

بررسی نظری رفتار سالیتون‌های یون صوتی در مختصات کروی در یک پلاسمای دو دمایی

مهزاد نظام، اکبر نظری گلشن*

گروه فیزیک، دانشگاه شاهد، صندوق پستی: ۱۵۹-۱۸۱۵۵، تهران - ایران

مقاله‌ی پژوهشی

تاریخ دریافت مقاله: ۹۷/۲/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۸/۲۸

چکیده: این مقاله ویژگی‌های انتشار امواج سالیتوری یون صوتی دامنه کوچک را در پلاسمای شامل یون‌های سیال سرد و الکترون‌های چند دمایی (الکترون‌های سرد و گرم)، با توزیع محدود مورد بررسی قرار می‌دهد. ابتدا یک مجموعه معادله‌ی سیالی در مختصات کروی برای پلاسمای فوق نوشته شد و سپس با به کارگیری روش اختلال کاهش یافته، معادله‌ی کورتوگ- دو وریس که دارای جواب سالیتونی است، در مختصات کروی به دست آمد. معادله‌ی کورتوگ- دو وریس به دست آمده با استفاده از روش اختلال هموتوپی حل شد. هم‌چنین اثر پارامترهایی چون تراکم الکترون‌ها، نسبت چگالی الکترون‌ها به یون‌ها و نسبت دما بر روی خصوصیت‌های ساختار سالیتونی یون صوتی مورد بررسی قرار گرفت. برخی از نتیجه‌های به دست آمده نشان داد که همراه با کاهش در تراکم الکترون‌ها، پهنای سالیتون‌ها افزایش پیدا می‌کند و موج به سمت مثبت (پیش‌رونده) حرکت می‌نماید. از لحاظ فیزیکی، دلیل این واقعیت این است که در اثر کاهش پارامتر تراکم، q ، ضریب غیرخطی معادله‌ی کورتوگ- دو وریس کاهش، و به همین دلیل پهنای سالیتون افزایش می‌یابد.

کلیدواژه‌ها: سالیتون، امواج یون صوتی، پلاسمای چند دمایی، معادله‌ی کورتوگ- دو وریس، روش اختلال هموتوپی

Theoretical investigation of the behavior of spherical ion- acoustic solitons in two-temperature plasma

M. Nezam, A. Nazari Golshan*

Physics Department, Shahed University, P.O.Box: 18155-159, Tehran - Iran

Abstract: The propagation of the small amplitude ion-acoustic solitary waves (IASWs) is studied in a plasma containing cold fluid ions and multi-temperature electrons (cool and hot electrons) with the nonextensive distribution. In this paper, we were firstly written a set of fluid equations in the spherical geometry. Then, spherical Korteweg-de Vries (KdV) equation was derived using a reductive perturbation method. The obtained spherical Korteweg-de Vries equation was solved using a homotopy perturbation method (HPM). Furthermore, the impact of the electron nonextensivity, the density ratio of electrons and ions and the temperature ratio on the characteristics of ion- acoustic solitary waves were studied. The analytical results show that a decrease in the electron nonextensivity increases the soliton ion- acoustic width. On the other word, it was observed that a reduction in the nonextensivity parameter increases the nonlinear coefficient of the KdV equation.

Keywords: Soliton, Ion- acoustic waves, Multi-temperature plasma, KdV equation, HPM

*Email: nazarigolshan@yahoo.com

۱. مقدمه

امواج سالیتونی دارای نوعی ساختار پایای غیرخطی هستند که حین انتشار در محیط، مشخصه‌های فیزیکی آن‌ها شامل شکل، پهنا و دامنه به خوبی حفظ می‌شود، این ساختار پایا حاصل تعادل بین اثرات پاشندگی و اثرات غیرخطی در یک محیط است.

در دهه‌های اخیر، پژوهش‌های گسترده‌ای به صورت تجربی و نظری بر روی انتشار امواج سالیتونی یون صوتی در چند محیط پلاسمای مختلف انجام شده است [۱-۵]. واشیمی و تانیوتی [۶] اولین بار با استفاده از روش اختلال کاهش یافته معادله‌ی کورتوگ- دو وریس^۱ (KdV) را به دست آوردند و در مورد دامنه‌ی کوچک امواج یون صوتی در پلاسمای نامغناطیده که شامل یون‌های سرد و گرم و الکترون‌های تک‌دما بود، پژوهش کردند. در ابتدا بیش‌تر پژوهش‌ها به دمای الکترون‌های منفرد برای مدل‌های مختلف پلازما محدود شده بود، که نتیجه‌ی این پژوهش‌ها منجر به شناسایی و پی بردن به وجود تعداد زیادی الکترون‌های سرد و گرم در سیاره‌ی کیوان شد [۷-۸]. پس از آن مطالعات ویژه‌ای بر روی امواج سالیتونی یون صوتی در پلاسمای دارای الکترون دو دمایی انجام شد. این مطالعات نشان داد که امواج یون صوتی در این پلازماها مانند دو سیال رفتار می‌کند. بوتی [۹] با استفاده از تحلیل شبه پتانسیل برای پلاسمای الکترون دو دمایی، حل سالیتونی آن را به دست آورد. پس از آن، آل تایبانی و تریبچ [۱۰]، امواج سالیتونی یون صوتی غیرخطی را در یک پلاسمای الکترون‌دهنده با الکترون‌های دارای توزیع تی‌سالیس^۲ (پارامتر متراکم q) بررسی کردند. آن‌ها تأثیرات نسبت چگالی یون منفی به مثبت، نسبت جرم یون مثبت به منفی و الکترون‌های متراکم را بر روی ویژگی‌های دامنه‌ی کوچک امواج سالیتونی یون صوتی بررسی کردند. این پارامترهای فیزیکی تأثیر قابل توجهی روی تغییر ساختار سالیتونی دامنه‌ی کوچک دارند. نظری گلشن [۱۱] اثر الکترون‌های محبوس و پارامتر کسری را بر انتشار امواج یون صوتی مورد بررسی قرار داد. او در پژوهش‌هایش به این نتیجه رسید که کاهش پارامتر کسری موجب افزایش دامنه‌ی امواج یون صوتی می‌شود.

علاوه بر موارد فوق، دانشمندان مشاهده کرده بودند که توزیع غیرگرمایی الکترون‌های داغ ممکن است روی ویژگی‌های امواج سالیتونی یون صوتی تأثیر بگذارد و وجود ساختار سالیتونی پتانسیل منفی بپذیرد. این مشاهده‌ها با نتیجه‌هایی که توسط ماهواره‌های فرجا^۳ و وایکینگ^۴ به دست آمده بود، مطابقت دارد [۱۲].

به جهت حضور گسترده‌ی الکترون‌های دو دمایی در فضا و کهکشان، این مقاله به بررسی خصوصیت‌های امواج سالیتونی یون صوتی در پلاسمای متشکل از الکترون‌های دو دمایی (سرد و گرم) با توزیع متراکم و یون‌های سیال سرد می‌پردازد. بسیاری از این پژوهش‌هایی که تاکنون انجام شده است در هندسه‌ی دکارتی بوده و طبیعتاً نتیجه‌های به دست آمده نیز براساس پارامترهای همان هندسه بیان شده است. بنابراین ممکن است براساس مدل هندسی در نظر گرفته شده در خروجی تجهیزها و ملزوم‌های آزمایشگاهی، نتیجه‌های استنباط شده از شبیه‌سازی قابل استفاده نباشد [۱۳]. به عبارت دیگر، ممکن است مدل هندسی به کار گرفته شده در استخراج نتیجه‌های شبیه‌سازی، آزمایشگاه و محیط‌های پلازما با یک‌دیگر همخوانی نداشته باشد. مانند: کپسول انفجار، لوله‌ی شوک، تشکیل ستارگان، انفجار ابر نواختر و ... به عنوان مثال ویلیام و همکاران [۱۴] به طور تجربی برخی مشخصه‌ها از قبیل دامنه و انرژی سالیتون‌ها را در مدل‌های هندسی دکارتی، استوانه‌ای و کروی مورد بررسی قرار داده و اندازه‌گیری نمودند. بنابراین اخیراً بررسی امواج سالیتونی در هندسه‌های دیگر مورد توجه دانشمندان زیادی قرار گرفته است.

هدف این مقاله بررسی امواج سالیتونی یون صوتی در مختصات کروی و در یک محیط پلاسمایی دو دمایی است. برای نیل به این هدف، ابتدا معادله‌های پایه در مختصات کروی نوشته شدند. سپس معادله‌ی KdV در مختصات کروی از معادله‌های پایه به دست آورده شده و با روش اختلال هموتوپیی، حل شد و در نهایت به تحلیل و بررسی نتیجه‌های آن پرداخته شد.

3. Freja
4. Viking

1. Korteweg-de Vries
2. Tsallis

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) = N_c + N_h - N_i \quad (6)$$

در رابطه‌های بالا، چگالی الکترون‌ها از یک تابع توزیع متراکم پیروی می‌نمایند [۱۵، ۱۶]:

$$N_c = f \left[1 + (q-1)\phi \right]^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$N_h = (1-f) \left[1 + \sigma(q-1)\phi \right]^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \quad (8)$$

که در این‌جا نسبت چگالی الکترون‌های سرد به چگالی یون‌ها را چگالی سرد نسبی، $f = \frac{N_{c0}}{N_{i0}}$ ، و نسبت دمای الکترون‌های

سرد به الکترون‌های گرم را دمای نسبی $\sigma = \frac{T_c}{T_h}$ می‌نامیم.

تغییر متغیر زمانی و مکانی زیر را انجام می‌دهیم [۱۰]:

$$\xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}} (r - VT) \quad (9)$$

$$\tau = \varepsilon^{\frac{1}{2}} T \quad (10)$$

در این‌جا V سرعت فاز موج سالیتون و ε پارامتر بسط است. حال متغیرها را به صورت زیر بسط می‌دهیم [۱۰]:

$$\begin{aligned} N_i &= 1 + \varepsilon N_i^{(1)} + \varepsilon^2 N_i^{(2)} + \dots \\ U_i &= \varepsilon U_i^{(1)} + \varepsilon^2 U_i^{(2)} + \dots \\ \phi &= \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

با اعمال تغییر متغیر در معادله‌های ۴ تا ۶ و انجام عملیات جبری، برای پایین‌ترین مرتبه‌ی ε ، عبارت‌های زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_i^{(0)} &= \frac{1}{V^2} \phi \\ U_i^{(0)} &= \frac{1}{V} \phi \\ N_i^{(0)} &= N_c + N_h - 1 \end{aligned} \quad (12)$$

۲. به دست آوری معادله‌ی KdV در مختصات کروی

یک مدل پلاسما شامل الکترون‌های دو دمایی (سرد و گرم) با توزیع متراکم و یون‌های سیال سرد در نظر می‌گیریم. برای این نوع پلاسما و برای امواج سالیتونی یون صوتی، معادله‌های بدون برخورد که از قضیه‌ی پایستگی تکانه و پواسون پیروی می‌کنند، در مختصات کروی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_i u_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) = 4\pi e (n_c + n_h - n_i) \quad (3)$$

در این‌جا $n_{j(c,h,i)}$ چگالی ذرات باردار است که در آن i, h, c به ترتیب برای حالت الکترون‌های سرد (c)، الکترون‌های گرم (h) و یون‌ها (i) است. ϕ پتانسیل الکتریکی، $u_{j(c,h,i)}$ سرعت سیال‌های الکترون‌های سرد، گرم و یون‌ها است و هم‌چنین $m_{j(c,h,i)}$ جرم‌های ذرات باردار (الکترون‌های سرد، گرم و یون‌ها) است.

برای مدل نمودن اثر پارامتر متراکم، q ، از تابع چگالی الکترون‌های متراکم استفاده می‌نماییم [۱۵، ۱۶].

$$n_e = n_{e0} \left(1 + (q-1) \frac{e\phi}{T_e} \right)^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}}$$

با به کارگیری رابطه‌ی بالا و تعریف پارامترهای $C_s = \left(\frac{T_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}$ ،

$$\varphi = \frac{e\phi}{T_e}, N_j = \frac{n_j}{n_{j0}}, X = \frac{x}{\lambda_{De}}, T = \omega_{pi} t, U_j = \frac{u_j}{C_s}$$

$$\lambda_{De} = \left(\frac{T_e}{4\pi e^2 n_{i0}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ و } \omega_{pi} = \left(\frac{4\pi e^2 n_{i0}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}$$

که در آن‌ها، λ_{De} و ω_{pi} چگالی ۱ تا ۳ چگالی به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 N_i U_i) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

عبارت $\frac{1}{\tau} \phi$ به دلیل این که معادله‌ی (۱۵) در زمان‌های طولانی مورد بررسی قرار می‌گیرد، بسیار کوچک شده و می‌توان از آن صرف‌نظر نمود.

۳. حل معادله به روش اختلال هموتوبی

چندین روش نیمه‌تحلیلی برای حل معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی به کار گرفته می‌شود که از آن جمله می‌توان به روش تجزیه‌ی آدومین^۱ [۱۱، ۱۷-۲۰]، روش اختلال هموتوبی^۲ [۲۱-۲۳] و روش تکرار وردشی^۳ [۲۴] اشاره نمود. در این مقاله، معادله‌ی KdV به دست آمده با استفاده از روش اختلال هموتوبی حل و جواب‌های سالیتونی این معادله به دست آمد.

روش اختلال هموتوبی نخستین بار توسط جی-هوان هی^۴ ریاضی‌دان چینی ارائه شد. این روش بر پایه‌ی معرفی پارامتری مانند $0 \leq p \leq 1$ است. هنگامی که $p = 0$ ، معادله‌ها به صورت ساده‌ای در می‌آیند. اما هنگامی که p به سمت ۱ میل کند، سیستم به صورت دنباله‌ای از تغییر شکل‌ها با جواب‌های نزدیک به هم در می‌آید. هم‌چنین برای $p = 1$ سیستم شکل اصلی معادله را به خود می‌گیرد و سرانجام جواب معادله به دست می‌آید. یکی از ویژگی‌های مهم اختلال هموتوبی آن است که معمولاً تعداد کمی از جمله‌های اختلال برای رسیدن به جواب دقیق کفایت می‌کند.

برای روشن شدن مفهوم روش هموتوبی، معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A(u) - f(r) = 0 \quad r \in \Omega \quad (18)$$

با شرط مرزی

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0 \quad r \in \Gamma \quad (19)$$

که در آن A یک عملگر عمومی دیفرانسیل، B عملگر مرزی بر مرز Γ از ناحیه Ω و $f(r)$ یک تابع تحلیلی معلوم است.

حاصل اولین مرتبه‌ی ریشه‌ی معادله‌های به دست آمده، سرعت فاز خطی است:

$$V = \sqrt{\frac{r}{(q+1)[f+(1-f)\sigma]}} \quad (13)$$

هم‌چنین برای مرتبه‌ی \mathcal{E}^r معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \tau} - V \frac{\partial N_i^r}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} [U_i^r + N_i U_i] + \frac{r}{V \tau} U_i &= 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial \tau} - V \frac{\partial U_i^r}{\partial \xi} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^r}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial^r \phi}{\partial \xi^r} = N_i^r + \alpha \phi + \beta \phi^r & \end{aligned} \quad (14)$$

در معادله‌های بالا، $\alpha = \frac{q+1}{r} [f+(1-f)\sigma]$ و $\beta = [f+(1-f)\sigma]^r \frac{(q+1)(r-q)}{\lambda}$ هستند.

با حذف دومین مرتبه‌ی مقادیر در معادله‌های ۱۴ و انجام عملیات جبری، معادله‌ی KdV در مختصات کروی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \phi + B \frac{\partial^r \phi}{\partial \xi^r} + A \phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0 \quad (15)$$

که در آن A ضریب غیرخطی و B ضریب پاشندگی هستند:

$$A = \frac{r}{rV} - \frac{r[f+(1-f)\sigma]^r \frac{(q+1)(r-q)}{\lambda}}{\frac{q+1}{r} [f+(1-f)\sigma]} \quad (16)$$

$$B = \frac{1}{\frac{q+1}{r} [f+(1-f)\sigma]} \quad (17)$$

1. Adomian Decomposition Method (ADM)
2. Homotopy Perturbation Method (HPM)
3. Variational Iteration Method (VIM)
4. Ji-Huan He

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + p \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + p^r \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + Bp \frac{\partial^r u_0}{\partial \xi^r} + p^r B \frac{\partial^r u_1}{\partial \xi^r} + p^r B \frac{\partial^r u_r}{\partial \xi^r} \\ & + Apu_0 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + Au_0 p^r \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + Au_0 p^r \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + Ap^r u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \\ & + Ap^r u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + Ap^r u_1 \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + Ap^r u_r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + Ap^r u_r \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

اکنون ضریب‌های p^0 و p^1 و p^r و ... را جداسازی می‌نماییم.

$$\begin{aligned} p^0 : \frac{\partial u_0}{\partial \tau} &= 0, \\ p^1 : \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + B \frac{\partial^r u_0}{\partial \xi^r} + Au_0 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} &= 0, \\ p^r : \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + B \frac{\partial^r u_1}{\partial \xi^r} + Au_0 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + Au_1 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} &= 0, \\ p^r : \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + B \frac{\partial^r u_r}{\partial \xi^r} + Au_0 \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + Au_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + Au_r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} &= 0, \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{aligned} \quad (25)$$

از حل معادله‌ی فوق با مقدار اولیه‌ی $\frac{f\phi_0 e^{\frac{r\xi}{A}}}{(e^{\frac{r\xi}{A}} + 1)^r}$ با استفاده از نرم‌افزار مپیل^۱، جواب‌های زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{f\phi_0 e^{\frac{r\xi}{A}}}{(e^{\frac{r\xi}{A}} + 1)^r}, \\ u_1 &= \frac{\lambda\phi_0 e^{\frac{r\xi}{A}} (e^{\frac{r\xi}{A}} - 1)u\tau}{\Delta(e^{\frac{r\xi}{A}} + 1)^r}, \\ u_r &= \frac{\lambda\phi_0 e^{\frac{r\xi}{A}} (e^{\frac{r\xi}{A}} - fe^{\frac{r\xi}{A}} + 1)u^r\tau^r}{\Delta^r(e^{\frac{r\xi}{A}} + 1)^r}, \\ u_r &= \frac{16\phi_0 e^{\frac{r\xi}{A}} (e^{\frac{r\xi}{A}} - 1)e^{\frac{r\xi}{A}} + 1e^{\frac{r\xi}{A}} - 1)u^r\tau^r}{r\Delta^r(e^{\frac{r\xi}{A}} + 1)^r}, \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{aligned} \quad (26)$$

عملگر A را می‌توان به دو بخش خطی L و غیرخطی N تجزیه نمود. در این صورت معادله‌ی دیفرانسیل ۱۸ به شکل زیر در می‌آید:

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (20)$$

با جاگذاری یک پارامتر p در ضریب غیرخطی معادله داریم:

$$L(u) + pN(u) - f(r) = 0 \quad (21)$$

معادله‌ی بالا را یک معادله‌ی اختلال با پارامتر ساختگی p می‌نامیم؛ با استفاده از این پارامتر می‌توان معادله را مانند یک سری توان‌دار از p نوشت. یعنی:

$$\phi = \sum_{i=0}^n u_i p^i = u_0 + pu_1 + p^r u_r + p^r u_r + \dots \quad (22)$$

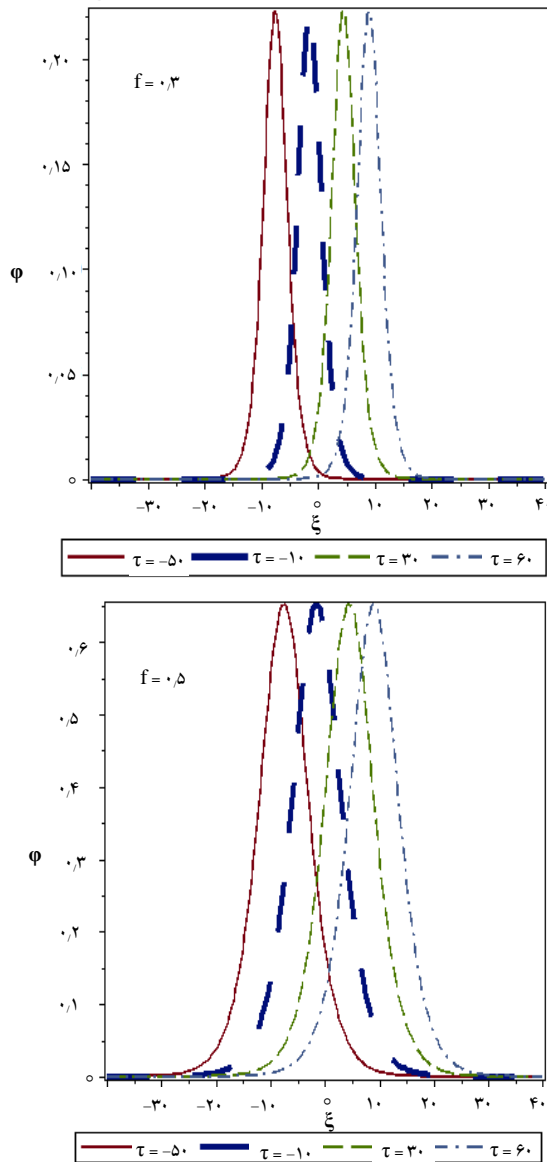
با $p = 1$ ، معادله‌ی ۲۱ مطابق معادله‌ی ۲۰ و معادله‌ی ۲۲ تقریبی از حل معادله‌ی ۲۰ می‌شود.

اکنون برای به دست آوردن جواب معادله‌ی ۱۵ از روش اختلال هموتویی استفاده می‌کنیم. لازم به ذکر است اگر در این روش، هموتویی مناسب برای حل مسأله انتخاب نشود، علاوه بر به دست نیامدن جواب دقیق معادله، برای رسیدن به جواب تقریبی نیز باید تعداد جمله‌های بیش‌تری از سری توانی رابطه‌ی ۲۲ محاسبه شود که این کار به طور قابل توجهی حجم محاسبه‌ها را افزایش خواهد داد. حال یک هموتویی مناسب به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + p(B \frac{\partial^r \phi}{\partial \xi^r} + A\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) = 0 \quad (23)$$

که با جاگذاری سری رابطه‌ی ۲۲ در آن، عبارت‌های زیر حاصل می‌شود:

1. Maple



شکل ۱. تغییرات شکل سالیتون متراکم. q و σ ثابت؛ f متغیر؛ در زمان‌های مختلف.

شکل ۲ تغییرات مشخصه‌های امواج سالیتون برای مقادیر مختلف پارامتر متراکم q و مقادیر ثابت f و σ را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. با بررسی اثر پارامتر متراکم q بر مشخصه‌های امواج سالیتونی (دامنه و پهنای امواج سالیتونی) در واقع اثر تغییرات نوع تابع توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به شکل ۲، همراه با کاهش در تراکم الکترون‌ها، پهنای سالیتون‌ها افزایش پیدا می‌کند و موج به سمت مثبت ξ در حال حرکت است. از لحاظ فیزیکی، دلیل این واقعیت آن است که چون پارامتر متراکم q کاهش پیدا می‌کند، ضریب غیرخطی معادله KdV کاهش می‌یابد، و به همین دلیل پهنای سالیتون افزایش پیدا می‌کند.

طبق رابطه‌ی ۲۲، جواب معادله‌ی ۱۵ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \tau) = & \frac{4\varphi_0 e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}}}{(e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} + 1)^2} + \frac{4\varphi_0 e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} (e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} - 1)u\tau}{\Delta(e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} + 1)^3} + \\ & \frac{4\varphi_0 e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} (e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} - 4e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} + 1)u^2\tau^2}{\Delta^2(e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} + 1)^4} + \\ & \frac{16\varphi_0 e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} (e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} - 11e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} + 11e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} - 1)u^3\tau^3}{3\Delta^3(e^{\frac{\tau\xi}{\Delta}} + 1)^5} + \dots \quad (27) \end{aligned}$$

جواب به دست آمده، رابطه‌ی ۲۷، بسط تیلور $\varphi \text{Sech}^2(\frac{\xi - u\tau}{\Delta})$ است، بنابراین جواب معادله‌ی ۱۵ چنین به دست می‌آید.

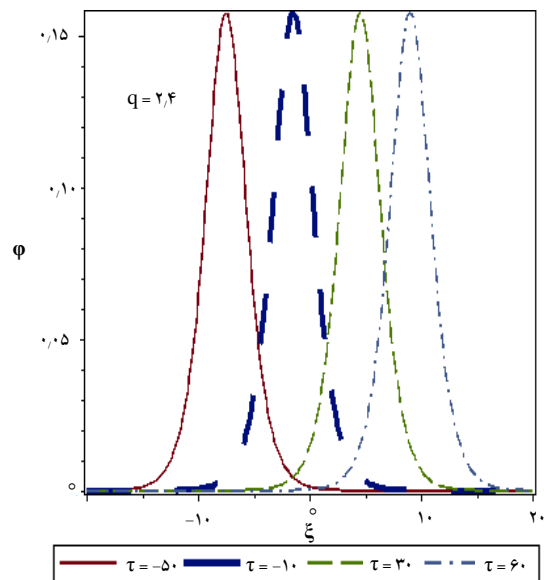
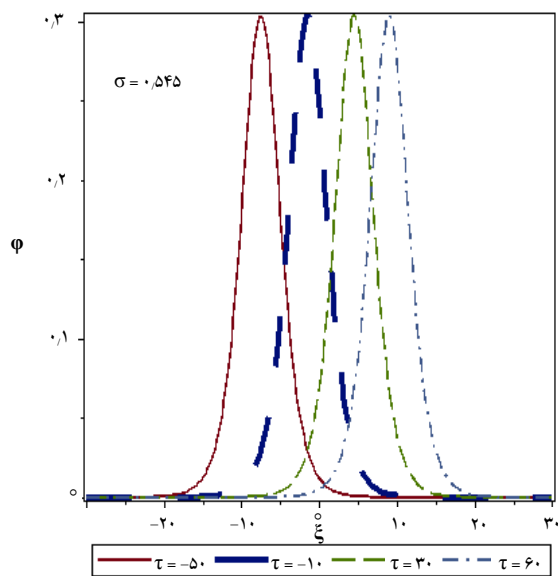
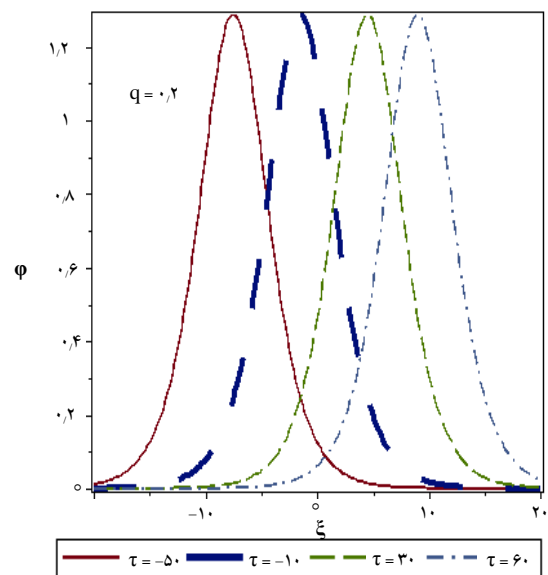
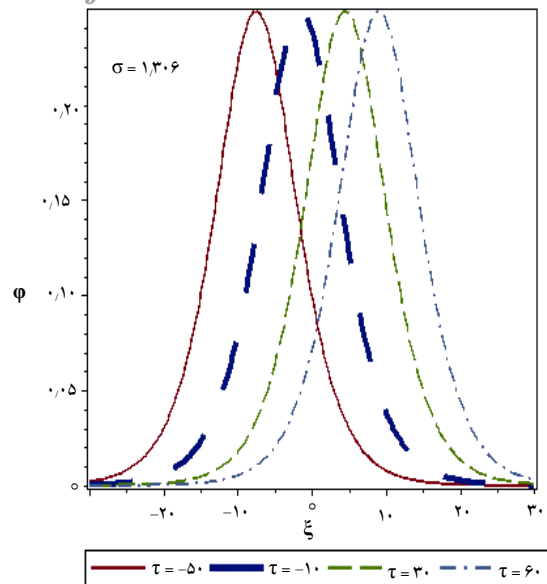
$$\varphi = \varphi_m \text{Sech}^2\left(\frac{\xi - u\tau}{\Delta}\right) \quad (28)$$

که در آن Δ و φ_m به ترتیب پهنای و دامنه‌ی بیشینه‌ی ساختار موج سالیتون هستند.

۴. تحلیل و بررسی پارامترهای فیزیکی

اکنون تحلیل اثرهای ترکیبی پارامترهای مختلف فیزیکی را بر روی ویژگی‌های امواج سالیتونی یون صوتی در یک پلاسما شامل یون سیال و الکترون‌های دو دمایی متراکم ارایه می‌نماییم. در این جا انتشار ساختار سالیتونی برای مقادیر مختلف τ در مختصات کروی بررسی شده است.

در شکل ۱ تغییرات دامنه و پهنای امواج سالیتونی نسبت به چگالی سرد نسبی، f ، مشاهده می‌شود. با توجه به شکل فوق در می‌یابیم که افزایش در چگالی سرد نسبی، f ، دامنه و پهنای سالیتون‌ها را افزایش می‌دهد. واضح است که با گذشت زمان موج در راستای ξ به سمت جلو در حال حرکت است. به عبارت دیگر، موج فوق موجی پیش‌رونده است.



شکل ۲. تغییرات شکل سالیتون متراکم. f و σ ثابت؛ q متغیر.

شکل ۳. تغییرات شکل سالیتون متراکم. f و q ثابت و σ متغیر.

با توجه به شکل‌های ۱ تا ۳ در می‌یابیم که افزایش پارامتر σ اثر قابل توجهی بر کاهش دامنه‌ی موج سالیتون دارد در حالی‌که افزایش پارامتر f دامنه‌ی موج سالیتون را اندکی افزایش می‌دهد و اثر تغییرات پارامتر q نیز بر دامنه‌ی موج سالیتون محسوس نیست. هم‌چنین اثر افزایش پارامترهای σ و f بر افزایش پهنای موج سالیتون تقریباً به یک اندازه بوده و چشمگیر است و این در حالی است که افزایش q پهنای موج سالیتون را کاهش می‌دهد.

تغییرات در دامنه و پهنای امواج سالیتونی به صورت ۳ بعدی در شکل‌های ۴ و ۵ و ۶ نشان داده شده است. در شکل ۴ حرکت این امواج برحسب پارامتر f ، در شکل ۵ حرکت امواج

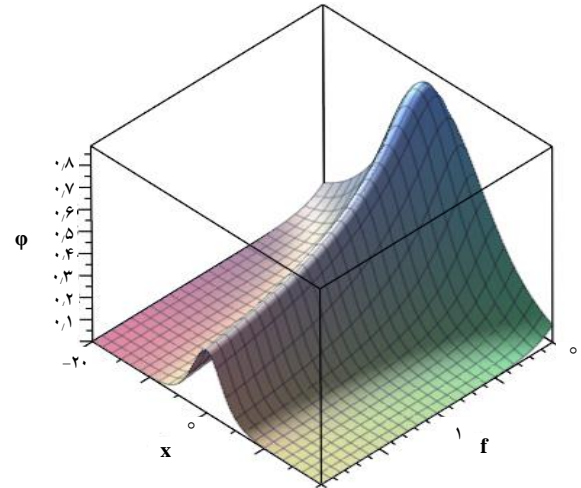
شکل ۳ تغییرات مشخصه‌های امواج سالیتونی را نسبت به پارامتر دمای نسبی، σ ، نمایش می‌دهد. با توجه در آن مشاهده می‌شود که با کاهش پارامتر سیگما دامنه‌ی موج سالیتون اندکی افزایش می‌یابد در حالی‌که پهنای آن کاهش چشمگیر و قابل ملاحظه‌ای دارد. این روند تأثیری بر حرکت موج نداشته و دست آمده، در می‌یابیم که مشخصه‌های امواج سالیتونی یون‌صوتی (مانند دامنه و پهنای امواج) به طور محسوسی به الکترون‌های متراکم (q)، چگالی نسبی الکترون‌ها (f) و دمای نسبی الکترون‌ها (σ) وابسته است.

این نتیجه‌ها ممکن است در فهم ساختار سالیتونی یون صوتی غیرخطی در فیزیک فضا و کپکشان مفید باشد. هم‌چنین در برخی از آزمایش‌های تجربی که در آن‌ها یون‌ها و الکترون‌های دو دمایی وجود دارند، یافته‌های این مقاله می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

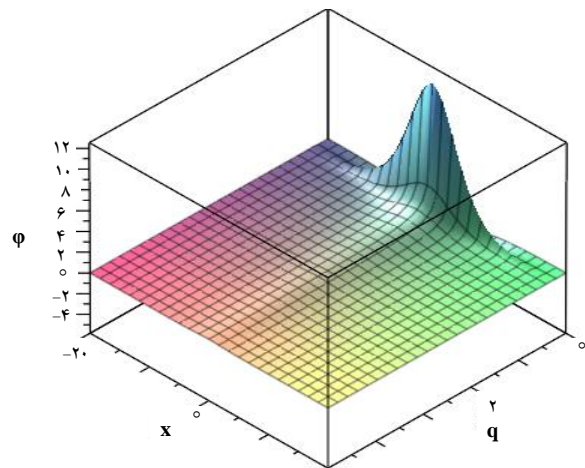
۵. نتیجه‌گیری

با استفاده از معادله‌های پایه، معادله‌ی KdV در مختصات کروی به دست آمد و به روش اختلال هموتوپی حل شد. با استفاده از این روش و با محاسبه‌ی دو یا سه مرحله از فرایند روش فوق، علاوه بر به دست آمدن جواب دقیق معادله، حجم محاسبه‌ها نیز به طور قابل توجهی کاهش یافت. هم‌چنین اثرات تغییر پارامترهای چگالی سرد نسبی، f ، و دمای نسبی، σ ، با مقادیر مختلف پارامتر متراکم، q ، بر روی دامنه و پهنای سالیتون‌ها بررسی شد. این پارامترها تأثیر قابل توجهی بر روی ویژگی‌های سالیتون‌های یون صوتی در یک پلاسمای دارای یون سیال سرد و الکترون‌های دو دمایی داشتند. نتیجه‌های به دست آمده نشان داد که با افزایش در تراکم الکترون‌ها، پهنای سالیتون‌ها کاهش می‌یابد ولی دامنه‌ی موج سالیتون تغییر محسوس نمی‌کند. هم‌چنین افزایش در چگالی سرد نسبی، دامنه (پهنای) سالیتون‌ها را افزایش می‌دهد، اما با کاهش پارامتر سیگما دامنه‌ی موج سالیتون اندکی افزایش می‌یابد در حالی که پهنای آن کاهش چشمگیر و قابل ملاحظه‌ای دارد.

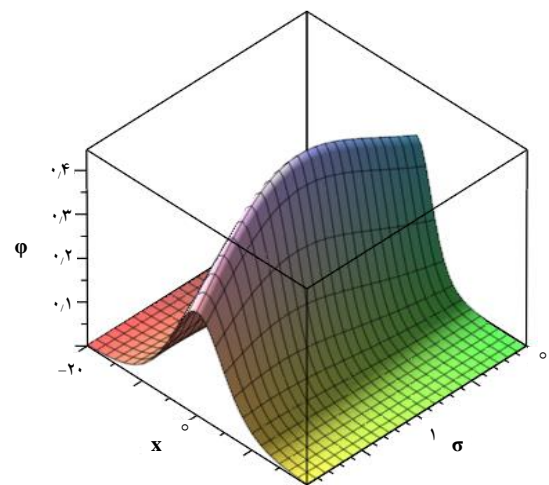
برحسب پارامتر q و در شکل ۶ تغییرات این امواج برحسب پارامتر σ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که تغییرات دامنه و پهنای سالیتون‌ها با پارامترهای مختلف فیزیکی مانند مقادیر پیش‌بینی شده در نتیجه‌های شکل‌های قبل است.



شکل ۴. تغییرات شکل سالیتون متراکم به صورت سه بعدی برحسب پارامتر f .



شکل ۵. تغییرات شکل سالیتون متراکم به صورت سه بعدی برحسب پارامتر q .



شکل ۶. تغییرات شکل سالیتون متراکم به صورت سه بعدی برحسب پارامتر σ .

مراجع

1. N.S. Saini, Shalini, *Astrophys. Space Sci.* **346**, 155, (2013).
2. H. Ikezi, *Phys. Fluids* **16**, 1668 (1973).
3. H. Ikezi, K.E. Lonngren, *Phys. Lett. A* **42**, 29 (1972).
4. R.J. Taylor, K.R. Mckenzie, H. Ikezi, *Rev. Sci. Instrum.* **43**, 1675 (1972).
5. N. Asano, T. Taniuti, N. Yajima, *J. Astrophys.* **10**, 2020 (1969).
6. H. Washimi, T. Taniuti, *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 996 (1966).
7. D.D. Barbosa, W.S. Kurth, *J. Geophys. Res.* **98**, 9351 (1993).
8. E.C.J. Sittler, K.W. Ogilvie, J.D. Scudder, *J. Geophys. Res.*, **88**, 8874 (1983).
9. B. Buti, *Phys. Lett. A* **76**, 251 (1980).
10. W.F. El-Taibany, M. Tribeche, *Phys. Plasmas* **19**, 024507 (2012).
11. A. Nazari-Golshan, *Phys. Plasmas*, **23**, 082109 (2016).
12. R.A. Cairns, A.A. Mamun, R. Bingham, R. Bostrom, R.O. Dendy, C.M.C. Nairn, P.K. Shukla, *Geophys. Res. Lett.*, **22**, 2709 (1995).
13. J.R. Franz, P.M. Kintner, J.S. Pickett, *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1277 (1998).
14. J.E. Williams, J.L. Cooney, D.W. Aossey, K.E. Lonngren, *Phys. Rev. A* **45**, 5897 (1992).
15. M. Tribeche, L. Djebarni, *Phys. Plasmas*, **17**, 124502 (2010).
16. R. Amour, M. Tribeche, *Phys. Plasmas*, **17**, 063702 (2010).
17. G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method* (Kluwer, Boston, (1994).
18. A.M. Wazwaz, *Partial Differential Equation and Solitary Wave Theory Nonlinear Physical Science*, Springer (2010).
19. S.S. Nourazar, A. Nazari-Golshan, A. Yildirim, M. Nourazar, *Z. Naturforsch, A* **67**, 355 (2012).
20. A. Nazari-Golshan, S.S. Nourazar, P. Parvin, H. Ghafoori-Fard, *Astrophys. Space Sci.*, **349**, 205 (2014).
21. S.S. Nourazar, M. Soori, A. Nazari-Golshan, *Aus. J. Basic Appl. Sci.*, **5**, 8, 1400 (2011).
22. A. Nazari-Golshan, S.S. Nourazar, H. Ghafoori-Fard, A. Yildirim, A. Campo, *Appl. Math. Lett.*, **26**, 1018 (2013).
23. S.S. Nourazar, A. Nazari-Golshan, *Indian J. Phys.*, **89**, 1, 61 (2015).
24. J.H. He, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **2**, 230 (1997).