطراف قلب رآکتور (به عنوان بازتاباننده) ۳۰ سانتی‌متر می‌باشد (شکل ۱). جرم بحرانی این رآکتور ۱۳۳٫۳ کیلوگرم U-۲۳۵ با غنای ۴۶٫۸۰۹۹۱ درصد می‌باشد [۲۹]. مواد به کار رفته در ساخت این رآکتور و سطح مقطع آن‌ها در جدول‌های ۱ تا ۴ و چگالی مواد در جدول ۵ داده شده است.

برای آهن و آلومینیم سطح مقطع‌های ماکروسکوپی جذب ناچیز و تقریباً قابل صرف‌نظر کردن می‌باشند ولی تأثیرشان بر روی سطح مقطع ماکروسکوپی ترابرد ($\Sigma_{trg}$) در نظر گرفته شده است.

مقادیر سطح مقطع ماکروسکوپی را برحسب غنای اورانیم می‌توان به شکل زیر حساب نمود [۱۳]

$$\begin{aligned} \Sigma_i = \Sigma_i(235) + \Sigma_i(238) &= N(235)\sigma_i(235) + N(238)\sigma_i(238) \\ &= \frac{\tilde{e}_a \rho N_A}{M(235)}\sigma_i(235) + \frac{(1-\tilde{e}_a)}{M(238)}\sigma_i(238) \end{aligned} \qquad (۶)$$




**شکل ۱.** مش‌بندی رآکتور کروی مدل ZPR-III.

**جدول ۱.** مواد به کار رفته در قلب و پوشش رآکتور با چگالی و کسر حجمی اشغال شده

| ماده | چگالی (گرم بر سانتی‌متر مکعب) | کسر حجمی اشغال شده | |
|---|---|---|---|
| | | قلب | پوشش |
| اورانیم ۲۳۵ | ۱۸٫۷۵ | ۰٫۱۴۰ | ۰٫۰۰۱۹ |
| اورانیم ۲۳۸ | ۱۹ | ۰٫۱۵۹ | ۰٫۸۳۳ |
| آلومینیم | ۲٫۷۰ | ۰٫۳۱۴ | ۰٫۰۲۲۷ |
| آهن | ۷٫۸۵ | ۰٫۱۲۳ | ۰٫۰۷۳۱ |

**جدول ۲.** سطح مقطع‌های ماکروسکوپی مربوط به ناحیه‌ی قلب رآکتور

| قلب رآکتور | | | | |
|---|---|---|---|---|
| سطح مقطع ($cm^{-1}$) | اورانیم ۲۳۵ | اورانیم ۲۳۸ | آلومینیم | آهن |
| $\Sigma_{f1}$ | ۰٫۰۰۸۶۷۹ | ۰٫۰۰۴۰۰۶ | ۰ | ۰ |
| $\Sigma_{a1}$ | ۰٫۰۰۹۲۱۷ | ۰٫۰۰۴۲۸۱ | ۰٫۰۰۰۰۷۶ | ۰٫۰۰۰۰۵۲ |
| $\Sigma_{tr1}$ | ۰٫۰۳۰۲۸ | ۰٫۰۳۵۱۷ | ۰٫۰۳۴۰۴ | ۰٫۰۲۰۸۲ |
| $\Sigma_{s12}$ | ۰٫۰۱۰۰۹ | ۰٫۰۱۵۶۷ | ۰٫۰۰۷۱۸ | ۰٫۰۰۷۲۹ |
| $\Sigma_{f2}$ | ۰٫۰۰۹۶۸۸ | ۰ | ۰ | ۰ |
| $\Sigma_{a2}$ | ۰٫۰۱۱۵۷ | ۰٫۰۰۱۴۵ | ۰٫۰۰۰۰۴ | ۰٫۰۰۰۰۶ |
| $\Sigma_{tr2}$ | ۰٫۰۴۸۴۴ | ۰٫۰۵۴۲۸ | ۰٫۰۶۶۱۹ | ۰٫۰۲۹۱۵ |

**جدول ۳.** سطح مقطع‌های ماکروسکوپی مربوط به ناحیه‌ی پوشش قلب رآکتور

| پوشش رآکتور | | | | |
|---|---|---|---|---|
| سطح مقطع ($cm^{-1}$) | اورانیم ۲۳۵ | اورانیم ۲۳۸ | آلومینیم | آهن |
| $\Sigma_{f1}$ | ۰ | ۰٫۰۲۰۹۹ | ۰ | ۰ |
| $\Sigma_{a1}$ | ۰ | ۰٫۰۲۲۴۳ | ۰ | ۰٫۰۰۰۰۳ |
| $\Sigma_{tr1}$ | ۰ | ۰٫۱۸۴۲ | ۰٫۰۰۲۵ | ۰٫۰۱۲۴ |
| $\Sigma_{s12}$ | ۰ | ۰٫۰۸۲۱۰ | ۰٫۰۰۰۵۲ | ۰٫۰۰۴۳۳ |
| $\Sigma_{f2}$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| $\Sigma_{a2}$ | ۰ | ۰٫۰۰۷۶۰۹ | ۰٫۰۰۰۰۰۳ | ۰٫۰۰۰۰۳۷ |
| $\Sigma_{tr2}$ | ۰ | ۰٫۲۸۴۴ | ۰٫۰۰۴۸ | ۰٫۰۱۷۳ |

**جدول ٤.** داده‌های مربوط به دو گروه انرژی در دو ناحیه از رآکتور

| سطح مقطع ($cm^{-1}$) | قلب | پوشش قلب |
|---|---|---|
| $\Sigma_{f1}$ | ۰٫۰۱۲۶۹ | ۰٫۰۲۰۹۹ |
| $\Sigma_{a1}$ | ۰٫۰۱۳۶۹ | ۰٫۰۲۲۴۶ |
| $\Sigma_{tr1}$ | ۰٫۱۲۰۳ | ۰٫۱۹۹۱ |
| $\Sigma_{s12}$ | ۰٫۰۴۰۲۳ | ۰٫۰۸۶۹۵ |
| $\Sigma_{f2}$ | ۰٫۰۰۹۶۸۸ | ۰ |
| $\Sigma_{a2}$ | ۰٫۰۱۳۱۲ | ۰٫۰۰۷۶۴۹ |
| $\Sigma_{tr2}$ | ۰٫۱۹۸۱ | ۰٫۳۰۶۵ |

**جدول ۵.** چگالی اتمی ($cm^{-3}$) مواد به کار رفته در رآکتور

| ماده | قلب | پوشش |
|---|---|---|
| $N_{235}$ | $۰٫۰۰۶۷۲۸\times۱۰^{۲۴}$ | ۰ |
| $N_{238}$ | $۰٫۰۰۷۶۴۵\times۱۰^{۲۴}$ | $۰٫۰۴۰۰۵\times۱۰^{۲۴}$ |
| $N_{Al}$ | $۰٫۰۱۸۹۱\times۱۰^{۲۴}$ | $۰٫۰۰۱۳۶۷\times۱۰^{۲۴}$ |
| $N_{Fe}$ | $۰٫۰۱۰۴۱\times۱۰^{۲۴}$ | $۰٫۰۰۶۱۸۸\times۱۰^{۲۴}$ |

که در آن،

$\tilde{e}_a$ غنای اورانیم و برابر $\frac{N^{235}}{N^{235}+N^{238}}$

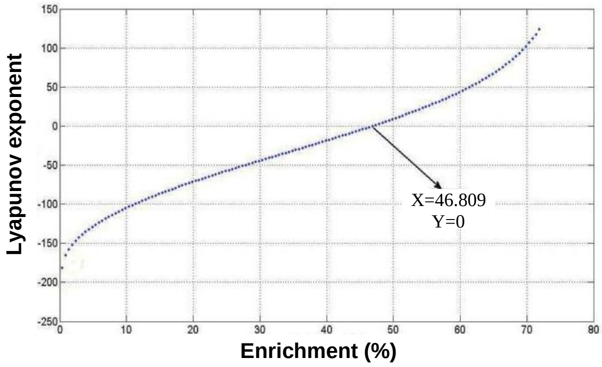
$\rho$ چگالی اورانیم،

$\Sigma_i$ سطح مقطع ماکروسکوپی،

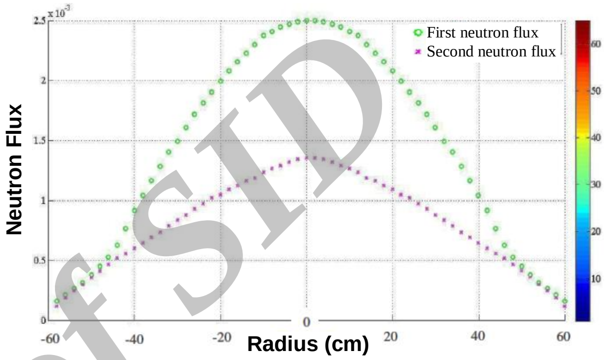
$\sigma_i$ سطح مقطع میکروسکوپی،

$N_A$ عدد آووگادرو است.

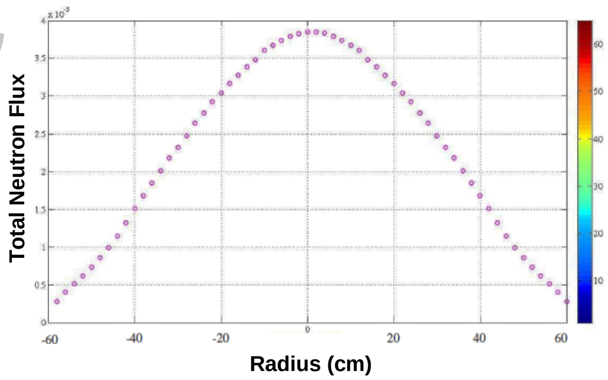
وقتی غنای اورانیم تغییر می‌کند به ازای هر مقدار از آن، یک ماتریس ژاکوبی به دست می‌آید. با حل این ماتریس و یافتن ویژه مقدارهای آن و سپس با استفاده از رابطه‌ی (۴) یا رابطه‌ی (۵) یک میانگین برای این ویژه مقدارها به دست می‌آید که یک نقطه از شکل ۲ را تشکیل می‌دهد، به همین ترتیب برای مقادیر دیگر غنا، این روند ادامه می‌یابد. در شکل ۲ مشاهده می‌شود که به ازای غنایی برابر با ۴۶٫۸۱ درصد، $\lambda$ (نمای لیاپانوف) برابر صفر و رآکتور بحرانی می‌شود. مقداری که از حل تحلیلی معادله‌ی پخش با دو گروه انرژی به دست می‌آید برابر ۴۶٫۸۰۹۹۱ درصد است که نشان‌دهنده‌ی توافق خوب آن با حل تحلیلی می‌باشد [۲۹]. هم‌چنین شار دو گروه نوترونی (شکل ۳) و شار نوترونی کل (شکل ۴)، برحسب ابعاد رآکتور به دست آمده است. لازم به ذکر است که رآکتور فوق نسبت به زاویه‌ی سمتی و قطبی متقارن بوده و فقط تابع شعاع می‌باشد. هم‌چنین طول عمر متوسط نوترون برحسب غنای اورانیم ۲۳۵ در شکل ۵ نشان داده شده است.



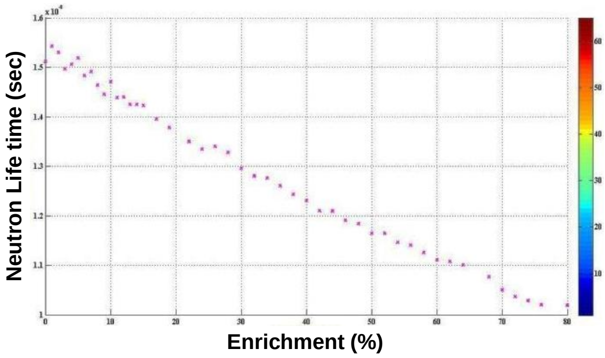

**شکل ۲.** رابطه بین نمای لیاپانوف و غنای سوخت (اورانیم ۲۳۵).




**شکل ۳.** شار نوترونی گروه‌های ۱ و ۲ برحسب فاصله از مرکز رآکتور.




**شکل ٤.** شار نوترونی کل برحسب فاصله از مرکز رآکتور.




**شکل ٥.** رابطه بین طول عمر متوسط نوترون و غنای سوخت (اورانیم ۲۳۵).

نتایج به دست آمده حاکی از آن است که نمای لیاپانوف شاخص رفتار قلب رآکتور است. غنای بحرانی سوخت راکتور، که با استفاده از نمای لیاپانوف به دست آمده است دقیقاً برابر با مقداری است که از حل تحلیلی حاصل شده است. یعنی زمانی که، نمای لیاپانوف برابر با صفر ($\lambda=0$) شود ضریب تکثیر مؤثر سیستم برابر ۱ می‌باشد که در این حالت رآکتور بحرانی و غنای سوخت غنای بحرانی است. با استفاده از این رهیافت می‌توان مقدار غنای بحرانی سوخت برای انواع رآکتورهای هسته‌ای را محاسبه کرد.

پیوست:

معادله‌ی پخش نوترون، معادله‌ی (۱)، را با دو گروه انرژی و برای دو ناحیه از رآکتور کروی مدل ZPR-III را با فرض این که محیط همگن و یکنواخت باشد حل می‌کنیم. شاخص‌های ۱ و ۲ معرف گروه‌های نوترون می‌باشند در این صورت داریم

قلب رآکتور:

$$\frac{1}{V_1}\frac{\partial\Phi}{\partial t}-D_1\nabla^2\Phi+\Sigma_{a1}\Phi+\Sigma_{s12}\Phi-\chi_1\upsilon_1\Sigma_{f1}\Phi-\chi_1\upsilon_2\Sigma_{f2}\Psi=0 \quad (۷)$$

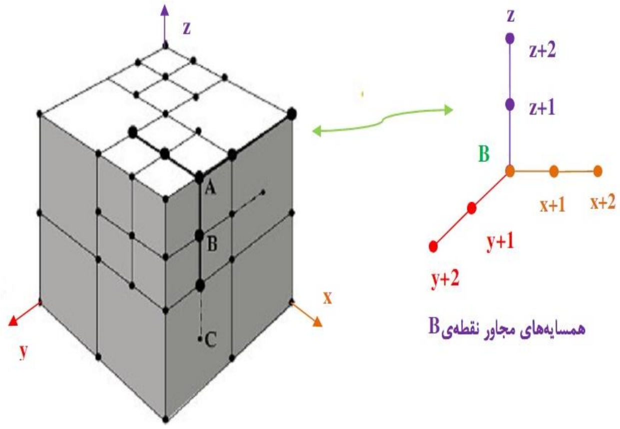
$$\frac{1}{V_2}\frac{\partial\Psi}{\partial t}-D_2\nabla^2\Psi+\Sigma_{a2}\Psi-\Sigma_{s12}\Phi-\chi_2\upsilon_1\Sigma_{f1}\Phi-\chi_2\upsilon_2\Sigma_{f2}\Psi=0 \quad (۸)$$

پوشش (قلب) رآکتور (شاخص b):

$$\frac{1}{V_1}\frac{\partial\Phi_b}{\partial t}-D_{1b}\nabla^2\Phi_b+\Sigma_{a1b}\Phi_b+\Sigma_{s12b}\Phi_b-\chi_1\upsilon_{1b}\Sigma_{f1b}\Phi_b=0 \quad (۹)$$

$$\frac{1}{V_2}\frac{\partial\Psi_b}{\partial t}-D_{2b}\nabla^2\Psi_b+\Sigma_{a2b}\Psi_b-\Sigma_{s12}\Phi-\chi_2\upsilon_{1b}\Sigma_{f1b}\Phi=0 \quad (۱۰)$$

در واقع، گسسته‌سازی معادله‌ی پخش نوترون را از طریق روش تفاضل محدود و با استفاده از مدل هفت نقطه‌ای انجام می‌دهیم (شکل ۶).




**شکل ٦.** مدل هفت نقطه‌ای.

به عنوان نمونه فقط معادله‌های (۷) و (۸) یعنی معادله‌ی حاکم بر قلب رآکتور را با روش تفاضل محدود و با استفاده از مدل هفت نقطه‌ای گسسته نموده و برای یافتن درایه‌های ماتریس ژاکوبی آماده می‌نماییم [۱۴]

$$\frac{1}{V_1}\left(\frac{\Phi^{n+1}_{i,j,k}-\Phi^{n}_{i,j,k}}{\Delta t}\right)-D_1\left(\frac{\Phi^{n}_{i+1,j,k}-2\Phi^{n}_{i,j,k}+\Phi^{n}_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2}+\frac{\Phi^{n}_{i,j+1,k}-2\Phi^{n}_{i,j,k}+\Phi^{n}_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2}+\frac{\Phi^{n}_{i,j,k+1}-2\Phi^{n}_{i,j,k}+\Phi^{n}_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2}\right)+(\Sigma_{a1}+\Sigma_{s12}-x_1\upsilon_1\Sigma_{f1})\Phi^{n}_{i,j,k}-x_1\upsilon_2\Sigma_{f2}\Psi^{n}_{i,j,k}=0$$
(۱۱)

در نتیجه داریم:

$$\Phi^{n+1}_{i,j,k}=\frac{D_1V_1\Delta t}{(\Delta x)^2}(\Phi^{n}_{i+1,j,k}+\Phi^{n}_{i-1,j,k})+\frac{D_1V_1\Delta t}{(\Delta y)^2}(\Phi^{n}_{i,j+1,k}+\Phi^{n}_{i,j-1,k})+\frac{D_1V_1\Delta t}{(\Delta z)^2}(\Phi^{n}_{i,j,k+1}+\Phi^{n}_{i,j,k-1})+(1+V_1\Delta t\alpha)\Phi^{n}_{i,j,k}+V_1\,\Delta t\,x_1\upsilon_2\Sigma_{f2}\,\Psi^{n}_{i,j,k}=0$$
(۱۲)

که در آن پارامتر $\alpha$ برابر است با

$$\alpha=(\Sigma_{a1}+\Sigma_{s12}+x_1\upsilon_1\Sigma_{f1})-2D_1\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right)$$
(۱۳)

و به همین ترتیب برای معادله‌ی (۸) داریم

$$\Psi^{n+1}_{i,j,k}=\frac{D_2V_2\Delta t}{(\Delta x)^2}(\Psi^{n}_{i+1,j,k}+\Psi^{n}_{i-1,j,k})+\frac{D_2V_2\Delta t}{(\Delta y)^2}(\Psi^{n}_{i,j+1,k}+\Psi^{n}_{i,j-1,k})+\frac{D_2V_2\Delta t}{(\Delta z)^2}(\Psi^{n}_{i,j,k+1}+\Psi^{n}_{i,j,k-1})+(1+V_2\,\Delta t\,\beta)\,\Psi^{n}_{i,j,k}+V_1\,\Delta t\,(\Sigma_{s12}+x_2\upsilon_1\Sigma_{f1})\Phi^{n}_{i,j,k}=0$$
(۱۴)

که در آن پارامتر $\beta$ برابر است با

$$\beta=(\Sigma_{a2}-x_2\upsilon_2\Sigma_{f2})-2D_2\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\right) \qquad (۱۵)$$

معادلات پوشش قلب رآکتور (بازتاباننده) یعنی معادلات (۹) و (۱۰) نیز به همین ترتیب به شکل گسسته درمی‌آیند.

**پی‌نوشت‌ها:**

۱. CML: Coupled Map Lattices
۲. Lyapunov Exponent Spectra
۳. Finite Element Method
۴. Chaos Theory

## References:


1. G.V. Durga Prasad, Manmohan Pandey, “Stability analysis and nonlinear of natural circulation boiling water reactors,” Nuclear Engineering and Design 238, 229 (2008).

2. J. Morales-Sandoval, A. Hernandez-Solis, “Global physical and numerical stability of a nuclear reactor core,” Ann.Nucl. Energy 321, 666 (2005).

3. Pankaj Wahi, Vivek Kumawat, “Nonlinear stability analysis of a reduced order model of nuclear reactors: A parametric study relevant to the advanced heavy water point reactor,” Nuclear Engineering and Design 241, 134 (2011).

4. J.D. Lewins, E.N. Ngcobo, “Property discontinuities in the solution of finite difference approximations to the neutron diffusion equation,” Ann. Nucl. Energy 23, 29 (1996).

5. J. Koclas, “Comparisons of the different approximations leading to mesh centered finite differences starting from the analytic nodal method,” Ann. Nucl. Energy 25, 821 (1998).

6. S. Cavdar, H.A. Ozgener, “A finite element/boundary element hybrid method for 2-D neutron diffusion calculations,” Ann. Nucl. Energy 31, 1555 (2004).

7. S.T. Liu, “Nuclear fission and spatial chaos,” Chaos, Solitons & Fractals 30, 462 (2006).

8. R. Uddin, “Turning points and sub- and supercritical bifurcations in a simple BWR model,” Nucl. Eng. and Design 236, 267 (2006).

9. H. Konno, S. Kanemoto, Y. Takeuchi, “Theory of stochastic bifurcation in BWRS and applications,” Progress in Nucl. Energy 43, 201 (2003).

10. K. Kaneko, “Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements,” Phys. D: Nonlinear Phenomena. 41, 137 (1990).

11. K. Kaneko, “Chaotic traveling waves in a coupled map lattice,” Phys. D: Nonlinear Phenomena. 68, 299 (1993).

12. T. Suzudo, “Applaication of nonlinear dynamical descriptor to BWR stability analysis,” Progress in Nucl. Energy 43, 217 (2003).

13. Hiroshi Shibata, “Fluctuation of mean Lyapunov exponent for a coupled map lattice model,” Physica A 284, 124 (2000).

14. K.M. Case, P.M. Zweifel, “Linear transport theory,” Addison-wesely, Massachusetts, (1967).

15. R. khoda-bakhsh, S. Behnia, O. Jahanbkhsh, “A novel lyapunov exponent approach for stability analysis of the simple nuclear reactor,” Iranian Physical Journal, 3-1, 36-41 (2009).

16. J.J. Duderstat, L.J. Hamilton, “Nuclear Reactor Anaysis,” Wiley, New York, (1976).

17. G.I. Bell, S. Glasstone, “Nuclear reactor theory,” Van Nostrand Reinhold Company, New York (1970).

18. German G. Theler, Fabian J. Bonetto, “On the stability of the point reactor kinetics equations,” Nuclear Engineering and Design 240, 1443 (2010).

19. L.G. Vulkov, A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich, “Finite difference methods: theory and applications,” Nova Science Publishers, Samarskii (1999).

20. Kazoo Azekura and Kunitoshi Kurihara, “High-order finite difference nodal method for neutron diffusion equation,” Nuclear Scince and Technology, 28, 285 (1991).

21. S.T. Strogatz, “Nonlinear dynamics and chaos,” Perseus Books Publishing, L.L.C. (1994).

22. E. Ott, “Chaos in dynamical systems,” Cambridge University Press (1993).

23. M.A. Jafarizadeh, S. Behnia, M. Foroutan, “Hierarchy of piecewise non-linear maps with non-ergodic behaviour,” J. Phys. A: Math, Gen. 37, 9403 (2004).

24. M.M.R. Williams, “A method for solving a stochastic eigenvalue problem applied to criticality,” Ann. Nucl. Energy 37, 894 (2010).

25. B.L. Kirk, “Overviw of Monte Carlo radiation transport codes,” Radiation Measurements 45, 1318 (2010).

26. S. Behnia, M. Panahi, A. Mobaraki, A. Akhshani, “A novel approach for the potential parameters selection of Peyrarad-Bishop model,” Physics Letters A 375, 1092 (2011).

27. H. Shibata, “Fluctuation of mean Lyapunov exponent for turbulence,” Physica A 292, 175 (2001).

28. R. Khoda-Bakhsh, S. Behnia, O. Jahanbkhsh, “Stability analysis in nuclear reactor using Lyapunov exponent,” Ann. Nucl. Energy 35, 1370 (2008).

29. J.L. Meem, “Two group reactor theory,” Gordon and Breach Science Publishers. New York (1964).