



بررسی و ارزش‌یابی فرض‌های به کار برده شده در حل تحلیلی معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر میدان جریان دستگاه سانتریفوژ گازی از طریق مقایسه‌ی آن با حل عددی انجام شده با رویکرد دینامیک سیالات محاسباتی

روزبه وادی*، کامران سپانلو

نظام ایمنی هسته‌ای کشور، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۳۳۹-۱۴۱۵۵، تهران - ایران

چکیده: کاربرد میدان نیروی مرکز گریز در سرعت‌های زاویه‌ای بالا در صنعت هسته‌ای به ویژه برای جداسازی ایزوتوپ‌های سنگین، هم در بعد صنعتی و هم برای کاربردهای آزمایشگاهی واضح و آشکار است. حل معادله‌های دیفرانسیل ترموهیدرولیک حاکم بر چنین میدان جریانی به علت سرعت چرخش با سرعت بالا و تراکم‌پذیری شدید جرم اندک گاز تزریق شده به دستگاه، بسیار پیچیده است. حل تحلیلی این معادله‌ها در چنین شرایطی تنها با اعمال فرض‌های متعدد ساده‌کننده امکان‌پذیر است. در این مطالعه، از حل عددی حجم محدود انجام شده با رویکرد دینامیک سیالات محاسباتی برای ارزش‌یابی فرض‌های حاکم بر حل تحلیلی و بررسی اثر حذف این فرض‌ها بر متغیرهای اصلی میدان جریان، استفاده شده است. برای انجام این مهم، از میان روش‌های تحلیلی موجود برای حل معادله‌های پایداری حاکم بر این میدان جریان، روشی که با اعمال کم‌ترین فرض همراه است، برگزیده شد. در روند انجام این حل تحلیلی، نکات کلیدی، از شکل پایه‌ی معادله‌های پایداری تا انتها بررسی و بر این اساس، مجموعه فرض‌های اعمال شده، در چهار عنوان گردآوری شد. سپس این فرض‌ها به حل عددی انجام شده در محیط نرم‌افزار فلونت، که نیازمند برنامه‌نویسی بود، اعمال و نتیجه‌ها با حل تحلیلی مقایسه و بدین وسیله صحت‌سنجی شد. در گام بعدی، بر اساس حذف تصاعدی چهار فرض، چهار حالت متفاوت تعریف شد. نتیجه‌های جدید و پرمعنائی که از مقایسه‌ی نتیجه‌های این حالت‌ها حاصل شد، انگیزه‌ی اصلی ارابه‌ی این مقاله بود. این بررسی، علاوه بر نشان دادن کارایی بالای رویکرد دینامیک سیالات محاسباتی در شبیه‌سازی این میدان جریان پیچیده، به خوبی علت گرایش طولانی‌مدت به حل تحلیلی را با وجود فرض‌های متعدد آن، به ویژه در ارتباط با توزیع شعاعی سرعت جرم در راستای محور دستگاه به علت اثر متضاد و حذف‌شونده‌ی تغییر متغیرهای تشکیل‌دهنده‌ی آن نشان داد.

کلیدواژه‌ها: میدان نیروی مرکز گریز، حل تحلیلی، حل عددی، دینامیک سیالات محاسباتی، روش حجم محدود

Study and evaluation of applied assumptions on the analytical solution of gas flow field differential equations under high velocity centrifugal force by comparing with the numerical solution using the CFD-approach

R. Vadi*, K. Sepanloo

Iran Nuclear Regulatory Authority, AEOL, P.O.Box: 14155-1339, Tehran - Iran

Abstract: Practical employment of high angular velocity-centrifugal force field in nuclear industry, especially in separation of heavy isotopes in both industrial scale fuel production and laboratory practices, is obvious. Thermo-hydraulic differential equations of such a flow field due to ultra-high swirl velocity and also high compressibility of low mass content of gas injected into the system are very complicated and closely coupled. Thus, the analytical solution of these equations necessitates making a few assumptions. In this study, the numerical solution are conducted by the CFD approach and the finite volume method is used to evaluate assumptions of the analytical solution and to survey effects of removing these assumptions on the main variables of flow field. For this purpose, among available analytical methods to solve the governing equation, the one with the least possible assumptions is employed. The most important points in the procedure of conducting this solution are studied from the basic equations to the end and on this basis the assumptions are gathered under four titles. Then, the procedure of testing these assumptions in the FLUENT software is presented, which necessitates programming. Then the results are compared and validate by the results of the analytical method. In the next step, on the basis of consecutive elimination of the four assumptions, four different modes are defined. The novel and meaningful results obtained from the comparison of these four modes is the main incentive to present this article. This investigation, in addition to prove significant capabilities of the CFD approach for simulating this complicated flow field, clearly showed the reason of the long-term tendency toward this analytical analysis, despite its basic simplifying assumptions. Especially, with regard to the axial mass velocity due to contradictory and eliminating effect of consisting parameters.

Keywords: Centrifugal force field, Analytical solution, Numerical solution, Computational fluid dynamics, Finite volume method

*email: roozbehvadi@yahoo.com

۱. مقدمه

رخ می‌دهند، شیب تغییرات بسیار شدید بوده و این ناحیه‌ها کاملاً به هم وابسته‌اند، در نتیجه امکان تحلیل جداگانه‌ی آن‌ها وجود ندارد.

ارایه‌ی حل تحلیلی برای بررسی میدان جریان و جداسازی ایزوتوپی در دستگاه سانتریفوژ گازی سرعت-بالا، قدمتی طولانی دارد و نمونه‌های متعددی از آن‌ها را می‌توان در انتشارات علمی دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی یافت [۲، ۳، ۴، ۵]. در فصل چهارم مرجع [۱] بررسی کاملی از روش‌های تحلیلی پیش از آن انجام شده و عیب‌ها و مزیت‌های آن‌ها در مقایسه با یک‌دیگر، ارایه شده است. نقطه‌ی اشتراک تمامی این روش‌ها، اصلاح و خطی‌سازی معادله‌های ناویه-استوکس از طریق اعمال فرض‌های متعدد است، به طوری که در نهایت معادله‌های پاره‌ای حاکم به معادله‌های دیفرانسیل معمولی، بدون بعد و مجزا در راستاهای شعاعی و محوری تبدیل می‌شوند و بسته به این که معادله‌های حاصله، تحلیلی یا عددی حل شوند، این روش‌ها را می‌توان به دو دسته‌ی تحلیلی و نیمه‌تحلیلی تقسیم کرد [۱]. روش‌های حل عددی ارایه شده در همین برهه‌ی زمانی که معادله‌های پایستگی را در شکل اصلی خود بررسی می‌کردند، به ویژه به علت محدودیت‌های سخت‌افزاری، به ندرت از حدود فرض‌های مطالعه‌های تحلیلی فراتر رفتند [۶، ۷، ۸]. در دهه‌ی بعد از آن، با گسترش روزافزون امکانات سخت‌افزاری و بهبود روش‌های عددی به سبب آن، کدهایی که از رویکرد دینامیک سیالات محاسباتی^(۱) (CFD) برای شبیه‌سازی میدان جریان و توزیع ایزوتوپی استفاده می‌کردند، به صورت نرم‌افزارهای تجاری در اختیار عموم، قرار گرفتند. هر چند که این کدها، برای محدوده‌ی وسیعی از کاربردها با موفقیت صحت‌سنجی شده بودند [۹]، اما در شبیه‌سازی هیدرودینامیک دستگاه سانتریفوژ سرعت-بالا، حتی در مسایل ساده‌ای که حل تحلیلی داشتند، با مشکل جدی روبه‌رو بودند. این مسأله باعث شد تا در این دوره‌ی زمانی، شاهد ارایه‌ی کدهای عددی خاص این زمینه باشیم [۱۰، ۱۱، ۱۲]. اما این کدها، اولاً به خاطر کاربرد خاص و محدودیت‌های سیاسی این زمینه، هرگز در دسترس عموم قرار نمی‌گیرند و ثانیاً به دلیل مشابه، بسیاری از محدودیت‌های روش‌های عددی قدیم‌تر را دارا هستند. برای نمونه تقریباً تمامی این کدها از فرض تقارن محوری استفاده می‌کنند، در نتیجه هر چند که روش حل آن‌ها عددی است، اما امکان شبیه‌سازی مستقیم مجاری برداشت جریان در آن‌ها وجود ندارد. وادی [۱۳] محدودیت‌هایی را که به سبب این

تحلیل و شبیه‌سازی میدان جریان‌های مرکز گریز در سرعت‌های زاویه‌ای بالا از درجه‌ی سختی بالایی برخوردار است. علت این مسأله را می‌توان با چند محاسبه‌ی تقریبی درک کرد. برای مثال اگر دمای ۶۵ درجه‌ی سلسیوس به عنوان درجه حرارت میانگین لایه‌ی چگال گاز، در نزدیکی دیواره‌ی دستگاه در نظر گرفته شود [۱]، با جای‌گذاری این درجه حرارت در معادله‌های خصوصیت‌های فیزیکی منتخب گاز UF_۶ که در پیوست الف آورده شده‌اند، سرعت صوت در این گاز و در ناحیه‌ی موردنظر چنین به دست می‌آید

$$V_s = \left(\frac{\gamma RT}{M} \right)^{\frac{1}{2}} = 92,25 \text{ ms}^{-1} \quad (1)$$

هم‌چنین سرعت زاویه‌ای چرخش دستگاه با توجه به قطر آن همواره طوری انتخاب می‌شود که سرعت خطی گاز روی دیواره از ۴۰۰ متر بر ثانیه کم‌تر نباشد [۱] و بنابر اصل عدم لغزش، سرعت خطی گاز در تماس با دیواره نیز همین مقدار است، در نتیجه بیشینه‌ی عدد ماخ دستگاه که حاصل تقسیم این سرعت بر سرعت صوت در گاز است از عدد ۴ کم‌تر نخواهد بود. این سرعت چرخش بالا باعث تشکیل سه ناحیه با شرایط و خصوصیت‌هایی کاملاً متضاد در کنار یک‌دیگر می‌شود. ناحیه‌ی کم‌چگال مرکز دستگاه که در آن خلأ نسبی شدید حاکم بوده و به علت سرعت و چگالی بسیار کم جریان، عبارت‌های انتقال جابه‌جایی در مقابل عبارت‌های انتقال مولکولی کوچک‌اند؛ ناحیه‌ی با چگالی نسبی بالا در نزدیکی دیواره‌ی چرخنده‌ی جانبی دستگاه، که ضخامت آن کاملاً تابع سرعت چرخش و هندسه‌ی دستگاه است و عبارت‌های انتقال جابه‌جایی و تولید اغتشاش در این ناحیه کاملاً غالب‌اند. طبیعتاً این ناحیه به یک زیر لایه‌ی لزج، چسبیده به دیواره‌ی چرخنده‌ی جانبی دستگاه ختم می‌شود که مجدداً عبارت‌های انتقال مولکولی و نیروی ویسکوز در آن حاکم‌اند. البته ضخامت این زیرلایه‌ی لزج با توجه به سرعت چرخش بالای دستگاه از شرایط جریان‌های عادی لزج به مراتب کم‌تر بوده و با افزایش سرعت دستگاه نیز کاهش می‌یابد. مسلماً ناحیه‌هایی، با چنین خصوصیت‌های متضاد، نیاز به مدل‌های عددی یا تحلیلی متفاوتی برای شبیه‌سازی دارند و اساساً شکل ساده شده‌ی معادله‌های حاکم بر آن‌ها متفاوت است. در عین حال از آن‌جایی که این ناحیه‌ها در کنار هم و در فاصله‌ی بسیار کمی



میانگین آزاد مولکولی در ناحیه‌ی مورد نظر از محیط جریان دارد. به همین دلیل قسمت نخست بخش سوم این مقاله کلاً به محاسبه‌ی تحلیلی حداکثر مقدار این فاصله در ناحیه‌ی مرکزی دستگاه با استفاده از بهترین نظریه‌ی در دسترس، اختصاص یافته است. در ضمن اندازه‌ی مش بهینه در این ناحیه، براساس نتیجه‌ی محاسبه‌های این قسمت تعیین شده است. در ادامه‌ی بخش سوم مقاله، مدل عددی استفاده شده و نحوه‌ی اعمال فرض‌های حل تحلیلی توضیح داده شده و نتیجه‌های به دست آمده با نتیجه‌های حل تحلیلی مقایسه و صحت‌سنجی شده است. سپس در بخش چهارم این مقاله، از حل عددی صحت‌سنجی شده، برای حذف فرض‌های حاکم بر حل تحلیلی استفاده شده است. بر این اساس، با حذف تصاعدی چهار فرض استخراج شده، چهار حالت متفاوت تعریف و نتیجه‌ی این حالت‌ها در ارتباط با متغیرهای اصلی میدان جریان با حل تحلیلی اصلی مقایسه و روی نتیجه‌های حاصله بحث شده است. بخش پنجم این مقاله جمع‌بندی از نتیجه‌های به دست آمده را ارائه می‌دهد.

ابتدا به توضیح چند مطلب در ارتباط با مفهوم‌های استفاده شده در این مقاله، پرداخته می‌شود. مسلماً در حل تحلیلی صرف، امکان شبیه‌سازی مستقیم هندسه‌ی مجاری برداشت جریان (اسکوپ‌ها^(۲)) و صفحه‌های جداکننده (بفل‌ها^(۳))، وجود ندارد. در نتیجه باید هندسه‌ی واقعی به شکل یک استوانه‌ی متقارن تقریب زده شود و بر این اساس می‌توان محاسبه‌ها را به حالت دوبعدی کاهش داد؛ همین مسأله در مورد نحوه‌ی شبیه‌سازی تزریق و برداشت جریان نیز در ارتباط با حل تحلیلی صادق است [۱]. از این به بعد از این حالت ساده شده با عنوان حالت هندسه و جریان ساده شده یاد خواهد شد. بر این اساس هندسه‌ی محیط مورد حل همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است استوانه‌ای فرض شده است که حاوی گاز منتخب UF_۶ بوده و مجرای مرکزی باریکی از آن حذف شده است. از این پس، از این هندسه و محیط با نام دستگاه یاد خواهد شد. در این مقاله برای تولید هندسه از نرم‌افزار اینونتور^(۴)، برای تولید شبکه‌بندی عددی و اعمال شرایط مرزی از نرم‌افزار گامبیت^(۵) و نهایتاً برای حل عددی از نرم‌افزار فلوئنت^(۶) استفاده شده است.

فرض در دقت حل ایجاد می‌شود، به صورت عملی بررسی کرده است. این در حالی است که نرم‌افزارهای دینامیک سیالات محاسباتی هیچ‌گونه محدودیتی در تعریف هندسه ندارند. بوگوالوو [۱۴] به طور مفصل به علل ضعف شکل سنتی نرم‌افزارهای دینامیک سیالات محاسباتی در زمینه‌ی شبیه‌سازی دستگاه سانتریفوژ پرداخته است که می‌توان آن را در سه مورد خلاصه کرد: ۱) نوع تابع میان‌یابی درون سلولی، ۲) نوع حل‌کننده‌ی عددی و ۳) نوع شبیه‌سازی اغتشاش جریان. در سال‌های اخیر با ارایه‌ی مدل‌های عددی (استفاده شده در این پژوهش)، هر سه‌ی این مشکلات حل شده، به طوری که اکنون امکان شبیه‌سازی دقیق دستگاه با این نرم‌افزارها، فراهم شده است. وادی و جیانگ [۱۵، ۱۶]، در نمونه‌های جدید پژوهش‌های انجام شده در این زمینه، دستگاه را به صورت سه‌بعدی و در هندسه‌ی واقعی خود بررسی کرده‌اند.

آنچه که این مطالعه به طور خاص پی‌گیری می‌کند، استفاده از حل عددی با رویکرد دینامیک سیالات محاسباتی برای ارزش‌یابی فرض‌های حاکم بر حل تحلیلی و بررسی اثر حذف این فرض‌ها بر متغیرهای اصلی میدان جریان است. بدین منظور از میان روش‌های تحلیلی بررسی شده به وسیله‌ی ویلانی [۱]، روشی که با اعمال کم‌ترین فرضیه‌ها همراه باشد، برگزیده شده است. نکات کلیدی در روند انجام این حل تحلیلی در بخش دوم این مقاله بررسی شده تا بر این اساس، مجموعه‌ی فرضیه‌های اعمال شده، تحت چهار عنوان گردآوری شود.

سرعت چرخش بالا و جرم اندک گاز تزریق شده به دستگاه، می‌تواند، از لحاظ نظری، تراکم مولکولی گاز را در قسمت مرکزی دستگاه به حدی کاهش دهد که امکان بیان خصوصیت‌های گاز در هر نقطه به صورت ماکروسکوپی دیگر ممکن نباشد. در چنین شرایطی اساساً استفاده از هر مجموعه معادله‌هایی نظیر معادله‌های ناویه-استوکس، که در تعریف آن‌ها از این خصوصیت‌ها استفاده شده باشد، منتفی است. به همین دلیل، استفاده از روش‌هایی که دینامیک گاز را در سطح مولکولی یا از دیدگاه میکروسکوپی بررسی می‌کنند، مورد توجه قرار گرفته‌اند. برد [۱۷] بررسی جامعی از این‌گونه روش‌های عددی ارایه کرده است؛ مطالعه‌های جدیدتری که با استفاده از این رویکرد و روش عددی آماری، جریان در دستگاه سانتریفوژ را بررسی کرده‌اند، مرجع‌های [۱۸، ۱۹] هستند. این که آیا می‌توان از دیدگاه ماکروسکوپی استفاده کرد، بستگی به فاصله‌ی

(این شرط برای UF_6 در فاز گازی برقرار است [۱۳])، قابل صرف نظر کردن است. همچنین δ تانسور یکه‌ای با اجزای δ_{ij} ، ∇v تانسور شیب سرعت، $(\nabla v)^+$ ترانهاده‌ی تانسور شیب سرعت و $\nabla \cdot v$ دیورژانس بردار سرعت است [۲۰]. عبارت $(-\tau : \nabla)$ در معادله‌ی سوم رابطه‌ی ۲ در واقع همان گرمای اتلافی ویسکوز^(۷) (اصطکاک) است که نرخ تبدیل برگشت‌ناپذیر انرژی مکانیکی به انرژی داخلی را به ازای واحد حجم نشان می‌دهد و چنین تعریف می‌شود

$$(-\tau : \nabla) = \frac{1}{\rho} \mu \sum_i \sum_j [(\frac{\delta v_i}{\delta v_j} - \frac{\delta v_j}{\delta v_i}) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \delta_{ij}]^2 + \kappa (\nabla \cdot v)^2 \quad (۴)$$

همان‌طور که از رابطه‌ی ۴ دیده می‌شود، این عبارت وابسته به دیورژانس سرعت بوده و در این مسأله که دچار تراکم‌پذیری شدید است، عبارت مهمی در حل معادله انرژی و در تعیین درجه‌ی حرارت است و به طور کلی روی تراکم‌پذیری اثر منفی دارد [۲۰]. این معادله‌ها در مختصه‌های استوانه‌ای با فرض تقارن محوری و برقراری حالت پایا^(۸) به شکل زیر ساده می‌شوند

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0 \quad \text{پایستگی جرم}$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right] + \mu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}$$

تکانه‌ی شعاعی

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right] + \mu \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}$$

تکانه‌ی زاویه‌ای

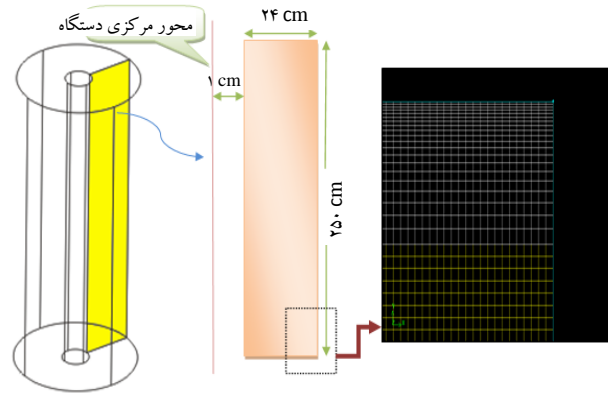
$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \rho g$$

تکانه‌ی محوری

$$\rho c_v \left(V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

پایستگی انرژی

(۵)



شکل ۱. اندازه‌های هندسی و کیفیت مش دستگاه در حالت هندسه و جریان ساده شده.

۲. مجموعه معادله‌های اصلی و بررسی فرض‌های حاکم بر روش‌های حل تحلیلی

شکل کلی و عمومی معادله‌های پایستگی ترموهیدرولیک حاکم بر این مسأله برای گاز ایده‌آل و سیال نیوتونی (صحت این دو فرض برای گاز UF_6 در شرایط مسأله در مرجع [۱۳] ثابت شده است) در رابطه با تمامی جریان‌های مولکولی و انتقالی مطرح، این است [۲۰]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho (\nabla \cdot v) \quad \text{انتقال (پایستگی) جرم کل}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \quad \text{انتقال (پایستگی) تکانه}$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -(\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla) + p(\nabla \cdot v) \quad \text{انتقال (پایستگی) انرژی داخلی}$$

(۲)

جریان‌های مولکولی تکانه τ و انرژی q که معادله‌های پایستگی مربوطه، در ارتباط با آن‌ها تعریف شده‌اند باید، به وسیله‌ی شیب متغیرهای به ترتیب، سرعت و دما و خصوصیت انتقال مرتبط به صورت زیر جای‌گزین شوند [۲۰]

$$\tau = -\mu [\nabla v + (\nabla v)^+] + \frac{2}{3} \mu - \kappa (\nabla \cdot v) \delta$$

$$q = -k \nabla T \quad (۳)$$

که در آن‌ها K ، گرانروی اتساعی است، و از نظریه‌ی جنبشی برای گاز چند اتمی در شرایطی که میزان انحراف از قانون گاز ایده‌آل به اندازه‌ای کم باشد، که بتوان از این قانون استفاده کرد



نظیر رابطه‌ی ۲- به مرجع [۱] رجوع شود، به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان با آن‌ها مانند پارامترهای اغتشاش برخورد کرد.

۳. حذف اتلاف ویسکوز یا همان رابطه‌ی ۴ از معادله‌ی انرژی (از مقایسه‌ی معادله‌های ۲ و ۵) در همان مرحله‌ی اولیه و هم‌چنین حذف عبارت برگشت‌پذیر تبدیل انرژی مکانیکی به گرمایی (عبارت دوم در سمت چپ معادله‌ی پایستگی انرژی از رابطه‌ی ۵) در زمان خطی‌سازی معادله‌های پایستگی؛ در مجموع این دو فرض به طور کلی اثرهای تراکم‌پذیری و اصطکاک را در معادله‌ی انرژی از بین می‌برند.

۴. حذف کلیه‌ی عبارت‌های انتقال تکانه‌ی مولکولی در راستای محوری و قطبی در زمان خطی‌سازی معادله‌های پایستگی تکانه؛ مورد دوم از این دو فرضیه عملاً برای حذف عبارت غیرخطی در معادله‌ی دیفرانسیل امکان‌پذیری حل صورت گرفته است [۱].

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ e^{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(e^{\xi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \right) \right\} + B^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (8)$$

این کمیت در صورت لزوم با عبارت $\rho_w \Omega r_w^5$ بی‌بعد می‌شود و از جای‌گزینی $\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} = - \int_r^{r_w} \rho \Omega r' dr'$ ، که سمت راست آن بیان‌گر معادله‌ی خطوط جریان است، به دست آمده است. در رابطه‌ی ۸ داریم

$$\xi = A^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_w^2} \right) \quad \eta = \frac{z}{Z} \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k M} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad \varepsilon = \frac{\mu}{\rho_w \Omega r_w^2} \quad (9)$$

$$B^2 = \frac{s}{16 A^2 \varepsilon^2 \left(\frac{Z}{r_w} \right)^2}$$

که در آن ارتفاع کل دیواره‌ی چرخنده‌ی جانبی دستگاه است. برای تعیین سرعت جرمی محوری از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود. به این ترتیب با داشتن چگالی از رابطه‌ی ۶، توزیع سرعت را می‌توان از حل معادله‌ی دیفرانسیلی ۸ حساب کرد

$$\rho_{eq} w = \frac{4 A^2}{r_w^2} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \right) \quad (10)$$

در این معادله‌ها V_z و V_θ ، V_r به ترتیب، مؤلفه‌های سرعت سیال در راستای شعاعی، زاویه‌ای و محوری، چگالی جرمی، μ ، گرانروی گاز، g شتاب گرانشی زمین و p فشار گاز هستند. در معادله‌ی مربوط به تکانه‌ی شعاعی عبارت $\frac{V_\theta^2}{r}$ و در معادله‌ی مربوط به تکانه‌ی زاویه‌ای $\frac{V_r V_\theta}{r}$ به ترتیب، بیان‌گر نیروهای مرکزگریز و کوریولیس‌اند. C_v و k به ترتیب، گرمای ویژه در حجم ثابت و ضریب هدایت گرمایی هستند. عبارت دوم در سمت چپ معادله‌ی مربوط به پایستگی انرژی نشان‌دهنده‌ی کار برگشت‌پذیر انجام شده روی سیال به دلیل تراکم‌پذیری است. حال اگر در مجموعه معادله‌های رابطه‌ی ۵ فرضیه‌های زیر طبق روندی که در مرجع [۱] توضیح داده شده است اعمال شود، معادله‌ی دیفرانسیل یگانه‌ی درجه شش و خطی ۸ بر حسب کمیتی به نام پتانسیل اصلی^(۹) که با χ نشان داده می‌شود و یکای آن $gr \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ است، به دست می‌آید.

۱. فرض برقراری چرخش جسم صلب (آزاد) تک‌دما و محاسبه‌ی چگالی با استفاده از رابطه‌ی زیر به جای معادله‌های حالتی نظیر قانون گاز ایده‌آل. این فرض به نام فرض پَنیکیک^(۱۰) معروف است

$$\rho_{eq}(r) = \rho_w \exp \left\{ -A^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_w} \right)^2 \right] \right\} \quad (6)$$

که در آن، r_w شعاع استوانه، ρ_w چگالی گاز روی دیواره‌ی استوانه است، و

$$A^2 = \frac{M \Omega^2 r_w^2}{\gamma R T_0} \quad (7)$$

که در آن، A کمیت بی‌بعد نسبتِ سرعت محیطی Ωr_w به احتمال‌ترین سرعت مولکولی گاز یعنی، $\sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$ بوده و تقریباً برابر عدد ماخ است.

۲. حاکم بودن تحلیل خطی و اصل برهم‌گذاری ناشی از آن، به این معنی که فرض می‌شود میزان انحراف مؤلفه‌های سرعت در معادله‌ی پایستگی تکانه و متغیرهای ترمودینامیکی حالت تعادل چرخش جسم صلب تک‌دما



میانگین فضای آزاد ماکسول، به وسیله‌ی نسبت سرعت میانگین گاز \bar{v} به بسامد برخورد مولکول‌ها با یکدیگر یعنی ν_g بیان می‌شود [۱]

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu_g} = \frac{1}{n\pi\sigma^2 \times \sqrt{2}} = \frac{RT}{P\pi\sigma^2 \times \sqrt{2}} \quad (11)$$

که در آن $\bar{v}_i = \left(\frac{\lambda RT}{\pi M_i}\right)^{1/2}$ و σ سطح مقطع برخورد مولکول است و فشار از قانون گاز ایده آل $P = nRT/V$ به دست می‌آید. مسافت میانگین طی شده بین لحظه‌ی برخورد اولیه و برخورد بعدی که به آن مسافت آزاد میانگین ساختاری نیز گفته می‌شود، برابر $\lambda = 0.957 \lambda$ است. اما مقادیر λ و σ از طریق اندازه‌گیری مستقیم قابل دسترسی نیستند، به همین دلیل به وسیله‌ی داده‌های تجربی، ضریب‌های تبادلی از گاز از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند [۱]

$$\mu = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda_0 k_v, \quad D_{11} = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda_0 k_d, \quad K = \frac{1}{3} n \bar{v} c_v \lambda_0 k_v$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D_{11}} = \frac{k_v}{k_d}, \quad pr = \frac{\mu \times C_p}{K} = \gamma \frac{\mu C_v}{KM} = \gamma \frac{k_v}{k_d} \quad (12)$$

یک نظریه‌ی تحلیلی دقیق با در نظر گرفتن پتانسیل بین مولکولی $U(r_0)$ که در آن r_0 فاصله‌ی بین مرکزهای جرم مولکول‌ها در خلال برخورد است، ضریب‌های مجهول k_d ، k_v و k_h را چنین محاسبه می‌کند [۱]

$$k_v = \frac{15\pi}{32\Omega(2,2)^*}, \quad k_d = \frac{9\pi}{16\Omega(1,1)^*}, \quad k_h = \frac{5}{2} \left(\frac{9\gamma-5}{10}\right) k_d \quad (13)$$

که در آن $\Omega(s,s)^*$ انتگرال‌های برخورد هستند که از حل معادله‌ی درجه‌ی اول چپمن-انسکوگ (۱۴) در رابطه با معادله‌ی بولتزمن به دست می‌آیند [۱]. با استفاده از نظریه‌ی کره‌ی سخت که در آن $U(r_0) = \infty$ اگر $r_0 \leq \sigma$ و $U(r_0) = 0$ اگر $r_0 > \sigma$ و برای پتانسیل مولکولی همی $\Omega(s,s)^* = 1$ هستند و $k_v = 15\pi/32 = 1.473 \approx 3/2$ در نتیجه رابطه‌ی ۱۲ به صورت زیر ساده می‌شود [۱]

$$\lambda = \lambda_v = \lambda_0 k_v = \frac{2\mu}{\rho \bar{v}} \quad (14)$$

۳. مدل‌های عددی استفاده شده و نحوه‌ی اعمال فرض‌های حل تحلیلی به حل عددی

برای حل عددی دسته معادله‌های دیفرانسیلی رابطه‌ی ۲ بعد از اضافه کردن اثرهای اغتشاش پارامترها، از حل گر (کننده) چگالی محور ضمنی (۱۱) استفاده شد که اساساً الگوریتمی پیوسته دارد و برای جریان‌هایی با سرعت و تراکم پذیری بالا نوشته شده است [۲۱]. برای شبیه‌سازی اغتشاش، از میان کلیه مدل‌های زیرشاخه‌ی روش معادلات ناویه-استوکس میانگین‌گیری شده رینولدز (۱۲) RANS تنها مدل تنش رینولدز (۱۳) RSM که پیچیده‌ترین آن‌ها است، منجر به هم‌گرایی می‌شود، چرا که از بین تمامی این مدل‌ها، مدل تنش رینولدز تنها مدلی است که فرض گرانروی مغشوش متقارن را، که در جریان چرخشی قوی مانند دستگاه سانتریفوژ صادق نیست [۲۱]، کنار گذاشته و برای تمامی عبارت‌های تانسور تنش ظاهری، معادله‌ی انتقال را به علاوه‌ی معادله‌ی اتلاف ویسکوز حل می‌کند که این به معنی پنج معادله‌ی انتقال اضافی در حالت دوبعدی و هفت معادله‌ی انتقال اضافی در حالت سه‌بعدی است. در نتیجه این مدل دقیق‌ترین و در عین حال پرهزینه‌ترین مدل اغتشاش در دسترس نیز است.

مسئله‌ی دیگر در ارتباط با حل عددی، تعیین اندازه‌ی شبکه‌بندی یا همان مش بهینه در ناحیه‌ی مرکزی کم‌چگال دستگاه است. وجود خلأ نسبی شدید در ناحیه‌ی مرکزی دستگاه می‌تواند فاصله‌ی میانگین آزاد مولکولی را به حدی افزایش دهد که ممکن است از اندازه‌ی مش‌های در نظر گرفته شده فراتر رود و در نتیجه تراکم مولکولی در چنین سلولی به اندازه‌ی پایین خواهد بود که در صورت ورود یا خروج هر مولکول، نوسان‌های غیرقابل صرف نظر در خصوصیت‌های عمومی گاز در آن ایجاد شده و از این رو امکان بیان خصوصیت‌هایی نظیر چگالی به صورت متوسط یا ماکروسکوپی برای این سلول وجود نخواهد داشت. با داشتن خصوصیت‌های گاز UF_6 ذکر شده در پیوست الف می‌توان مقدار نیمه‌تجربی مسافت آزاد میانگین مولکولی را که با نماد λ مشخص می‌شود برای این گاز از طریق روش تحلیلی، به دست آورد. هنگامی که تنها تحلیل یک گاز مورد نظر باشد، در یک تخمین اولیه برای یک ترکیب ایزوتوپی یکنواخت، مسافت میانگین λ که مولکول بین دو برخورد متوالی، در یک زمان داده شده در گاز طی می‌کند (یا مسافت آزاد



جدول ۱. اطلاعات عمومی هندسه و فیزیک مسأله‌ی تحلیلی

۲۵۰ cm	ارتفاع
۲۵ cm	شعاع
۶۰۰ m/s	سرعت خطی شعاعی
۱۰۰ Torr	فشار گاز UF _۶ بر روی دیواره‌ی چرخنده
۳۲۰ K	دمای متوسط

از مجموعه‌ی فرض‌های چهارگانه‌ی مطرح شده در بخش ۲، فرض دوم و چهارم، به موجب تحلیل ابعادی پارامترها، منطقی بوده [۱۳] و خودبه‌خود به علت کوچک بودن عبارت‌هایی از معادله‌های پایستگی که به وسیله‌ی آن‌ها حذف می‌شوند در برابر سایر عبارت‌ها، بدون نیاز به حذف کردن آن‌ها از حل عددی، خطایی ایجاد نخواهند کرد. فرض سوم نیز به راحتی با فعال نکردن گزینه‌های مربوط به آن در نرم‌افزار، اعمال می‌شود. اما برای انطباق بر شرط اول یعنی تعریف چگالی از طریق رابطه‌ی ۹ از برنامه‌ی ب. ۱ که در پیوست ب ارائه شده به عنوان برنامه‌ی الحاقی به نرم‌افزار، استفاده شد. این برنامه، توزیع شعاعی چگالی را در هر ارتفاع از محور دستگاه، طبق رابطه‌ی ۹ به شکل تابعی مشخص از چگالی و دمای دیواره محاسبه می‌کند. هندسه‌ی موردنظر برای حل عددی به همراه کیفیت مش استفاده شده در شکل ۱ نمایش داده شده است. این هندسه در مجموع ۲۸۵۰۰ مش مربعی دریافت کرده است و همان‌طور که دیده می‌شود با حرکت به سمت دیواره‌ی متحرک بر چگالی مش افزوده شده است. اطلاعات عمومی هندسه و فیزیک مسأله در جدول ۱ آورده شده است. خصوصیت‌های موادی که در جدول ۲ آورده شده است با قرار دادن دمای متوسط ۳۲۰ کلوین به ترتیب، در رابطه‌های الف. ۱، ۲ و ۳ از پیوست الف به دست آمده‌اند.

اما برای امکان‌پذیر نمودن حل تحلیلی، عامل‌های رانش جریان در راستای محور دستگاه به سه نوع محرک تقسیم شده‌اند: (۱) محرک مکانیکی^(۱۶)، (۲) محرک شیب گرمایی دیواره^(۱۷) و (۳) محرک اختلاف درجه حرارت دو صفحه‌ی انتهایی^(۱۸). بر این اساس شرایط مرزی حاکم بر حل عددی و تحلیلی بدون در نظر گرفتن نوع محرک، به این شرح است که دیواره‌ی چرخنده با سرعت زاویه‌ای ۲۴۰۰ رادیان بر ثانیه می‌چرخد و دیواره‌ی مرکزی ساکن و از لحاظ حرارتی نارسا

بر این اساس، مقدار نیمه تجربی مسافت آزاد میانگین برای گاز UF_۶، با قرار دادن داده‌های گرانروی رابطه‌ی ۱، ضریب هدایت حرارتی رابطه‌ی ۲ و ضریب دیفیوژن رابطه‌ی ۵ از پیوست الف در رابطه‌های فوق، به صورت زیر به دست می‌آید

$$\lambda_v = 2,31, \lambda_h = 2,70, \lambda_d = 2,98 \times 10^{-7} [\text{cm}] \quad (15)$$

که برای درجه حرارت صفر کلوین و فشار یک اتمسفر به دست آمده است. وابستگی مسافت آزاد میانگین به صورت نه‌چندان دقیق و سهل‌گیرانه، به فشار با P^{-1} به صورت خطی و برای یک فشار مشخص وابستگی آن به دما به صورت $T^{1/433}$ است که در آن دما برحسب کلوین است [۱]. بر این اساس برای دمای ۳۲۰ کلوین که طبق جدول ۱، به عنوان دمای میانگین گاز، در نظر گرفته شده است و هم‌چنین فشار یک پاسگال در برابر یک بار، به مسافت آزاد میانگینی کم‌تر از ۳ میلی‌متر می‌رسیم که این فاصله‌ای است که، حداقل اندازه‌ی مش‌ها در حل عددی برای ناحیه‌ی مرکزی در سرعت‌های بالا، (در صورت رسیدن فشار به این حد)، باید از آن بزرگ‌تر باشد تا بتوان در هر نقطه خصوصیت‌ها را به صورت ماکروسکوپی بیان کرد. در ضمن همان‌طور که گفته شد در این روش به سادگی فرض می‌شود که مسافت آزاد میانگین با عکس فشار نسبت مستقیم دارد، در نتیجه اگر مثلاً کمینه‌ی فشار ایستای ناحیه‌ی مرکزی دستگاه به جای یک پاسگال، سه پاسگال باشد، مسافت آزاد میانگین حساب شده بر ۳ تقسیم شده و کم‌تر از یک میلی‌متر می‌شود. در هر صورت، در این مطالعه اندازه‌ی مش مربعی نشان داده شده در شکل ۱ در ناحیه‌ی مرکزی دستگاه کم‌تر از ۵ میلی‌متر نیست. در نتیجه حاشیه‌ی امنیتی کافی برای فراتر نرفتن مسافت آزاد میانگین مولکولی گاز از اندازه‌ی شبکه‌بندی وجود دارد. برد [۱۷] برای سنجش صحت استفاده از معادله‌های ناویر-استوکس در ناحیه‌های کم‌چگال، محاسبه‌ی عدد بی‌بعد نادسن^(۱۵) را که در واقع نسبت مسافت آزاد میانگین به طول مشخصه‌ی محیط است، پیشنهاد کرده است. براساس محاسبه‌ی فوق و معیار مرجع [۱۷]، حداکثر مقدار این عدد در مسأله‌ی مورد بررسی در این مقاله از ۰٫۱۲ فراتر نمی‌رود که به مراتب کم‌تر از حد ۰٫۱ تعیین شده در این مرجع برای تأیید صحت معادله‌های به کار برده شده، است.

$$\alpha = \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = 0,025 \quad \text{محرك مکانیکی}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{T_0}} [T_{WB} - T_{WT}] = 0,3125 \quad \text{محرك شیب گرمایی دیواره}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{T_0}} [\Delta T_B - \Delta T_T] = 0,3125 \quad \text{محرك اختلاف درجه}$$

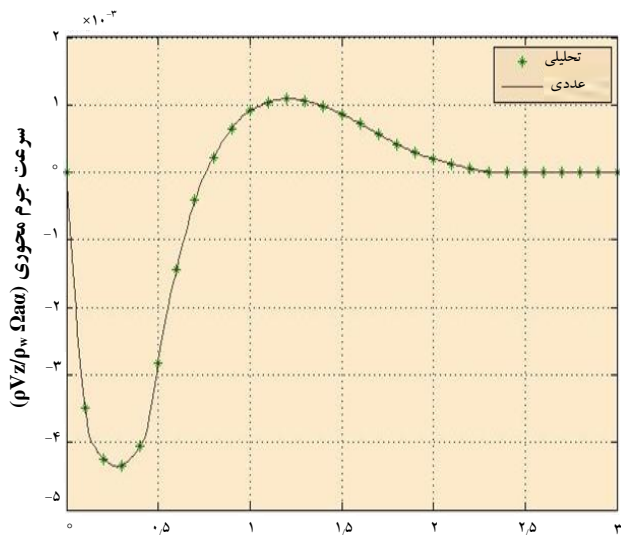
حرارت دو صفحه‌ی انتهایی

(۱۶)

جدول ۲. خصوصیت‌های فیزیکی گاز در مسأله‌ی تحلیلی

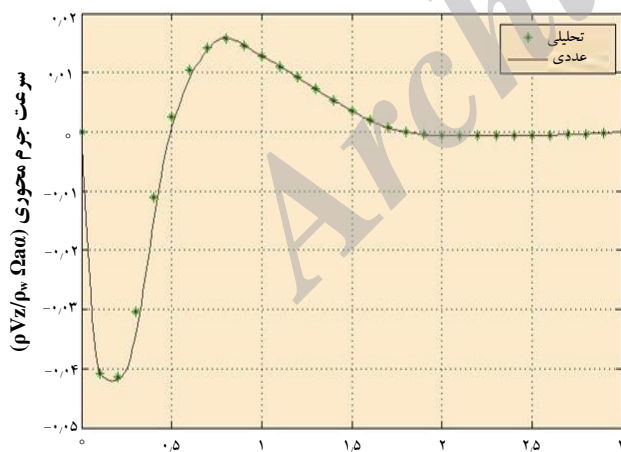
گرانروی μ	۱,۸۲۴۲۷۷ kg/m.s
ضریب هدایت حرارتی k	۰,۰۰۷۳۵۳۲ W/m K
گرمای ویژه c_p	۳۷۸,۵۳۹۲ J/kg K
جرم مولکولی M	۳۵۲,۰۲ kg/kmol

است. برای محرك مکانیکی فرض شده است که صفحه‌ی پایینی با سرعت زاویه‌ای ۵ درصد کم‌تر از سرعت زاویه‌ای سایر دیواره‌ها یعنی ۲۲۸۰ رادیان بر ثانیه می‌چرخد. برای این نوع محرك به جز دیواره‌ی مرکزی، سایر دیواره‌ها در درجه حرارت ثابت و متوسط ۳۲۰ کلوین قرار دارند. برای حالت محرك شیب گرمایی دیواره، تعریف دقیق شیب باید به وسیله‌ی برنامه‌ی پیوست ب. ۲ انجام شود. این در حالی است که برای این نوع محرك، دیواره‌ی بالایی، پایینی و جانبی با همان سرعت ۲۴۰۰ رادیان بر ثانیه می‌چرخند. این برنامه طوری نوشته شده است که درجه حرارت متوسط برای وسط ارتفاع چرخنده محاسبه شود و درجه‌ی حرارت دیواره‌ی بالایی ۱۰ کلوین کم‌تر و درجه حرارت دیواره‌ی پایینی ۱۰ کلوین بیش‌تر از درجه حرارت متوسط است. اما برای محرك سوم، چرخنده و دیواره‌ی پایینی همان درجه حرارت متوسط را دارا هستند، اما درجه‌ی حرارت صفحه‌ی بالایی ۱۰ کلوین کم‌تر و در ۳۱۰ کلوین ثابت است. این در حالی است که تمامی سطح‌ها به استثنای مجرای مرکزی با سرعت زاویه‌ای ثابت ۲۴۰۰ رادیان بر ثانیه می‌چرخند. با در نظر گرفتن شرایط هندسی، فیزیکی و مرزی فوق برای سه نوع محرك مذکور، نمودار بی‌بعد شده‌ی توزیع شعاعی سرعت جرم محوری، ρV_z در صفحه میانی به ترتیب، در شکل‌های ۲، ۳ و ۴ هم برای حل تحلیلی و هم برای حل عددی آورده شده است. برای بی‌بعد کردن محور افقی از پارامتر ξ که تعریف آن در رابطه‌ی ۹ آمده، استفاده شده است که مختصه‌های شعاعی گسترش یافته^(۱۹) نامیده می‌شود. برای بی‌بعد کردن محور عمودی در سه نمودار فوق، سرعت جرم محوری ρV_z بر پارامتر $\rho_w \Omega a \alpha$ تقسیم شده است که در آن پارامتر α عدد بی‌بعد روزبی^(۲۰) است. برای سه نوع محرك، α طبق مرجع [۱] چنین تعریف و محاسبه می‌شود



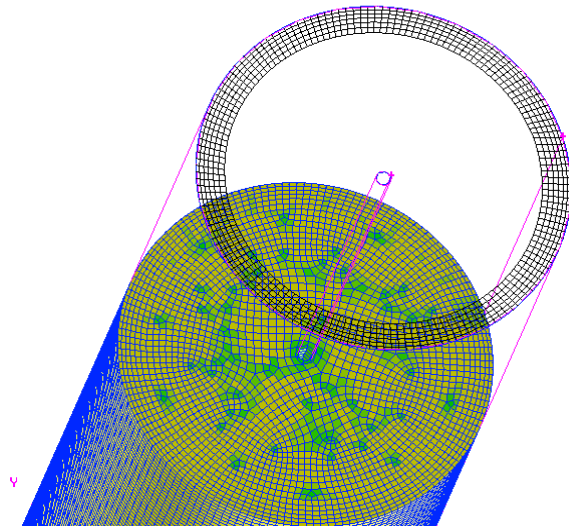
مختصه‌های شعاعی تحت کشش: $\xi = A^2(1-r^2/a^2)$

شکل ۲. توزیع شعاعی سرعت جرم محوری برای محرك مکانیکی (اسکوپ) در صفحه‌ی میانی.

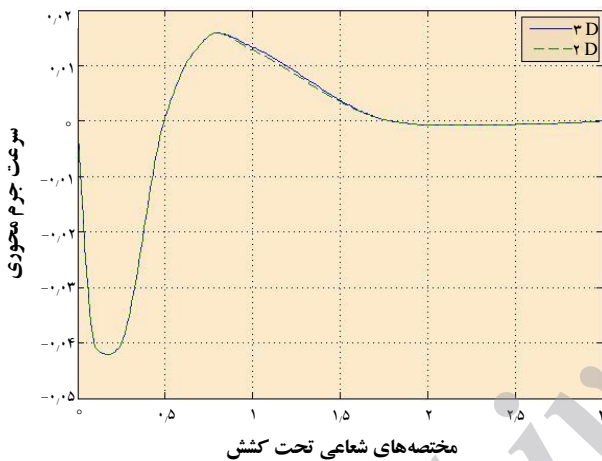


مختصه‌های شعاعی تحت کشش: $\xi = A^2(1-r^2/a^2)$

شکل ۳. توزیع شعاعی سرعت جرم محوری برای محرك شیب گرمایی دیواره در صفحه‌ی میانی.



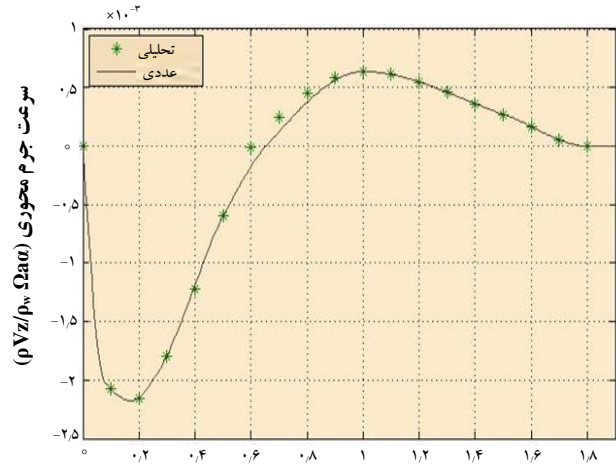
شکل ۵. کیفیت مش و لایه‌ی مرزی در حالت سه‌بعدی.



شکل ۶. مقایسه‌ی توزیع شعاعی سرعت جرم محوری برای محرک شیب گرمایی دیواره در حالت‌های دو و سه‌بعدی برای هندسه و جریان ساده شده (در صفحه‌ی میانی).

که هیچ عامل نوسان‌زا یا غیرخطی‌کننده‌ای در آن وجود ندارد و محرک‌ها یا رابطه‌ی ۱۶ نیز به اندازه‌ی کافی کوچک هستند، صادق است.

حال اگر فرض جسم صلب تک دما را که فرض اول مطرح شده در بخش ۲ بود و از طریق برنامه‌ی ۱ پیوست ب به روش عددی اعمال می‌شود از این حل حذف کرده و به جای آن چگالی را از قانون گاز ایده‌آل حساب کنیم، تراکم‌پذیری وارد معادله‌های پایستگی شده و دیورژانس سرعت غیرصفر شده، در نتیجه عبارت برگشت‌پذیر تبدیل انرژی مکانیکی به داخلی در معادله‌ی پایستگی انرژی غیرصفر می‌شود و برای آن حل تحلیلی در دست نیست. با این تغییر تفاوت‌هایی در نتیجه‌ها حاصل

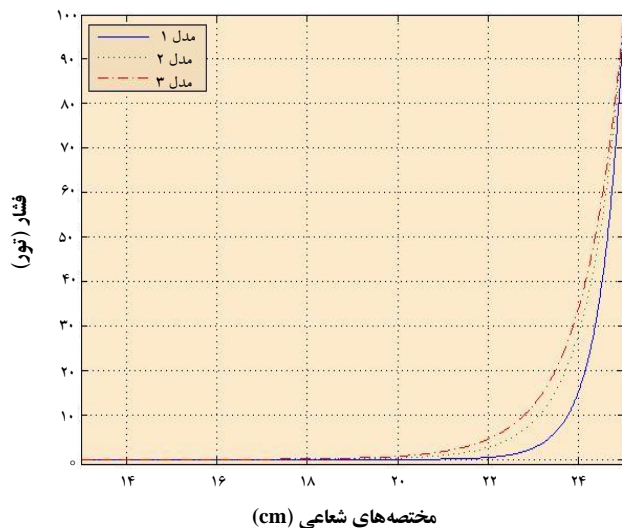


شکل ۴. توزیع شعاعی سرعت جرم محوری برای محرک اختلاف دمای صفحه‌های انتهایی در صفحه‌ی میانی.

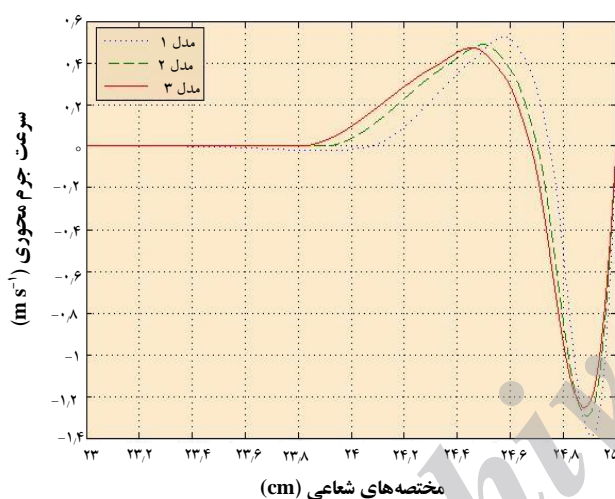
پارامترها طوری انتخاب شده‌اند که نمودارها برای هر سه نوع محرک از معیار بی‌بعدسازی نزدیکی برخوردار باشند. مشاهده می‌شود، با اعمال دقیق شرایط حل تحلیلی به حل عددی، به ویژه شرط جسم صلب تک دما، برای هر سه نوع محرک ذکر شده، می‌توان به نتیجه‌های مشابهی دست یافت. علاوه بر این از مقایسه‌ی سه نمودار مشاهده می‌شود که بیشینه‌ی دامنه‌ی سرعت جرم محوری در راستای شعاعی، برای محرک شیب گرمایی دیواره به مراتب از دو محرک دیگر از لحاظ دامنه، بیش‌تر است، به همین دلیل برای بررسی‌های بعدی از این محرک استفاده می‌شود.

۴. حل عددی و بررسی صحت فرضیه‌های حاکم بر حل تحلیلی

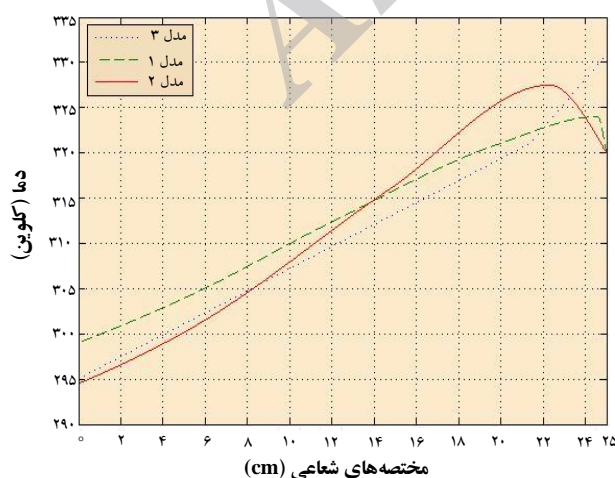
برای بررسی صحت فرض تقارن محوری، همین هندسه به روش عددی ولی به صورت سه‌بعدی حل شد. شکل ۵ کیفیت مش به کار برده شده را در مقطعی عرضی نشان می‌دهد. این هندسه ۶۱۸۲۵۰ مش هشت‌وجهی دریافت کرده است. در عین حال که اندازه‌ی مش در ناحیه‌ی مرکزی دستگاه از نیم سانتی‌متر حالت دوبعدی به یک سانتی‌متر افزایش پیدا کرده است، هم‌گرا شدن حل حداقل ۵ برابر حل دوبعدی مشابه زمان می‌خواهد که نشان‌دهنده‌ی هزینه بالای محاسباتی آن است. در نهایت نتیجه‌های به دست آمده کاملاً با حالت دوبعدی یکسان است. این مسأله در مورد توزیع شعاعی سرعت جرم محوری برای محرک شیب گرمایی دیواره در شکل ۶ نشان داده شده است. در نتیجه فرض تقارن محوری برای حالت هندسه و جریان ساده شده،



شکل ۷. توزیع شعاعی فشار برای سه حالت معادله‌های پایستگی.



شکل ۸. توزیع شعاعی سرعت جرم محوری برای سه حالت معادله‌های پایستگی.



شکل ۹. توزیع شعاعی دما برای سه حالت معادله‌های پایستگی.

می‌شود که برای بررسی بهتر، حالت‌هایی که با آن‌ها روبه‌رو هستیم شماره‌گذاری می‌شود. حالتی که در آن هم‌چنان از فرض ۱ و برنامه‌ی ب. ۱ استفاده شده و نتیجه‌های آن با حل تحلیلی تطابق دارد، حالت یک نامیده می‌شود و با در نظر گرفتن قانون گاز ایده‌آل، حالتی که در آن هم‌چنان از گرمایش ویسکوز یعنی رابطه‌ی ۴ در معادله‌ی پایستگی انرژی داخلی صرف‌نظر شده است، حالت ۲ و حالتی که در آن این عبارت نیز در نظر گرفته شود، حالت ۳ نامیده می‌شود.

نمودارهای توزیع شعاعی فشار و سرعت جرم محوری بدون بی‌بعدسازی برای این سه حالت در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. براساس شکل ۷، حل تحلیلی کم‌ترین تقریب از ضخامت لایه‌ی چگال را ارائه می‌دهد. با اضافه شدن تراکم‌پذیری، حالت ۲، و اضافه شدن گرمایش ویسکوز به آن، حالت ۳، به ترتیب، به تخمین بیش‌تری از ضخامت این لایه می‌رسیم. هم‌چنین به تدریج با حرکت از حالت یک به حالت سه، بیشینه‌ی سرعت جرم محوری اندکی کم‌تر شده و محل وقوع آن از دیواره‌ی چرخنده بیش‌تر فاصله می‌گیرد. هم‌چنین از مقایسه‌ی شکل‌های ۷ و ۸ دیده می‌شود که هر چند در فاصله‌ی ۲۳ تا ۲۴ سانتی‌متری از محور، توزیع فشار سه حالت متفاوت است، اما نمودارهای توزیع شعاعی سرعت جرم محوری در همین محدوده برهم‌منطبق است. این امر ریشه در توزیع عامل‌های تشکیل‌دهنده‌ی سرعت جرم، یعنی سرعت محوری و چگالی دارد، چرا که سرعت رشد فشار و سرعت محوری با نزدیک شدن به چرخنده بیش‌تر از چگالی است. اما تفاوت اصلی این سه حالت از مقایسه‌ی نمودارهای توزیع شعاعی سرعت محوری و به ویژه دما مشخص می‌شود. این نمودارها به ترتیب، در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود سرعت محوری برای حالت‌های ۲ و ۳ در ناحیه‌ی مرکزی دستگاه عملاً یکی است. اما در حالت‌های ۲ و ۳ بر خلاف حالت ۱ دو ناحیه (نه چهار ناحیه) با جهت سرعت متضاد دیده می‌شود که این حالت با تجربه سازگار است. از شکل ۱۰ می‌توان دید که با اضافه شدن اثر تراکم‌پذیری به معادله‌ی پایستگی انرژی، مطابق انتظار در نمودار توزیع شعاعی دما، نسبت به حالت تعادل چرخش آزاد (حالت ۱) در ناحیه‌ی مرکزی، افت دما و در ناحیه‌ی چگال جانبی، افزایش دما دیده می‌شود، چرا که عبارت افزوده شده به معادله‌ی پایستگی انرژی در ناحیه‌ی مرکزی که در

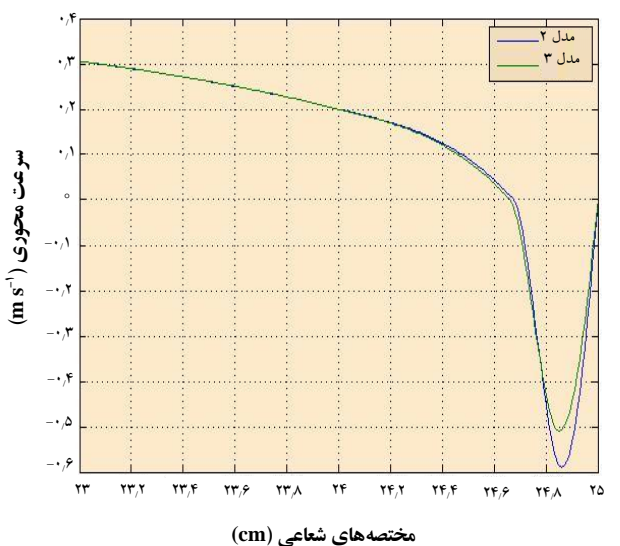
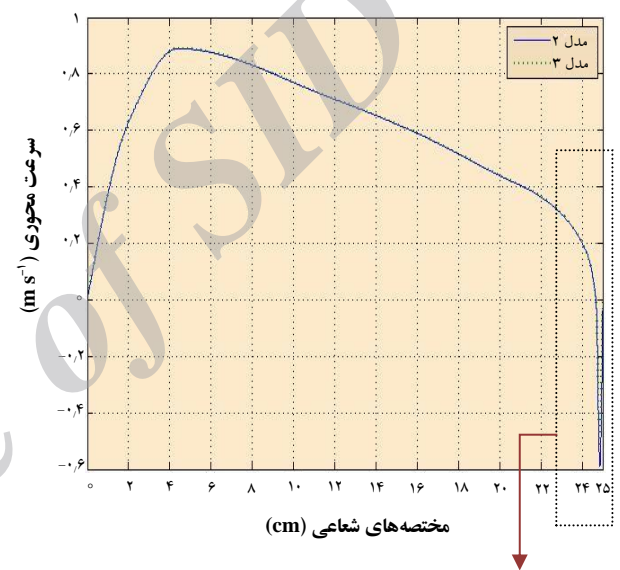
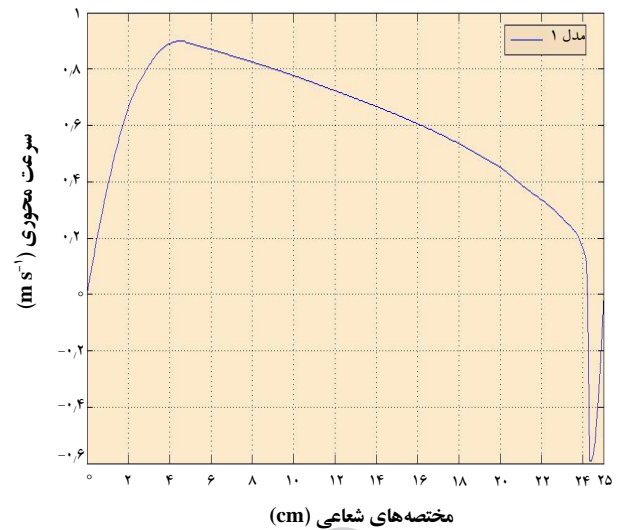


آن با انبساط جریان مواجه هستیم منفی و در ناحیه‌ی چگال جانبی که در آن با انقباض جریان مواجه‌ایم، مثبت است. اما برای حالت ۳، با اضافه شدن عبارت گرمایش ویسکوز به معادله‌ی پایستگی انرژی داخلی، شکل جواب اساساً عوض می‌شود [۱۳]. اضافه کردن این عبارت بنا بر شکل ۱۰، مطابق انتظار روی تراکم‌پذیری ناحیه‌ی چگال، تأثیر منفی داشته، اما اثر بسیار مهم اصطکاک را در ناحیه‌ی چگال جانبی، فعال می‌کند که طبق تعریف، آن در ناحیه‌های با تراکم‌پذیری انقباضی بالا اهمیت پیدا می‌کند [۲۰].

حال اگر خصوصیت‌های UF_6 یعنی گرانروی μ ، ضریب هدایت حرارتی k و گرمای ویژه C_p به جای تعریف به صورت ثابت، از پیوست الف، به ترتیب، از طریق رابطه‌های ۱، ۲ و ۳ به صورت تابعی از دما تعریف شود، برای حالت ۳ یعنی حالتی که در آن اثر تراکم‌پذیری و گرمایش ویسکوز نیز در نظر گرفته شده است، عملاً تمامی فرضیه‌های چهارگانه‌ی حاکم بر حل تحلیلی کنار گذاشته می‌شود. شکل ۱۱ توزیع شعاعی سرعت جرم محوری را برای این حالت که آن را حالت ۴ یا اثر کامل می‌نامیم، به همراه حالت ۱ که همان حل تحلیلی است و کلیه‌ی فرضیه‌های چهارگانه بر آن حاکم است، برای صفحه‌ی میانی هندسه، نشان می‌دهد.



شکل ۱۱. توزیع شعاعی سرعت جرم محوری برای حل تحلیلی (حالت ۱) و حل عددی مشابه با حذف کلیه فرضیه‌ها (حالت ۴).



شکل ۱۰. توزیع شعاعی سرعت محوری در اندازه‌های واقعی (بدون بی‌بعدسازی) برای سه حالت معادله‌های پایستگی.



پایستگی را که هدف اصلی این مقاله است، سنجید. این مقایسه که در بخش چهارم این مقاله ارایه شد، نتیجه‌های بامعنا و قابل بحثی را ارایه داد. جالب‌ترین این نتیجه‌ها، در مورد کمیت سرعت جرم محوری حاصل شد که تأکید زیادی بر توزیع شعاعی آن در مرجع‌های حل تحلیلی شده است. مرجع [۱] علت این تأکید را علاوه بر اهمیت این کمیت، در تطبیق خوبی که نتیجه‌های آزمایشگاهی اندازه‌گیری آن با نتیجه‌های حل تحلیلی دارد، بیان کرده است. این نکته که بعد از حذف تمامی فرض‌های حل تحلیلی، نتیجه‌های حل عددی دقیق این کمیت بر نتیجه‌های حل تحلیلی منطبق می‌شود، با نکته‌ی ذکر شده هم‌خوانی بامعنایی دارد. هر چند که نتیجه‌های این پژوهش نشان داد که انطباق یاد شده، مستقل از اندازه‌های هندسی، فشار گاز و سرعت چرخش دستگاه، همیشه برای این کمیت به علت اثرهای متضاد و حذف‌شونده‌ی عامل‌های تشکیل‌دهنده‌ی آن یعنی چگالی و سرعت محوری، اتفاق می‌افتد، اما اولاً این انطباق تنها در شرایط هندسه و میدان ساده شده‌ی حل تحلیلی رخ می‌دهد که بسیار محدودکننده است و با شرایط کارکرد واقعی هم‌خوانی ندارد و ثانیاً براساس نتیجه‌های بخش چهارم، این انطباق تنها برای این کمیت صادق است و برای سایر متغیرها از جمله عامل‌های تشکیل‌دهنده‌ی سرعت جرم محوری، بین حل تحلیلی صرف و حل عددی دقیق برقرار نیست. این مسأله به خوبی لزوم اجرای شبیه‌سازی‌های عددی به صورت سه‌بعدی و با حذف کلیه‌ی فرضیه‌های حاکم بر حل تحلیلی را نشان می‌دهد. علاوه بر این می‌توان این مقاله را به عنوان مبنایی برای صحت‌سنجی ابزار استفاده شده در آن و به طور کلی رویکرد دینامیک سیالات محاسباتی (البته با مدل‌های عددی به کار برده شده در این مقاله) برای کاربردهای عملی و انجام شبیه‌سازی سه‌بعدی ذکر شده، به حساب آورد؛ نمونه‌هایی از آن توسط نویسندگی اول در مرجع‌های [۱۳] و [۱۵] ارایه شده است.

تطابقی که بین این دو نتیجه دیده می‌شود، محدود به خصوصیت‌های هندسی و فیزیکی این مسأله نیست و به طور کلی هرگاه اولاً اندازه‌ی محرک‌ها، که توسط معیار ارایه شده به وسیله‌ی رابطه‌ی ۱۶ تعیین می‌شوند، به اندازه کافی کوچک باشد و دوماً همه‌ی عامل‌های غیرخطی‌کننده، یعنی تزریق و برداشت جریان و هندسه‌های اسکوپ و بفل که موجب نوسان محرک‌ها می‌شوند، حذف شود، اثرهایی که از طریق حذف مجموع فرضیه‌های چهارگانه‌ی بخش ۲ ایجاد می‌شوند، تنها در ارتباط با سرعت جرم محوری یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و همان‌طور که در ابتدای همین بخش آمد، در صورت برقراری دو شرط فوق، شرط تقارن محوری نیز صحت داشته و در نتیجه می‌توان انتظار داشت که نتیجه‌های حل تحلیلی با نتیجه‌های به دست آمده از نمونه‌ی واقعی در حالت هندسه و جریان ساده شده، تنها برای سرعت جرم محوری هم‌خوانی داشته باشند.

این در حالی است که عدم هم‌خوانی که در ارتباط با سایر پارامترها از جمله چگالی و سرعت محوری که حاصل ضرب آن‌ها سرعت جرم محوری را تشکیل می‌دهد، به قوت خود باقی است. از طرف دیگر شرایط دوگانه‌ی ذکر شده برای برقراری حالت هندسه و جریان ساده شده، بسیار محدودکننده بوده و مسلماً در مورد دستگاه واقعی صادق نیست. این مسأله بیش از پیش لزوم اجرای شبیه‌سازی به صورت سه‌بعدی و با حذف کلیه‌ی فرضیه‌های حاکم بر حل تحلیلی را نشان می‌دهد.

۵. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، از حل عددی با رویکرد دینامیک سیالات محاسباتی برای بررسی اثر حذف فرضیه‌های حل تحلیلی بر روی متغیرهای میدان جریان دستگاه سانتریفوژ گازی استفاده شد. بر این اساس، حل تحلیلی با کم‌ترین حجم فرضیه‌ها انتخاب و با بررسی آن، مجموعه‌ی این فرضیه‌ها به صورت چهار عنوان گردآوری شد. با حذف تدریجی این فرض‌ها چهار حالت مختلف تعریف شد تا بتوان از مقایسه‌ی آن‌ها با یک‌دیگر، اثر این فرض‌ها بر متغیرها و عبارت‌های حذف شده از معادله‌های



پی‌نوشت‌ها

1. Computational fluid dynamics
2. Scoop
3. Baffle
4. Inventor
5. Gambit
6. Fluent
7. Viscous dissipation heating or for short viscous heating
8. Steady state
9. Master-potential
10. Pancake
11. Implicit density-Based solver
12. Reynolds-averaged navier-stokes
13. Reynolds stress model
14. Chapman-enskog
15. Knudsen
16. Mechanical drive
17. Wall thermal gradient drive
18. End-cap thermal drive
19. Stretched radial coordinate
20. Rossby number

پیوست الف

خصوصیت‌های گاز UF₆: سه رابطه‌ی اول از مرجع [۱] و دو رابطه‌ی آخر از مرجع [۲۲] استخراج شده‌اند. برای اطلاعات بیش‌تر به مرجع [۱۳] مراجعه شود.

۱. $\mu = 0.839 \times T^{-0.933}$ [میکروپواز]
۲. $K = 1.45 \times [1 + 0.045 \times (T - 273)] \times 10^{-5}$ [cal/cm.sec K]
۳. $C_p = 32.43 + 7.963 \times 10^{-2} T - 32.068 \times 10^{-4} T^2$ [cal/mol K]
۴. $\mu = 2.458 + 4.972 \times 10^{-2} T \pm 0.75\%$ [میکروپواز]
۵. $\rho D_{11} = 0.365 + 6.339 \times 10^{-2} T \pm 0.75\%$ [میکروپواز]

پیوست ب

۱.

```
# include "udf . h"
# define A2-23.8166
# define rw 0.25
DEFINE_PROPERTY (cell-density, cell, thread)
{
real×[ND_ND];
cell_t C;
real den;
real temp;
real r;
begin_c_loop (f, t)
{
F_CENTROID (x, c, t);
r=x[1]
Temp=C_T(cell, thread);
den=(0.923 P(c, t)*C)/(temp*23.6194))*exp(A2*(1-pow(r/rw, 2)));
}
end_f_loop (f, t)
}
return den;
}
```

۲.

```
# include "udf . h"
DEFINE_PROFILE (rotor_temp, t, i)
{
real×[ND_ND];
face_t f;
real y;
begin_f_loop (f, t)
{
F_CENTROID (x, f, t);
y= x [0];
F_PROFILE (f, t, i)=310-80*(y-0.125);
}
end_f_loop (f, t)
}
```




- [1] S. Villani, Uranium enrichment, Topics in Applied Physics, 35, Springer-Verlag, Berlin, Germany (1986).
- [2] D.R. Olander, The theory of uranium enrichment by gas centrifuge, Prog. Nucl. Energy, 48 (1981) 1-33.
- [3] H.G. Wood, J.B. Morton, Onsager's pancke approximation for the fluid dynamics of a gas centrifuge, J. Fluid Mech, 101 (1980) 1-31.
- [4] H.G. Wood, G. Sanders, Rotating compressible flows with internal source and sinks, J. Fluid Mech, 127 (1983) 299-313.
- [5] M.D. Gunzburger, H.G. Wood, A finite element method for onsager pancke equation, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 31 (1982) 43-59.
- [6] R.J. Ribando, A finite-difference solution of onsager's model for flow in a gas centrifuge, Computers & Fluids, 12 (3) (1984) 235-252.
- [7] I. Harada, Computation of strong compressible rotating flows, J. Comput. Phys., 38 (1980) 335-356.
- [8] L.D. Cloutman, R.A. Gentry, Numerical simulation of the countercurrent flow in a gas centrifuge, Los Alamos National Laboratory Report, LA-8972-MS (1983).
- [9] ANSYS, Inc. ANSYS fluid dynamics verification manual, Canonsburg, Pennsylvania, November (2013).
- [10] D.A. de Andrade, J.L.F. Bastos, Thermal hydrodynamical analysis of a countercurrent gas centrifuge, Ann. Nucl. Energy, 25 (11) (1998) 859-888.
- [11] V.D. Borisevich, O.E. Morozov, O.N. Godisov, Numerical simulation of bellows effect on flow and separation of uranium isotopes in a supercritical gas centrifuge, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 455 (2000) 487-494.
- [12] T. Kai, K. Hasegawa, Numerical calculation of flow and isotope separation for SF₆ gas centrifuge, J. Nucl. Sci. Tech., 37 (2) (2000) 153-165.
- [13] R. Vadi, Analysis of gas centrifuge flow by the means of fluent software, MSC. Thesis. Department of Nuclear Engineering, Beheshti university, Tehran, Iran, (2011).
- [14] S.V. Bogovalov, V.D. Borisevich, V.D. Borman, V.A. Kislov, I.V. Tronin, V.N. Tornin, Verification of numerical codes for modeling of the flow and isotope separation in gas centrifuges, Computers & Fluids., 86 (2013) 177-184.
- [15] R. Vadi, A. Zolfaghari, Flow field analysis in centrifugal force field and optimizing it on the basis of maximizing, system separation efficiency, In Proceedings of 18th Iran's nuclear conference, Yazd, Iran (2012).
- [16] D. Jiang, S. Zeng, CFD simulation of 3D flow field in a gas centrifuge, In Proceedings of ICON 14, Miami, Florida, USA (2006).
- [17] G.A. Bird, Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows, Oxford Univ. Press, London (1994).
- [18] A.A. Ganjaei, S.S. Nourazar, A new algorithm for the simulation of the boltzmann equation using the direct simulation monte-carlo method, J. Mech. Sci. Tech. 23 (2009) 2861-2870.
- [19] A.A. Ganjaei, S.S. Nourazar, Numerical simulation of a binary gas flow inside a rotating cylinder, J. Mech. Sci. Tech. 23 (2009) 2848-2860.
- [20] R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, Transport phenomena, Wiley, New York, 2th Edition (2007).
- [21] ANSYS, Inc., Ansys fluent V. 15.0 documentation Manual, Canonsburg, Pennsylvania, November (2013).
- [22] L. Zarkova, P. Pirgov, Transport and equilibrium properties of UF₆ gas, Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 28 (1995) 4269-4281.