



مطالعه پارامتر تغییر شکل چارکطبی محوری در هسته‌های سنگین و فوق سنگین

هادی زنگنه^۱، اعظم کاردان^{۱*}، محمد هادی هادیزاده یزدی^۲

۱. دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه دامغان، صندوق پستی: ۴۱۱۶۷-۳۶۷۱۶، دامغان - ایران

۲. گروه فیزیک، دانشکده‌ی علوم، دانشگاه فردوسی مشهد، صندوق پستی: ۹۱۷۷۵-۱۴۳۶، مشهد - ایران

مقاله‌ی پژوهشی

تاریخ دریافت مقاله: ۹۸/۵/۱۴ - تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۸/۱۱

چکیده

در این مقاله، سطوح انرژی پتانسیل هسته‌هایی با اعداد اتمی $Z = 90-100$ را در چارچوب میکرو-ماکروسکوپیکی نیلسون-استروتینسکی پیچ و تاب (CNS) مطالعه شده، و سپس پارامتر تغییر شکل چارکطبی محوری ϵ_2 برای این ویژه هسته‌ها (نوکلئیدها) محاسبه شده‌اند. محاسبات نشان داد، در این ناحیه جرمی، هسته‌ها در حالت پایه دارای تغییر شکل میانگین در حدود $\epsilon_2 = 0.2$ ، و در حالت ایزومری دارای تغییر شکل میانگین در حدود $\epsilon_2 = 0.6$ هستند. با افزایش تعداد نوترون‌ها یا تعداد پروتون‌ها، پارامتر تغییر شکل چارکطبی محوری افزایش کمی می‌یابد و کمینه‌های پتانسیل در تغییر شکل‌های نسبتاً بزرگ‌تری ظاهر می‌شوند. بنابراین، در ناحیه جرمی مورد مطالعه، با افزایش عدد جرمی هسته کشیده‌تر خواهد شد. نتایج به دست آمده از مدل با نتایج تجربی و همچنین نتایج دیگر مدل‌های نظری مقایسه شده‌اند. این مقایسه نشان می‌دهد مدل CNS در کنار مدل HFBCS از دقت بهتری در مقایسه با دیگر مدل‌ها برخوردار هستند و بنابراین مدل‌های مناسبی برای تولید پارامترهای تغییر شکل چارکطبی هسته‌های سنگین و فوق سنگین هستند.

کلیدواژه‌ها: مدل دل نیلسون-استروتینسکی پیچ و تاب، پارامتر تغییر شکل چارکطبی محوری ϵ_2 ، حالت پایه، حالت ایزومری، ارتفاع سد شکافت

Study of the quadrupole deformation parameter in heavy and superheavy nuclei

H. Zanganeh¹, A. Kardan^{1*}, M.H. Hadizadeh Yazdi²

1. Department of Physics, Damghan University, P.O.Box: 36716-41167, Damghan - Iran

2. Department of Physics, Faculty of Science, Ferdowsi University of Mashhad, P.O.Box: 91775-1436, Mashhad - Iran

Abstract

In this paper, the potential energy surfaces of nuclei with atomic numbers $Z=90-100$ within the microscopic-macroscopic Cranked Nilsson-Strutinsky (CNS) formalism are studied, and the axial quadrupole deformation parameter for these isotopes has been calculated. Our calculations showed that the nuclei in this mass region have an average deformation about $\epsilon_2=0.2$ in the ground state and an average deformation about $\epsilon_2=0.6$ in the isomeric state. With increasing the neutron number or proton number, the axial quadrupole deformation increases slightly, and the potential minima appear at a relatively larger deformation. Therefore, in the studied mass region, the nucleus will be more elongated with increasing the mass number. Also the effect of change of spin on the fission barrier height is studied. The results obtained from the CNS model was compared with the experimental results and also the results of other theoretical models. This comparison showed that the CNS models, as well as the HFBCS model have the better accuracy in comparison with the other models, and so these are the proper models to produce the quadrupole deformation parameters of heavy and superheavy nuclei.

Keywords: Cranked Nilsson-Strutinsky model, Axial quadrupole deformation parameter ϵ_2 , Ground state, Isomeric state, Fission barrier height

*Email: aakardan@du.ac.ir

۱. مقدمه

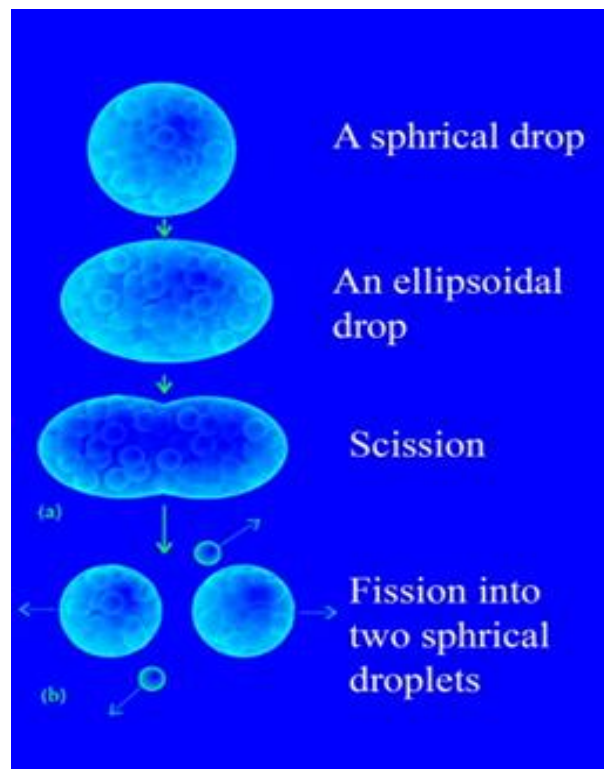
با این که پدیده شکافت هسته اتم بیش از هشت دهه پیش کشف شده است، اما هنوز بسیاری از ویژگی‌های آن ناشناخته است [۱]. شکافت هسته [۲] به‌عنوان تحولی در شکل هسته، از یک هسته‌ی مرکب یکپارچه به دو پاره شکافت، شناخته می‌شود [۱، ۳]. فرایند شکافت هسته‌های برانگیخته معمولاً توسط مدل‌های آماری مورد بررسی قرار می‌گیرند که به پارامترهای چگالی سطحی و سدهای شکافت، وابسته‌اند. بنابراین، مطالعه شکافت خودبه‌خودی و شکافت القا شده برای درک یکی از کانال‌های واپاشی هسته به‌خصوص در ناحیه جرمی سنگین و فوق سنگین بسیار ضروری می‌باشد [۴]. در مطالعه ساختار هسته دو روش محاسباتی میکروسکوپیکی و ماکروسکوپیکی وجود دارد که هیچ‌کدام به تنهایی کامل نیستند. مدل ماکروسکوپیکی قطره مایع برای اولین بار در سال ۱۹۳۵ ارایه شد [۵]، و بعدها برای توصیف نظری پدیده‌ی شکافت هسته مورد استفاده قرار گرفت. در شکل ۱ توصیف ماکروسکوپیکی شکافت براساس شباهت یک هسته به قطره مایع نمایش داده شده است.

توصیف میکروسکوپیکی و ماکروسکوپیکی فرایند شکافت، یکی از چالش‌های شناخته شده در مدل‌های ساختار هسته است و هنوز عدم دقت در پیش‌بینی‌های نظریه شکافت وجود دارد [۶، ۷]. هدف ما از پژوهش حاضر، محاسبه تغییر شکل هسته‌های سنگین و فوق سنگین در حالت‌های پایه و ایزومری و بررسی تغییرات این پارامتر با افزایش تعداد نوکلئون در چارچوب مدل نیلسون- استروتینسکی پیچ و تاب (CNS) [۸، ۹] می‌باشد. از ویژگی‌های مدل CNS استفاده از پایه‌های چرخنده در قطری کردن ماتریس هامیلتونی است [۸] که این انتخاب مناسب پایه‌ها باعث افزایش دقت محاسبه انرژی‌های تک- ذره و متمایز شدن این مدل از دیگر مدل‌های نظری زمینه تحقیقاتی مشابه شده است. مدل CNS در بررسی نوارهای دورانی بسیار مورد استفاده قرار گرفته است، به‌عنوان مثال مراجع [۹، ۱۰] را ببینید. نویسندگان این مدل را در بررسی پدیده چندشکلی نیز به‌کار برده‌اند که بسیار موفق بوده است [۱۱]. محاسبات قبلی ما و دیگران نشان می‌دهد مدل CNS در نواحی جرمی مختلف معتبر است [۹-۱۱]. در این مقاله، برای اولین بار، از این مدل در بررسی ویژگی‌های تغییر شکل هسته‌های سنگین و فوق سنگین استفاده خواهیم کرد و با مقایسه با نتایج تجربی و نیز دیگر نتایج نظری نشان خواهیم داد مدل CNS در بررسی پدیده شکافت نیز موفق است و از دقت بهتری در مقایسه با دیگر مدل‌های نظری برخوردار است. علت انتخاب هسته‌های ناحیه جرمی سنگین و فوق سنگین در این محاسبات، اهمیت بررسی پدیده شکافت و شناخت ساختار و تغییر شکل هسته در روند شکافت و کاربرد و تأثیر نتایج این بررسی در فیزیک رآکتورها می‌باشد.

۲. روش محاسباتی

مطالعات ما در این مقاله براساس روش نیلسون- استروتینسکی پیچ و تاب، و هامیلتونی آن براساس نوسان گر هم‌انگ اصلاح شده است. این مدل، یک روش میکرو- ماکروسکوپیکی است و همین امر آن را به یکی از بهترین و قوی‌ترین مدل‌های هسته‌ای در بررسی ساختار هسته در نواحی جرمی مختلف تبدیل کرده است [۹]. انرژی کل در مدل‌های میکرو- ماکروسکوپیکی براساس رابطه ۱ محاسبه می‌شود.

$$E_{tot} = E_{micro} + E_{macro} \quad (1)$$



شکل ۱. کشیدگی هسته در مدل قطره مایع هسته برای توصیف شکافت.

تفصیل در مرجع [۱۲] پرداخته‌اند. در محاسبات پژوهش حاضر، بازه استفاده شده برای ϵ_f (۰/۰۹ و ۰/۰۹) با گام ۰/۰۳ می‌باشد.

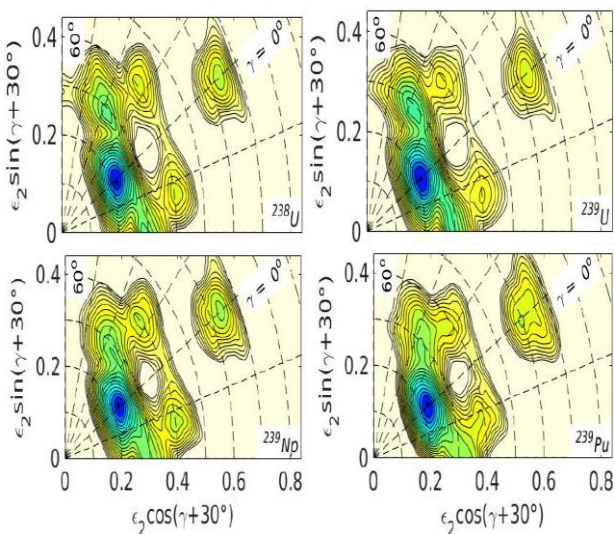
در این روش پس از حل کردن هامیلتونی در رابطه ۲ و محاسبه انرژی‌های تک-ذره، انرژی کل میکروسکوپیکی به روش استروتنسکی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$E_{micro} = \sum_i e_i^\omega - \overline{\sum_i e_i^\omega} \quad (۶)$$

در رابطه فوق، جمع روی حالت‌های اشغال شده انجام می‌شود و جمله اول نشان‌دهنده مجموع انرژی‌های تک-ذره به دست آمده از رابطه ۲ است، و جمله دوم نشان‌دهنده انرژی استروتنسکی [۱۳] است. سپس انرژی ماکروسکوپیکی با استفاده از روش قطره لوبلین استراسبورگ (LSD) محاسبه می‌شود که از رابطه ۷ به دست می‌آید [۱۴]:

$$E_{macro} = b_{surf} (1 - k_{surf} I^r) A^{\frac{r}{2}} B_{surf}(\epsilon_r, \gamma, \epsilon_f) + b_{cur} (1 - k_{cur} I^r) A^{\frac{r}{2}} B_{cur}(\epsilon_r, \gamma, \epsilon_f) + \frac{r}{\Delta} \frac{e^r Z^r}{4\pi \epsilon_0 r A^{1/r}} B_{coul}(\epsilon_r, \gamma, \epsilon_f) \quad (۷)$$

و در نهایت، انرژی کل از رابطه ۱ به دست می‌آید. در شکل ۲، انرژی‌های کل به دست آمده در صفحه (ϵ_r, γ) برای چهار هسته برای نمونه رسم شده‌اند.



شکل ۲. سطوح انرژی پتانسیل برای هسته‌های ^{238}U ، ^{239}U ، ^{239}Np و ^{239}Pu در حالت پایه.

در این محاسبات، هامیلتونی کل تک-ذره به صورت رابطه ۲ می‌باشد [۹]:

$$H^\omega = H^{(0)} - \omega j_x \quad (۲)$$

که جمله ωj_x نشان‌دهنده دوران حول محور x است و $H^{(0)}$ هامیلتونی سه محوری نیلسون است:

$$H^{(0)} = \frac{P^r}{2m} + \frac{1}{2} m (\omega_x^r x^r + \omega_y^r x^r + \omega_z^r Z^r) + V_r(\epsilon_r) \quad (۳)$$

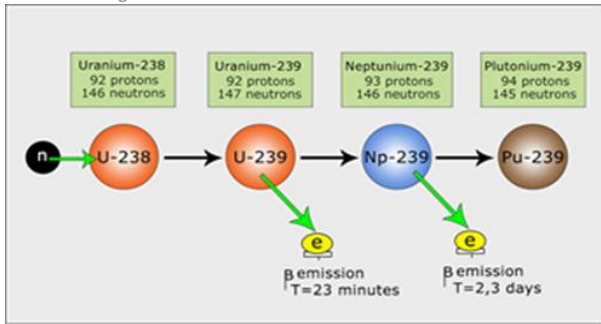
ω_x و ω_y و ω_z فرکانس‌های نوسانی در سه راستای x ، y و z هستند که در حالت کلی با رابطه ۴ محاسبه می‌شوند:

$$\omega_j = \omega_j(\epsilon_r, \gamma) \left[-\frac{r}{3} \epsilon_r \cos(\gamma + \frac{r\pi v_j}{3}) \right] \quad (۴)$$

به طوری که $v_x=1$ و $v_y=-1$ و $v_z=0$ و محاسبات در این حالت در سیستم مختصات کشیده انجام می‌شود [۹]. در روابط بالا، ϵ_2 و γ به ترتیب پارامترهای تغییر شکل چارقطبی محوری و غیرمحوری و ϵ_4 پارامتر تغییر شکل شانزده قطبی می‌باشند. در رابطه ۳، جمله اول نشان‌دهنده انرژی جنبشی و m در جمله دوم نشان‌دهنده جرم تک-ذره است. جمله آخر نشان‌دهنده هامیلتونی شانزده قطبی است که در محاسبات به صورت ترکیب خطی از هماهنگ‌های کروی مرتبه چهار $\lambda=4$ در نظر گرفته می‌شود.

$$V(\epsilon_r) = \epsilon_r Y_r(\theta, \varphi) + \epsilon_{rr} \{Y_{rr}(\theta, \varphi) + Y_{r-r}(\theta, \varphi)\} + \epsilon_{ff} \{Y_{ff}(\theta, \varphi) + Y_{f-f}(\theta, \varphi)\} \quad (۵)$$

رابطه ۳ نشان می‌دهد، محاسبات در فضای تغییر شکل سه بعدی $(\epsilon_r, \gamma, \epsilon_f)$ انجام خواهد شد. این بدین معنا است که از درجه آزادی (ϵ_f) در فضای تغییر شکل شانزده قطبی استفاده می‌شود و برای محاسبه ضرایب $(\epsilon_r, \epsilon_{rr}, \epsilon_{ff})$ در رابطه ۵، روابط ارایه شده در مرجع [۹] را به کار رفته‌اند. نویسندگان در مورد اثر پتانسیل شانزده قطبی در محاسبات سد شکافت به



شکل ۳. فرایند تبدیل ^{238}U به ^{239}Pu .

محاسبات ما نشان می‌دهد بهترین توابعی که از برازش به دست می‌آیند توابع فوریه و گاوسی مرتبه ۸ هستند.

۳. نتایج

در شکل‌های ۴ تا ۶ تغییرات انرژی برحسب پارامتر تغییر شکل چارقتبی محوری (E_۲) برای هسته‌هایی که سطوح انرژی پتانسیل آن‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است، رسم شده است. در این شکل‌ها نقاط کمینه انرژی تغییر شکل‌هایی هستند که هسته نسبت به سایر نقاط اطراف انتخاب می‌کند و نقاط بیشینه انرژی هم نقاطی هستند که هسته با کمترین احتمال در آن شکل ظاهر خواهد شد. در این نمودارها، انرژی کل نسبت به پارامتر تغییر شکل شانزده قطبی کمینه شده است. اگر نقاطی با کمترین انرژی را انتخاب شده و توابع ذکر شده در بالا را بر آن‌ها برازش داده شود، آنگاه انرژی نسبت به پارامتر تغییر شکل چارقتبی غیر محوری γ نیز کمینه خواهد شد.

اختلاف انرژی بین اولین کمینه و اولین بیشینه انرژی، معادل سد شکافت هسته خواهد بود. یکی از دلایل بسیار مهم در شناسایی و اندازه‌گیری مکان این نقاط کمینه، کمک به اندازه‌گیری دقیق ارتفاع سدهای شکافت است، زیرا پارامتر سد شکافت، اثر مستقیمی در محاسبه نرخ شکافت هسته دارد [۲۲، ۲۳]. از طرفی می‌دانیم که شار نوترونی (مثلاً در چشمه‌های نوترونی) به نرخ شکافت وابسته است [۲۴] و شار نوترون‌های گسیل شده از چشمه‌های نوترونی نقش مهمی در رسیدن رآکتورها به حالت بحرانی دارند [۱۹، ۲۵-۲۷]. پس پارامتر تغییر شکل نقش مهمی در چشمه‌های نوترونی و همچنین در رآکتورها دارد که سبب می‌شود بررسی این موضوع حایز اهمیت گردد.

در شکل ۲، نقاط تیره نشان‌دهنده حالت‌های با کمترین انرژی هستند. این نقاط کمینه، نشان‌دهنده شکل تعادلی هسته هستند. از این رو تعیین کمینه‌های انرژی در محاسبات ساختار هسته دارای اهمیت می‌باشد. با توجه به سطوح انرژی پتانسیل در شکل ۲ حاصل از بررسی هسته‌های ^{238}U و ^{239}U و ^{239}Np و ^{239}Pu ، مشاهده می‌شود هسته‌ها در حالت پایه دارای تغییر شکل محوری با $\gamma = 0^\circ$ هستند و بنابراین رفتاری تجمعی دارند. در حالت پایه (اسپین 0^+ برای هسته زوج-زوج و اسپین 0^+ برای هسته‌های زوج-فرد) کمینه اول انرژی که نشان‌دهنده تغییر شکل هسته در حالت پایه است به کمینه حالت پایه یا شکل تعادلی هسته معروف است در کمینه انرژی حدود 50MeV - قرار دارد. کمینه دوم پتانسیل به کمینه ثانویه یا حالت ایزومری معروف است و در انرژی بالاتری نسبت به انرژی حالت پایه قرار دارد. انتخاب هسته‌های نشان داده شده در شکل ۲ به دو دلیل است؛ اول این که، این هسته‌ها در ناحیه جرمی مورد نظر هستند که بیش از ۱۲۰ ویژه هسته را دربر می‌گیرد. دلیل دوم، اهمیت این چهار هسته در چرخه سوخت رآکتور است. زیربنای رآکتورهای زاینده آب سنگین [۱۵]، که قرار بود در اراک ساخته شود، براساس این هسته‌ها می‌باشد. هسته ^{238}U به‌عنوان سوخت اصلی این نوع رآکتورها است [۱۶-۱۸] که پس از برخورد نوترون‌های سریع به ^{238}U تبدیل می‌شود [۱۹]. ^{239}U ایزوتوپی ناپایدار است که با نیم-عمر حدود ۲۴ دقیقه پس از گسیل ذره بتا به ^{239}Np تبدیل می‌شود [۲۰، ۲۱]. نیم-عمر ^{239}Np نیز حدود ۲٫۴ روز است و با گسیل ذره بتا به محصول نهایی و بسیار مهم ^{239}Pu تبدیل می‌شود [۲۰، ۲۱]. در شکل ۳ فرایند تبدیل ^{238}U به ^{239}Pu نشان داده شده است.

برای بررسی تغییرات انرژی با تغییر شکل هسته نیاز است انرژی کل برحسب پارامتر تغییر شکل چارقتبی محوری رسم شود. ما پس از گرفتن داده‌ها از محاسبات فوق، این داده‌ها را به وسیله کدنویسی در برنامه متلب و استفاده از ابزار cftool^1 ، با توابع مختلف از جمله سینوسی، فوریه و گاوسی برازش کردیم. بهترین تابع برای برازش را براساس سه پارامتر انتخاب کردیم: (۱) خطای ریشه میانگین مربعی RMSE^2 و (۲) R-Square و (۳) SSE^3 .

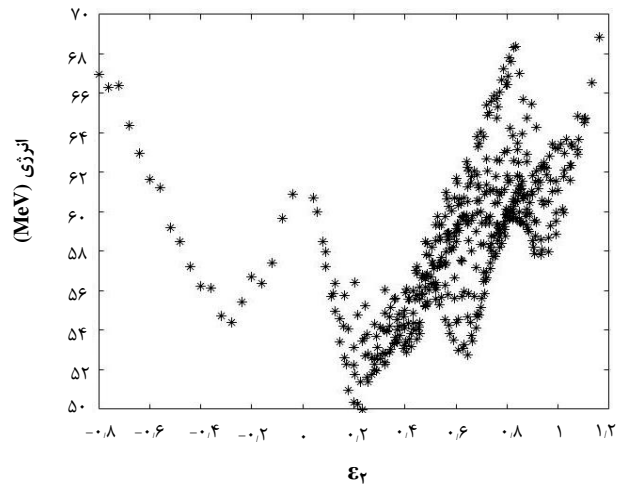
1. Curve Fitting Tools
2. Root Mean Square Error
3. Sum of Squared Error

همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، تغییر شکل حالت تعادلی هسته‌ها در این ناحیه جرمی از بی‌نظمی کمی برخوردار است، اما در حالت‌های ایزومری، بی‌نظمی بیش‌تری در پارامتر تغییرشکل چارقطبی مشاهده می‌شود.

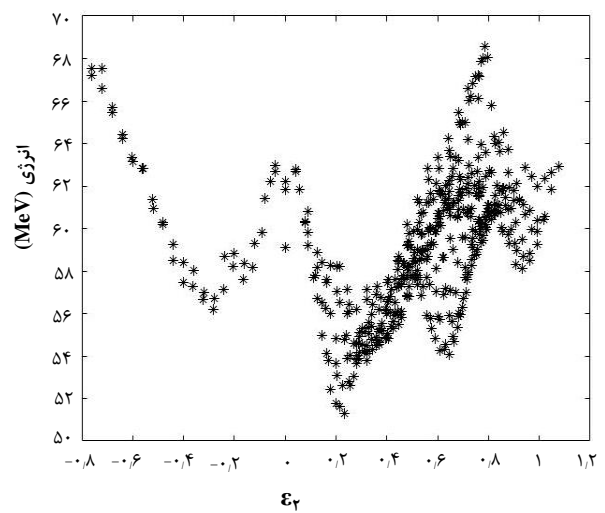
هم‌چنین با توجه به رابطه (۲)، انرژی کل هسته را می‌توان در فرکانس‌های دورانی مختلف یا معادل آن اسپین‌های مختلف محاسبه کرد. افزایش اسپین هسته می‌تواند با افزایش دمای هسته صورت گیرد. هم‌چنین تأثیرات افزایش اسپین بر روی سد شکافت هسته ^{239}Np ، به عنوان نمونه، بررسی شده‌اند. محاسبات نشان می‌دهد، با افزایش اسپین (دما و فشار درون قلب رآکتور) هسته ^{239}Np شروع به کشیده‌شدن می‌کند که این کشیده‌شدن انرژی مورد نیاز برای شکافتن آن را کاهش می‌دهد یا، به عبارت دیگر، باعث کاهش سد شکافت می‌شود. بنابراین، افزایش تغییرشکل، هسته ^{239}Np را به سمت شکافت بیش‌تر سوق می‌دهد. قدرت تخمین شرایط از لحاظ دما و فشار برای فراهم شدن شرایط برای سوق یافتن سریع‌تر و مطمئن‌تر هسته ^{239}Np به سمت شکافت در مدت زمانی کم‌تر از قبل و تبدیل شدن به ^{239}Pu به معنای افزایش تولید ^{239}Pu در رآکتور است.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

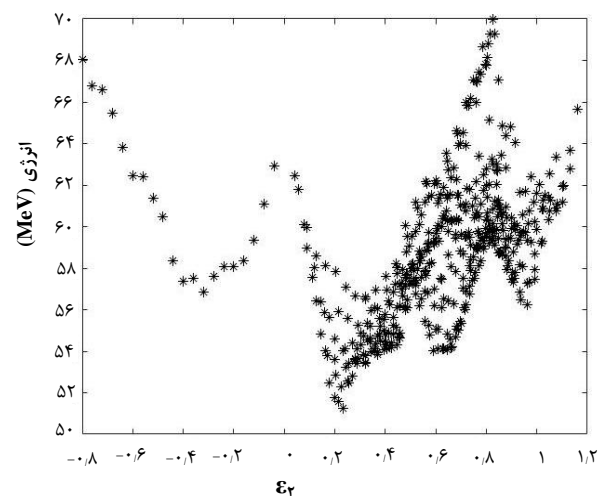
در این مقاله شکل هسته در دو حالت تعادلی و ایزومری برای بیش از ۱۳۰ ایزوتوپ از ۱۱ عنصر ناحیه جرمی $Z = 90-100$ بررسی و اندازه‌گیری شده است. انرژی کل نسبت به دو پارامتر تغییر شکل γ و $4\epsilon_-$ کمینه کرده و با پیدا کردن نقاطی با کم‌ترین انرژی، شکل هسته در دو حالت تعادلی (کمینه اول) و ایزومری (کمینه دوم) تعیین شدند.



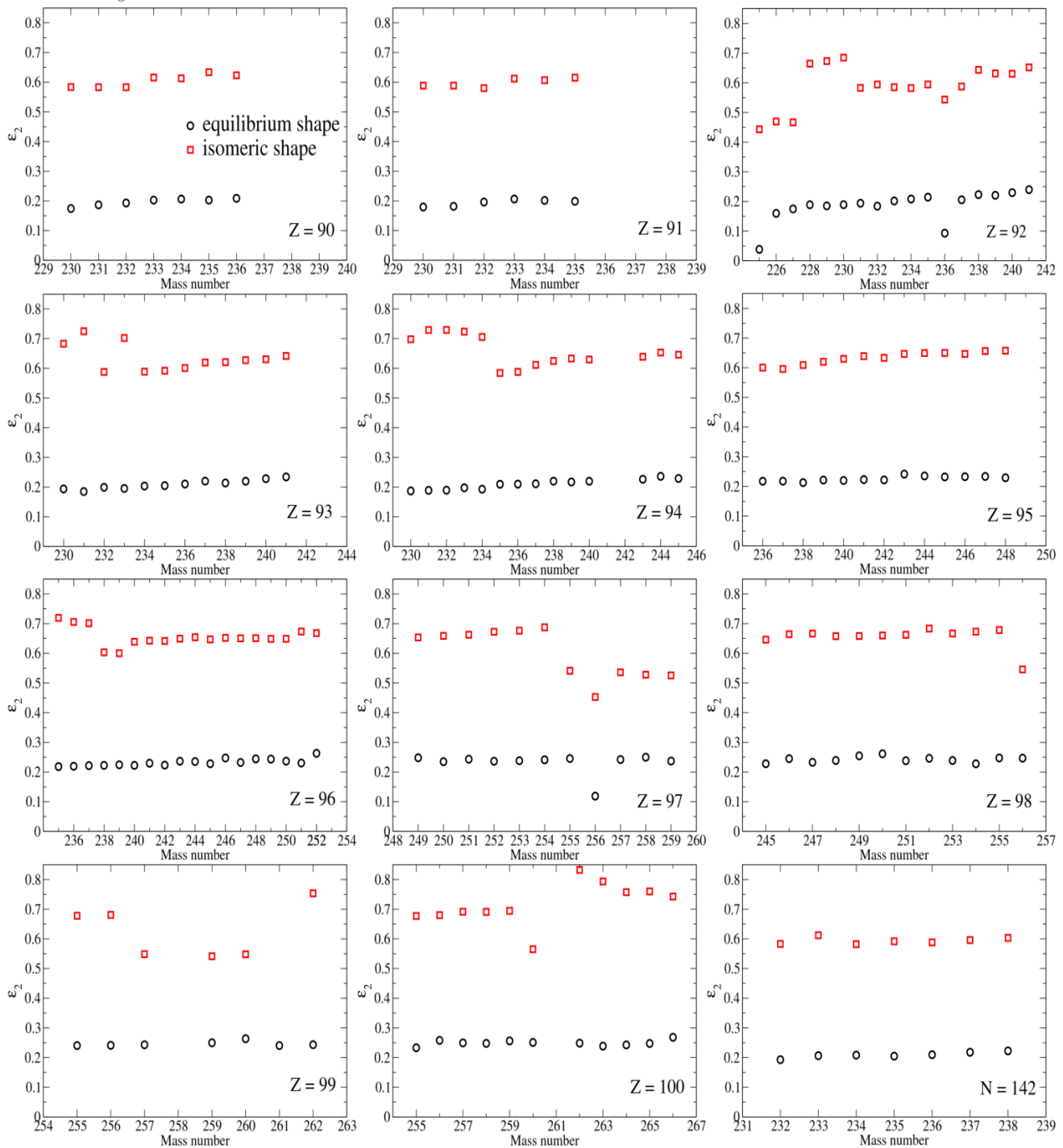
شکل ۴. تغییرات انرژی برحسب پارامتر تغییرشکل چارقطبی برای هسته ^{238}U در حالت پایه.



شکل ۵. تغییرات انرژی برحسب پارامتر تغییرشکل چارقطبی برای هسته ^{239}Np در حالت پایه.



شکل ۶. تغییرات انرژی برحسب پارامتر تغییرشکل چارقطبی برای هسته ^{239}Pu در حالت پایه.



شکل ۷. پارامتر تغییر شکل چارکطبی محوری ϵ_2 برحسب عدد جرمی برای ویژه هسته‌های مختلف با $Z=90-100$ ، و همچنین ایزوتون‌های $N=142$ برای دو حالت تعادلی (حالت پایه) و حالت ایزومری (کمینه ثانویه).

میزان کمی افزایش می‌یابد، به طوری که بازه تغییرات پارامتر تغییر شکل حالت تعادلی هسته ${}_{90}^{246}\text{Po}$ و ${}_{90}^{247}\text{Po}$ بازه تغییرات پارامتر تغییر شکل حالت ایزومری هسته ${}_{90}^{248}\text{Po}$ در این ناحیه جرمی خواهد بود. در پارامتر تغییر شکل حالت ایزومری، بی‌نظمی بیش‌تری مشاهده

نتایج محاسبات نشان دادند، شکل هسته‌ها در این ناحیه جرمی در حالت پایه به‌طور میانگین دارای پارامتر تغییر شکل ${}_{90}^{240}\text{Po}$ و در حالت ایزومری دارای پارامتر تغییر شکل ${}_{90}^{240}\text{Po}$ است. همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد نوترون‌ها در هر ایزوتوپ، پارامتر تغییر شکل به

جدول ۱. پارامتر تغییر شکل محوری E_p به دست آمده از مدل CNS که با مقادیر به دست آمده از دیگر مدل‌های نظری [۲۹] و مقادیر تجربی [۲۸] مقایسه شده است. مقادیری ارائه شده در جدول تنها برای ۱۳ هسته‌ای است که نتایج آن‌ها در دسترس بوده است.

EXP	CNS	ETFSI	HFBCS	FFD	HN	PES	هسته
--	۰٫۲۱۰	۰٫۲۰۹	۰٫۲۴۷	۰٫۲۰۴	۰٫۲۰۴	۰٫۲۰۴	Pu ^{۲۳۶}
۰٫۲۶۸	۰٫۲۲۰	۰٫۲۲۸	۰٫۲۲۸	۰٫۲۱۵	۰٫۲۱۲	۰٫۲۰۹	Pu ^{۲۳۸}
۰٫۲۷۶	۰٫۲۲۰	۰٫۲۲۸	۰٫۲۳۷	۰٫۲۲۵	۰٫۲۱۹	۰٫۲۱۴	Pu ^{۲۴۰}
۰٫۲۸۳	۰٫۲۲۰	۰٫۲۴۷	۰٫۲۲۸	۰٫۲۲۵	۰٫۲۲۱	۰٫۲۱۶	Pu ^{۲۴۲}
۰٫۲۷۷	۰٫۲۳۶	۰٫۲۴۷	۰٫۲۱۸	۰٫۲۲۵	۰٫۲۲۳	۰٫۲۱۸	Pu ^{۲۴۴}
--	۰٫۲۳۹	۰٫۲۴۷	۰٫۲۳۷	۰٫۲۳۷	۰٫۲۲۷	۰٫۲۲۱	Pu ^{۲۴۶}
--	۰٫۲۳۳	۰٫۲۴۷	۰٫۲۳۷	۰٫۲۲۵	۰٫۲۲۳	۰٫۲۱۸	Cm ^{۲۴۴}
۰٫۲۸۱	۰٫۲۳۵	۰٫۲۴۷	۰٫۲۳۷	۰٫۲۳۶	۰٫۲۲۵	۰٫۲۱۹	Cm ^{۲۴۶}
۰٫۲۸۳	۰٫۲۴۷	۰٫۲۴۷	۰٫۲۵۶	۰٫۲۳۶	۰٫۲۲۸	۰٫۲۲۱	Cm ^{۲۴۸}
۰٫۲۷۲	۰٫۲۴۴	۰٫۲۴۷	۰٫۲۶۶	۰٫۲۳۷	۰٫۲۳۰	۰٫۲۲۴	Cm ^{۲۵۰}
--	۰٫۲۳۷	۰٫۲۴۷	۰٫۲۲۸	۰٫۲۳۷	۰٫۲۳۰	۰٫۲۲۲	Cm ^{۲۵۲}
۰٫۲۸۳	۰٫۲۶۱	۰٫۲۴۷	۰٫۲۶۶	۰٫۲۳۷	۰٫۲۳۴	۰٫۲۲۸	Cf ^{۲۵۰}
۰٫۲۸۹	۰٫۲۴۶	۰٫۲۴۷	۰٫۲۳۷	۰٫۲۳۷	۰٫۲۳۴	۰٫۲۲۵	Cf ^{۲۵۲}

نکته جالب توجه دیگر، پارامتر تغییر شکل در دو ایزوتوپ کوریوم است که در جدول ۱ آمده است. مقادیر تجربی نشان می‌دهد که ایزوتوپ سنگین‌تر دارای شکل کشیده‌تری است (دارای E_p بزرگ‌تری است) اما در هیچ‌کدام از مدل‌های نظری این افزایش در پارامتر تغییر شکل مشاهده نمی‌شود. برخلاف نتایج تجربی، پارامتر تغییر شکل نظری در دو ایزوتوپ کوریوم مانند نتایج مدل‌های CNS، HFBCS و PES با افزایش نوترون یا کاهش پیدا کرده است و یا تغییری نکرده است. این امر نشان می‌دهد، هنوز مدل‌های نظری موجود کامل نیستند و نیاز به بازبینی و افزایش دقت دارند.

می‌شود؛ به‌ویژه، در ویژه هسته‌های با اعداد اتمی $Z=92-94$ ، و هم‌چنین $Z=97, 99, 100$ اما با تقریب خوبی می‌توان مقدار میانگین $E_p \approx 0.60$ را به‌عنوان تغییر شکل حالت ایزومری این هسته‌ها در نظر گرفت. هم‌چنین در شکل ۷ مشاهده می‌شود که در ایزوتون‌های $N=142$ با ثابت نگه داشتن تعداد نوترون‌ها و افزایش تعداد پروتون‌ها از ۹۰ تا ۹۶، پارامتر تغییر شکل تعادلی و ایزومری افزایش بسیار کندی خواهد داشت، به‌طوری‌که می‌توان شکل هسته را برای نوکلئیدهای مختلفی که دارای تعداد نوترون یکسانی هستند ثابت در نظر گرفت.

در جدول ۱ نتایج به دست آمده از مدل CNS با نتایج تجربی [۲۸] و هم‌چنین دیگر مدل‌های نظری [۲۹] مقایسه شده است. مدل‌های نظری که نتایج آن‌ها در جدول ۱ ارائه شده است شامل مدل سطوح انرژی پتانسیل (PES)، مدل هسته‌های سنگین (HN)، مدل یوکاوا و قطره مایع با بازه محدود (FFD)، مدل هارتری-فوک- (HFBCS) BCS و مدل توماس-فرمی توسعه‌یافته و استروتنسکی (ETFSI) می‌باشد که در مورد هر مدل در مرجع [۲۸] به‌طور مختصر توضیح شده است. مقایسه‌ای که در جدول ۱ صورت گرفته است نشان می‌دهد، نتایج به دست آمده از مدل CNS و مدل HFBCS بیش‌ترین انطباق را با نتایج تجربی دارند. نتایج تجربی نشان می‌دهد با افزایش نوکلئون‌ها و سنگین‌تر شدن هسته، پارامتر تغییر شکل هسته افزایش یافته و هسته کشیده‌تر می‌شود. این روند افزایشی در نتایج ما و هم‌چنین در نتایج به دست آمده از مدل HFBCS مشاهده می‌شود. در صورتی‌که در دیگر مدل‌ها مانند مدل ETFSI، روند افزایشی مشاهده نمی‌شود یا روند کندتری مشاهده می‌شود. بنابراین جدول ۱ نشان می‌دهد مدل CNS در مقایسه با دیگر مدل‌های نظری در بازتولید مقادیر پارامتر تغییر شکل هسته موفق عمل می‌کند.

مراجع

1. Niels Bohr, John Archibald Wheeler, *The mechanism of nuclear fission*, *Phys. Rev.* **56**, 426 (1939).
2. Otto Hahn, Fritz Strassmann, *Über den Nachweis und das Verhalten der bei der Bestrahlung des Urans mittels Neutronen entstehenden Erdalkalimetalle*, *Naturwissenschaften* **27**, 11 (1939).
3. Lise Meitner, Otto Robert Frisch, *Products of the fission of the uranium nucleus*, *Nature* **143**, 471 (1939).
4. Yi Zhu, J.C. Pei, *Thermal fission rates with temperature dependent fission barriers*, *Phys. Rev. C* **94**, 024329 (2016).
5. E. Walter Meyerhof, *Elements of nuclear physics*, *New York, McGraw-Hill*, (1967).
6. Younes. Walid, D. Gogny, *Microscopic theory of fission*, *In AIP Conference Proceedings*, **1005**, 194, (2008).
7. O. Lourenço, M. Dutra, D.P. Menezes, Critical parameters of consistent relativistic mean-field models, *Phys. Rev. C* **95**, 065212 (2017).
8. T. Bengtsson, I. Ragnarsson, *Nucl. Phys. A* **436**, 14 (1985).
9. A. Kardan, et al, *Interpretation of the large-deformation high-spin bands in select A=158-168 nuclei*, *Phys. Rev. C* **86**, 014309 (2012).
10. H. Taheri, A. Kardan, M.H. Hadizadeh Yazdi, *Normal-deformed structures in hafnium isotopes*, *Phys. Rev. C* **98**, 054313 (2018).
11. M. Akbari, A. Kardan, *Shape evolution and coexistence in neutron-deficient Kr, Rb, Sr and Zr nuclei*, *Nucl. Phys. A* **990**, 109 (2019).
12. A. Kardan, S. Nejati, *Nonaxial hexadecapole deformation effects on the fission barrier*, *Int. J. Mod. Phys. E* **25**, 1650047 (2016).
13. V.M. Strutinsky, *The fission width of excited nuclei*, *Phys. Lett. B* **47**, 121 (1973).
14. K. Pomorski, J. Dudek, *Phys. Rev. C* **67**, 044316 (2003).
15. Horst Roepenack, Fritz U. Schlemmer, J. Gerhard Schlosser, *Development of thermal plutonium recycling*, *Nucl. Tech.* **77**, 175 (1987).
16. Marvin Baker Schaffer, *Abundant thorium as an alternative nuclear fuel: Important waste disposal and weapon proliferation advantages*, *Energy Policy* **60**, 4 (2013).
17. S. Banerjee, E. Critoph, R.G. Hart, *Thorium as a nuclear fuel for CANDU reactors*, *The Canad. J. Chem. Eng.* **63**, 291 (1975).
18. K. Anantharaman, et. al. *Thorium based fuel reprocessing and refabrication technologies and strategies*, In Eleventh annual conference of Indian Nuclear Society on power from thorium status, strategies and directions, **2**, invited talks. (2000).
19. David Sylvain, Elisabeth Huffer, Hervé Nifenecker, *Revisiting the thorium-uranium nuclear fuel cycle*, *Europhysics News* **38**, 24 (2007).
20. J.R. Lamarsh, *Introduction to nuclear reactor theory*, **2nd**. (1983).
21. Robert George Keepin, *Physics of nuclear kinetics*, *Addison-Wesley Pub. Co.*, (1965).
22. M. Bhuyan, et. al. *Neck configuration of Cm and Cf nuclei in the fission state within relativistic mean field formalism*, *Physical Review C* **100**, 054312 (2019).
23. Chai, Qing-Zhen, Wei-Juan Zhao, Hua-Lei Wang, *Effects of Various Deformation on the First Fission Barrier in Even-A N= 152 Isotones*, *Comm. Theo. Phys.* **71**, 67 (2019).
24. R.L. Fleischer, P.B. Price, R.M. Walker, *Neutron flux measurement by fission tracks in solids*, *Nucl. Sci. Eng.* **22**, 153 (1965).
25. J. Planchard, *On the calculation of flux in slightly subcritical reactors with external neutron sources*, *Prog. Nucl. Ene.* **23**, 181 (1990).
26. E.D. Blakeman, *Summary Description of the ²⁵²Cf-Source-Driven Noise Analysis Method for Measurement of Sub-criticality*, *Oak Ridge National Laboratory, Tennessee* (2008).
27. R. Méndez-Villafañe, et al, *Determination of the emission rate of an Am-Be neutron source with a Bonner sphere spectrometer*, *Rad. Meas.* **45**, 1271 (2010).
28. Pritychenko, et. al. *Tables of E² transition probabilities from the first 2⁺ state in even-even nuclei*, *At. Data Nucl. Data Tables* **107**, 1 (2016).
29. Qing-Zhen Chai, et. al. *Calculation of multidimensional potential energy surfaces for even-even transuranium nuclei*, *Chin. Phys. C* **42**, 054101 (2018).