



## حل تحلیلی معادله‌ی پخش دو گروهی مستقل از زمان نوترون با تقریب‌های مختلف فرار عرضی در هندسه‌ی چهار گوش دوبعدی

محمد حسینی\*<sup>۱</sup>، حسین خلفی<sup>۱</sup>، مهدی زنگیان<sup>۲</sup>

۱. پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۱۳۶۵۸۴۸۶، تهران - ایران  
۲. دانشکده مهندسی هسته‌ای، دانشگاه شهید بهشتی، صندوق پستی: ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳، تهران - ایران

**چکیده:** یکی از روش‌های حل معادله‌ی پخش نوترون، روش نودال است. این روش، به سه روش تحلیلی، نیمه‌تحلیلی و بسط تابع دسته‌بندی می‌شود. در این پژوهش، نرم‌افزاری به منظور حل دو گروهی معادله‌ی پخش نوترون در هندسه‌های چهار گوش دوبعدی توسعه داده شد. رویکردهای متنوعی برای حل معادله‌ی پخش به روش تحلیلی نودال وجود دارد. یکی از این رویکردها که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است، استفاده از تقریب فرار عرضی است. براساس این رویکرد، معادله‌های پخش دوبعدی نوترون به دو معادله‌ی پخش یک‌بعدی شکسته شده و پاسخ هر یک از آن‌ها به صورت تحلیلی محاسبه می‌شود. در این پژوهش از دو تقریب تخت و درجه‌ی دو برای تخمین جمله‌های فرار عرضی استفاده شد. راستی‌آزمایی روش از طریق به کارگیری آن برای دو رآکتور مرجع انجام شد. نتایج به دست آمده نشان داد که روش تحلیلی نودال با تقریب فرار عرضی درجه دو از دقت بسیار خوبی در محاسبه‌های قلب رآکتور برخوردار است.

**کلیدواژه‌ها:** معادله‌ی پخش نوترون، تحلیلی نودال، فرار عرضی، تقریب تخت، تقریب درجه دو

## Analytic solution of two-group static neutron diffusion equation using different transverse leakage approximations in 2D cartesian geometry

M. Hosseini<sup>\*1</sup>, H. Khalafi<sup>1</sup>, M. Zangian<sup>2</sup>

1. Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOL, P.O.Box: 113658486, Tehran - Iran  
2. Nuclear Engineering Department, Shahid Beheshti University, P.O.Box: 1983963113, Tehran - Iran

**Abstract:** Nodal is a method for solving the neutron diffusion equation. It is categorized to analytic, semi-analytic and expansion nodal methods. In this research work, a software is developed in order to solve two group neutron diffusion equations in two dimensional Cartesian geometries. There are some approaches to the analytical solution of the neutron diffusion. An interesting approach, that is our recent concern, is the transverse leakage approximation. Based on this approximation, the two-dimensional diffusion equation is split into two one-dimensional equations and is solved analytically for each energy group. In this paper, we used flat and quadratic polynomials in order to approximate the transverse leakage terms. Finally, two reference problems are solved for verifying the proposed method. The results showed that the analytic nodal method with quadratic transverse leakage approximation gives very accurate results for the reactor core calculations.

**Keywords:** Neutron diffusion equation, Analytic nodal, Transverse leakage, Flat approximation, Quadratic approximation

\*email: mnhosseini.doe@yaho.com

تاریخ دریافت مقاله: ۹۲/۴/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۳/۷/۲۳

**۱. مقدمه**

در دهه‌های گذشته، روش تفاضل محدود به عنوان یک روش استاندارد در محاسبه‌ی توزیع قدرت در رآکتورهای هسته‌ای مورد استفاده قرار گرفته است [۱]. اما این روش، تنها در سال‌های اخیر، به واسطه‌ی توسعه‌ی کامپیوترهای سریع، توانسته است محاسبه‌های سه‌بعدی مقرون به صرفه‌ای را برای رآکتورهای آب سبک انجام دهد.

روش‌های محاسبه‌ای مختلفی مانند روش نودال، برای بهبود بازده روش تفاضل محدود به آن اضافه شده است. روش نودال، ضمن افزایش پیچیدگی روند حل مسأله، بازده روش تفاضل محدود را چندین مرتبه افزایش می‌دهد (کاهش زمان محاسبه و افزایش دقت نتایج).

اسمیت در سال ۱۹۷۶، روش تحلیلی نودال را برای حل معادله‌ی پخش دو گروهی چند بعدی در حالت پایا و گذرا ارائه داد [۱]. محدودیت در تعداد گروه‌های انرژی و عدم هم‌گرایی در حل برخی مسائل، دو نقص مهم روش اسمیت بوده است. در سال ۲۰۰۷ اراگونس توانست تا حد زیادی محدودیت‌های فوق را بردارد [۲]. تاکنون، برای محاسبه‌ی قلب رآکتور، کدهای مختلفی توسعه داده شده‌اند که از روش نودال استفاده می‌کنند؛ کدهای PARCS [۳]، NESTLE [۴] و GNOMER [۵] از آن جمله‌اند.

در پژوهش حاضر، سعی شده است با استفاده از روش تحلیلی نودال، نرم‌افزار حل معادله‌ی پخش دو گروهی نوترون در هندسه‌های چهار گوش دوبعدی توسعه داده شود.

**۲. روش تحلیلی نودال**

روش تحلیلی نودال، که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است، به دلیل تحلیلی بودن، از دقت بسیار خوبی برخوردار است. در این روش، ابتدا تابع تحلیلی شار نوترون در هر گره به دست می‌آید. سپس، از این تابع‌های تحلیلی در محاسبه‌ی جریان خالص روی صفحه‌های بین گره‌ها استفاده می‌شود و نهایتاً، با استفاده از جریان به دست آمده، تصحیح معادله‌های پخش انجام می‌شود. حفظ توازن نوترون و هم‌چنین داشتن پاسخ‌های با دقت مناسب برای مش‌های با طول زیاد از مزیت‌های روش تحلیلی نودال محسوب می‌شود.

معادله‌ی پخش چند گروهی نوترون در حالت پایا (مستقل از زمان) این است [۱]

$$-\nabla \cdot \vec{J}_g(\vec{r}) - \Sigma_{t,g}(\vec{r})\phi_g(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^G \left[ \Sigma_{g \rightarrow g'}(\vec{r}) + \chi_{g'} \left( \frac{1}{k_{eff}} \right) \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}) \right] \phi_{g'}(\vec{r}) = 0$$

$$g = 1, \dots, G \quad (1)$$

با فرض دو گروه انرژی، معادله‌ی پخش نوترون چنین نوشته می‌شود

$$\begin{cases} g=1 \Rightarrow -\nabla \cdot \vec{J}_1(\vec{r}) - \Sigma_{t,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \chi_2 \left( \frac{1}{k_{eff}} \right) [\nu \Sigma_{f,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r})] = 0 \\ g=2 \Rightarrow -\nabla \cdot \vec{J}_2(\vec{r}) - \Sigma_{t,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{s,2 \rightarrow 1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \chi_1 \left( \frac{1}{k_{eff}} \right) [\nu \Sigma_{f,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r})] = 0 \end{cases} \quad (2)$$

که در آن،  $\vec{J}_g$ ،  $\phi_g$ ،  $\Sigma_{t,g}$ ،  $\Sigma_{f,g}$ ،  $\chi_g$ ، به ترتیب، جریان خالص نوترون، شار نوترون، سطح مقطع ماکروسکوپی کل نوترون، سطح مقطع ماکروسکوپی شکافت نوترون، و طیف شکافت نوترون در گروه  $g$ ام،  $\Sigma_{s,g \rightarrow g'}$ ، سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی نوترون از گروه  $g$ ام به گروه  $g'$ ام،  $\nu$  تعداد متوسط نوترون تولید شده در هر شکافت، و  $k_{eff}$  ضریب تکثیر مؤثر است.

با تعریف سطح مقطع برداشت به صورت  $\Sigma_{r,g} = \Sigma_{t,g} - \Sigma_{s,g \rightarrow g}$  و با فرض این که نوترون‌های حاصل از شکافت در گروه انرژی تند قرار دارند، معادله‌های ۲ به صورت زیر در می‌آید

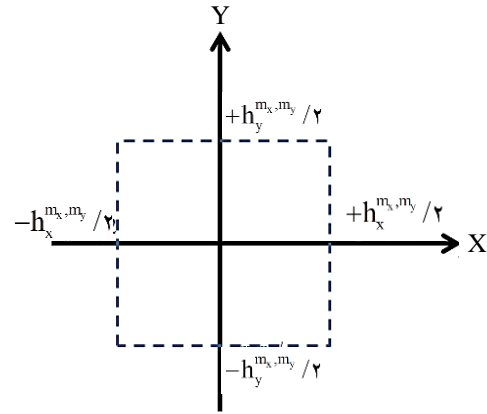
$$\begin{cases} -\nabla \cdot \vec{J}_1(\vec{r}) - \Sigma_{r,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \left( \frac{1}{k_{eff}} \right) [\nu \Sigma_{f,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r})] = 0 \\ -\nabla \cdot \vec{J}_2(\vec{r}) - \Sigma_{r,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌های ۳ بر روی سطح هر گره و با فرض  $\int_{\vec{r}_m}^{\vec{r}_{m+1}} dA = h_x^{m_x, m_y} h_y^{m_x, m_y}$  (شکل ۱)، معادله‌ی تراز نوترون به دست می‌آیند [۱]

$$\begin{cases} \frac{1}{h_x^{m_x, m_y}} [J_{x,1}^{m_x+, m_y} - J_{x,1}^{m_x-, m_y}] + \frac{1}{h_y^{m_x, m_y}} [J_{y,1}^{m_x, m_y+} - J_{y,1}^{m_x, m_y-}] + \Sigma_{f,1}^{m_x, m_y} \phi_1^{m_x, m_y} - \Sigma_{s,1 \rightarrow 1}^{m_x, m_y} \phi_1^{m_x, m_y} = \frac{1}{k_{eff}} (\nu \Sigma_{f,1}^{m_x, m_y} \phi_1^{m_x, m_y} + \nu \Sigma_{f,2}^{m_x, m_y} \phi_2^{m_x, m_y}) \\ \frac{1}{h_x^{m_x, m_y}} [J_{x,2}^{m_x+, m_y} - J_{x,2}^{m_x-, m_y}] + \frac{1}{h_y^{m_x, m_y}} [J_{y,2}^{m_x, m_y+} - J_{y,2}^{m_x, m_y-}] + \Sigma_{f,2}^{m_x, m_y} \phi_2^{m_x, m_y} - \Sigma_{s,2 \rightarrow 2}^{m_x, m_y} \phi_2^{m_x, m_y} = 0 \end{cases} \quad (4)$$



$$\begin{cases} -D_x \frac{d^2 \varphi_{y,1}(y)}{dy^2} + \frac{1}{h_x^{m_x, m_y}} [J_{x,1}^{m_x+, m_y}(y) - J_{x,1}^{m_x-, m_y}(y)] + \Sigma_{r,1} \varphi_{y,1}(y) \\ -\Sigma_{s,r \rightarrow 1} \varphi_{y,1}(y) - \frac{1}{k_{eff}} (v \Sigma_{f,1} \varphi_{y,1}(y) + v \Sigma_{f,r} \varphi_{y,r}(y)) = 0 \\ -D_y \frac{d^2 \varphi_{y,2}(y)}{dy^2} + \frac{1}{h_x^{m_x, m_y}} [J_{x,2}^{m_x+, m_y}(y) - J_{x,2}^{m_x-, m_y}(y)] + \Sigma_{r,2} \varphi_{y,2}(y) \\ -\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_{y,1}(y) = 0 \end{cases} \quad (7)$$



شکل ۱. ابعاد یک گره چهار گوش دو بعدی.

شار یک‌بعدی در معادله‌های ۶ و ۷ با استفاده از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود [۱] و ارتباط آن با شار حجمی به صورت رابطه‌ی ۹ است

$$\varphi_{u,g}(u) \equiv \frac{1}{h_v^{m_u, m_v}} \int_{\frac{h_u^{m_u, m_v}}{2}}^{\frac{h_v^{m_u, m_v}}{2}} \{\varphi_g(u,v)\} dv$$

$$u, v = x, y$$

$$u \neq v \quad (8)$$

$$\varphi_g^{m_x, m_y} \equiv \frac{1}{h_x^{m_x, m_y}} \int_{\frac{h_x^{m_x, m_y}}{2}}^{\frac{h_x^{m_x, m_y}}{2}} \varphi_{x,g}(x) dx \equiv \frac{1}{h_y^{m_x, m_y}} \int_{\frac{h_y^{m_x, m_y}}{2}}^{\frac{h_y^{m_x, m_y}}{2}} \varphi_{y,g}(y) dy \quad (9)$$

با تعریف جمله‌ی فرار عرضی [۶] به صورت زیر و انتقال آن به سمت راست معادله‌های ۶ و ۷، معادله‌های ۱۲ و ۱۳ به دست می‌آیند،

$$L_{y,g}^{m_x, m_y}(x) = \frac{1}{h_y^{m_x, m_y}} [J_{y,g}^{m_x, m_y+}(x) - J_{y,g}^{m_x, m_y-}(x)] \quad (10)$$

$$L_{x,g}^{m_x, m_y}(y) = \frac{1}{h_x^{m_x, m_y}} [J_{x,g}^{m_x+, m_y}(y) - J_{x,g}^{m_x-, m_y}(y)] \quad (11)$$

$$\begin{cases} -D_x \frac{d^2 \varphi_{x,1}(x)}{dx^2} + \left[ \Sigma_{r,1} - \frac{v \Sigma_{f,1}}{k_{eff}} \right] \varphi_{x,1}(x) - \left[ \Sigma_{s,r \rightarrow 1} + \frac{v \Sigma_{f,r}}{k_{eff}} \right] \varphi_{x,r}(x) = -[L_{y,1}^{m_x, m_y}(x)] \\ -D_y \frac{d^2 \varphi_{x,2}(x)}{dy^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_{x,2}(x) - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_{x,1}(x) = -[L_{y,2}^{m_x, m_y}(x)] \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} -D_x \frac{d^2 \varphi_{y,1}(y)}{dx^2} + \left[ \Sigma_{r,1} - \frac{v \Sigma_{f,1}}{k_{eff}} \right] \varphi_{y,1}(y) - \left[ \Sigma_{s,r \rightarrow 1} + \frac{v \Sigma_{f,r}}{k_{eff}} \right] \varphi_{y,r}(y) = -[L_{x,1}^{m_x, m_y}(y)] \\ -D_y \frac{d^2 \varphi_{y,2}(y)}{dy^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_{y,2}(y) - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_{y,1}(y) = -[L_{x,2}^{m_x, m_y}(y)] \end{cases} \quad (13)$$

شکل ماتریسی معادله‌های ۱۲ و ۱۳ این است [۲، ۷]

که در آن،  $h_u^{m_u, m_v}$  طول گره  $m$  در راستای  $u$  در راستای  $(u, v = x, y)$ ،  $J_{u,g}^{m_u+, m_v}$  جریان خالص نوترون در گروه  $g$ ام، روی صفحه‌ی سمت راست گره  $m$  در راستای  $u$  در راستای  $(u, v = x, y)$ ،  $J_{u,g}^{m_u-, m_v}$  جریان خالص نوترون در گروه  $g$ ام، روی صفحه‌ی سمت چپ گره  $m$  در راستای  $u$  در راستای  $(u, v = x, y)$  و  $\varphi_g^{m_x, m_y}$  شار متوسط (انتگرال گیری شده بر روی حجم) گره  $m$  در گروه  $g$ ام است. با استنتاج رابطه‌ی بین جریان خالص متوسط روی سطح‌ها و شار متوسط هر گره در هر گروه انرژی و جای‌گذاری آن در معادله‌های ۴، توزیع شار مکانی به دست می‌آید. این ارتباط با حل تحلیلی معادله‌های ۵ در هر راستا برقرار می‌شود. معادله‌ی دیفرانسیل پخش نوترون در دو گروه انرژی برای یک گره همگن چنین نوشته می‌شود

$$\begin{cases} -D_x \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2} + \Sigma_{r,1} \varphi(x,y) - \Sigma_{s,r \rightarrow 1} \varphi_r(x,y) \\ = \frac{1}{k_{eff}} (v \Sigma_{f,1} \varphi(x,y) + v \Sigma_{f,r} \varphi_r(x,y)) \\ -D_x \frac{\partial^2 \varphi_r(x,y)}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 \varphi_r(x,y)}{\partial y^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_r(x,y) - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_1(x,y) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌های ۵، یک بار در جهت  $y$  و یک بار هم در جهت  $x$ ، به ترتیب، معادله‌های ۶ و ۷ به دست می‌آیند [۶]

$$\begin{cases} -D_x \frac{d^2 \varphi_{x,1}(x)}{dx^2} + \frac{1}{h_y^{m_x, m_y}} [J_{y,1}^{m_x, m_y+}(x) - J_{y,1}^{m_x, m_y-}(x)] \\ + \Sigma_{r,1} \varphi_{x,1}(x) - \Sigma_{s,r \rightarrow 1} \varphi_{x,r}(x) - \frac{1}{k_{eff}} (v \Sigma_{f,1} \varphi_{x,1}(x) + v \Sigma_{f,r} \varphi_{x,r}(x)) = 0 \\ -D_y \frac{d^2 \varphi_{x,2}(x)}{dy^2} + \frac{1}{h_y^{m_x, m_y}} [J_{y,2}^{m_x, m_y+}(x) - J_{y,2}^{m_x, m_y-}(x)] \\ + \Sigma_{r,2} \varphi_{x,2}(x) - \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \varphi_{x,1}(x) = 0 \end{cases} \quad (6)$$



$$\begin{cases}
 \bar{L}_{y,g}^{m_x-1,m_y} \equiv c_{o,y,g}^{m_x,m_y} + c_{\nu,y,g}^{m_x,m_y} \left( -\frac{h_x^{m_x-1,m_y} + h_x^{m_x,m_y}}{\nu} \right) \\
 + c_{\nu,y,g}^{m_x,m_y} \left( \frac{(h_x^{m_x-1,m_y} + h_x^{m_x,m_y})(\nu h_x^{m_x-1,m_y} + h_x^{m_x,m_y})}{\rho} \right) \\
 \bar{L}_{y,g}^{m_x,m_y} \equiv c_{o,y,g}^{m_x,m_y} + c_{\nu,y,g}^{m_x,m_y} (\circ) + c_{\nu,y,g}^{m_x,m_y} (\circ) \\
 \bar{L}_{y,g}^{m_x+1,m_y} \equiv c_{o,y,g}^{m_x,m_y} + c_{\nu,y,g}^{m_x,m_y} \left( +\frac{h_x^{m_x+1,m_y} + h_x^{m_x,m_y}}{\nu} \right) \\
 + c_{\nu,y,g}^{m_x,m_y} \left( \frac{(h_x^{m_x+1,m_y} + h_x^{m_x,m_y})(\nu h_x^{m_x+1,m_y} + h_x^{m_x,m_y})}{\rho} \right)
 \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases}
 \bar{L}_{x,g}^{m_x,m_y-1} \equiv c_{o,x,g}^{m_x,m_y} + c_{\nu,x,g}^{m_x,m_y} \left( -\frac{h_y^{m_x,m_y-1} + h_y^{m_x,m_y}}{\nu} \right) \\
 + c_{\nu,x,g}^{m_x,m_y} \left( \frac{(h_y^{m_x,m_y-1} + h_y^{m_x,m_y})(\nu h_y^{m_x,m_y-1} + h_y^{m_x,m_y})}{\rho} \right) \\
 \bar{L}_{x,g}^{m_x,m_y} \equiv c_{o,x,g}^{m_x,m_y} + c_{\nu,x,g}^{m_x,m_y} (\circ) + c_{\nu,x,g}^{m_x,m_y} (\circ) \\
 \bar{L}_{x,g}^{m_x,m_y+1} \equiv c_{o,x,g}^{m_x,m_y} + c_{\nu,x,g}^{m_x,m_y} \left( -\frac{h_y^{m_x,m_y+1} + h_y^{m_x,m_y}}{\nu} \right) \\
 + c_{\nu,x,g}^{m_x,m_y} \left( \frac{(h_y^{m_x,m_y+1} + h_y^{m_x,m_y})(\nu h_y^{m_x,m_y+1} + h_y^{m_x,m_y})}{\rho} \right)
 \end{cases} \quad (19)$$

در نهایت پاسخ معادله‌های ۱۲ و ۱۳ این است

$$\begin{cases}
 \phi_{x,g}(x) = A_{x,g}^{m_x,m_y} \text{Exp}(\mu_g^{m_x,m_y} x) + B_{x,g}^{m_x,m_y} \text{Exp}(-\mu_g^{m_x,m_y} x) + P_{x,g}^{m_x,m_y}(x) \\
 \phi_{y,g}(y) = A_{y,g}^{m_x,m_y} \text{Exp}(\mu_g^{m_x,m_y} y) + B_{y,g}^{m_x,m_y} \text{Exp}(-\mu_g^{m_x,m_y} y) + P_{y,g}^{m_x,m_y}(y) \\
 \mu_g^{m_x,m_y} = \sqrt{\lambda_g^{m_x,m_y}}
 \end{cases} \quad (20)$$

که در آن، پارامتر  $\lambda_g^{m_x,m_y}$  ویژه مقدارها هستند.

با انجام یک رشته عملیات ریاضی مجاز و مناسب، برای هر یک از جهت‌های X و Y به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 \phi_{u,L}^{m_u,m_v} &= [C_{f,u}^{m_u,m_v}] \phi^{m_u,m_v} + (D_{m_u,m_v}^{m_u,m_v})^{-1} [C_{j,u}^{m_u,m_v}] \frac{h_u^{m_u,m_v}}{\nu} J_{u,L}^{m_u,m_v} \\
 &- [C_{f,u}^{m_u,m_v}] P_u^{m_u,m_v} + P_{u,L}^{m_u,m_v} + [C_{j,u}^{m_u,m_v}] \frac{h_u^{m_u,m_v}}{\nu} P_{u,L}^{m_u,m_v}; u, v \equiv x, y
 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{u,R}^{m_u,m_v} &= [C_{f,u}^{m_u,m_v}] \phi^{m_u,m_v} - (D_{m_u,m_v}^{m_u,m_v})^{-1} [C_{j,u}^{m_u,m_v}] \frac{h_u^{m_u,m_v}}{\nu} J_{u,R}^{m_u,m_v} \\
 &- [C_{f,u}^{m_u,m_v}] P_u^{m_u,m_v} + P_{u,R}^{m_u,m_v} - [C_{j,u}^{m_u,m_v}] \frac{h_u^{m_u,m_v}}{\nu} P_{u,R}^{m_u,m_v}; u, v \equiv x, y
 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{d^r \phi_{x,\nu}(x)}{dx^r} \\ \frac{d^r \phi_{x,\tau}(x)}{dx^r} \end{bmatrix} &- \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,\nu} - \nu \Sigma_{f,\nu}/k_{\text{eff}}}{D_\nu} & -\frac{\Sigma_{s,\tau \rightarrow \nu} + \nu \Sigma_{f,\tau}/k_{\text{eff}}}{D_\nu} \\ -\frac{\Sigma_{s,\nu \rightarrow \tau}}{D_\tau} & \frac{\Sigma_{r,\tau}}{D_\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{x,\nu}(x) \\ \phi_{x,\tau}(x) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_{y,\nu}^{m_x,m_y}(x)}{D_\nu} \\ \frac{L_{y,\tau}^{m_x,m_y}(x)}{D_\tau} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{d^r \phi_{y,\nu}(y)}{dy^r} \\ \frac{d^r \phi_{y,\tau}(y)}{dy^r} \end{bmatrix} &- \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,\nu} - \nu \Sigma_{f,\nu}/k_{\text{eff}}}{D_\nu} & -\frac{\Sigma_{s,\tau \rightarrow \nu} + \nu \Sigma_{f,\tau}/k_{\text{eff}}}{D_\nu} \\ -\frac{\Sigma_{s,\nu \rightarrow \tau}}{D_\tau} & \frac{\Sigma_{r,\tau}}{D_\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{y,\nu}(y) \\ \phi_{y,\tau}(y) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_{x,\nu}^{m_x,m_y}(y)}{D_\nu} \\ \frac{L_{x,\tau}^{m_x,m_y}(y)}{D_\tau} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (15)$$

اگر جمله‌های فرار عرضی تعیین شوند، معادله‌های فوق قابل حل هستند.

### ۳. تقریب جمله‌های فرار عرضی

جمله‌های فرار (جریان خالص روی سطح‌های یک گره) عرضی متقاطع بر راستاهای X و Y چنین بیان می‌شوند [۸]

$$L_{y,g}^{m_x,m_y}(x) = c_{o,y,g}^{m_x,m_y} + c_{\nu,y,g}^{m_x,m_y}(x) + c_{\nu,y,g}^{m_x,m_y} \left( x^r - \frac{1}{\nu} (h_x^{m_x,m_y})^r \right) \quad (16)$$

$$L_{x,g}^{m_x,m_y}(y) = c_{o,x,g}^{m_x,m_y} + c_{\nu,x,g}^{m_x,m_y}(y) + c_{\nu,x,g}^{m_x,m_y} \left( y^r - \frac{1}{\nu} (h_y^{m_x,m_y})^r \right) \quad (17)$$

ضریب‌های بسط معادله‌های ۱۶ و ۱۷ با انتگرال‌گیری از جمله‌های فرار عرضی بر روی گره به ابعاد  $(h_x^{m_x,m_y}, h_y^{m_x,m_y})$  (در تقریب تخت) و دو گره مجاور (در تقریب درجه‌ی دو) و نیز با استفاده از نتایج حاصل از تکرار قبلی محاسبه می‌شوند.

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی ۱۶ در راستای X (عمود بر جهت Y) و از معادله‌ی ۱۷ در راستای Y (عمود بر جهت X) داریم،



**جدول ۱.** سطح مقطع‌های دو گروهی [۹]

شماره‌ی ماده	گروه	$D_g$ (cm)	$\Sigma_{a,g}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\nu\Sigma_{f,g}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\Sigma_{1 \rightarrow 2}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )
۱	۱	۱,۲۵۵	۰,۰۸۲۵۲	۰,۰۴۶۰۲	۰,۰۲۵۳۳
	۲	۰,۲۱۱	۰,۱۰۰۳	۰,۱۰۹۱	
۲	۱	۱,۲۶۸	۰,۰۷۱۸۱	۰,۰۴۶۰۹	۰,۰۲۷۶۷
	۲	۰,۱۹۰۲	۰,۰۷۰۴۷	۰,۰۸۶۷۵	
۳	۱	۱,۲۵۹	۰,۰۸۰۰۲	۰,۰۴۶۶۳	۰,۰۲۶۱۷
	۲	۰,۲۰۹۱	۰,۰۸۳۴۴	۰,۱۰۲۱	
۴	۱	۱,۲۵۹	۰,۰۸۰۰۲	۰,۰۴۶۶۳	۰,۰۲۶۱۷
	۲	۰,۲۰۹۱	۰,۰۷۳۲۴	۰,۱۰۲۱	
۵	۱	۱,۲۵۷	۰,۰۰۶۰۳۴	۰,۰۰	۰,۰۴۷۵۴
	۲	۰,۰۰	۰,۰۱۹۱۱	۲	

در شکل ۳، توزیع قدرت مرجع و قدرت محاسبه شده با کد PARCS و روش تحلیلی نودال با تقریب‌های تخت و درجه‌ی دو فرار عرضی ارایه شده است؛ طول مش ۱۵ سانتی‌متر (یک مش برای هر مجتمع سوخت) در نظر گرفته شده است.

در شکل ۴، درصد خطای نسبی محاسبه‌ی توزیع قدرت و در جدول ۲، درصد خطای نسبی محاسبه‌ی ضریب تکثیر مؤثر، حداکثر درصد خطای نسبی محاسبه‌ی توزیع قدرت و میانگین آن داده شده است.

#### ۲.۴ رآکتور آب تحت فشار

شکل ۵ (یک چهارم)، قلب یک رآکتور آب سبک تحت فشار [۹] را نشان می‌دهد. سطح مقطع‌های دو گروهی این رآکتور در جدول ۳ آورده شده است.

در شکل ۶، توزیع قدرت مرجع و قدرت محاسبه شده با کد PARCS و روش مورد مطالعه با تقریب‌های تخت و درجه‌ی دو فرار عرضی ارایه شده است. طول مش ۲۰ سانتی‌متر (یک مش برای هر مجتمع سوخت) در نظر گرفته شده است.

در شکل ۷، درصد خطای نسبی محاسبه‌ی توزیع قدرت و در جدول ۴، درصد خطای نسبی محاسبه‌ی ضریب تکثیر مؤثر، حداکثر درصد خطای نسبی محاسبه‌ی توزیع قدرت و میانگین آن داده شده است.

با توجه به این که در هر دو مسأله‌ی فوق، طول مش در حد یک مجتمع سوخت در نظر گرفته شده است و حداکثر خطای نسبی محاسبه‌ی توزیع قدرت قلب کم‌تر از ۱ درصد است، می‌توان نتیجه گرفت که روش مورد مطالعه از دقت بالایی برخوردار است.

که در آن زیرنویس‌های  $L$  و  $R$  نماد سطح‌های سمت چپ و راست هر گره هستند و پارامترهای  $C_{f,u}^{m_x, m_y}$  و  $C_{j,u}^{m_x, m_y}$  چنین تعریف می‌شوند

$$C_{f,u}^{m_u, m_v} \equiv \frac{\mu^{m_u, m_v} h_u^{m_u, m_v}}{\text{Sinh}(\mu^{m_u, m_v} h_u^{m_u, m_v})} \quad u, v \equiv x, y \quad (23)$$

$$C_{j,u}^{m_u, m_v} \equiv \frac{\text{Tanh}(\mu^{m_u, m_v} h_u^{m_u, m_v} / 2)}{\mu^{m_u, m_v} h_u^{m_u, m_v} / 2} \quad u, v \equiv x, y \quad (24)$$

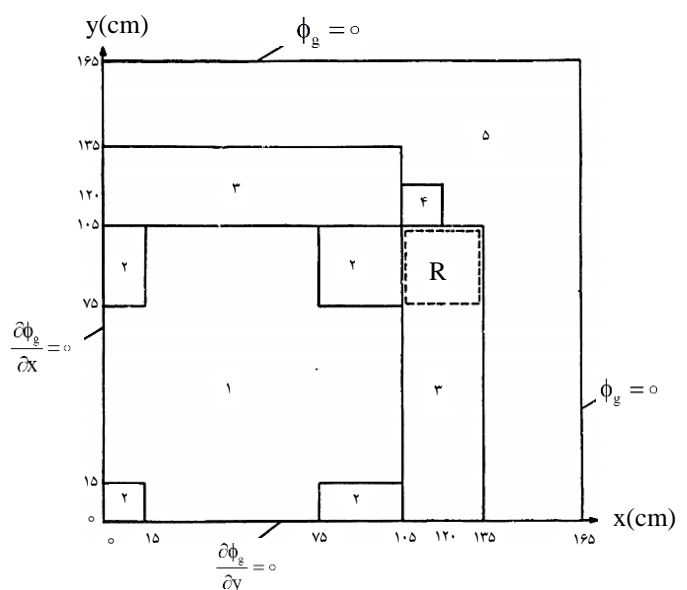
با استفاده از رابطه‌های ۱۰ و ۱۱، و پیوستگی‌های شار و جریان در مرزهای بین گره‌ها (رابطه‌های ۲۱ و ۲۲) می‌توان به رابطه‌ی موردنظر بین شار متوسط هر گره و جریان خالص متوسط بر روی سطح‌های هر گره دست یافت. با جای‌گذاری رابطه‌های به دست آمده، در معادله‌های ۴، توزیع شار وابسته به مکان، در هر گره انرژی به دست می‌آید.

#### ۴. نتایج عددی

به منظور راستی‌آزمایی روش تحلیلی نودال با تقریب فرار عرضی، دو مسأله‌ی نمونه حل و نتایج آن با مقدارهای مرجع مقایسه شد.

#### ۱.۴ رآکتور آب جوشان

شکل ۲ (یک چهارم) قلب یک رآکتور آب جوشان [۹] را نشان می‌دهد. سطح مقطع‌های دو گروهی این رآکتور در جدول ۱ آمده است.



شکل ۲. (یک چهارم) قلب رآکتور آب جوشان [۹].



**جدول ۲.** درصد خطای نسبی محاسبه‌ی ضریب تکثیر مؤثر، توزیع قدرت و میانگین آن در مسأله‌ی ۱

روش	$K_{eff}$	مرجع [۹]	err (pcm)	$\epsilon_{max}^*$	$\epsilon_{ave}^{**}$
PARCS (ANM+CMFD)	۰٫۹۹۶۴۱		۵	۰٫۱۸	۰٫۰۷
ANM (Quadratic App.)	۰٫۹۹۶۴۱	۰٫۹۹۶۳۶	۵	۰٫۱۸	۰٫۰۷
ANM (Flat App.)	۰٫۹۹۶۹۵		۵۹	۲٫۹۸	۱٫۳۰

\* : حداکثر درصد خطای نسبی محاسبه‌ی توزیع قدرت،

\*\* : میانگین درصد خطای نسبی محاسبه‌ی توزیع قدرت.

**جدول ۳.** سطح مقطع‌های دو گروهی [۹]

شماره ماده	گروه	$D_g$ (cm)	$\Sigma_{a,g}$ ( $cm^{-1}$ )	$v\Sigma_{f,g}$ ( $cm^{-1}$ )	$\Sigma_{1 \rightarrow 2}$ ( $cm^{-1}$ )
۱	۱	۱٫۵	۰٫۱۰۱۲۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۲
۱	۲	۰٫۴	۰٫۸۰۰۳۲	۰٫۱۳۵	۰٫۰۲
۲	۱	۱٫۵	۰٫۱۰۱۲۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۲
۲	۲	۰٫۴	۰٫۸۵۰۳۲	۰٫۱۳۵	۰٫۰۲
۳	۱	۱٫۵	۰٫۱۰۱۲۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۲
۳	۲	۰٫۴	۰٫۱۳۰۳۲	۰٫۱۳۵	۰٫۰۲
۴	۱	۲٫۰	۰٫۰۰۰۱۶۰	۰٫۰۰۰	۰٫۰۴
۴	۲	۰٫۳	۰٫۱۰۰۲۴	۰٫۰۰۰	۰٫۰۴

**جدول ۴.** درصد خطای نسبی محاسبه‌ی ضریب تکثیر مؤثر، توزیع قدرت و میانگین آن در مسأله‌ی ۲

روش	$K_{eff}$	مرجع [۹]	err (pcm)	$\epsilon_{max}^*$	$\epsilon_{ave}^{**}$
PARCS (ANM+CMFD)	۱٫۰۲۹۶۰		۱	۰٫۷۶	۰٫۲۴
ANM (Quadratic App.)	۱٫۰۲۹۶۴	۱٫۰۲۹۵۹	۵	۰٫۴۷	۰٫۱۴
ANM (Flat App.)	۱٫۰۳۰۰۳		۴۴	۲٫۶۲	۰٫۷۷

\* : حداکثر درصد خطای نسبی محاسبه‌ی توزیع قدرت،

\*\* : میانگین درصد خطای نسبی محاسبه‌ی توزیع قدرت.

## ۵. بحث و نتیجه‌گیری

رویکردهای مختلفی برای حل معادله‌ی پخش نوترون به روش تحلیلی نودال وجود دارد. یکی از این رویکردها، استفاده از تقریب فرار عرضی است. در تقریب فرار عرضی، معادله‌ی پخش دوبعدی نوترون به دو معادله‌ی یک‌بعدی جفت‌شده شکسته شده و به صورت تحلیلی حل می‌شود. جمله‌ی فرار عرضی که در سمت راست هر یک از معادله‌های یک‌بعدی ظاهر می‌شود، به صورت یک چندجمله‌ای تخمین زده می‌شود. در این مقاله، از تقریب‌های تخت (چندجمله‌ای درجه صفر) و سهمی (چندجمله‌ای درجه دو) استفاده شد. دو مسأله‌ی نمونه برای راستی آزمایی روش تحلیلی نودال حل شد که مقایسه‌ی نتایج آن دو با مقادیر مرجع و کد تجاری PARCS نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است که روش مزبور از دقت بالایی برخوردار است.

هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت که تقریب درجه‌ی دو دقت بیش‌تری نسبت به تقریب تخت دارد. علت این امر آن است که در تقریب تخت، تنها، گره موردنظر در تخمین جمله‌ی فرار عرضی نقش دارد ولی در تقریب درجه‌ی دو، علاوه بر گره موردنظر، دو گره مجاور نیز در تخمین جمله‌ی فرار عرضی دخیل هستند. نظر به این‌که طول مش در این روش می‌تواند بزرگ در نظر گرفته شود (در حد مجتمع سوخت)، سرعت اجرای برنامه افزایش می‌یابد. تنها مشکلی که برای این روش می‌توان در نظر گرفت این است که حجم محاسبه‌های آن زیاد است و متعاقباً حجم قابل توجهی از حافظه‌ی سیستم را اشغال می‌کند که این مشکل می‌تواند تا حد زیادی با بهینه‌سازی برنامه کامپیوتری نوشته شده برطرف شود.



- [1] K.S. Smith, An analytic nodal method for solving the two group multidimensional static and transient neutron diffusion equations, PhD Thesis, MIT (1976).
- [2] J.M. Aragonés, C. Ahnert, N.G. Herranz, The analytic coarse mesh finite difference method for multi group and multidimensional diffusion calculations, Nuclear Science and Engineering, 157(1) (2007).
- [3] H.G. Joo, D. Barber, G. Jiang, T.J. Downar, PARCS, A multi-dimensional two-group reactor kinetics code based on the nonlinear analytic nodal method, PU/NE-98-26 (1998).
- [4] P.J. Turinsky, R.M.K. Al-Chalahi, P. Engrand, H.N. Sarsour, F.X. Faure, W. Guo, NESTLE: a few-group neutron diffusion equation solver utilizing the nodal expansion method for eigenvalue, adjoint, fixed-source steady-state and transient problems, EGG-NRE-11406 (1994).
- [5] A. Trkov, Multi groups 3-dimensional neutron diffusion nodal code with thermo hydraulic feedbacks, Institute Jozef Stefan, Ljubljana, Slovenia, IJS-DP-6688, Rev. 2 (2008).
- [6] Y.A. Chao, A theoretical analysis of the coarse mesh finite difference representation in advanced nodal methods, mathematics and computation, Reactor Physics and Environmental Analysis, in Nuclear Applications, (1) (1999) 117.
- [7] N.G. Herranz, Analytic coarse-mesh finite-difference method generalized for heterogeneous multidimensional two group diffusion calculations, Nuclear Science and Engineering, 144 (2003) 23.
- [8] A. Hebert, A simplified presentation of the multi groups analytic nodal method in 2D cartesian geometry, Annals of Nuclear Energy, 35 (2008) 2142.
- [9] National energy software center: benchmark problem book, ANL-7416, Suppl. 1, 2, 3 (1985).