



## کد محاسباتی سه‌بعدی پارامترهای سینتیکی به روش اِلمان محدود گلرکین

سیدابوالفضل حسینی\*

دانشکده‌ی مهندسی انرژی، دانشگاه صنعتی شریف، صندوق پستی: ۱۱۱۵۵-۱۱۳۶۵، تهران - ایران

پژوهشکده‌ی راکتور، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۳۳۹-۱۴۱۵۵، تهران - ایران

**چکیده:** در این مقاله، توسعه‌ی کد کامپیوتری GFEM-KIN-3D به منظور محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی گزارش می‌شود. برای این منظور، در ابتدا معادله‌ی پخش نوترون مستقل از زمان و الحاقی آن در هندسه‌ی سه‌بعدی با استفاده از روش اِلمان محدود گلرکین حل می‌شود. در ادامه، از طریق وارد کردن توزیع شار نوترونی و الحاقی آن در رابطه‌ی مربوط به اختلال، کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری و مدت زمان متوسط تولید نوترون‌ها محاسبه می‌شود. مشکل اصلی در راستی‌آزمایی این پروژه، عدم وجود مسئله‌ی آزمون است که شامل داده‌های مربوط به کسر نوترون‌های تأخیری، طیف نوترون‌های آبی و طیف نوترون‌های تأخیری باشد. بنابراین، به ناچار چند مسئله طراحی، و پارامترهای سینتیکی برای آنها محاسبه شد. با توجه به این که حل معادله‌ی پخش نوترون در سه‌بعد با استفاده از مسائل آزمون معتبر راستی‌آزمایی شد و رابطه‌ی اختلال نیز یک رابطه‌ی کاملاً مشخص دارد، بنابراین با اطمینان می‌توان گفت در صورت داشتن اطلاعات کافی می‌توان پارامترهای سینتیکی را با دقت خوبی محاسبه کرد. کد کامپیوتری توسعه داده شده GFEM-KIN-3D قابل استفاده در محاسبات قلب راکتور با هر شکل هندسی اعم از راست گوش و شش گوش است.

**کلیدواژه‌ها:** شار نوترون، شار الحاقی، اِلمان هرمی، کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری، عمر متوسط تولید نوترون‌ها

## 3D Computational Code for Calculation of Kinetic Parameters Based on Galerkin Finite Element Method

S.A. Hosseini\*

Department of Energy Engineering, Sharif University of Technology, P.O.Box: 11365-11155, Tehran-Iran  
Reactor Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOI, P.O.Box: 14155-1339, Tehran-Iran

**Abstract:** In the present paper, development of the Galerkin Finite Element Method-Kinetic-3D Dimensional (GFEM-KIN-3D) computational code for the calculation of the kinetic parameters is reported. To this end, the static neutron diffusion and corresponding adjoint equations are solved using Galerkin Finite element method in the 3 dimensional geometry. Then, the calculated neutron and adjoint flux distributions are used in the perturbation theory to calculate the effective delayed neutron fraction and mean generation time of the neutrons. There is no benchmark problem that includes the information such as the delayed neutron fraction, prompt and delayed neutron spectrum. Therefore, some problems were designed by the author and the kinetic parameters were calculated for the considered problem. Since the neutron diffusion solver was previously validated against the well-known benchmark problems and the equations of perturbation theory is available, we conclude that if the required information is known, the kinetic parameters will be calculated with high accuracy. The developed GFEM-KIN-3D is applicable to the core calculation of the both hexagonal and rectangular reactor cores.

**Keywords:** Neutron Flux, Adjoint Flux, Tetrahedral Elements, Effective Delayed Neutron Fraction, Mean Generation Time of the Neutrons



۱. مقدمه

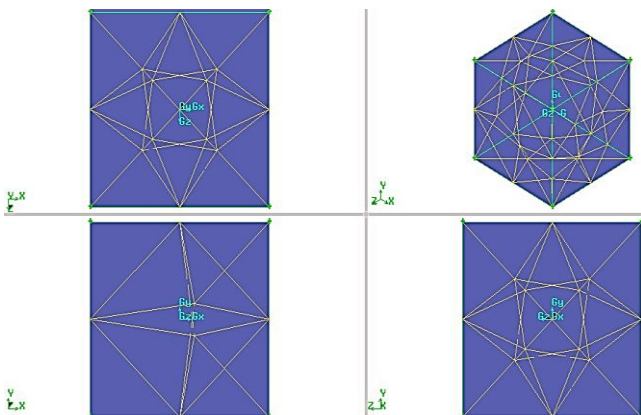
تایع وزن به صورت جواب تقریبی حدس زده شده برای شار نوترون در نظر گرفته می شود، با این تفاوت که ضریب ثابت استفاده شده برابر یک است [۶، ۷]. معادله ی پخش چند گروهی مطابق معادله ی (۱) در نظر گرفته می شود [۸]:

$$-D_g \nabla^2 \phi_g(r) + \Sigma_{rg} \phi_g(r) = \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g=1}^G \int_{\Sigma_{fg}} \phi_g(r) + \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \phi_h(r) \quad g=1, 2, \dots, G \quad (1)$$

در این رابطه،  $D_g$  ضریب پخش مربوط به گروه  $g$ ،  $\Sigma_{rg}$  سطح مقطع ماکروسکوپی برداشت گروه  $g$ ،  $\Sigma_{fg}$  سطح مقطع ماکروسکوپی شکافت گروه  $g$ ،  $\Sigma_{h \rightarrow g}$  سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی از گروه  $h$  به گروه  $g$ ،  $k_{eff}$  ضریب تکثیر نوترونی مؤثر،  $\phi_g(r)$  شار نوترون گروه  $g$  و  $\chi_g$  کسر نوترون های ناشی از شکافت در گروه  $g$  است.

برای حل معادله ی پخش نوترون در مختصات سه بُعدی لازم است که ابتدا ناحیه ی مورد نظر را به المان های کوچک تر تقسیم کرد که این المان ها می توانند هرمی، منشوری و یا از انواع دیگری باشند. المان مورد استفاده در این جا از نوع هرمی درجه ی

۱ (با درون یابی خطی) است که با استفاده از نرم افزار گمبیت تولید شده است. در شکل ۱، تقسیم بندی یک مکعب ساده به المان های هرمی از ۴ جهت نشان داده شده است.



تعیین کسر مؤثر نوترون های تأخیری ( $\beta_{eff}$ ) و زمان تولید نوترون ها ( $\Lambda$ ) به خاطر نقش مهم آن در محاسبات قلب راکتور و تحلیل گذارهای راکتیویته و نهایتاً ایمنی و کنترل راکتور اهمیت بسیاری دارند. به طور کلی روش منحصر به فردی برای محاسبه ی پارامترهای سینتیکی وجود ندارد و با معلوم بودن بعضی از این پارامترها در هر معادله ای که پارامترهای سینتیکی در آن وجود دارد، می توان آنها را برای محاسبه ی این پارامترها استفاده کرد. از جمله ی این معادلات، دستگاه معادلات سینتیکی و معادله ی In hour است. برخی از کدهای محاسباتی مانند CITATION و CITVAP (نسخه ی جدید CITATION) نیز وجود دارند که با استفاده از نظریه ی اختلال، محاسبات سینتیکی را انجام می دهند. در زمینه ی محاسبه پارامترهای سینتیکی، پژوهش های مختلفی در داخل و خارج از کشور صورت گرفته است که اغلب مبتنی بر کدهای کامپیوتری هم چون MTR\_PC [۱-۳] و MCNP [۴، ۵] هستند. نوآوری کار فعلی نسبت به کارهای قبلی این است که محاسبه ی پارامترهای سینتیکی با استفاده از کد کامپیوتری توسعه یافته صورت می گیرد که در آن توزیع شار نوترونی، الحاقی شار نوترونی و ضریب تکثیر نوترونی با استفاده از روش المان محدود گلرکین با دقت بالا محاسبه شده است و منجر به محاسبه ی پارامترهای سینتیکی با دقت بالا می شود. در این مقاله، پارامترهای سینتیکی شامل کسر مؤثر نوترون های تأخیری و زمان تولید نوترون ها بر پایه ی روش مبتنی بر تئوری اختلال و روش عددی المان محدود گلرکین برای حل معادله ی پخش نوترون محاسبه می شوند. کد کامپیوتری توسعه داده شده می تواند برای انجام محاسبات پارامترهای سینتیکی قلب راکتورهای تحقیقاتی، PWR و VVER استفاده شود.

۲. محاسبه ی پارامترهای سینتیکی

۲.۱ حل عددی معادله ی پخش نوترون چند گروهی در یک محیط سه بُعدی با استفاده از روش گلرکین  
 ۲.۱.۱ حل معادله ی پخش نوترون در سه بُعد  
 اساس کار روش های باقی مانده ی وزن شده، کمینه کردن انتگرال حاصل ضرب باقی مانده در تابع وزن است. در روش گلرکین،



$$c_1 = -\det \begin{bmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

(۶)

شکل ۱. شمایی از اِلمان‌بندی یک هندسه‌ی مکعبی به اِلمان‌های هرمی.

تابع تقریبی که بتواند شار نوترون را درون هر هرم تقریب بزند به شکل رابطه‌ی (۲) است [۹]:

$$\phi^{(e)}(x, y, z) = L_1(x, y, z)\phi + L_2(x, y, z)\phi + L_3(x, y, z)\phi + L_4(x, y, z)\phi \quad (2)$$

در رابطه‌ی (۲)، تابع شکل محلی به صورت رابطه‌ی (۳) است:

$$N(x, y, z) = [L_1(x, y, z) \quad L_2(x, y, z) \quad L_3(x, y, z) \quad L_4(x, y, z)] \quad (3)$$

ضرایب مربوط به سایر نقاط با تغییر تناوبی (جای گشت ساعت‌گرد) اندیس‌ها از رابطه‌ی (۶) به دست می‌آید. برای حل معادله‌ی پخش نوترون به روش گلرکین، ابتدا دو طرف معادله در تابع وزن ضرب، و سپس روی حجم هر عنصر انتگرال گرفته، و با هم جمع می‌شوند:

(۷)

$$W(x, y, z) = N(x, y, z)$$

با ضرب طرفین معادله‌ی پخش نوترون در تابع وزن و استفاده از قضیه‌ی دیورژانس در تبدیل انتگرال‌گیری حجمی به انتگرال‌گیری سطحی در نهایت:

$$\sum_{e=1}^E \left[ \int_V dv D_g \nabla N^{(e)}(r) \nabla N^{T(e)}(r) \phi_g^{(e)} + \sum_{r,g} \int_V dv N^{(e)}(r) N^{T(e)}(r) \phi_g^{(e)} + \int_A ds N^{(e)}(r) N^{T(e)}(r) \phi_g^{(e)} \right] =$$

$$\sum_{e=1}^E \left[ \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{f,g} \nu \Sigma_{f,g} \int_V dv N^{(e)}(r) N^{T(e)}(r) \phi_g^{(e)} + \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g} \int_V dv N^{(e)}(r) N^{T(e)}(r) \phi_h^{(e)} \right]$$

(۸)

در محاسبات انجام شده، سه نوع انتگرال در معادله‌ی (۸) وجود دارد که به روش تحلیلی از رابطه‌ی (۹) محاسبه می‌شوند:

(۹)

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dx dy dz = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} \mathcal{V}$$

هر یک از انتگرال‌های موجود در معادله‌ی (۸) با استفاده از رابطه‌ی (۹) به صورت معادلات (۱۰) تا (۱۲) محاسبه می‌شوند:

و هر یک از مؤلفه‌های تابع شکل به صورت رابطه‌ی (۴) تعریف می‌شوند:

$$L_i(x, y, z) = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{\mathcal{V}}; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

که در آن،  $\mathcal{V}$  حجم هرم است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۵)

$$\mathcal{V} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

ضرایب مربوط به نقطه‌ی ۱ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۹]:

$$a_1 = \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = -\det \begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$



معیارهای هم گرایی در حل این دستگاه معادلات، به شکل روابط (۱۴) و (۱۵) هستند:

$$(14) \int_V dv \nabla N^{(e)}(r) \nabla N^{T(e)} = \frac{1}{\nu \mathcal{V}^{(e)}}$$

$$\left| \frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}}{\phi^{(n)}} \right| < \epsilon_1$$

$$(15) \left| \frac{k_{eff}^{(n+1)} - k_{eff}^{(n)}}{k_{eff}^{(n)}} \right| < \epsilon_2$$

$$\begin{bmatrix} b_1^{(e)}b_1^{(e)} + c_1^{(e)}c_1^{(e)} + d_1^{(e)}d_1^{(e)} & b_1^{(e)}b_2^{(e)} + c_1^{(e)}c_2^{(e)} + d_1^{(e)}d_2^{(e)} \\ b_1^{(e)}b_2^{(e)} + c_1^{(e)}c_2^{(e)} + d_1^{(e)}d_2^{(e)} & b_1^{(e)}b_3^{(e)} + c_1^{(e)}c_3^{(e)} + d_1^{(e)}d_3^{(e)} \\ b_1^{(e)}b_3^{(e)} + c_1^{(e)}c_3^{(e)} + d_1^{(e)}d_3^{(e)} & b_1^{(e)}b_4^{(e)} + c_1^{(e)}c_4^{(e)} + d_1^{(e)}d_4^{(e)} \\ b_2^{(e)}b_1^{(e)} + c_2^{(e)}c_1^{(e)} + d_2^{(e)}d_1^{(e)} & b_2^{(e)}b_2^{(e)} + c_2^{(e)}c_2^{(e)} + d_2^{(e)}d_2^{(e)} \\ b_2^{(e)}b_2^{(e)} + c_2^{(e)}c_2^{(e)} + d_2^{(e)}d_2^{(e)} & b_2^{(e)}b_3^{(e)} + c_2^{(e)}c_3^{(e)} + d_2^{(e)}d_3^{(e)} \\ b_2^{(e)}b_3^{(e)} + c_2^{(e)}c_3^{(e)} + d_2^{(e)}d_3^{(e)} & b_2^{(e)}b_4^{(e)} + c_2^{(e)}c_4^{(e)} + d_2^{(e)}d_4^{(e)} \\ b_3^{(e)}b_1^{(e)} + c_3^{(e)}c_1^{(e)} + d_3^{(e)}d_1^{(e)} & b_3^{(e)}b_2^{(e)} + c_3^{(e)}c_2^{(e)} + d_3^{(e)}d_2^{(e)} \\ b_3^{(e)}b_2^{(e)} + c_3^{(e)}c_2^{(e)} + d_3^{(e)}d_2^{(e)} & b_3^{(e)}b_3^{(e)} + c_3^{(e)}c_3^{(e)} + d_3^{(e)}d_3^{(e)} \\ b_3^{(e)}b_3^{(e)} + c_3^{(e)}c_3^{(e)} + d_3^{(e)}d_3^{(e)} & b_3^{(e)}b_4^{(e)} + c_3^{(e)}c_4^{(e)} + d_3^{(e)}d_4^{(e)} \\ b_4^{(e)}b_1^{(e)} + c_4^{(e)}c_1^{(e)} + d_4^{(e)}d_1^{(e)} & b_4^{(e)}b_2^{(e)} + c_4^{(e)}c_2^{(e)} + d_4^{(e)}d_2^{(e)} \\ b_4^{(e)}b_2^{(e)} + c_4^{(e)}c_2^{(e)} + d_4^{(e)}d_2^{(e)} & b_4^{(e)}b_3^{(e)} + c_4^{(e)}c_3^{(e)} + d_4^{(e)}d_3^{(e)} \\ b_4^{(e)}b_3^{(e)} + c_4^{(e)}c_3^{(e)} + d_4^{(e)}d_3^{(e)} & b_4^{(e)}b_4^{(e)} + c_4^{(e)}c_4^{(e)} + d_4^{(e)}d_4^{(e)} \end{bmatrix}$$

(10)

که در آن  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$ ، معیارهای هم گرایی اند. استفاده از روش المان محدود گلرکین و المان های هرمی می تواند برای هر هندسه ی پیچیده سه بُعدی منجر به نتایج با دقت بالا شود.

(11)

۲.۲ گسسته سازی الحاقی معادله ی پخش نوترون برای مسائل از نوع بحرانیّت  
 ۱.۲.۲ حل الحاقی معادله ی پخش نوترون در سه بُعد  
 برای حل عددی الحاقی معادله ی پخش نوترون باید دستگاه معادلات (۱۶) به روش مشابه توضیح داده شده در بخش قبل حل شود.

$$\int_V dv N^{(e)}(r) N^{T(e)} = \mathcal{V}^{(e)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 60 & 120 & 120 & 120 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 120 & 60 & 120 & 120 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 120 & 120 & 60 & 120 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 120 & 120 & 120 & 60 \end{bmatrix}$$

(12)

$$A^\dagger \phi^\dagger = \frac{1}{k_{eff}^\dagger} B^\dagger \phi^\dagger \quad (16)$$

در معادله (۱۶)،  $A^\dagger$  و  $B^\dagger$  به ترتیب ترانهاده ی ماتریس های  $A$  و  $B$  هستند. همچنین،  $\phi^\dagger$  شار الحاقی و  $k_{eff}^\dagger$  ضریب تکثیر مؤثر الحاقی اند. دستگاه معادلات (۱۶) به روش تکرار توان حل، با معیارهای هم گرایی مشابه معادلات (۱۴) و (۱۵) حل خواهد شد.

$$\int_A ds N^{(e)}(r) N^{T(e)} = \nu \Delta^{(e)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 24 & 24 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 24 & 12 & 24 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 24 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در رابطه ی (۱۲)،  $\Delta^{(e)}$  مساحت سطح مثلثی واقع در مرز است. با حل تمام انتگرال های بالا و سپس سرهم بندی آنها، دستگاه معادلات به شکل معادله ی (۱۳) به دست می آید که با حل آن شار نوترون در هر گروه انرژی و ضریب تکثیر نوترونی مؤثر به دست می آید. دستگاه معادلات (۱۳) از نوع مقدار ویژه است و به روش تکرار قابل حل است.

(13)

$$A \phi = \frac{1}{k_{eff}} B \phi$$

۳.۲ تئوری اختلال  
 در این مقاله، پارامترهای سینتیکی با روش مبتنی بر نظریه ی اختلال مرتبه ی اول محاسبه می شوند. این روش که نیازمند شار نوترونی و الحاقی، طیف نوترون های آبی و تأخیری، سرعت نوترون و داده ی کسر نوترون تأخیری در هر گروه انرژی است، روش نسبتاً دقیق و دارای خطای بسیار کمی است. استفاده از نظریه ی اختلال برای محاسبه ی عمر متوسط نوترون های آبی،



(۲۰)

$$\left[ \frac{1}{\nu} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\nu_1} [I] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \frac{1}{\nu_2} [I] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & \frac{1}{\nu_G} [I] \end{bmatrix}$$

که معادله‌ی (۲۰)، ماتریس عکس سرعت را نشان می‌دهد. ماتریس مربوط به سهم نوترون‌های تأخیری حاصل از شکافت به صورت معادله‌ی (۲۱) است.

$$\mathbf{M}_d = \beta_d \begin{bmatrix} [\chi_{d1} \nu_1 \Sigma_{f1}^i] & [\chi_{d1} \nu_1 \Sigma_{f2}^i] & [\chi_{d1} \nu_1 \Sigma_{f3}^i] & \dots & [\chi_{d1} \nu_G \Sigma_{fG}^i] \\ [\chi_{d2} \nu_1 \Sigma_{f1}^i] & [\chi_{d2} \nu_1 \Sigma_{f2}^i] & [\chi_{d2} \nu_1 \Sigma_{f3}^i] & \dots & [\chi_{d2} \nu_G \Sigma_{fG}^i] \\ [\chi_{d3} \nu_1 \Sigma_{f1}^i] & [\chi_{d3} \nu_1 \Sigma_{f2}^i] & [\chi_{d3} \nu_1 \Sigma_{f3}^i] & \dots & [\chi_{d3} \nu_G \Sigma_{fG}^i] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\chi_{dG} \nu_1 \Sigma_{f1}^i] & [\chi_{dG} \nu_1 \Sigma_{f2}^i] & [\chi_{dG} \nu_1 \Sigma_{f3}^i] & \dots & [\chi_{dG} \nu_G \Sigma_{fG}^i] \end{bmatrix} \quad (21)$$

در آن،  $\chi_{di}$ ، بیان‌کننده‌ی مؤلفه‌های طیف نوترون‌های تأخیری می‌باشد. هم‌چنین ماتریس مربوط به سهم نوترون‌های آنی حاصل از شکافت به صورت معادله‌ی (۲۲) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{M}_p = (1 - \beta) \begin{bmatrix} [\chi_1 \nu_1 \Sigma_{f1}^i] & [\chi_1 \nu_1 \Sigma_{f2}^i] & [\chi_1 \nu_1 \Sigma_{f3}^i] & \dots & [\chi_1 \nu_G \Sigma_{fG}^i] \\ [\chi_2 \nu_1 \Sigma_{f1}^i] & [\chi_2 \nu_1 \Sigma_{f2}^i] & [\chi_2 \nu_1 \Sigma_{f3}^i] & \dots & [\chi_2 \nu_G \Sigma_{fG}^i] \\ [\chi_3 \nu_1 \Sigma_{f1}^i] & [\chi_3 \nu_1 \Sigma_{f2}^i] & [\chi_3 \nu_1 \Sigma_{f3}^i] & \dots & [\chi_3 \nu_G \Sigma_{fG}^i] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\chi_G \nu_1 \Sigma_{f1}^i] & [\chi_G \nu_1 \Sigma_{f2}^i] & [\chi_G \nu_1 \Sigma_{f3}^i] & \dots & [\chi_G \nu_G \Sigma_{fG}^i] \end{bmatrix} \quad (22)$$

(۲۲)

(۲۳)

$$M = M_p + \sum_{d=1}^D M_d$$

$\chi_i$ ، بیان‌کننده‌ی مؤلفه‌های طیف نوترون‌های آنی است.

در نتیجه:

(۲۴)

$$\beta_{eff,d} = \frac{\phi M_d \phi^\dagger}{\phi M \phi^\dagger}, \quad \beta_{eff} = \sum_{d=1}^D \beta_{eff,d}$$

و

منجر به معادله‌ی زیر می‌شود [۱۰-۱۳]:

$$\ell = \frac{\sum_i V_i \sum_n \phi_{i,n}^* \phi_{i,n}}{\frac{1}{k} \sum_i V_i \sum_g \chi(g) \phi_{i,g}^* \sum_n \nu \sum_{f,n} \phi_{i,n}} \quad (17)$$

با دانستن عمر نوترون‌های آنی، زمان تولید نوترون‌ها از معادله‌ی (۱۸) به دست می‌آید:

(۱۸)

$$\Lambda = \frac{\ell}{k}$$

استفاده از نظریه‌ی اختلال برای دست آوردن کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری برای خانواده‌ی لازم، منجر به معادله‌ی (۱۹) می‌شود:

$$\beta_{eff,j} = \frac{\sum_i V_i \sum_g \chi'(j,g) \phi_{i,g}^* \sum_b \beta_{b,j} N_{b,i} \sum_n \nu \sigma_{f,n,b,i} \phi_{i,n}}{\sum_i V_i \sum_g \chi(g) \phi_{i,g}^* \sum_n \nu \sum_{f,n} \phi_{i,n}} \quad (19)$$

که در آن  $i$  به مکان،  $V$  به حجم،  $g$  و  $n$  به گروه‌های انرژی،  $\phi$  به شار و  $\phi^*$  به شار الحاقی اشاره دارد. هم‌چنین،  $\beta_{b,j}$  کسر نوترون‌های تأخیری گروه  $j$  در مکان  $i$  و برای هسته‌ی  $b$  است.  $N_{b,i}$  چگالی هسته‌ی  $b$  در مکان  $i$  و  $\chi'(j,g)$  تابع توزیع نوترون‌های تأخیری را نشان می‌دهد.

با گسسته‌سازی معادلات (۲۰) و (۲۱) و جفت کردن کدهای تولید شده در مرجع [۷]، برای محاسبه‌ی شار نوترونی و الحاقی و روابط زیر، کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری و زمان تولید نوترون‌ها محاسبه می‌شوند:



از مجتمع‌های قلب راکتور Schulz می‌تواند در مرجع [۱۴] یافت شود.

مقدار ضریب تکثیر نوترون مؤثر محاسبه شده از روش مستقیم و الحاقی برای تعداد المان‌های ۴۴۰۰۶، ۷۵۰۴۰ و ۱۷۱۹۶۴ به ترتیب برابر ۱،۰۴۸۲۵، ۱،۰۴۸۹۳ و ۱،۰۴۹۰۶ است که خطای نسبی محاسبه شده در مقایسه با مقدار مرجع ۱،۰۴۹۵۲ به ترتیب برابر ۰،۱۲۱۰-، ۰،۰۵۶۲- و ۰،۰۴۳۸- است. با افزایش تعداد المان‌ها، اختلاف بین مقدار ضریب تکثیر نوترون محاسبه شده و مقدار مرجع کم می‌شود. در جدول ۱، قدرت نسبی محاسبه شده با کد توسعه داده شده GFEM-3D در هر لایه از هر یک از مجتمع‌های سوخت ارائه شده است. در این جدول، قدرت نسبی متوسط‌گیری شده در راستای محوری با مقادیر مرجع مقایسه، و خطای نسبی بین مقادیر محاسبه شده و مرجع ارائه شده است.

همان‌طور که از مقدار محاسبه شده برای ضریب تکثیر مؤثر نوترونی و نتایج ارائه شده در جدول ۱ مشخص است، نتایج محاسبه شده در کار فعلی هم‌خوانی بسیار خوبی با مقادیر مرجع دارند.

(۲۵)

$$\Lambda = \frac{\phi V^{-1} \phi^\dagger}{\phi M \phi^\dagger}$$

در روابط بالا،  $\phi$  و  $\phi^\dagger$  بردار شار و شار نوترونی،  $V^{-1}$  ماتریس معکوس سرعت نوترون،  $M_d$  ماتریس مربوط به نوترون‌های تأخیری و  $M$  ماتریس مربوط به هر دو مجموعه نوترون‌های آنی و تأخیری است.

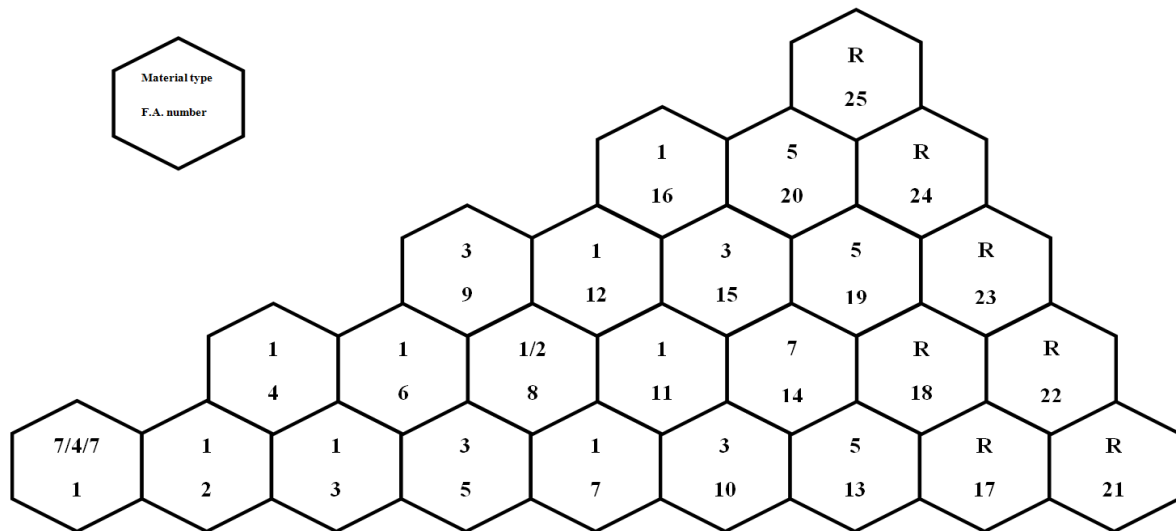
### ۳. نتایج

#### ۱.۳ نتایج مربوط به حل معادله‌ی پخش نوترون

در این قسمت، نتایج به دست آمده از حل معادله‌ی پخش نوترونی چندگروهی و الحاقی آن در سه بُعد برای مسئله‌ی آزمون معتبر Schulz ارائه می‌شود.

محک [۷] Schulz، یک مدل قلب راکتور VVER-۱۰۰۰

در حالت ایستا است. قلب راکتور از ۷ نوع ماده شامل سوخت با غناهای مختلف، میله‌های کنترل و جاذب قابل فرسایش و بازتابنده تشکیل شده است. ارتفاع قلب ۳۵۵cm است که بازتابنده‌های شعاعی و محوری آن را فرا گرفته است. گام شبکه مجتمع‌های سوخت ۲۴/۱cm است. در شکل ۲، تقارن ۳۰ درجه از قلب راکتور Schulz نشان داده شده است. مشخصات هر یک



شکل ۲. شمایی از قلب راکتور Schulz با تقارن ۳۰ درجه (نما از بالای قلب راکتور).

جدول ۱. توان نسبی در هر یک از مجتمع‌های سوخت قلب راکتور Schulz

لایه‌ها													
درصد خطای	توان نسبی مرجع	توان نسبی متوسط	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	مجتمع



نسبی													
۰,۱۷۸۶	۱,۱۱۹۹	۱,۱۲۱۹	۰,۱۵۸	۰,۳۶۱	۰,۴۶۹	۰,۷۰۳	۱,۰۵۲	۱,۴۶۵	۱,۸۳۸	۲,۳۶۹	۱,۹۱۴	۰,۸۹۱	۱
-۰,۶۵۴۴	۰,۹۴۷۵	۰,۹۴۱۳	۰,۱۱۳	۰,۲۶۸	۰,۴۲۶	۰,۶۵۲	۰,۹۸۵	۱,۳۹۴	۱,۷۱۲	۱,۷۹۸	۱,۴۱۱	۰,۶۵۴	۲
-۱,۱۰۴۸	۱,۰۱۳۸	۱,۰۰۲۶	۰,۱۰۴	۰,۲۵۸	۰,۴۳۷	۰,۶۷۵	۱,۰۴۰	۱,۵۶۹	۱,۹۲۵	۱,۹۰۰	۱,۴۵۱	۰,۶۶۸	۳
-۰,۸۱۴۶	۰,۹۸۲۱	۰,۹۷۴۱	۰,۱۰۵	۰,۲۵۸	۰,۴۳۳	۰,۶۷۰	۱,۰۳۰	۱,۵۰۹	۱,۸۴۳	۱,۸۳۵	۱,۴۰۹	۰,۶۴۹	۴
-۲,۶۷۶۹	۱,۳۱۱۲	۱,۲۷۶۱	۰,۱۱۷	۰,۲۹۳	۰,۵۰۶	۰,۷۸۱	۱,۰۰۷	۲,۱۰۰	۲,۶۱۷	۲,۵۴۲	۱,۹۱۸	۰,۸۸۰	۵
-۰,۸۷۰۳	۱,۰۵۷۱	۱,۰۴۷۹	۰,۰۹۹	۰,۲۴۸	۰,۴۲۶	۰,۶۶۳	۱,۰۴۹	۱,۶۷۷	۲,۰۷۰	۲,۰۱۹	۱,۵۲۸	۰,۷۰۱	۶
-۰,۱۵۰۹	۱,۰۶۰۳	۱,۰۵۸۷	۰,۱۰۰	۰,۲۵۲	۰,۴۳۸	۰,۶۸۴	۱,۰۷۴	۱,۷۲۴	۲,۰۹۷	۲,۰۱۵	۱,۵۱۲	۰,۶۹۱	۷
-۰,۱۷۸۴	۱,۰۰۹۱	۱,۰۱۰۹	۰,۰۷۸	۰,۱۹۵	۰,۳۳۸	۰,۵۲۹	۰,۸۵۹	۱,۷۰۷	۲,۱۱۹	۲,۰۴۵	۱,۵۳۷	۰,۷۰۳	۸
۰,۰۵۳۳	۱,۳۱۳۵	۱,۳۱۴۲	۰,۱۱۹	۰,۲۹۹	۰,۵۱۹	۰,۸۱۹	۱,۳۱۸	۲,۱۳۹	۲,۶۲۰	۲,۵۳۱	۱,۹۰۴	۰,۸۷۳	۹
۰,۳۷۶۲	۱,۲۴۹۵	۱,۲۵۴۲	۰,۱۴۰	۰,۳۵۴	۰,۶۱۶	۰,۹۶۴	۱,۴۴۷	۲,۰۱۴	۲,۳۴۴	۲,۲۳۲	۱,۶۶۸	۰,۷۶۲	۱۰
۰,۳۳۳۹	۱,۰۴۸۱	۱,۰۵۱۶	۰,۱۱۰	۰,۲۷۸	۰,۴۸۴	۰,۷۵۸	۱,۱۶۰	۱,۷۰۱	۲,۰۱۱	۱,۹۲۱	۱,۴۳۷	۰,۶۵۶	۱۱
۰,۴۲۲۷	۱,۰۴۰۹	۱,۰۴۵۳	۰,۱۰۷	۰,۲۶۹	۰,۴۶۸	۰,۷۳۶	۱,۱۴۰	۱,۶۹۳	۲,۰۱۳	۱,۹۲۶	۱,۴۴۲	۰,۶۵۹	۱۲
۰,۶۵۸۹	۰,۶۹۸۱	۰,۷۰۲۷	۰,۰۸۳	۰,۲۰۹	۰,۳۶۵	۰,۵۷۰	۰,۸۳۹	۱,۱۲۵	۱,۲۸۸	۱,۲۲۱	۰,۹۱۱	۰,۴۱۶	۱۳
۰,۵۴۵۴	۱,۰۴۵۲	۱,۰۵۰۹	۰,۱۲۳	۰,۳۰۹	۰,۵۳۹	۰,۸۴۲	۱,۲۴۵	۱,۶۸۴	۱,۹۳۵	۱,۸۳۶	۱,۳۷۰	۰,۶۲۷	۱۴
۰,۵۵۶۱	۱,۱۵۰۸	۱,۱۵۷۲	۰,۱۳۴	۰,۳۳۸	۰,۵۸۹	۰,۹۲۰	۱,۳۶۵	۱,۸۵۶	۲,۱۳۷	۲,۰۲۹	۱,۵۱۴	۰,۶۹۲	۱۵
۰,۵۳۰۰	۰,۹۴۳۴	۰,۹۴۸۴	۰,۱۰۹	۰,۲۷۶	۰,۴۸۱	۰,۷۵۲	۱,۱۱۸	۱,۵۲۱	۱,۷۵۳	۱,۶۶۴	۱,۲۴۳	۰,۵۶۷	۱۶
۰,۰۰۷۵	۰,۶۱۶۱	۰,۶۲۰۷	۰,۰۷۵	۰,۱۸۹	۰,۳۳۰	۰,۵۱۳	۰,۷۴۹	۰,۹۹۳	۱,۱۲۹	۱,۰۶۸	۰,۷۹۶	۰,۳۶۴	۱۹
۰,۷۸۶۲	۰,۷۶۳۱	۰,۷۶۹۱	۰,۰۹۳	۰,۲۳۵	۰,۴۰۹	۰,۶۳۷	۰,۹۲۹	۱,۲۳۰	۱,۳۹۸	۱,۳۲۲	۰,۹۸۶	۰,۴۵۰	۲۰

گروه‌های انرژی ۱ تا ۶، به ترتیب برابر ۰,۰۰۰۲، ۰,۰۰۱۴، ۰,۰۰۱۳، ۰,۰۰۲۶، ۰,۰۰۰۸ و ۰,۰۰۰۳ است.

### مسئله ۲:

راکتور تحقیقاتی تهران با آرایش قلب شماره ۱ نشان داده شده در شکل ۳ در نظر گرفته می‌شود. در این شکل مجتمع‌های A بیان‌کننده‌ی مجتمع‌های سوخت  $SFE^{(1)}$ ، مجتمع‌های AS بیان‌کننده‌ی مجتمع‌های  $CFE^{(2)}$  و بقیه مجتمع‌ها نشان‌دهنده‌ی سیال آب هستند. ابعاد مجتمع‌های سوخت ۷,۷۰۸۹ cm در راستای x و ۸,۱ cm در راستای y است. در اطراف قلب راکتور (شکل ۳) سه لایه‌ی بازتابنده‌ی آب قرار گرفته است. سطح مقطع ماکروسکوپی استفاده شده در محاسبات به صورت جدول ۲ است.

محاسبات قلب راکتور در سه گروه انرژی با فرض اطلاعات داده شده در جدول ۲ انجام شد. برای محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی، کسر نوترون‌های تأخیری استفاده شده در گروه‌های ۱ تا ۶، به ترتیب برابر ۰,۰۰۰۲۱۵، ۰,۰۰۱۴۲۴، ۰,۰۰۱۲۷۴، ۰,۰۰۰۷۴۸ و ۰,۰۰۰۲۵۶۸، ۰,۰۰۰۷۴۸ و ۰,۰۰۰۲۷۳ pcm در نظر گرفته شده است. طیف انرژی آنی در گروه‌های انرژی ۱ تا ۳ به ترتیب برابر ۰,۷۴۵۲۷۹، ۰,۲۵۴۷۲۱ و ۰,۰۰۰۰۰۱ در نظر گرفته شده است. هم‌چنین، طیف انرژی

### ۲.۳ نتایج مربوط به محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی

متأسفانه مسئله‌ی آزمونی که دربرگیرنده‌ی تمام اطلاعات ورودی از جمله طیف نوترون‌های تأخیری و داده‌های مربوط به نوترون‌های تأخیری باشد وجود نداشت. بنابراین دو مثال تولید شده که نتایج آن در زیر ارائه می‌شوند. با توجه به این که در قسمت قبلی، صحت محاسبات شار نوترونی و الحاقی تأیید شده است، بنابراین می‌توان گفت که در صورت وجود داده‌ی دقیق، پارامترهای سینتیکی با دقت خوبی قابل محاسبه است.

### مسئله ۱:

برای قلب راکتور Schulz، فرض می‌شود مؤلفه‌ی طیف آنی و تأخیری در گروه سریع به ترتیب برابر ۰,۹۹، ۰,۹۵ و در گروه حرارتی به ترتیب برابر ۰,۰۱، ۰,۰۵ باشد. هم‌چنین سرعت نوترون‌ها در گروه سریع و حرارتی به ترتیب برابر ۱۸۲۳۰۰۰ و ۴۱۳۰۶۷ cm/s در نظر گرفته می‌شود. با فرض کسر نوترون‌های تأخیری در گروه‌های ۱ تا ۶ که به ترتیب برابر ۰,۰۰۰۲۱۵، ۰,۰۰۱۴۲۴، ۰,۰۰۱۲۷۴، ۰,۰۰۰۲۵۶۸ و ۰,۰۰۰۷۴۸ و ۰,۰۰۰۲۷۳ pcm باشد، محاسبات پارامترهای سینتیکی انجام می‌شود. زمان متوسط تولید نوترون‌های محاسبه شده برابر ۰,۰۳۴۷۸۷ s و کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری محاسبه شده در



و عدم قطعیت‌های موجود در آن مربوط به خطای احتمالی در داده‌های ورودی است.

	AS33-RR	A61	A120	
A140	A63	AS25-SR2	A66	A126
A106	AS24-SR1	A100	AS29-SR3	A116
A150	A75	AS22-SR4	A102	
	A133	A115		

شکل ۳. شمایی از آرایش شماره‌ی ۱ قلب راکتور تهران.

تأخیری در گروه‌های انرژی ۱ تا ۳ به ترتیب برابر  $۰,۲۸۹۲۶۹$ ،  $۰,۳۴۵۲۴۷$  و  $۰,۳۶۵۴۸۴$  در نظر گرفته شده است. سرعت فرضی برای نوترون‌ها در گروه‌های انرژی ۱ تا ۳ به ترتیب برابر  $۱,۸۲۳۰۴ \times 10^7$ ،  $۱,۰ \times 10^7$  و  $۲,۲ \times 10^5$  m/s است.

با در نظر گرفتن اطلاعات بالا، کسر نوترون‌های تأخیری مؤثر محاسبه شده و مدت زمان تولید نوترون‌ها به ترتیب برابر  $۰,۰۰۸۱$  pcm و  $۶۱,۰۹$   $\mu$ s حاصل شده است. این نتایج در محدوده‌ی نتایج گزارش شده برای قلب راکتور تحقیقاتی تهران،

جدول ۲. مشخصات مجتمع‌های تشکیل‌دهنده قلب راکتور تهران

شماره ماده	گروه	$D_g$ (cm)	$\Sigma_g^a$ (cm <sup>-1</sup> )	$\Sigma_{p \rightarrow g}^s$ (cm <sup>-1</sup> )	$\Sigma_{r \rightarrow g}^s$ (cm <sup>-1</sup> )	$\Sigma_{1 \rightarrow g}^s$ (cm <sup>-1</sup> )	$v\Sigma_g^f$ (cm <sup>-1</sup> )
SFE	۱	۲,۵۳۳۸۴	۰,۰۰۱۰۸	۰,۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰	۰,۱۳۳۶۴	۰,۱۶۳۳۳
	۲	۰,۹۱۱۵۹	۰,۰۰۶۸۳	۰,۰۰۰۴۵	۰,۷۰۸۴۸	۰,۰۷۰۱۱	۰,۰۰۵۹۹
	۳	۰,۲۵۸۸۸	۰,۰۹۴۷۲	۱,۷۱۹۱۱	۰,۰۳۶۶۸	$۱,۸۲۳۰۴ \times 10^{-14}$	۰,۱۶۷۳۹
CFE	۱	۲,۴۶۱۰۲	۰,۰۰۰۸۷	۰,۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰	۰,۱۳۶۷۸	۰,۰۰۱۱۷
	۲	۰,۸۵۵۰۹	۰,۵۸۷۵۴	۰,۰۰۰۴۳	۰,۷۵۴۱۳	۰,۰۷۶۷۷	۰,۰۰۴۶۲
	۳	۰,۲۴۳۶۹	۰,۰۷۳۸۲	۱,۸۴۶۳۲	۰,۰۴۰۰۰	$۱,۳۶۹۵۴ \times 10^{-14}$	۰,۱۲۳۶۵
H <sub>2</sub> O	۱	۲,۳۱۲۸۷	۰,۰۰۰۵۱	۰,۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰	۰,۱۵۷۰۰	۰,۰۰۰۰۰
	۲	۰,۶۲۷۳۹	۰,۰۰۰۵۸	۰,۰۰۰۱۱	۱,۱۴۲۷۸	۰,۱۰۶۵۹	۰,۰۰۰۰۰
	۳	۰,۱۴۶۹۹	۰,۰۱۸۸۵	۳,۱۴۰۶۷	۰,۰۸۶۸۱	۰,۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰

پی‌نوشت‌ها

1. Standard Fuel Element
2. Control Fuel Element

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، پارامترهای سینتیکی کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری و مدت زمان تولید نوترون‌ها با استفاده از کد کامپیوتری توسعه داده شده GFEM-KIN-3D برای مسائل مختلف محاسبه شده‌اند. از آن‌جا که درستی محاسبات شار نوترونی و الحاقی در بخش اول این مقاله مورد تأیید قرار گرفت، با پیاده‌سازی دقیق روابط مربوط به محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی، می‌توان از صحت محاسبات اطمینان پیدا کرد. از آن‌جا که کد کامپیوتری تجاری مشابهی وجود ندارد تا بتواند با استفاده از سطح مقطع‌های ماکروسکوپی، پارامترهای سینتیکی را محاسبه کند، در این مقاله فقط نتایج ارائه شدند و در صورت وجود اطلاعات مربوط به کسر نوترون‌های تأخیری، پارامترهای سینتیکی با دقت کافی محاسبه می‌شوند. کد توسعه داده شده در مقاله فعلی، می‌تواند به عنوان یک ابزار مناسب به منظور محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی در قلب راکتورهای هندسی با هر نوع شکل هندسی از جمله شش‌گوش و چهارضلعی استفاده شوند.





## مراجع

- [5] M. Arkani, M. Hassanzadeh, S. Khakshournia, Calculation of six-group importance weighted delayed neutron fractions and prompt neutron lifetime of MTR research reactors based on Monte Carlo method, *Prog. Nucl. Energy.* **88** (2016) 352-363.
- [6] S.A. Hosseini, one dimensional neutron diffusion solver based on the Galerkin Finite Element Method, ANCC, (2008), ANC-RPT-DES-FG-100-Rev.01 (In Persian).
- [7] S.A. Hosseini, Two dimensional neutron diffusion solver based on the Galerkin Finite Element Method, ANCC, (2008), ANC-RPT-DES-FG-200-Rev.01 (In Persian).
- [8] J.J. Duderstadt, L.J. Hamilton, Nuclear reactor analysis, Wiley New York, **1** (1976).
- [9] Taylor RL, Zhu JZ. The finite element method: its basis and fundamentals. Elsevier Butterworth-Heinemann (2005).
- [10] J.R. Lamarsh, Nuclear Reactor Theory, Addison-Wesley (1966).
- [11] S.A. Hosseini, N. Vosoughi, M.B. Ghofrani, M. Gharib, Calculation, measurement and sensitivity analysis of kinetic parameters of Tehran Research Reactor, *Ann. Nucl. Energy.* **37** (2010) 463-470.
- [12] S.A. Hosseini, N. Vosoughi, Uncertainty evaluation of calculated and measured kinetics parameters of Tehran Research Reactor. *Nucl. Eng. and Des.* **240** (2010) 2761-2767.
- [1] E. Villarino, MTR\_PC V2. 6, a neutronic, thermalhydraulic and shielding calculations of MTR-type reactors on personal computers. Nuclear Engineering Division, INVAP SE, San Carlos de Bariloche, Argentina (1995).
- [2] M. Zaker, Effective delayed neutron fraction and prompt neutron lifetime of Tehran research reactor, *Ann. Nucl. Energy.* **30** (2003) 1591-1596.
- [3] A. Lashkari, H. Khalafi, H. Kazeminejad, Effective delayed neutron fraction and prompt neutron lifetime of Tehran research reactor mixed-core, *Ann. Nucl. Energy.* **55** (2013) 265-271.
- [4] J.S. Hendricks, G.W. McKinney, M.L. Fensin, M.R. James, R.C. Johns, J.W. Durkee, MCNPX 2.6.0 Extensions, Los Alamos National Laboratory (2008).
- [13] S.A. Hosseini, N. Vosoughi, M. Hosseini, Monte Carlo simulation of Feynman- $\alpha$  and Rossi- $\alpha$  techniques for calculation of kinetic parameters of Tehran Research Reactor, *Ann. Nucl. Energy.* **38** (2011) 2140-2145.
- [14] G. Schulz, Solutions of a 3D VVER-1000 Benchmark, Proc. 6-th symposium of AER on VVER reactor physics and safety, Kirkkonummi, Finland (1996).

