



بررسی چگالی نوترون در حالت زیربحرانی با چشمه‌ی تپی نوترون

رسول خدابخش^۱، سهراب بهنیا^۲، مسعود صیدی*^۱

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، صندوق پستی: ۵۷۱۵۳-۱۶۵، ارومیه - ایران

۲. گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، صندوق پستی: ۱۶۱۱۶-۴۱۴، ارومیه - ایران

چکیده: در طول راه‌اندازی خنک، رآکتور در حالت زیربحرانی است، لذا نمی‌توان از چشمه‌ی نوترون خارجی صرف‌نظر کرد. در این مقاله یک حل تحلیلی در حضور چشمه‌ی نوترون تپی با یک گروه نوترون تأخیری در طول راه‌اندازی یک رآکتور آب تحت فشار با سوخت ^{235}U ارائه شده است. حل تحلیلی براساس بسط چگالی نوترون در توان‌هایی از زمان تولید نوترون‌های آنی است. معادله‌های سینتیک نقطه‌ای با این روش برای واکنش‌پذیری‌های ثابت و خطی قابل حل است و به نتایج بهتری در مقایسه با کارهای تحلیلی دیگران می‌انجامد، ولی برای واکنش‌پذیری سینوسی، کارآمد نیست. بنابراین پاسخ چگالی نوترون به واکنش‌پذیری سینوسی به کمک بررسی نقاط ثابت و روش نمای لیاپانوف تحلیل شده است.

کلیدواژه‌ها: چشمه‌ی نوترون تپی، زمان تولید نوترون‌های آنی، نمای لیاپانوف، چگالی نوترون

Neutron density study in sub-critical state with pulsed neutron source

R. Khodabakhsh¹, S. Behnia², M. Seidi*¹

1. Department of Physics, Science Faculty, Urmia University, P.O.Box: 165-57153, Urmia - Iran

2. Department of Physics, Urmia University of Technology, P.O.Box: 414-16116, Urmia - Iran

Abstract: During the cold start-up, the reactor is in sub-critical state. Therefore, the external neutron source cannot be neglected. In this research paper, the analytical solution of neutron point kinetics equations with a group of delayed neutrons in the presence of the pulsed neutron source in a pressurized-water reactor with ^{235}U as a fuel is presented. The analytical solution is based on the expansion of the neutron density in powers of the prompt neutrons generation time. The point kinetics equations with this method are solvable for step and ramp reactivity and lead to better results compared with other analytical works, but are not solvable for sinusoidal reactivity. So, the neutron density response to sinusoidal reactivity is analyzed by using the fixed point and Lyapunov exponents method.

Keywords: Pulsed neutron source, Prompt neutrons generation time, Lyapunov exponent, Neutron density



۱. مقدمه

حاکم با روش مذکور قابل حل هستند و نتایج حاصل در مورد واکنش‌پذیری خطی، دقیق‌تر از روش پالما و همکاران است، اما با این روش و بدون استفاده از تقریب‌های مرسوم مانند پرش آنی و غیره نمی‌توان مسأله را حل کرد، چرا که با انتگرال‌هایی مواجه می‌شویم که فعلاً، تنها با روش‌های عددی و تقریبی قابل حل هستند. بر این اساس در این مورد سعی شده است یک حل عددی با استفاده از روش ODE45 ارائه شود که دقت محاسبه‌های مربوط به آن بسیار بالا و با روش‌های عددی دیگر مانند TSM، GAEM و Pade هم‌خوانی زیادی دارد، به علاوه با استفاده از روش ماتریس ژاکوبین رفتار چگالی نوترون در نزدیکی نقاط ثابت بررسی شده و برای درک بهتر تأثیر تغییرهای پارامترهای کنترلی بر روی رفتار چگالی نوترون از روش نمای لیاپانوف بهره گرفته شده است. در پایان به بحث و نتیجه‌گیری روی موارد فوق پرداخته شده است.

۲. مدل‌سازی و حل تحلیلی

در طول راه‌اندازی خنک، رآکتور در حالت زیربحرانی است. در این مورد میانگین دمای قلب رآکتور به حدی پایین است که می‌توان به راحتی از اثرهای دمای بازخور صرف نظر کرد. مطابق این نظر، فرمول‌بندی ریاضی بر مبنای معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون به صورت زیر است [۹، ۱۰]

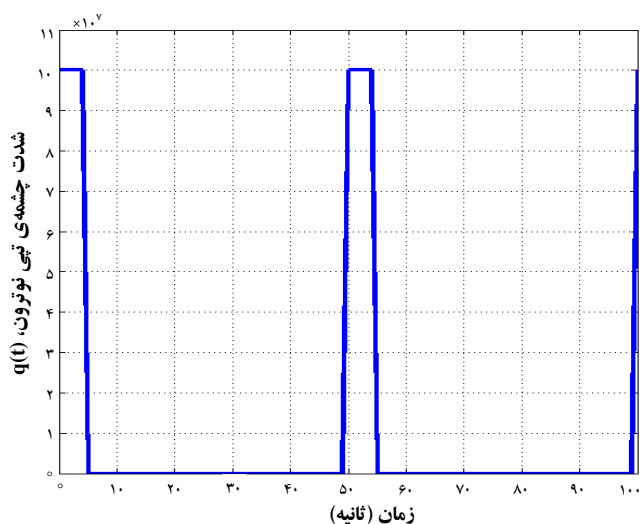
$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda c(t) + q(t) \\ \frac{dc(t)}{dt} &= \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda c(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن، $n(t)$ چگالی نوترون، $c(t)$ چگالی متوسط نیاخته‌های نوترون‌های تأخیری، ρ واکنش‌پذیری، λ ثابت واپاشی متوسط نیاخته‌های نوترون‌های تأخیری، Λ متوسط زمان تولید نوترون‌های آنی، β کسر کل نوترون‌های تأخیری و $q(t)$ شدت چشمه‌ی نوترون خارجی است. با حذف وابستگی غلظت نیاخته‌های نوترون تأخیری، سیستم معادله‌های دیفرانسیل حاکم که رفتار تقریبی چگالی نوترون برای تغییر در واکنش‌پذیری را با معادله‌ی ۱ توصیف می‌کند، این است

$$I \frac{d'n(t)}{dt'} = (\rho - \beta - \lambda I) \frac{dn(t)}{dn} + \left(\lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right) n(t) + \left(\lambda q + \frac{dq}{dt} \right) I \quad (2)$$

معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون^(۱) (NPK) مهم‌ترین معادله‌ها در دینامیک رآکتور هستند، آن‌ها را می‌توان از معادله‌ی پخش یا معادله‌ی ترابرد نوترون استخراج کرد [۱، ۲]. از طریق این معادله‌ها تعیین رفتار شار نوترون با یک واکنش‌پذیری^(۲) مشخص در طول زمان میسر است. چگالی شار نوترون و غلظت نیاخته‌های نوترون‌های تأخیری مهم‌ترین پارامترها در مطالعه‌ی ایمنی و رفتارگذار رآکتور هسته‌ای هستند [۳]. در واقع این پارامترها، خروجی‌های معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون هستند. روش‌های عددی بسیاری برای حل این معادله‌ها وجود دارد که از بین آن‌ها می‌توان به روش سری توانی (PWS) [۴]، روش سری تیلور (TSM) [۵]، روش تحلیل وارون (AIM) [۶] و روش تحلیل نمایی تعمیم یافته (GAEM) [۷] اشاره کرد. از بین روش‌های تحلیلی مطالعه‌ی سینتیک زیربحرانی به کارهای سازباشیلا [۸]، زانگ و همکاران [۹]، پالما و همکاران [۱۰] و لی و همکاران [۱۱] می‌توان اشاره کرد. لی و همکاران با در نظر گرفتن جمله‌ی چشمه و واکنش‌پذیری پله‌ای ورودی توانستند یک جواب تحلیلی به دست آورند. زانگ و همکاران [۹] یک جواب تحلیلی برای معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با واکنش‌پذیری خطی ورودی و تقریب پرش آنی^(۳) (PJ) ارائه کردند. پالما و همکاران [۱۰] بدون استفاده از تقریب پرش آنی جواب‌هایی را به شکل تابع‌های گامای ناقص استخراج کردند. سازباشیلا [۸] بدون استفاده از تقریب منبع ثابت به شکل تابع‌های گامای ناقص یک حل تحلیلی را برای واکنش‌پذیری خطی ارائه داد. روش تحلیلی اختلالی نیز در مورد معادله‌های یک گروهی با در نظر گرفتن اثرهای بازخور^(۴) دمایی روش کارآمدی است [۱۲، ۱۳]، این روش در این مقاله مورد بحث قرار گرفته است. البته این روش برای هر نوع واکنش‌پذیری قابل استفاده نیست، در این موارد می‌توان از روش‌های عددی مذکور و یا تحلیل پایداری مانند روش ماتریس ژاکوبین برای تحلیل نقاط ثابت [۱۴]، روش نمای لیاپانوف [۱۵، ۱۶] و روش انشعاب^(۵) [۱۷، ۱۸] بهره گرفت.

در این مطالعه تلاش شده ضمن ارائه‌ی مدل، به کمک روش اختلالی بسط چگالی نوترون در توان‌هایی از زمان تولید نوترون‌های آنی یک حل تحلیلی برای یک رآکتور PWR [۹، ۱۱] با واکنش‌پذیری‌های ثابت، خطی و سینوسی و با چشمه‌ی تپی ارائه شود. در مورد واکنش‌پذیری‌های ثابت و خطی، معادله‌های



شکل ۱. تغییرات شدت چشمه‌ی نوترون با زمان.

حل تحلیلی در این مطالعه بر مبنای بسط معادله‌ی ۵ بوده است. بنابراین با جاگذاری معادله‌ی ۵ در معادله‌ی ۴ و ساده‌سازی معادله‌های حاکم داریم

$$\begin{cases} I^0: (\rho - \beta) \frac{dn_1}{dt} + \left(\lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right) n_1 = 0 \\ I^1: \frac{d^2 n_1}{dt^2} + \lambda \frac{dn_1}{dt} + (\beta - \rho) \frac{dn_1}{dt} = \left(\lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right) n_1 + \left(\lambda \rho + \frac{dq}{dt} \right) \end{cases} \quad (6)$$

پیش‌تر، نهالا [۱۲] با در نظر گرفتن دو جمله‌ی اول بسط معادله‌ی ۵، چگالی نوترون را با به حساب آوردن اثرهای دمای بازخور به طور تحلیلی محاسبه کرد. در سال ۲۰۱۲ همین مسأله توسط سعیدی‌نژاد و همیه [۱۳] به طور دقیق‌تری بررسی شد، در مدل آن‌ها علاوه بر بسط چگالی نوترون، از بسط واکنش‌پذیری بازخور دمایی در توان‌هایی از زمان تولید نوترون‌های آنی و با در نظر گرفتن دو جمله‌ی اول هر بسط بهره گرفته شد. در مطالعه‌ی حاضر از این روش برای بررسی چگالی نوترونی در حضور واکنش‌پذیری‌های ثابت، خطی و سینوسی استفاده شده است.

۱.۲ واکنش‌پذیری ثابت

معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون در حضور چشمه‌ی تپی و واکنش‌پذیری ثابت، بدون اعمال هیچ‌گونه تقریبی، دارای حل تحلیلی دقیق‌اند. معادله‌ی ۶، شکل کلی معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با تقریب اعمال شده است. بنابراین معادله‌ی ۶

در این مطالعه، منظور از چشمه‌ی تپی یک چشمه‌ی خارجی نوترون است که در مدت کوتاهی مقدار ثابتی نوترون را به داخل قلب رآکتور می‌فرستد و سپس شدت آن به صفر می‌رسد و چند لحظه‌ی دیگر تپی با همان شدت و در همان بازه‌ی زمانی می‌فرستد و مجدداً صفر می‌شود. این فرایند طی یک بازه‌ی زمانی صورت می‌گیرد که می‌توان آن را با یک تابع موج مستطیلی نشان داد. بنابراین معادله‌ی آن در یک دوره‌ی تناوب (T ثانیه) (مدت زمانی است که موج به حالت اول خودش بر می‌گردد) این است

$$q(t) = \begin{cases} q_0 & \text{if } t \in [0, T) \\ 0 & \text{if } t \in [T, 2T) \end{cases}, \quad \varepsilon, T \in \mathbb{R}^+ \quad (3)$$

شکل ۱، رسمی از $q(t)$ به صورت تابعی از زمان به ازای $\varepsilon = 5s$ و $T = 50s$ ، $q_0 = 10^8$ (neutron $cm^{-3} s^{-1}$) است.

معادله‌ی ۳ نمایش ریاضی یک تپ خیلی کوتاه نوترون‌های تزریق شده به درون رآکتور به وسیله‌ی یک مولد تپی نوترون در مدت زمان ε ثانیه است. بدین ترتیب، معادله‌ی سینتیک نقطه‌ای رآکتور با چشمه‌ی تپی نوترون و بدون اعمال تقریب پرش آنی برای یک گروه نیا هسته‌ی نوترون تأخیری این است

$$I \frac{d^2 n(t)}{dt^2} = (\rho - \beta - \lambda I) \frac{dn(t)}{dt} + \left(\lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right) n(t) + \lambda I \begin{cases} q_0 & \text{if } t \in [0, \varepsilon) \\ 0 & \text{if } t \in [\varepsilon, T) \end{cases}, \quad \varepsilon, T \in \mathbb{R}^+ \quad (4)$$

معادله‌ی ۴ به ازای واکنش‌پذیری‌های ثابت، خطی و سینوسی یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم است که به ازای واکنش‌پذیری‌های خطی و ثابت به صورت تحلیلی قابل حل است، ولی به ازای واکنش‌پذیری سینوسی به صورت تحلیلی قابل حل نیست. بنابراین باید به کمک روش‌های کمی عددی یا روش‌های کیفی تحلیل پایداری، مسأله بررسی شود. با توجه به این که چگالی نوترون به تغییرهای جزئی در زمان تولید نوترون‌های آنی بسیار حساس است (ولی در مقابل به تغییرهای ثابت واپاشی زیاد حساس نیست)، می‌توان زمان تولید نوترون‌های آنی را به عنوان یک عامل اختلالی مد نظر قرار داد. بر این اساس، چگالی نوترون را در توان‌هایی از این پارامتر کوچک بسط داده و از جمله‌های مرتبه‌های بالاتر (دوم به بالا) $O(I^2)$ صرف نظر می‌کنیم. لذا این بسط چنین نوشته می‌شود

$$n(t) = \sum_{m=0}^n I^m n_{m+1}(t) \quad (5)$$



$$\begin{cases} I^{\circ} : (\rho_0 + rt - \beta) \frac{dn_1}{dt} + (\lambda\rho_0 + \lambda rt + r)n_1 = 0 \\ I^{\prime} : \frac{d^2 n_1}{dt^2} + \lambda \frac{dn_1}{dt} + (\beta - \rho_0 - rt) \frac{dn_1}{dt} = (\lambda\rho_0 + \lambda rt + r)n_1 + \lambda q_0 \end{cases} \quad (11)$$

به کمک روش ضریب انتگرال گیری و شرایط اولیه‌ی $n_1(t=0)=n_0$ و $n_1'(t=0)=0$ در بازه‌ی زمانی مذکور جواب کلی معادله‌ی ۱۱ این است

$$n(t) = \frac{e^{-\lambda(t-k_1)}}{(t-k_1)^{\eta+1}} \left\{ A + \frac{q_0}{(-\lambda)^{\eta}} [\gamma(\eta+1, -\lambda(t-k_1)) - \gamma(\eta+1, \lambda k_1)] \right\} + \frac{e^{-\lambda(t-k_1)}}{(t-k_1)^{\eta+1}} \left(\frac{A(\eta+1)}{r} \right) \left\{ \frac{(\eta+1)}{r} \left(\frac{1}{k_1^r} - \frac{1}{(t-k_1)^r} \right) + \lambda \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{t-k_1} \right) \right\} \quad (12)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\lambda\rho_0 + b}{b} \\ k_2 &= \frac{\beta - \rho_0}{b} \\ \eta &= k_1 + \lambda k_2 - 1 \\ A &= \frac{n_0(-k_1)^{\eta+1}}{e^{\lambda k_1}} \end{aligned} \quad (13)$$

در مرحله‌ی بعد، شدت چشمه به صفر می‌رسد. در این حالت شکل کلی معادله‌های حاکم چنین خواهد بود

$$\begin{cases} I^{\circ} : (\rho_0 + rt - \beta) \frac{dn'_1}{dt} + (\lambda\rho_0 + \lambda rt + r)n'_1 = 0 \\ I^{\prime} : \frac{d^2 n'_1}{dt^2} + \lambda \frac{dn'_1}{dt} + (\beta - \rho_0 - rt) \frac{dn'_1}{dt} = (\lambda\rho_0 + \lambda rt + r)n'_1 \end{cases} \quad (14)$$

معادله‌ی ۱۴ مشابه معادله‌ی ۱۱ به کمک ضریب انتگرال گیری حل می‌شود. ثابت انتگرال گیری نیز به کمک شرط پیوستگی $(n_{1,r}(t=\varepsilon) = n'_{1,r}(t=\varepsilon))$ به دست می‌آید، بنابراین داریم

تحت اثر واکنش پذیری الحاقی ثابت $\rho = \rho_0$ در بازه‌ی زمانی $0 < t < \varepsilon$ چنین است

$$\begin{cases} I^{\circ} : (\rho_0 - \beta) \frac{dn_1}{dt} + (\lambda\rho_0)n_1 = 0 \\ I^{\prime} : \frac{d^2 n_1}{dt^2} + \lambda \frac{dn_1}{dt} + (\beta - \rho_0) \frac{dn_1}{dt} = (\lambda\rho_0)n_1 + \lambda q_0 \end{cases} \quad (15)$$

به راحتی می‌توان به کمک شرایط اولیه‌ی $n_1(t=0)=n_0$ و $n_1'(t=0)=0$ در بازه‌ی زمانی $0 < t < \varepsilon$ جواب تحلیلی معادله‌ی ۱۵ را به دست آورد

$$n(t) = \exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{(\beta - \rho_0)}t\right) \left\{ n_0 + \frac{q_0}{\rho_0} \left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda\rho_0}{(\beta - \rho_0)}t\right) \right) - \frac{n_0 \lambda \rho_0 \beta \lambda^r}{(\beta - \rho_0)^r} t \right\} \quad (16)$$

بعد از ε ثانیه شدت چشمه به صفر می‌رسد؛ بنابراین، معادله‌ی ۱۶ چنین می‌شود

$$\begin{cases} I^{\circ} : (\rho_0 - \beta) \frac{dn'_1}{dt} + (\lambda\rho_0)n'_1 = 0 \\ I^{\prime} : \frac{d^2 n'_1}{dt^2} + \lambda \frac{dn'_1}{dt} + (\beta - \rho_0) \frac{dn'_1}{dt} = (\lambda\rho_0)n'_1 \end{cases} \quad (17)$$

در بازه‌ی زمانی $\varepsilon < t < T$ ، معادله‌ی ۱۷ به کمک شرط پیوستگی $(n_{1,r}(t=\varepsilon) = n'_{1,r}(t=\varepsilon))$ به آسانی حل می‌شود؛ بنابراین داریم

$$n'(t) = \exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{(\beta - \rho_0)}t\right) \left\{ n_0 + \frac{q_0}{\rho_0} \left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda\rho_0 \varepsilon}{(\beta - \rho_0)}\right) \right) - \frac{\lambda n_0 \beta \lambda^r}{(\beta - \rho_0)^r} t \right\} \quad (18)$$

به طور کلی معادله‌های ۸ و ۱۰ جواب‌های تحلیلی معادله‌های تک گروهی در حضور واکنش پذیری ثابت و چشمه‌ی تپی‌اند.

۲.۲ واکنش پذیری خطی

واکنش پذیری خطی (تدریجی) اعمال شده به سیستم به صورت $\rho = \rho_0 + rt$ بیان می‌شود [۹، ۱۰] که در آن t ، آهنگ واکنش پذیری تدریجی تزریق شده به سیستم است. مانند حالت قبلی در بازه‌ی زمانی $0 < t < \varepsilon$ معادله‌های حاکم عبارت‌اند از



در این جا با بررسی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه در نقطه‌های ثابت مطابق جدول ۱ [۱۴] می‌توان نوع نقطه‌ی ثابت را مشخص کرد. در معادله‌ی ۱ به کمک روش مذکور می‌توان Δ و $\text{Tr}J$ را محاسبه کرد. بنابراین داریم

$$\text{Tr}J = \left(\frac{\rho_0 \sin(\omega t) - \beta - \lambda l}{1} \right), \quad \Delta = - \left(\frac{\lambda \rho_0}{1} \right) \sin(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (18)$$

که در آن، τ برحسب ثانیه، دوره‌ی تناوب و واکنش‌پذیری سینوسی است.

۴.۲ روش نمای لیاپانوف

یکی از سودمندترین ابزارها برای تحلیل پایداری سیستم‌های خطی و غیرخطی روش نمای لیاپانوف است. روش نمای لیاپانوف علاوه بر بیان کمی حساسیت سیستم به شرایط اولیه، مقیاسی از میزان تناوبی بودن سیستم را ارائه می‌کند [۱۹]. به طوری که نمای لیاپانوف منفی به معنای نزدیک شدن مسیرها در فضای فاز به نقطه‌ی ثابت است و نمای لیاپانوف صفر دلالت بر این دارد که مسیرها در موقعیت نسبی خودشان باقی می‌مانند و گذر زمان تأثیری بر آن‌ها ندارد، لذا آن‌ها روی یک جاذب پایدار قرار دارند. در نهایت نمای لیاپانوف مثبت حاکی از ناپایداری و آشوبناک بودن سیستم است.

در یک سیستم m بعدی با m نمای لیاپانوف، تنها یک نمای لیاپانوف مثبت کافی است که سیستم را ناپایدار یا به عبارت دیگر آشوبناک بسازد [۲۰، ۲۱]. نمای لیاپانوف را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

دو نقطه از نزدیک‌ترین مسیرهای همسایه را در فضای فاز در زمان‌های $t_1=0$ و $t_2=t$ در نظر بگیرید که فاصله‌ی نقطه‌ها در t_2 به جهت به ترتیب $\|\delta X_i(t)\|$ و $\|\delta X_i(0)\|$ است. نمای لیاپانوف (Λ_i) به صورت متوسط آهنگ رشد از فاصله‌ی اولیه تعریف می‌شود [۱۹]

جدول ۱. نقاط ثابت در فضای حالت دوبعدی [۱۴]

	$\text{Tr}J < 0$	$\text{Tr}J > 0$
$\Delta > \frac{1}{4}(\text{Tr}J)^2$	ماریچ گره	ماریچ دافع
$0 < \Delta < \frac{1}{4}(\text{Tr}J)^2$	گره	دافع
$\Delta < 0$	نقطه‌ی زین	نقطه‌ی زین

$$n'(t) = \frac{e^{-\lambda(t-k_r)}}{(t-k_r)^{\eta+1}} \left\{ A + \frac{lq_0}{r(-\lambda)^{\eta}} [\gamma(\eta+1, -\lambda(\varepsilon-k_r)) - \gamma(\eta+1, \lambda k_r)] \right\} + \frac{e^{-\lambda(t-k_r)}}{(t-k_r)^{\eta+1}} \left(\frac{A l(\eta+1)}{r} \right) \left\{ \frac{(\eta+1)}{2} \left(\frac{1}{k_r'} - \frac{1}{(t-k_r)'} \right) + \lambda \left(\frac{1}{k_r} - \frac{1}{t-k_r} \right) \right\} \quad (15)$$

معادله‌های ۱۲ و ۱۵ جواب‌های تحلیلی معادله‌های سینتیکی نقطه‌ای نوترون با یک گروه نوترون تأخیری در حضور واکنش‌پذیری خطی و چشمه‌ی تپی مستطیلی در یک دوره‌ی تناوب هستند. به کمک شرط پیوستگی و روش مذکور می‌توان تابع چگالی نوترون را در هر دوره‌ی تناوب دلخواه محاسبه کرد به شرط این که چگالی نوترون در یک مرحله‌ی قبل از آن مشخص شده باشد.

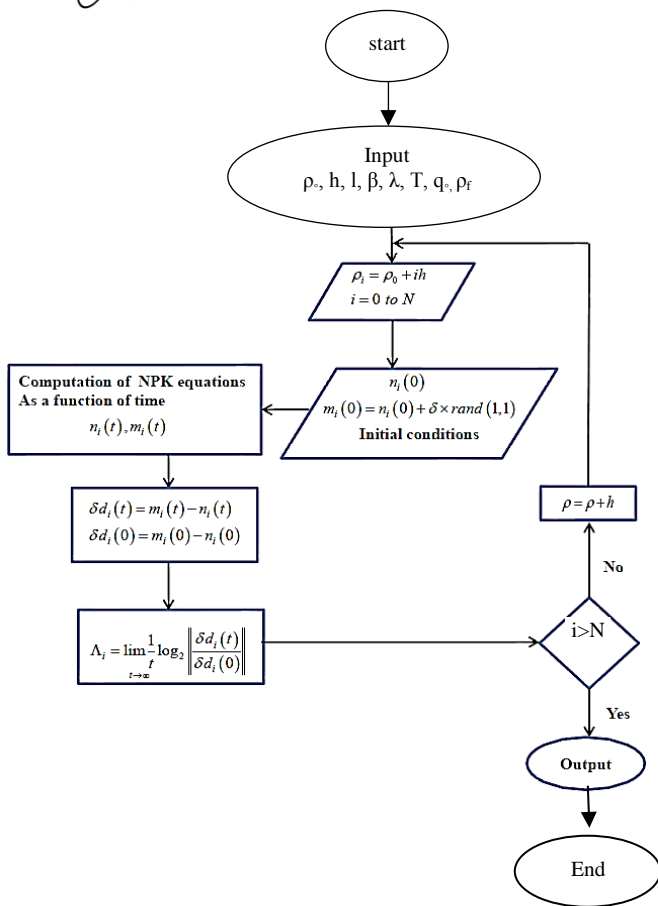
۳.۲ واکنش‌پذیری سینوسی

پاسخ چگالی نوترون به واکنش‌پذیری سینوسی، $\rho = \rho_0 \sin(\omega t)$ ، در حضور چشمه‌ی تپی به کمک بسط چگالی نوترون در توان‌هایی از زمان تولید نوترون به کمک معادله‌های ۶ بررسی می‌شوند که به کمک روش‌های متداول به طور تحلیلی دقیق تا به امروز حل نشده باقی مانده‌اند. با استفاده از روش‌های عددی و یا روش‌های تحلیل پایداری می‌توان این مسئله را بررسی و تحلیل کرد. در این جا علاوه بر تحلیل نقاط ثابت، از روش نماهای لیاپانوف برای بررسی و تحلیل پایداری این مسئله کمک گرفته شده است. یک روش بسیار کارآمد برای پیدا کردن معادله‌ی مشخصه‌ی یک نقطه‌ی ثابت، روش ماتریس ژاکوبین است [۱۴]. عنصرهای ماتریس ژاکوبین برای یک سیستم دوبعدی از معادله‌ی زیر تبعیت می‌کنند

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2 \quad (16)$$

اگر جمع عنصرهای روی قطر اصلی ماتریس ژاکوبین را با $\text{Tr}J$ و دترمینان ماتریس را با Δ نشان دهیم، معادله‌ی مشخصه چنین می‌شود

$$\lambda^2 - (\text{Tr}J)\lambda + \Delta = 0 \quad (17)$$



شکل ۲. روندنمای محاسبه‌ی نمای لیپانوف.

تمام محاسبه‌های انجام شده برای یک رآکتور زیربحرانی با شرایط تعادلی زیر آغاز می‌شود [۲۶]

$$n_0 = -\frac{lq_0}{\rho_0}, \quad c_0 = -\frac{\beta q_0}{\rho_0 \lambda} \quad (21)$$

معادله‌های ۸ و ۱۰، جواب‌های معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با واکنش پذیری ثابت هستند.

فرض اساسی در حل تحلیلی پالما و همکاران چشم‌پوشی از

جمله‌ی $l \frac{dn}{dt}$ در معادله‌ی ۲ و در نظر گرفتن تقریب $|\beta - \rho| \gg \lambda$ است.

اگر تقریب‌های به کار رفته در کار پالما و همکاران [۱۰]، را بر معادله‌ی ۴ تحمیل کنیم نتایج حاصله هم‌خوانی بسیار خوبی با روش اختلالی پیشنهاد شده در این مطالعه دارند؛ اختلاف آن‌ها تنها در یک جمله‌ی بسیار کوچک بوده و برابر است با

$$\Delta n_{step}(t) = n_{proposed} - n_{palma} = -\frac{l\rho_0 \beta \lambda^2}{(\beta - \rho_0)^2} t \exp\left(\frac{\lambda \rho_0}{\beta - \rho_0} t\right) \quad (22)$$

$$\frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|} = \exp(\Lambda_i t), \quad (t \rightarrow \infty) \quad (19)$$

یا

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_v \frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|} \quad (20)$$

در این جا سه وضعیت پیش می‌آید:

- اگر $\Lambda_i > 0$ ، آن‌گاه فاصله‌ی دو نقطه در فضای فاز با نگاشت‌های مکرر به صورت نمایی افزایش می‌یابد، یعنی سیستم به سمت آشوبناک شدن پیش می‌رود.
 - اگر $\Lambda_i < 0$ ، آن‌گاه نقطه‌ی ثابت رفتار پایداری را از خود نشان می‌دهد. یعنی، سیستم به حالت پایدار می‌رسد.
 - اگر $\Lambda_i = 0$ ، حالت، حاشیه‌ای^(۶) است [۲۲].
- به عبارت دیگر اگر حالت‌های اولیه نزدیک به هم باشند، حالت‌های نهایی بسیار متفاوت خواهند بود. گاهی اوقات این پدیده وابستگی به شرایط اولیه نامیده می‌شود. عمدتاً نمای لیپانوف را می‌توان براساس یکی از دو طرح زیر بررسی کرد:
- براساس تحول زمانی نقاط همسایه در فضای حالت؛
 - براساس تخمین ماتریس ژاکوبین موضعی [۲۳، ۲۴].

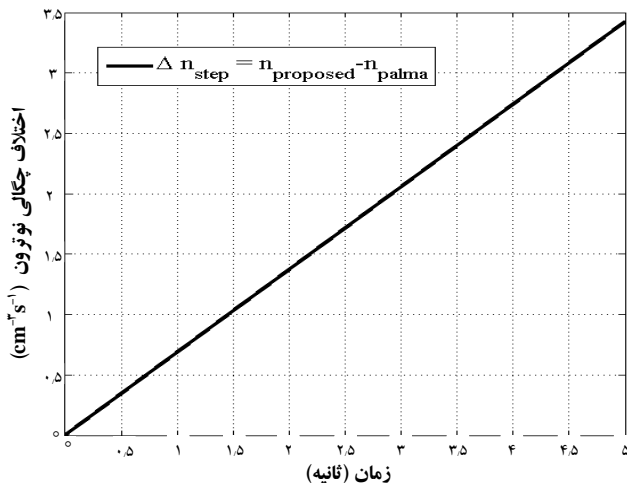
روش اول به روندنمای ولف [۲۵] معروف است و تخمینی از بزرگ‌ترین نمای لیپانوف را ارائه می‌دهد؛ در شکل ۲ روندنمای محاسبه‌ی نمای لیپانوف به کمک روش ولف رسم شده است. روش دوم قادر به تخمین همه‌ی نماهای لیپانوف است. به کمک یکی از این طرح‌ها، به ازای یک پارامتر کنترلی دلخواه می‌توان نمای لیپانوف را محاسبه کرد. بنابراین با تغییر جزئی در مقدار پارامتر کنترلی، نمای لیپانوف جدید مجدداً محاسبه می‌شود. با ادامه‌ی این روش می‌توان توزیع طیفی نمای لیپانوف مربوط به سیستم معادله‌های نقطه‌ای رآکتور را رسم کرد. لذا ما می‌توانیم به کمک این روش وضعیت پایداری سیستم را در یک محدوده‌ی دلخواه از تغییرهای پارامتر کنترلی تحلیل کنیم.

۳. نتایج و بحث

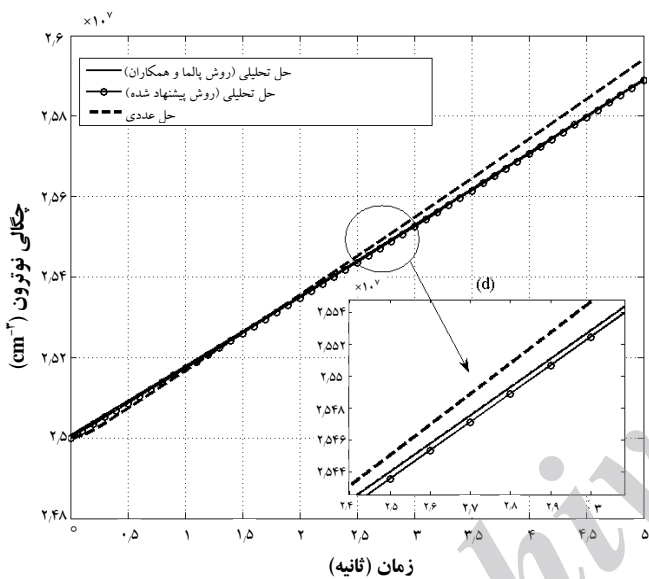
در این مطالعه رفتار چگالی نوترون در پاسخ به سه نوع واکنش‌پذیری ثابت، خطی و سینوسی در حضور یک چشمه‌ی تپی نوترون برای یک رآکتور PWR با سوخت ^{235}U و با ثابت‌های زیر بررسی شده است [۱۱، ۱۰]

$$q_0 = 1.0 \text{ neutron cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad d = 0.015 \text{ s}, \quad \beta = 0.0075, \quad \lambda = 0.001 \text{ s}^{-1}$$

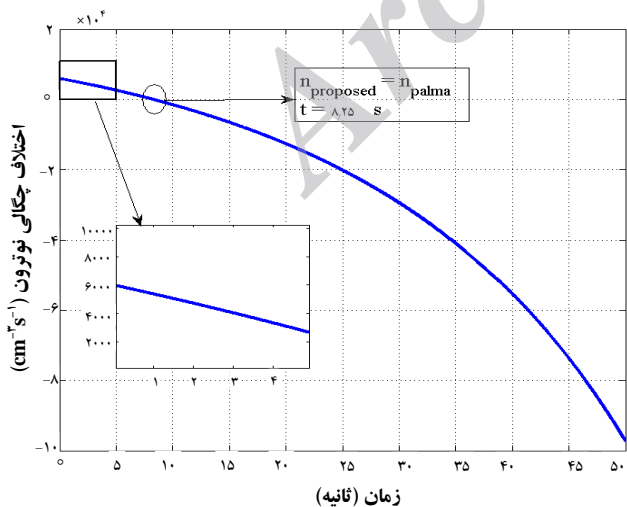
$$\rho_0 = 0.006 \text{ و } \epsilon = 5 \text{ s و } \alpha = 0.0001 \text{ s}^{-1}$$



شکل ۳. پاسخ رآکتور PWR به واکنش پذیری ثابت با چشمه‌ی تپی در یک دوره‌ی تناوب.



شکل ۴. پاسخ رآکتور PWR به واکنش پذیری خطی با چشمه‌ی تپی.



شکل ۵. اختلاف چگالی نوترون در کار پالما و روش پیشنهاد شده در واکنش پذیری خطی یک چشمه‌ی تپی.

در این جا تپی با شدت $q_s = 10^6 \text{ neutron cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ به مدت ۵ ثانیه به سیستم اعمال و سپس مقدار آن به صفر کاهش یافته است. شکل ۳ میزان اختلاف چگالی نوترون در کار پالما و روش پیشنهاد شده برای تپ مذکور را نشان می‌دهد. با توجه به اختلاف بسیار کم، هر دو روش تحلیلی تقریبی، برای واکنش پذیری ثابت، به نتایج یکسانی می‌انجامند.

رابطه‌ی بین چگالی نوترون و واکنش پذیری خطی در مرحله‌ی راه‌اندازی رآکتور و در حضور چشمه‌ی ثابت، به وسیله‌ی پالما و همکاران [۱۰] بررسی شده است. این مسأله در

مطالعه‌ی حاضر، بدون در نظر گرفتن جمله‌ی $I \frac{d^2 n}{dt^2}$ و اعمال تقریب $\rho - \beta \gg \lambda l$ به صورت تحلیلی بررسی شده است (شکل ۴).

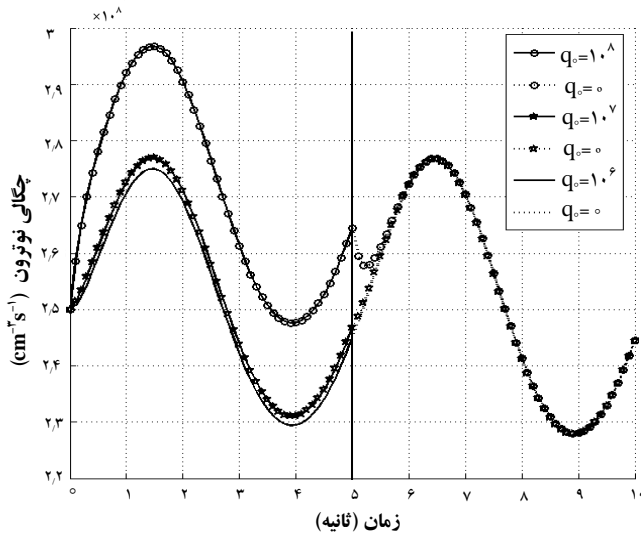
اختلاف روش پیشنهاد شده و روش پالما برابر است با

$$\Delta n(t) = n_{\text{proposed}} - n_{\text{palma}} = \frac{e^{-\lambda(t-k_r)}}{(t-k_r)^{\eta+1}} \left(\frac{A l (\eta+1)}{r} \right) \left\{ \frac{(\eta+1)}{2} \left(\frac{1}{k_r} - \frac{1}{(t-k_r)^r} \right) + \lambda \left(\frac{1}{k_r} - \frac{1}{t-k_r} \right) \right\} \quad (23)$$

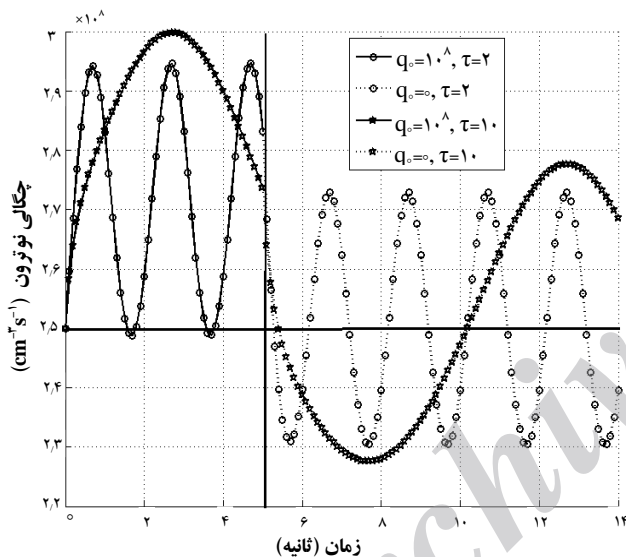
با توجه به شکل ۴ روش‌های تحلیلی با روش عددی هم‌سو هستند. اختلاف روش تحلیلی پیشنهاد شده با معادله‌ی پالما و همکاران [۱۰] به دلیل فرض به کار رفته در محاسبه‌ی حاضر است. با توجه به شکل ۵ در کوتاه مدت تقریب پالما درست است و نتایج حاصل از آن با روش پیشنهاد شده هم‌خوانی بسیار خوبی دارد، ولی در طولانی مدت تغییرها زیاد می‌شود.

در ارتباط با واکنش پذیری خطی، در نظر گرفتن تقریب‌های به کار رفته در کار پالما با گذشت زمان درصد اختلاف را افزایش می‌دهد و لذا برای این که نتیجه‌ی محاسبه به واقعیت نزدیک‌تر شود، باید تقریب‌های پالما را اعمال نکرد.

بنابراین تقریب به کار رفته در کار پالما و همکاران به نتایج درستی نمی‌انجامد و حل تحلیلی پیشنهاد شده نتایج بهتری را دربردارد. در این جا بیش‌ترین خطای نسبی جواب تحلیلی پالما نسبت به حل تحلیلی پیشنهاد شده در ۵ ثانیه‌ی اول کم‌تر از ۰/۱ درصد است (شکل ۴)، و بیش‌ترین خطای نسبی روش تحلیلی پیشنهاد شده نسبت به حل عددی کم‌تر از یک درصد بود، لذا این بیان‌گر توافق خوب نتایج عددی و تحلیلی است.



شکل ۶. چگالی نوترون در کار پالما و روش پیشنهاد شده در واکنش پذیری سینوسی با یک چشمه ی تپی.



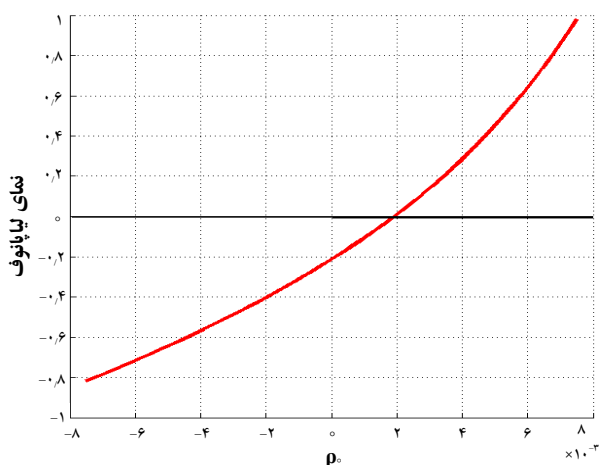
شکل ۷. رابطه بین چگالی نوترون و دوره ی تناوب واکنش پذیری سینوسی.

به منظور بررسی رفتار چگالی نوترون در پاسخ به واکنش پذیری سینوسی در حضور چشمه ی تپی رفتار جواب های معادله ی مشخصه در شکل ۸ مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به شکل ۸ در بازه ی زمانی $0 < t < 2.5$ ، $\Delta > \frac{1}{4} (TrJ)^2$ و $\Delta < 0$ ، بنابراین نقاط ثابت در بازه ی زمانی مذکور از نوع زینی^(۷) هستند. در بازه ی زمانی $2.5 < t < 5$ ، $\Delta > 0$ و $\Delta > \frac{1}{4} (TrJ)^2$ ، بنابراین نقاط ثابت در بازه ی زمانی مذکور به صورت گره^(۸) هستند. در این محدوده ی زمانی مسیرهای فضای فاز به نقاط ثابت نزدیک می شوند.

معادله های سینتیکی نقطه ای نوترون با یک گروه نوترون تأخیری در حضور واکنش پذیری سینوسی و چشمه ی تپی تنها به کمک تقریب پرش آنی حل تحلیلی دقیق دارند [۲۶]. استفاده از روش اختلال به صورت بسط چگالی نوترون نیز کارآمد نیست. بنابراین برای بررسی این مسأله به روش های عددی متوسل شدیم. در این جا حل عددی به کمک نرم افزار متلب و روش ODE45 انجام شده است.

با توجه به شکل ۶، با کاهش شدت چشمه ی تپی دامنه ی نوسانات چگالی نوترون کاهش می یابد. به طوری که در مسأله ی حاضر عملاً حضور چشمه ی تپی با شدت $(\text{neutron cm}^{-3} \text{ s}^{-1}) < 1.0^6$ تأثیر قابل توجهی در دامنه ی نوسانات چگالی نوترون ندارد. در یک دوره ی تناوب بعد از اعمال تپ به مدت ۵ ثانیه، شدت چشمه به صفر می رسد. بنابراین یک افت ناگهانی در چگالی نوترون ایجاد می شود (ناپیوستگی مشاهده شده در شکل ۶ حاکی از این مسأله است)؛ میزان افت چگالی نوترون بستگی به شدت چشمه دارد. با توجه به شکل ۶ در $(\text{neutron cm}^{-3} \text{ s}^{-1}) < 1.0^6$ عملاً میزان افت ناگهانی چگالی نوترون به صفر می رسد و هیچ گونه ناپیوستگی در چگالی نوترون مشاهده نمی شود.

تغییرهای دوره ی تناوب واکنش پذیری سینوسی (τ) تأثیر مستقیمی بر روی دامنه ی نوسانات چگالی نوترون دارد. با افزایش دوره ی تناوب، دامنه ی نوسانات چگالی نوترون افزایش می یابد، چرا که با افزایش دوره ی تناوب مدت زمان بیش تری واکنش پذیری مثبت به سیستم تزریق می شود؛ شکل ۷ گویای این مطلب است. میزان افت چگالی نوترون در لحظه ای که شدت چشمه به صفر می رسد به ازای تمام مقادیرهای دوره ی تناوب واکنش پذیری سینوسی به یک نسبت تغییر می کند. در دوره های تناوب کوچک در زمان قطع تپ عملاً هیچ گونه ناپیوستگی ای مبنی بر افت ناگهانی چگالی نوترون دیده نمی شود و منحنی ها طی دو مرحله در نقطه ی اتصال، هموار به نظر می رسند؛ این موضوع به خوبی در شکل ۷ مشاهده می شود.

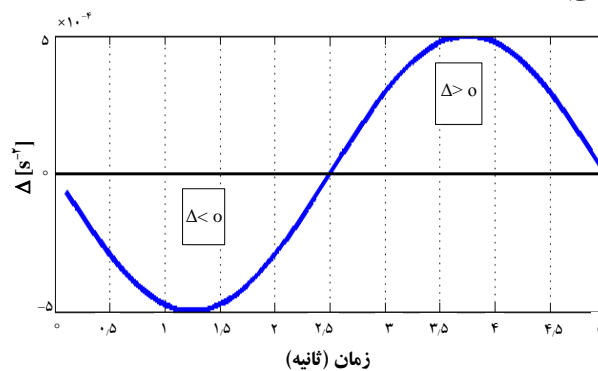


شکل ۹. رابطه‌ی بین نمای لیاپانوف و دامنه‌ی واکنش‌پذیری سینوسی.

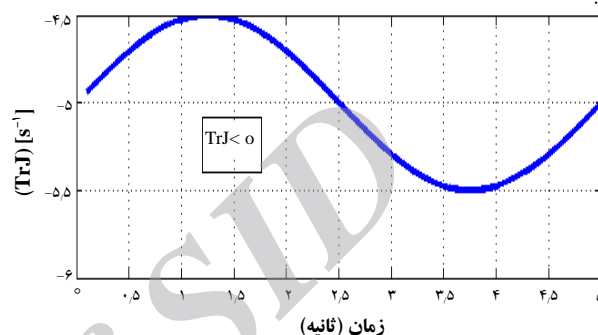
۴. نتیجه‌گیری

در این کار سعی شده است یک حل تحلیلی به کمک بسط چگالی نوترون در توان‌هایی از زمان تولید نوترون‌های آبی و برای یک گروه نوترون تأخیری در حضور یک چشمه‌ی خارجی تپی نوترون ارایه شود؛ هم‌چنین پاسخ چگالی نوترون در وقتی که واکنش‌پذیری‌های ثابت، خطی و سینوسی در زمان راه‌اندازی رآکتور اعمال می‌شود، بررسی شده است. معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون در حضور واکنش‌پذیری‌های ثابت و خطی با روش پیشنهاد شده دارای حل تحلیلی هستند. نتایج محاسبه‌ها برای واکنش‌پذیری ثابت با استفاده از تقریب‌های مدل پالما و روش پیشنهادی به نتایج یکسانی می‌انجامد ولی برای واکنش‌پذیری خطی اعمال تقریب‌های پالما اختلاف قابل توجهی در نتایج پالما و همکاران مخصوصاً با گذر زمان برای هر تپ دارد. برای واکنش‌پذیری سینوسی، معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با روش پیشنهاد شده به طور تحلیلی قابل حل نیست. لذا به کمک بررسی نقاط ثابت و روش نمای لیاپانوف به طور کیفی این مسأله بررسی شد. به منظور اعتباربخشی به جواب‌های تحلیلی محاسبه‌های مربوط به واکنش‌پذیری خطی از روش عددی ODE45 کمک گرفته شده و نتایج حاصل از حل عددی با نتایج حاصل از حل تحلیلی مقایسه شدند. نتایج حاکی از تطابق بسیار خوب نتایج محاسبه‌های عددی و تحلیلی بود.

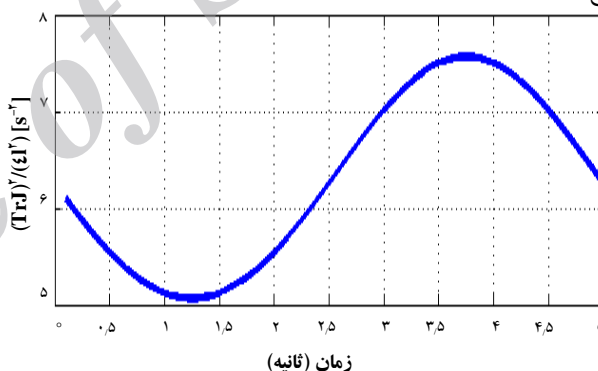
(الف)



(ب)



(ج)



شکل ۱۰. رابطه‌ی بین دوره‌ی تناوب لحظه‌ای رآکتور گرمایی و زمان برای دوره‌های تناوب مختلف واکنش‌پذیری سینوسی.

روش نمای لیاپانوف این امکان را فراهم می‌آورد که بتوان تأثیر تغییرهای پارامترهای کنترلی در یک بازه‌ی خاص بر روی چگالی نوترون را بررسی کرد. این امر در بحث کنترل و امنیت رآکتور حایز اهمیت است. در این جا تأثیر تغییرهای دامنه‌ی واکنش‌پذیری سینوسی در بازه‌ی $-\beta \leq \rho_0 \leq \beta$ بررسی شده است. با توجه به شکل ۹ نمای لیاپانوف روند صعودی دارد و به ازای $\rho_0 \geq 0.0019$ ، سیستم رفتار ناپایداری از خود نشان می‌دهد، به عبارتی دیگر مسیرهای فضای فاز به طور نمایی از هم دور می‌شوند و چگالی نوترون به طور نمایی افزایش می‌یابد.



پی‌نوشت‌ها

1. Neutron point kinetics
2. Reactivity
3. Prompt Jump
4. Feedback

5. Bifurcation
6. Marginal
7. Saddle
8. Node

مرجع‌ها

- [1] G.R. Keepin, Physics of reactor kinetics, Addison-Wesley Publishing Company, INC (1965).
- [2] W.M. Stacey, Nuclear reactor physics, John Wiley and Sons, Inc., New York, United States of America, (2001).
- [3] A.A. Nahla, Analytical solution to solve the point reactor kinetics equations, Nuclear Engineering and Design, 240 (2010) 1622-1629.
- [4] A.E. Aboanber, Y.M. Hamada, Power series solution (PWS) of nuclear reactor dynamics with Newtonian temperature feedback, Annals of Nuclear Energy, 30 (2003a) 1111-1122.
- [5] A.A. Nahla, Taylor's series method for solving the nonlinear point kinetics equations, Nuclear Engineering and Design, 241 (2011) 1592-1595.
- [6] A.E. Aboanber, A.M. El Mhlawy, Solution of two-point kinetics equations for reflected reactors using Analytical Inversion Method (AIM), Progress in Nuclear Energy, 51 (2009) 155-162.
- [7] A.A. Nahla, Generalization of the analytical exponential model to solve the point kinetics equations of Be- and D₂O-moderated reactors, Nuclear Engineering and Design, 238 (2008) 2648-2653.
- [8] T. Sathiyasheela, Sub-critical reactor kinetics analysis using incomplete gamma functions and binomial expansions, Annals of Nuclear Energy, 37 (2010) 1248-1253.
- [9] F. Zhang, W.Z. Chen, X.W. Gui, Analytic method study of point-reactor kinetic equation when cold start-up, Annals of Nuclear Energy 35 (2008) 746-749.
- [10] D.A.P. Palma, A.S. Martinez, A.C. Gonçalves, Analytical solution of point kinetics equations for linear reactivity variation during the start-up of a nuclear reactor, Annals of Nuclear Energy, 36 (2009) 1469-1471.
- [11] H. Li, W. Chen, L. Luo, Q. Zhu, A new integral method for solving the point reactor neutron kinetics equations, Annals of Nuclear Energy, 36 (2009) 427-432.
- [12] A.A. Nahla, An analytical solution for the point reactor kinetics equations with one group of delayed neutrons and the adiabatic feedback model, Progress in Nuclear Energy, 51 (2009) 124-128.
- [13] S.D. Hamieh, M. Saidinezhad, Analytical solution of the point reactor kinetics equations with temperature feedback, Annals of Nuclear Energy, 42 (2012) 148-152.
- [14] R. Hilborn, Chaos and nonlinear dynamics, Oxford University Press, (2000).
- [15] J.L. Munoz-Cobo, G. Verdu, C. Pereira, Dynamic reconstruction and Lyapunov exponents from time series data in boiling water reactors application to BWR stability analysis, Annals of Nuclear Energy, 19 (1992) 223-235.
- [16] G.V. Durga Prasad, M. Pandey, Stability analysis and nonlinear dynamics of natural circulation boiling water reactor, Nuclear Engineering and Design, 238 (2008) 229-240.
- [17] C. Lange, D. Hennig, M. Schulze, A. Hurtado, Complex BWR dynamics from the bifurcation theory point of view, Annals of Nuclear Energy, 67 (2013) 91-108.
- [18] C. Lange, D. Hennig, M. Schulze, A. Hurtado, Comments on the application of bifurcation analysis in BWR stability analysis, Progress in Nuclear Energy, 68 (2013) 1-15.



- [19] E. Ott, Chaos in dynamical system, Cambridge University Press, Canada, (1993).
- [20] J.R. Dorfman, An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, (1999).
- [21] S.T. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos, Perseus Books Publishing, L.L.C (1994).
- [22] R. Della, E. Alhassan, N.A. Adoo, C.Y. Bansah, B.J.B. Nyarko, E.H.K. Akaho, Stability analysis of the Ghana Research Reactor-1 (GHARR-1), Energy Conversion and Management, 74 (2013) 587-593.
- [23] H. Shibata, Fluctuation of mean Lyapunov exponent for turbulence, Physica A, 292 (2001) 175-181.
- [24] H. Shibata, Physica A, Fluctuation of mean Lyapunov exponent for a coupled map lattice model, 284 (2000) 124-130.
- [25] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, Physica D, 16 (1985) 285-317.
- [26] D.L. Hetrick, Dynamics of nuclear reactors, American Nuclear Society, La Grange Park, (1993).

Archive of SID