



بررسی تأثیر جابه‌جایی ترازها بر رفتار آماری هسته‌های تغییر شکل یافته

سیدخلیل موسوی مبارکه، هادی صبری*، امیر جلیلی مجارشین
گروه فیزیک هسته‌ای، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، صندوق پستی: ۵۱۶۶۴، تبریز - ایران

مقاله‌ی پژوهشی

تاریخ دریافت مقاله: ۹۸/۱۲/۲۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۴/۱۰

چکیده

در این مقاله رفتار آماری هسته‌های تغییر شکل یافته محوری با استفاده از نظریه ماتریس‌های تصادفی مورد بررسی قرار گرفت. برای این هدف، علاوه بر استفاده از اطلاعات تجربی موجود، ترازهای انرژی باندهای پایه، بتا و گامای تعداد ۵۱ هسته تغییر شکل یافته زوج-زوج با استفاده از مدل اندرکنش بوزونی و در چارچوب حد تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ محاسبه گردید. نتایج حاصل توانایی مدل انتخابی برای بازیابی اطلاعات تجربی و همچنین جابه‌جایی باندهای انرژی بتا و گاما را تأیید می‌کنند. همچنین وابستگی رفتار آماری ترازهای انرژی به عدد جرمی هسته‌ها، اسپین، نیمه‌عمر حالت پایه، باندهای انرژی و پیکربندی‌های مختلف باندهای انرژی برای آنژیخته مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج حاصل، وجود اختلاف در رفتار آماری ترازهای انرژی باندهای مختلف و همچنین محدوده‌های جرمی را به روشنی نشان می‌دهند. همچنین جابه‌جایی ترازها و قرار گرفتن تراز 0^+_{β} در انرژی پایین‌تر از تراز 2^+_{γ} سبب کاهش میزان هم‌بستگی در رفتار آماری هسته‌ها خواهد شد.

کلیدواژه‌ها: نظریه ماتریس‌های تصادفی، مدل اندرکنش بوزونی، تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ ، هسته‌های تغییر شکل یافته، باندهای انرژی

Investigation of the effect of the displacement of energy levels on spectral statistics of deformed nuclei

S.Kh. Mousavi Mobarake, H. Sabri*, A. Jalili Majarshin

Department of Nuclear Physics, Faculty of Physics, University of Tabriz, P.O.Box: 51664, Tabriz - Iran

Research Article

Received 16.3.2020, Accepted 30.6.2020

Abstract

In this paper, the spectral statistics of prolate deformed nuclei are investigated by using random matrix theory. To this aim, we used both available experimental data and also the energy levels of ground, beta, and gamma bands of 51 deformed even-even nuclei, which are determined via partial $SU(3)$ dynamical symmetry limit of interacting boson model. The results verified the ability of the considered models in the restoration of experimental data and also the displacement of beta and gamma energy bands. Also, the dependence of the statistical situation of energy levels is considered to the mass of nuclei, spins, half-lives of the ground state, bands of energy, and different configurations of excited bands of energies. The results suggested obvious differences in the spectral situation of the levels in different rotational bands and also different mass regions. Also, the displacement of levels and the lower energy of 0^+_{β} state in comparison with 2^+_{γ} level reduce the correlation of levels in spectral statistics.

Keywords: Random matrix theory (RMT), Interacting boson model (IBM), Partial $SU(3)$ dynamical symmetry, Deformed nuclei, Bands of energy

*Email: h-sabri@tabrizu.ac.ir

۱. مقدمه

مورد تحلیل قرار گرفته است. دنباله‌های آماری مختلف با استفاده از اطلاعات تجربی [۲۱-۲۲] و همچنین نتایج حاصل از محاسبات نظری در قالب مدل دینامیکی جزئی (SU(۳) تشکیل گردید. وابستگی هم‌بستگی آماری ترازهای انرژی مختلف در باندهای پایه، گاما و بتا بررسی شده و تأثیر عوامل مختلف از جمله جرم، اسپین و... بر این رفتار آماری ارزیابی گردید.

۲. روش‌ها

۱.۲ مدل دینامیکی جزئی (SU(۳)

مدل‌های مبتنی بر طیف انرژی جبری چارچوب مناسبی را برای بررسی تقارن‌های مهم در سیستم‌های بس‌ذره‌ای فراهم می‌آورند. طی سه دهه اخیر، تقارن‌های دینامیکی به طور گسترده‌ای در بسیاری از سیستم‌های پیچیده به کار گرفته شده‌اند که منجر به نتایج و دستاوردهای مهم در شاخه‌های مختلف علوم از جمله مدل اندرکنش بوزونی در فیزیک هسته‌ای شده‌اند. تقارن‌های دینامیکی را می‌توان به منزله حالت‌های تکامل‌یافته و اصلاح شده مفاهیم تقارنی در نظر گرفت. نظریه تقارن‌های دینامیکی جزئی به منظور توسعه و تکمیل مفاهیم تقارن‌های مطلق و تقارن‌های دینامیکی مطرح شده‌اند. این نظریه‌های تقارنی علاوه بر این‌که برخی از محدودیت‌های ناخواسته موجود در نظریه‌های جبری را از بین می‌برند، برخی از جنبه‌های سودمند و مفید تقارن‌های دینامیکی را به منظور مطالعه تأثیرات شکست تقارنی در یک چارچوب کنترل شده حفظ می‌کنند. یکی از جنبه‌های مهم تقارن‌های دینامیکی جزئی توانایی آن‌ها در فراهم نمودن یک ابزار کاربردی و عملی برای محاسبه مشاهده‌پذیرها در سیستم‌های واقعی می‌باشد. مفاهیم کلی و الگوریتم ساخت هامیلتونین‌های با تقارن دینامیکی جزئی در حدود تقارنی متفاوت مدل اندرکنش بوزونی در مرجع [۹] بررسی شده است. از طرفی ارتباط بین پیش‌بینی‌های تقارن دینامیکی جزئی با بیناب‌نمایی هسته‌های تغییر شکل‌یافته محوری در مراجع [۸-۱۰] بررسی شده‌اند که با توجه به توافق مناسب بین نتایج

هسته‌های تغییر شکل‌یافته و نوارهای دورانی موجود در آن به دلیل توصیف نشانه‌هایی از ترکیب تقارن‌ها و همچنین نمایش ترکیب مدهای ارتعاشی و دورانی، موضوع بسیاری از مطالعات سال‌های اخیر بوده است. مدل‌های مختلف مبتنی بر دیدگاه هندسی بوهر-ماتلسون^۱ [۱-۳]، مدل‌های مبتنی بر حل دقیق با استفاده از نظریه میدان^۲ [۴-۵] و مدل‌های جبری از جمله مدل اندرکنش بوزونی^۳ [۶-۱۰] برای توصیف ویژگی این هسته‌ها توسعه یافته‌اند. ویژگی عمومی همه این رهیافت‌ها توصیف باندهای انرژی بتا و گاما به صورت تبه‌گن می‌باشد. روش‌های مختلف از جمله اضافه کردن عدد کوانتومی جدید K در مدل بوهر-ماتلسون، اضافه کردن پتانسیل اندرکنشی در نظریه میدان و استفاده از تقارن‌های دینامیکی جزئی در مدل اندرکنش بوزونی روش‌های موجود برای حذف این تبه‌گنی می‌باشند. حد تقارنی (SU(۳) به همراه مجموعه تقارن‌های دینامیکی جزئی در مدل اندرکنش بوزونی، چارچوب مناسب برای توصیف ویژگی‌های هسته‌های تغییر شکل‌یافته می‌باشد که ضمن حذف تبه‌گنی باندهای انرژی دورانی برانگیخته، امکان توصیف طیف انرژی تجربی هسته‌ها را فراهم می‌کند.

نظریه ماتریس‌های تصادفی^۴ پرکاربردترین روش برای بررسی ویژگی‌های آماری سیستم‌های مختلف است. انطباق توزیع آماری طیف انرژی یا احتمال گذارهای الکترومغناطیسی سیستم‌های هسته‌ای با گروه‌های^۵ رایج این نظریه، امکان پیش‌بینی تقارن‌های موجود در سیستم‌ها را فراهم می‌آورد. وابستگی هم‌بستگی آماری ترازهای انرژی سیستم‌های هسته‌ای مختلف به پارامترهایی همچون طول عمر تراز، پیکربندی ترازها، مقدار انرژی و... در مطالعات مختلف ارزیابی شده است. نتایج حاصل وجود رابطه مشخص بین تأثیر پارامترهای مختلف بر هم‌بستگی آماری هسته‌ها را نشان داده است [۱۱-۲۰].

در این مطالعه، رفتار آماری طیف انرژی هسته‌های زوج-زوج تغییر شکل‌یافته در محدوده جرمی $250 < A < 152$

1. Bohr-Mottelson Geometric Model (BMM)
2. Mean-Field Model
3. Interacting Boson Model (IBM)
4. Random Matrix Theory (RMT)
5. Ensembles

چارچوب مدل اندرکنش بوزونی با اندرکنش‌های حداکثر دو جسمی چنین شکست تقارنی، توسط وارنر، کستن و دیویدسون^۳ پیشنهاد داده شده است [۸]. در این رهیافت، یک سری جملات از زنجیره‌های دیگر تقارنی مدل اندرکنش بوزونی به هامیلتونین حد $SU(3)$ افزوده می‌شود؛ تقارن $SU(3)$ به‌طور کامل شکسته شده و تمامی ویژه‌حالت‌ها در هم مخلوط می‌شوند و هیچ‌یک از ویژگی‌های مفید تقارن‌های دینامیکی باقی نمی‌ماند. در مقایسه با این روش تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ مطرح می‌باشد که توسط لویاتان^۴ پیشنهاد داده شد [۹]. تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ متناظر با نوع خاصی از شکست تقارن $SU(3)$ است که در آن ویژگی‌های مفید تقارن‌های دینامیکی از قبیل حل‌پذیری و ... برای بخشی از سیستم هم‌چنان حفظ می‌گردد. هامیلتونین تقارن دینامیکی $SU(3)$ متشکل از یک ترکیب خطی از عملگرهای کازیمیر گروه‌های $SU(3)$ و $O(3)$ است. در حالی که هامیلتونین تقارن دینامیکی جزئی $SU(3)$ با اندرکنش دو ذره‌ای در چارچوب مدل اندرکنش بوزونی به شکل زیر تعریف می‌شود [۹-۱۰]:

$$\hat{H}_{PDS} = \hat{H}(h_s, h_v) + \hat{C}(O(3)) = \hat{H}_{DS} + (h_s - h_v) P_s^+ P_s^-, \quad (1)$$

در این رابطه $\hat{H}(h_s, h_v) = h_s P_s^+ P_s^- + h_v P_v^+ P_v^-$ هامیلتونین با تقارن جزئی برای اندرکنش‌های دو ذره‌ای می‌باشد. عملگرهای $P_{\mu}^+ = \sqrt{2} d_{\mu}^{\dagger} s^{\dagger} - \sqrt{V} (d^{\dagger} d^{\dagger})_{\mu}^{(V)}$ و $P_s^+ = d^{\dagger} d^{\dagger} - \gamma (s^{\dagger})^2$ عملگرهای جفت بوزونی، به‌ترتیب با تکانه‌های زاویه‌ای $L = 0, 2$ در مدل اندرکنش بوزونی و $\hat{C}(O(3))$ نیز معرف عملگر کازیمیر گروه $O(3)$ هستند. برای حالت $h_s = h_v$ هامیلتونین $\hat{H}(h_s, h_v)$ به‌عنوان اسکالر $SU(3)$ و برای حالت $h_s = -\delta h_v$ ، این هامیلتونین به‌صورت یک تانسور $(2, 2)$ و $\hat{H}(h_s, h_v)$ از $SU(3)$ می‌باشد. علی‌رغم این‌که $\hat{H}(h_s, h_v)$ اسکالر حد دینامیکی $SU(3)$ نیست، دارای یک زیرمجموعه کامل از حالت‌های قابل حل با تقارن خوب $SU(3)$ است. از طرفی جمله دورانی $O(3)$ افزوده شده که باعث تبدیل شدن

این مدل با داده‌های تجربی، این هسته‌ها را به‌عنوان نمونه مناسبی برای نمایش تقارن دینامیکی جزئی معرفی می‌نماید. مدل اندرکنش بوزونی در سال ۱۹۷۱ توسط یاکلو و آریما^۱ برای توصیف ویژگی‌های مختلف هسته‌های زوج-زوج معرفی گردید. این مدل بر پایه نظریه گروه‌ها و مجموعه عملگرهای جبری تعریف شده و در ساده‌ترین شکل، تمایزی بین پروتون و نوترون قائل نمی‌شود [۶-۷]. با تعریف بوزون به‌صورت نصف تعداد نوکلئون‌های بیرون لایه بسته، دو بوزون s و d برای انتقال تکانه‌هایی به بزرگی ۰ و ۲ انتخاب و جبر این مدل منطبق بر گروه تقارنی $U(6)$ حاصل می‌شود. این مدل دارای سه حد دینامیکی $U(5)$ ، $SO(6)$ و $SU(3)$ می‌باشد که به‌ترتیب برای توصیف هسته‌های کروی، تغییر شکل‌یافته پادمتقارن و تغییر شکل‌یافته محوری استفاده می‌شود. تقارن دینامیکی $SU(3)$ یک ساختار تقارنی مناسب برای بررسی و توصیف هسته‌های تغییر شکل‌یافته محوری می‌باشد. مطالعات اولیه برای بررسی ساختار این دسته از هسته‌ها توسط ایلویوت در قالب مدل هندسی تجمعی صورت پذیرفته است [۴]. از طرف دیگر، هسته‌های تغییر شکل‌یافته محوری در چارچوب مدل اندرکنش بوزونی توسط یک چرخنده متقارن با نوارهای بتا و گامای تبهگن توصیف می‌شوند. در نمایش تقلیل‌ناپذیر $SU(3)$ ، به ازای هر (λ, μ) انتخابی، هر مقدار K معرف یک باند دورانی است و حالت‌های L یکسان در باندهای K مختلف تبهگن می‌باشند. پایین‌ترین نمایش تقلیل‌ناپذیر $SU(3)$ ، $(0, 0)$ می‌باشد که باند پایه $g(K=0)$ هسته‌های تغییر شکل‌یافته را توصیف می‌نماید (N نشان‌دهنده تعداد کل بوزون‌های سیستم یا همان نصف تعداد نوکلئون‌های بیرون لایه بسته است). اولین حالت برانگیخته نمایش تقلیل‌ناپذیر $SU(3)$ ، $(2, 2)$ است که شامل هر دو باند انرژی برانگیخته $\beta(K=0_1^+)$ و $\gamma(K=2_1^+)$ می‌باشد. این تبهگنی ناخواسته باندهای بتا و گاما که ویژگی مشخصه حد $SU(3)$ در مدل اندرکنش بوزونی می‌باشد را می‌توان با افزودن جملات اضافی از زنجیره‌های دیگر به هامیلتونین $SU(3)$ از بین برد. در

3. Warner- Casten and Davidson
4. Leviatan

1. Iachello and Arima
۲. (در واحد تکانه زاویه‌ای \hbar)

مدل در بازیابی نتایج تجربی هسته‌های مختلف، مزایای استفاده از این چارچوب را برای مطالعه طیف انرژی هسته‌های تغییر شکل‌یافته محوری نمایش می‌دهد. در ادامه و بخش نتایج، مقادیر ثابت‌ها برای هسته‌های انتخابی تعیین خواهد شد.

۲.۲ نظریه ماتریس‌های تصادفی

نظریه ماتریس تصادفی به‌عنوان ابزار اصلی برای توصیف پراکندگی ویژه‌مقادیر انرژی برای سیستم‌های کوانتومی که حد کلاسیکی آن‌ها نامنظم است استفاده می‌شود [۱۱-۲۰]. طیف هسته‌ای غالباً با استفاده از آنسامبل‌های استاندارد هامیلتونین، که بر اساس مفاهیم اساسی نظریه اطلاعات حاصل شده‌اند، توصیف می‌گردد. این رهیافت منجر به انطباق مناسبی با نتایج تجربی مشاهده شده برای افت و خیزها در سیستم‌های هسته‌ای و البته سایر سیستم‌های پیچیده می‌شود. انحراف اساسی از رفتار منظم بر پایه دافعه بین ترازهای توصیف می‌شود. از طرفی، دافعه‌ی بین ترازهای و از بین رفتن رفتار آماری منظم حاصل از آن بر پایه مفاهیم تقارنی و رفتار جمعی هسته‌ها توصیف شده و اطلاعات مفیدی از ساختار سیستم به دست می‌دهد.

برای طبقه‌بندی رفتار آماری سیستم‌های مختلف با استفاده از پیش‌بینی‌های نظریه ماتریس تصادفی، آمارهای مختلفی هم‌چون تابع توزیع نزدیک‌ترین فاصله بین ترازهای [۱۱]، آمار $\Delta_r(L)$ دایسون-مهتا [۱۲] و ضرایب خطی بین ترازهای متوالی [۱۴] مورد استفاده قرار گرفته است؛ در این میان توزیع نزدیک‌ترین فاصله بین ترازهای پرکاربردترین انتخاب می‌باشد. برای توصیف توزیع ترازها و هم‌بستگی آن‌ها مستقل از چگالی ترازها، فرایند واپیچش^۲ صورت می‌پذیرد. نتیجه این فرایند تولید دنباله‌ای از داده‌های سیستم مورد مطالعه با میانگین واحد است. از طرفی شرط اساسی کاربرد نظریه ماتریس‌های تصادفی، تشابه ویژگی‌های تقارنی مؤلفه‌های دنباله انتخابی است که در نتیجه لازم است حتماً از ترازهایی با اسپین-پارته مشابه استفاده شود. عدم وجود تعداد حداقل ۲۵ تراز با اسپین-پارته مشابه (تعداد کمینه برای یک ارزیابی آماری قابل اطمینان) در هر هسته انتخابی، ترکیب اطلاعات مجموعه

تقارن جزئی $SU(3)$ به تقارن دینامیکی جزئی این حد شده و سبب ایجاد جدادگی در ترازهای انرژی به‌صورت $L(L+1)$ می‌شود. البته این جمله هیچ‌گونه تأثیری روی توابع موج نداشته و باعث از بین رفتن تبهگنی ناخواسته بتا-گاما در طیف انرژی می‌شود. جزئیات کامل هامیلتونین تقارن جزئی $SU(3)$ در منابع [۹-۱۰] در دسترس بوده و در این پژوهش تنها به بررسی اجمالی آن پرداخته شده است.

حالت‌های قابل حل هامیلتونین (۱) که هم‌چنان تقارن خود را حفظ می‌کنند، اعضای نوارهای پایه $(K=0)$ و g و $\gamma(K=2k)$ می‌باشد که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$|N, (2N, 0), K=0, L\rangle, \quad (2a)$$

و

$$|N, (2N - 4k, 2k), K=2k, L\rangle, \quad (2b)$$

حال با اثر هامیلتونین (۱) بر روی این حالات، ویژه‌مقادیر انرژی برای ترازهای باند پایه

$$E_{PDS} = CL(L+1), \quad L=0, 2, \dots, 2N, \quad (2a)$$

و باند گاما

$$E_{PDS} = 5h_r k (2N - 2k + 1) + CL(L+1), \quad L = K, K+1, \dots, (2N - 2k) \quad (2b)$$

حاصل می‌شوند. در خصوص باند بتا، با اثر متفاوت جمله دوم در هامیلتونین (۱) و در نتیجه حذف تبهگنی ذاتی نسبت به باند گاما، طیف انرژی به‌صورت

$$E_\beta = 4N(2h_o + h_r) + CL(L+1), \quad (2c)$$

تعیین می‌گردد. سه ثابت h_o , C , و h_r با استفاده از روش‌های برازش و در مقایسه با آخرین اطلاعات تجربی در دسترس برای ترازهای انرژی هسته‌های مختلف تعیین می‌گردند. توانایی این

1. Nearest Neighbor Spacing Distribution (NNSD)
2. Unfolding

ترازهای هسته‌های مختلف را اجتناب‌ناپذیر می‌نماید که در ادامه و بخش نتایج به صورت کامل توضیح داده خواهد شد. قدم بعدی به دست آوردن توزیع نزدیک‌ترین فاصله بین تراز است که با $P(s)$ نشان داده می‌شود. معنای این توزیع، احتمال وجود فضا یا تراز در فاصله بین دو تراز واپیچش شده متوالی در بازه s و $s+ds$ است [۱۷]. فضای بهنجار شده‌ای که در توزیع نزدیک‌ترین فاصله بین تراز استفاده می‌شود به صورت زیر است [۱۱]:

$$S_i = E'_{i+1} - E'_i, \quad s_i = \frac{S_i}{D}$$

که در آن D میانگین فضای بین لایه‌های انرژی است. توزیع $P(s)$ احتمال قرار گرفتن s_i در بازه $[s, s+ds]$ می‌باشد. در سیستم‌های هسته‌ای که طیف انرژی آن‌ها هم‌بستگی نشان می‌دهد، تابع توزیع نزدیک‌ترین فاصله بین تراز می‌منطبق بر توزیع ویگنری (گوسی) [۱۱] به شکل

$$P(s) = \frac{\pi s}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4}\right) \quad (4a)$$

می‌باشد. از سوی دیگر سیستم‌های غیرهم‌بسته با توزیع پواسونی توصیف می‌شوند:

$$P(s) = e^{-s} \quad (4b)$$

مطالعات متعدد صورت گرفته بر طیف انرژی سیستم‌های هسته‌ای وجود رفتار بینابینی بین دو حد مذکور را نشان می‌دهد. برای توصیف این شرایط، توابع توزیع مختلفی پیشنهاد شده است [۱۴-۱۶] که تابع توزیع بری-روبنیک^۱

$$P(s) = \left[q + \frac{1}{\sqrt{2}} \pi(1-q)s \right] e^{-qs - \frac{1}{\sqrt{2}} \pi(1-q)s^2} \quad (5)$$

به دلیل تعریف بر اساس مفاهیم فیزیکی مبتنی بر دافعه بین تراز، رایج‌ترین انتخاب برای ارزیابی موقعیت آماری دنباله‌های مختلف می‌باشد. این تابع توزیع به ازای $q = 0$ حد گوسی

(هم‌بسته) و $q = 1$ حد پواسونی (غیرهم‌بسته) را توصیف می‌نماید. تعیین پارامتر هر تابع توزیع با استفاده از روش‌های تخمین هم‌چون برازش کمینه مربعات^۲ [۱۳] و روش تخمین بی‌زیان^۳ [۱۴] صورت پذیرفته است. این روش‌ها خطای بالا و هم‌چنین جواب‌های غیرقابل قبول در برخی از دنباله‌ها را به همراه دارند که برای حل این مشکل می‌توان از روش تخمین بیشینه شانس^۴ استفاده کرد. روش کار و برتری‌های این روش در مقایسه با سایر روش‌های تخمین در مرجع [۱۷] موجود است. در پژوهش حاضر تنها از نتایج این روش استفاده خواهد شد.

۳. نتایج

۱.۳ طیف انرژی

هدف این مقاله الف) بررسی توانایی مدل دینامیکی جزئی $SU(3)$ در توصیف طیف انرژی هسته‌های تغییر شکل یافته محوری و ب) بررسی رفتار آماری این هسته‌ها در قالب دنباله‌های مختلف و وابستگی هم‌بستگی آماری آن‌ها به پارامترهای فیزیکی بوده است. بدین منظور تعداد ۵۱ عدد هسته تغییر شکل یافته محوری مطابق با پیش‌بینی‌های موجود در مقالات و هم‌چنین شرط نسبت ترازهای انرژی به صورت $R_{\frac{2}{2}^+/\frac{3}{2}^+} \leq 3/33$ می‌باشد که روش معمول برای طبقه‌بندی هسته‌ها در مدل اندرکنش بوزونی است. با استفاده از روابط (۳a) تا (۳b) و تعیین ثابت‌های مربوطه در مقایسه با اطلاعات تجربی [۲۱-۲۲] ترازهای باندهای مختلف دورانی، ترازهای انرژی تعیین گردید. نتایج در جدول ۱ فهرست شده است. هم‌چنین کمیت σ به عنوان معیار ارزیابی دقت محاسبات مدل به صورت

$$\sigma = \left(\frac{1}{N} \sum_i |E_{\text{exp}}(i) - E_{\text{cal}}(i)|^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

تعریف می‌شود. در این مطالعه $N=7$ معرف تعداد کل ترازهای انتخابی، یعنی $2_g^+, 4_g^+, 2_\gamma^+, 4_\gamma^+, 2_\beta^+, 4_\beta^+$ و 2_β^+ می‌باشد.

2. Least Square Fitting (LSF)

3. Bayesian Estimation Method (BEM)

4. Maximum Likelihood Estimation (MLE)

1. Berry-Robnik Distribution

جدول ۱. هسته‌های تغییر شکل‌یافته زوج-زوج مطالعه شده. مقادیر همه ثابت‌ها بر حسب keV می‌باشد. علامت* برای برخی از هسته‌ها نشان‌دهنده قرار گرفتن ترازهای باند بتا پایین‌تر از باند گاما در طیف تجربی می‌باشد.

هسته	h_2	h_1	C	σ
$^{152}Sm^*$	۳,۷۲	۸,۹۲	۲۳,۰۲	۱۱۴,۱۳
$^{154}Sm^*$	۷,۸۵	۹,۲۸	۱۵,۴۰	۹۸,۲۱
$^{156}Gd^*$	۴,۱۱	۷,۰۵	۲۲,۱۰	۱۰۹,۳۰
$^{158}Gd^*$	۶,۰۳	۸,۱۰	۱۱,۰۷	۱۰۵,۸۴
^{158}Gd	۶,۲۱	۹,۱۲	۱۱,۲۹	۱۱۹,۱۴
^{160}Gd	۹,۳۸	۶,۲۴	۱۳,۱۱	۹۷,۳۶
^{162}Gd	۱۱,۰۴	۳,۹۰	۲۲,۱۹	۱۰۷,۱۴
^{158}Dy	۵,۲۲	۶,۴۵	۱۸,۰۹	۹۹,۳۲
^{160}Dy	۹,۱۴	۳,۹۵	۱۶,۳۴	۱۰۷,۶۲
^{162}Dy	۱۲,۴۴	۵,۱۱	۱۱,۰۷	۱۱۷,۲۲
^{166}Dy	۶,۲۳	۴,۱۱	۱۱,۳۵	۱۲۹,۳۰
^{164}Er	۶,۴۱	۵,۱۴	۲۱,۳۴	۱۱۵,۶۴
^{162}Er	۶,۹۵	۸,۱۲	۱۸,۰۴	۱۲۴,۲۸
^{164}Er	۷,۸۲	۵,۱۴	۱۷,۲۲	۱۱۷,۳۰
^{166}Er	۹,۸۱	۴,۲۶	۱۴,۱۲	۹۹,۴۰
^{168}Er	۷,۰۴	۴,۱۱	۱۱,۵۹	۱۱۲,۳۴
$^{170}Er^*$	۴,۰۱	۴,۱۷	۱۶,۱۱	۱۲۷,۶۶
^{166}Yb	۷,۱۴	۶,۰۲	۱۹,۴۴	۱۰۹,۰۴
^{168}Yb	۶,۹۲	۵,۸۸	۱۵,۲۰	۱۱۳,۳۰
$^{170}Yb^*$	۵,۳۰	۵,۹۲	۱۳,۷۷	۱۰۶,۱۱
$^{172}Yb^*$	۵,۱۳	۸,۱۲	۱۲,۶۶	۱۰۲,۱۴
^{174}Yb	۸,۰۵	۶,۳۳	۱۵,۰۸	۱۳۶,۰۷
^{168}Hf	۷,۲۷	۵,۴۲	۱۹,۳۷	۱۱۸,۰۴
$^{170}Hf^*$	۶,۰۲	۵,۱۳	۱۷,۱۴	۱۳۱,۴۴
$^{172}Hf^*$	۵,۰۷	۸,۱۳	۱۴,۵۵	۱۰۳,۲۱
$^{174}Hf^*$	۴,۲۱	۷,۱۳	۱۶,۰۶	۱۱۵,۴۰
$^{176}Hf^*$	۵,۰۱	۷,۳۸	۱۶,۱۱	۱۳۶,۷۴
^{178}Hf	۷,۰۳	۵,۹۲	۱۴,۹۱	۱۲۳,۰۷
$^{180}Hf^*$	۶,۰۵	۶,۲۱	۱۴,۹۳	۱۰۳,۷۹
$^{176}W^*$	۴,۱۱	۶,۰۴	۱۹,۱۱	۱۱۳,۴۱
$^{178}W^*$	۸,۱۷	۵,۰۵	۱۸,۲۸	۱۱۹,۰۵
$^{182}W^*$	۷,۰۱	۷,۴۵	۱۷,۴۱	۹۷,۵۵
^{184}W	۸,۱۳	۴,۶۲	۱۹,۱۲	۱۰۶,۲۷
^{180}W	۷,۲۵	۴,۲۱	۲۱,۰۹	۱۱۷,۴۱
$^{178}Os^*$	۴,۱۱	۴,۳۷	۲۲,۹۲	۱۳۴,۱۲
$^{180}Os^*$	۴,۵۸	۵,۰۷	۲۱,۹۳	۱۱۱,۰۵
^{182}Os	۸,۰۲	۵,۱۳	۲۰,۴۱	۱۰۲,۱۴
^{186}Os	۱۰,۰۶	۴,۰۷	۲۳,۱۴	۱۱۵,۷۱
$^{228}Ra^*$	۵,۲۷	۶,۵۲	۹,۸۲	۱۵۴,۶۳
$^{232}Th^*$	۴,۰۴	۶,۱۷	۹,۴۲	۱۴۹,۰۷
$^{232}Th^*$	۴,۲۸	۵,۹۱	۸,۹۴	۱۲۵,۱۸
$^{233}U^*$	۴,۳۳	۵,۶۲	۸,۰۶	۹۸,۷۱
$^{235}U^*$	۵,۰۶	۶,۲۷	۷,۸۵	۱۱۵,۴۱
$^{235}U^*$	۵,۸۷	۵,۹۲	۸,۰۹	۱۱۷,۰۷
$^{238}U^*$	۵,۰۴	۵,۳۹	۷,۶۸	۱۲۵,۱۱
$^{238}Pu^*$	۵,۷۴	۵,۰۵	۸,۱۴	۱۰۲,۴۷
$^{240}Pu^*$	۳,۹۲	۵,۶۱	۷,۳۶	۱۰۵,۶۲
$^{242}Pu^*$	۴,۸۱	۵,۰۳	۷,۰۶	۱۱۰,۵۳
^{246}Cm	۵,۷۹	۵,۱۳	۷,۳۶	۱۲۲,۰۹
^{248}Cm	۴,۹۵	۵,۰۳	۷,۹۶	۱۰۷,۰۴
^{250}Cf	۵,۰۲	۴,۳۳	۷,۸۵	۱۱۶,۵۰

نتایج حاصل دقت قابل‌قبول مدل انتخابی و هم‌چنین فرایند برازش ثابت‌های هامیلتونین را نشان می‌دهند. لازم به توضیح است که تفاوت‌های جزئی حاصل در مقادیر ثابت‌های گزارش شده در این مقاله و مرجع [۱۰] به دلیل روش متفاوت برازش و هم‌چنین استفاده از اطلاعات تجربی جدیدتر می‌باشد. هم‌چنین تفاوت در مقدار کمیت σ به دلیل تفاوت در تعداد تراز انتخابی این مقاله نسبت به مرجع [۱۰] است. هم‌چنین در این کار مقادیر مطلق گزارش شده در مراجع [۲۱-۲۲] به‌عنوان ورودی برنامه برازش در نظر گرفته شده و خطای ناشی از روش‌های اندازه‌گیری در محاسبات لحاظ نشده‌اند. مدل انتخابی به خوبی تغییر در آرایش ترازها و پایین آمدن ترازهای باند بتا نسبت به باند گاما را نیز توصیف می‌نماید. کاهش دقت نتایج مدل انتخابی برای دو هسته ^{238}Ra و ^{230}Th را می‌توان به کاهش میزان تغییر شکل چهارقطبی و بروز نشانه‌های شکل کروی در این هسته‌ها نسبت داد. این نتیجه امکان استفاده از این مدل را برای سایر هسته‌های تغییر شکل‌یافته و با آن دسته از هسته‌های واقع در ناحیه گذار فازی-شکلی بین حدود $U(5)$ و $SU(3)$ مدل اندرکنش بوزونی نشان می‌دهد. در ادامه به بررسی رفتار آماری این هسته‌ها در قالب دنباله‌های مختلف پرداخته شده تا با استفاده از این معیار نیز میزان انطباق ارزیابی شود.

۲.۳ بررسی رفتار آماری هسته‌های تغییر شکل‌یافته

برای بررسی رفتار آماری هسته‌های انتخابی در قالب آمار نزدیک‌ترین فاصله بین ترازها، ترازهای انرژی تجربی و هم‌چنین نتایج مدل دینامیکی $SU(3)$ در دنباله‌های مختلف طبقه‌بندی می‌شوند. سپس با استفاده از فرایند واپیچش، دنباله‌های بهنجار شده برای ارزیابی به دست می‌آیند. با توجه به نتایج مطالعات مشابه، رفتار آماری دنباله‌های مختلف به صورت بینابینی دو حد هم‌بسته و غیرهم‌بسته حاصل می‌شود. بدین دلیل، ارزیابی رفتار آماری یک مجموعه بر اساس مقدار پارامتر تابع توزیع بری-روبنیک به صورت نسبی و در شرایط مقایسه‌ای با سایر دنباله‌ها صورت می‌پذیرد. هم‌چنین با توجه به نتایج بسیار دقیق روش تخمین بیشینه شانس نسبت به سایر روش‌های رایج، تنها نتایج این روش برازش در محاسبات ذکر می‌گردد.

۲.۲.۳ وابستگی رفتار آماری به نحوه پیکربندی باندهای انرژی

دورانی

در حالت معمول، به دلیل انرژی بیش تر ناشی از ارتعاشات شعاعی مولد باندهای دورانی بتا، ترازهای انرژی هسته‌های تغییر شکل یافته به ترتیب باند پایه، باند گاما و در نهایت باند بتا می‌باشد. ارزیابی طیف تجربی هسته‌های تغییر شکل یافته وجود یک جابه‌جایی در پیکربندی انرژی و پایین آمدن باند انرژی بتا نسبت به باند گاما را نشان می‌دهد. این پدیده را می‌توان ناشی از ترکیب تقارن‌ها و لذا هم‌زیستی شکل‌ها^۴ در ساختار هسته‌های مختلف دانست. حرکت ترازها و جای‌گیری در باندهای مختلف از نشانه‌های دیگر این پدیده می‌باشند. این دسته از هسته‌ها با علامت * در جدول ۱ نمایش داده شده و تحت عنوان مختل شده^۵ نام‌گذاری می‌شوند؛ در حالی که هسته‌های دارای پیکربندی معمول، هسته‌های عادی طبقه‌بندی می‌شوند. با توجه به تعداد ۲۷ هسته با پیکربندی عادی و ۲۴ هسته با پیکربندی مختل شده و هم‌چنین لزوم وجود حداقل ۲۵ تراز با تقارن‌های مشابه، امکان تحلیل آماری ترازهای باندهای متفاوت به صورت مجزا امکان‌پذیر نمی‌باشد. برای حل این مشکل دو مجموعه تحت عنوان دنباله ۲⁺ دربرگیرنده ترازهای 2_g^+ ، 2_γ^+ و 2_β^+ و سپس دنباله ۴⁺ مشتمل بر ترازهای 4_g^+ ، 4_γ^+ و 4_β^+ تشکیل گردید. بعد از فرایند واپیچش و تعیین پارامتر تابع توزیع بری- روبنیک با استفاده از روش بیشینه شانس، نتایج محاسبه شد که در جدول ۳ فهرست شده است.

جدول ۳. هم‌بستگی آماری ترازهای مختلف در باندهای انتخابی. q مقدار پارامتر تابع توزیع بری- روبنیک و N تعداد ترازهای مورد مطالعه می‌باشد

پیکربندی	دنباله	N	qExp.
هسته‌های عادی	۲ ⁺	۱۵۳	۰٫۷۲ ± ۰٫۰۴
	۴ ⁺	۱۵۳	۰٫۸۶ ± ۰٫۱۰
هسته‌های مختل شده	۲ ⁺	۱۵۳	۰٫۸۹ ± ۰٫۰۳
	۴ ⁺	۱۵۳	۰٫۹۵ ± ۰٫۰۸

۱.۲.۳ وابستگی رفتار آماری به باندهای دورانی و اسپین حالات

تمام ترازهای مورد مطالعه از باندهای مختلف پایه، گاما و بتا هسته‌های فهرست شده در جدول ۱ به صورت دنباله‌های مجزا دسته‌بندی شده و سپس واپیچش گردید. بعد از اعمال تابع توزیع بری- روبنیک و استفاده از روش تخمین بیشینه شانس در فضای برنامه متلب^۱، نتایج برای این دنباله‌ها حاصل گردید که در جدول ۲ گزارش شده است.

نتایج به دست آمده انطباق پیش‌بینی‌های آماری حاصل از تحلیل اطلاعات تجربی و محاسبات نظری را نشان می‌دهد. هم‌چنین مقادیر کوچک خطای نتایج حاصل، دقت بالای روش تخمین بیشینه شانس را تأیید می‌نماید.

تحلیل آماری صورت گرفته کاهش میزان هم‌بستگی آماری را با افزایش مقدار اسپین ترازهای مورد مطالعه در هر سه باند انرژی نشان می‌دهد. این نتیجه را می‌توان بر اساس اثر ابوالمجد- ویدنمولر^۲ [۱۱، ۱۴] یعنی تأثیر اندرکنش‌های ثانویه در طیف انرژی، توجیه کرد. بر پایه این نظریه، با اضافه شدن اندرکنش‌های متعدد، الگوی ترازها به‌طور کامل از پیکربندی $L(L+1)$ پیروی نکرده و از این‌رو میزان هم‌بستگی آماری کاهش می‌یابد. هم‌چنین نتایج حاصل هم‌بستگی آماری بیش تر ترازهای انرژی باند برانگیخته گاما را نسبت به ترازهای باندهای پایه و بتا نشان می‌دهد. این نتیجه را می‌توان بر اساس ارتعاشات^۳ متفاوت در دو راستای شعاعی و زاویه‌ای ارزیابی نمود که به ترتیب سبب تولید باندهای بتا و گاما می‌شود. ارتعاشات شعاعی سبب تغییرات قابل توجه تر در سطوح انرژی هسته‌ها شده و این سبب کاهش میزان هم‌بستگی آماری ترازها می‌شود [۲۳-۲۴].

جدول ۲. هم‌بستگی آماری ترازهای مختلف در باندهای انتخابی. q مقدار پارامتر تابع توزیع بری- روبنیک و N تعداد ترازهای مورد مطالعه می‌باشد

تراز	N	qExp.	qcal.
2_g^+	۵۱	۰٫۳۱ ± ۰٫۰۷	۰٫۳۲ ± ۰٫۰۴
4_g^+	۵۱	۰٫۳۸ ± ۰٫۰۵	۰٫۳۷ ± ۰٫۰۹
2_γ^+	۵۱	۰٫۱۱ ± ۰٫۰۳	۰٫۱۰ ± ۰٫۰۴
4_γ^+	۵۱	۰٫۲۱ ± ۰٫۰۶	۰٫۲۲ ± ۰٫۰۳
0_β^+	۵۱	۰٫۷۲ ± ۰٫۱۱	۰٫۷۱ ± ۰٫۰۶
2_β^+	۵۱	۰٫۸۱ ± ۰٫۰۹	۰٫۸۰ ± ۰٫۰۵
4_β^+	۵۱	۰٫۸۹ ± ۰٫۱۰	۰٫۸۷ ± ۰٫۱۱

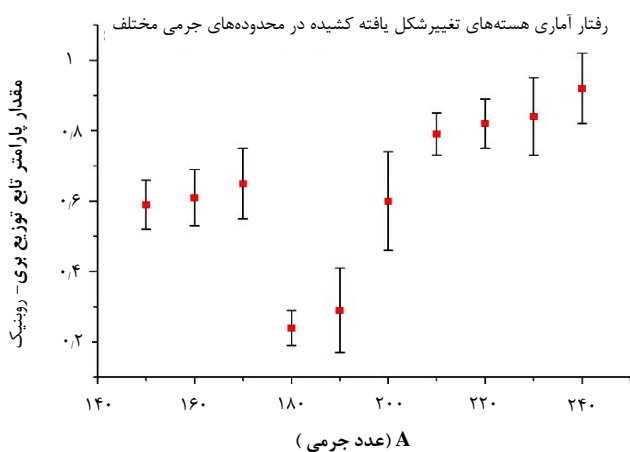
1. Matlab Software
2. Abul- Magd – Weidenmuller Effect
3. Vibration

4. Shape Coexistence
5. Disordered

است؛ این نتیجه به دلیل کم بودن تعداد هسته‌ها و از این‌رو تعداد تراز در دنباله‌های انتخابی می‌باشد. افزایش هم‌بستگی ترازها در محدوده جرمی $A=180$ را می‌توان بر اساس افزایش میزان تغییر شکل هسته‌های این محدوده و فاصله گرفتن از آرایش لایه‌ای ارزیابی نمود [۲۷-۲۸]. برای نتیجه‌گیری کامل‌تر در این خصوص، بررسی تمام ترازهای هسته‌های انتخابی پیشنهاد می‌شود که در مطالعات بعدی به آن پرداخته خواهد شد.

۴.۲.۳ وابستگی رفتار آماری به نیمه‌عمر حالت پایه

اثرات ناشی از پایداری یا رادیواکتیو بودن هسته‌ها بر ترازهای انرژی و رفتار آماری آن‌ها در مقالات مختلف ارزیابی شده است [۲۹-۳۰]. در این مطالعه وابستگی مشابه افت و خیز آماری‌های انتخابی بررسی شده است. بدین‌منظور و برای تولید دنباله‌های مناسب ارزیابی آماری، تمام ترازها با اسپین‌های غیرمشابه ولی پارته یکسان، با توجه به نیمه‌عمر حالت پایه طبقه‌بندی شدند. با این دیدگاه، یک دنباله از هسته‌های پایدار و سه دنباله از هسته‌های رادیواکتیو با نیمه‌عمرهایی از مرتبه سال، روز و دقیقه به دست آمد. پس از انجام فرایند برازش تابع توزیع بری-روبنیک، نتایج حاصل در شکل ۲ نمایش داده شده است.



شکل ۱. تغییرات رفتار آماری هسته‌های تغییر شکل‌یافته محوری در بازه‌های جرمی متفاوت. خطوط عمودی میزان خطای نتایج را نشان می‌دهد.

نتایج این جدول با استفاده از تحلیل اطلاعات تجربی حاصل شده و نتایج حاصل از ارزیابی اطلاعات حاصل از مدل نظری به دلیل تشابه ذکر نمی‌گردد. رفتار عمومی دنباله‌های مورد مطالعه در حالت عمومی به صورت غیرهم‌بسته حاصل می‌شود. در تشابه با نتیجه جدول ۲، با افزایش اسپین در هر دو پیکربندی، میزان هم‌بستگی کاهش یافته و رفتار سیستم‌ها نزدیک به حد پواسونی حاصل می‌شود. هم‌چنین کاهش میزان هم‌بستگی آماری برای آن دسته از هسته‌ها با پیکربندی مختل‌شده بسیار روشن است. تغییر محل ترازها و لذا ایجاد اختلال در الگوی قرارگیری ترازها را می‌توان منشأ این غیرهم‌بستگی معرفی نمود [۲۵-۲۶]. تغییر محل ترازها ناشی از ترکیب تقارن‌های مختلف در سیستم بوده و این اختلال تأثیر مستقیم بر هم‌بستگی آرایش‌های تراز و در نتیجه افت و خیز آماری^۱ دارد.

۳.۲.۳ وابستگی رفتار آماری به جرم

مطالعات مختلف پیرامون رفتار آماری هسته‌های مختلف همراه با بررسی اثرات نواحی جرمی متفاوت بر ویژگی‌های آماری می‌باشد. کاهش میزان هم‌بستگی آماری برای هسته‌های سنگین در مقایسه با هسته‌های سبک، نتیجه اساسی چنین ارزیابی‌هایی است که تحت عنوان اثرات لایه‌ای^۲ شناخته می‌شود. افزایش هم‌بستگی در سیستم‌های هسته‌های ناشی از انطباق پیکربندی ترازهای انرژی بر آرایش‌های منطبق بر یک تقارن می‌باشد. در این بخش از مطالعه، هسته‌های انتخابی در بازه‌های عدد جرمی مساوی با $\Delta A = 10$ ، در محدوده جرمی $152 \leq A \leq 250$ طبقه‌بندی گردیدند. با توجه به تعداد ترازهای موجود، تمام ترازهای هفت‌گانه اشاره شده در جدول ۲ به صورت یک دنباله در نظر گرفته شد. پس از فرایند واپیچش و تحلیل با تابع توزیع بری-روبنیک، نتایج به دست آمد که در شکل ۱ نمایش داده شده است.

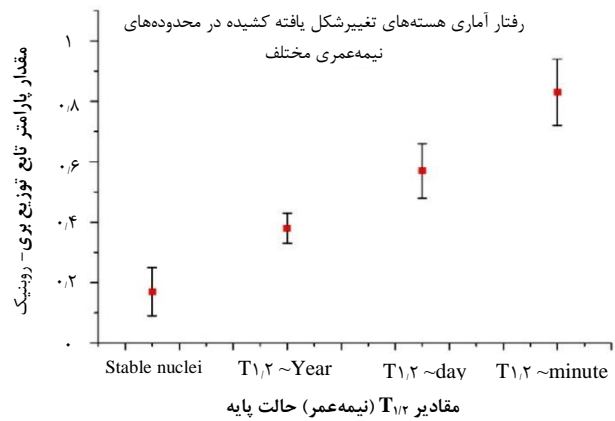
نتایج نشان‌دهنده رفتار آماری غیرهم‌بسته هسته‌های سنگین است. هم‌چنین افزایش مقدار خطای محاسبات (خطوط عمودی) برای محدوده جرمی ۲۰۰ و $A = 190$ روشن

1. Spectral Fluctuations
2. Shell Model Effect

آماري این هسته‌ها در قالب دنباله‌های مختلف ارزیابی شده و تأثیر پارامترهای مختلف بر هم‌بستگی آماری ترازهای نوارهای دورانی بررسی گردید. نتایج حاصل از تحلیل اطلاعات تجربی و نتایج محاسبات نظری، افزایش هم‌بستگی آماری ترازهای انرژی باند دورانی گاما را نشان می‌دهد؛ می‌توان این نتیجه را بر اساس سهم کوچک‌تر ارتعاشات زاویه‌ای در تغییر شکل ساختار هسته و از این‌رو حفظ پیکربندی دورانی ارزیابی نمود. نتایج حاصل تأثیر تقارن‌های مختلف بر رفتار آماری این هسته‌ها را نشان داده و افزایش هم‌بستگی آماری ترازها برای آن دسته از سیستم‌های دارای پیکربندی و تقارن قوی را پیشنهاد می‌دهد. از طرفی تأثیر پدیده هم‌زیستی شکل‌ها و تغییر محل ترازهای دورانی باند بتا نسبت به آرایش معمول هسته‌های تغییر شکل‌یافته، سبب کاهش هم‌بستگی آماری در طیف انرژی این هسته‌ها می‌شود. این نتیجه در کنار افزایش میزان تغییر شکل چهارقطبی در این هسته‌ها را می‌توان بر پایه اندرکنش‌های مؤثر در ساختار هسته ارزیابی کرد. نیروی جفت‌شدگی باعث افزایش هم‌بستگی آماری شده و از سوی دیگر اندرکنش‌های چهارقطبی را می‌توان عامل حرکت رفتار آماری سیستم‌ها به سمت حد پواسونی تعریف نمود. نتایج این مطالعه را می‌توان برای طبقه‌بندی آماری هسته‌های مختلف و نیز بررسی اثر پتانسیل‌های مختلف در هامیلتونی‌های سیستم‌های هسته‌ای استفاده نمود.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب تقدیر و تشکر خود را از آقای دکتر جواد فولادی به دلیل کمک‌های صورت گرفته برای بخش تقارن‌های دینامیکی جزئی اعلام می‌نمایند. این مطالعه با پشتیبانی مالی مدیریت امور پژوهشی دانشگاه تبریز انجام شده است.



شکل ۲. تغییرات رفتار آماری هسته‌های انتخابی براساس نیمه‌عمر تراز پایه. خطوط عمودی میزان خطای نتایج را نشان می‌دهد.

نتایج حاصل از تحلیل ترازهای انرژی تجربی هسته‌های تغییر شکل‌یافته در شکل ۲، کاهش میزان هم‌بستگی آماری را برای هسته‌های رادیواکتیو با نیمه‌عمرهای کوتاه نشان می‌دهد. این نتیجه را می‌توان بر پایه شکل و از این‌رو تقارن‌های قوی موجود در هسته‌های پایدار و با نیمه‌عمرهای طولانی ارزیابی نمود. هم‌چنین می‌توان وابستگی‌های آماری برای این هسته‌های رادیواکتیو را بر پایه مدهای واپاشی بررسی نمود. این بررسی امکان تعریف رابطه بدیهی بین نیروهای مؤثر در ساختار سیستم و ویژگی‌های تقارنی آن‌ها حاصل می‌نماید. به دلیل کمبود تعداد ترازهای انتخابی از هسته‌های این مطالعه و لذا عدم امکان تولید دنباله‌های آماری قابل‌اعتماد، امکان چنین ارزیابی در این مطالعه وجود نداشت. در مطالعات بعدی به این بحث پرداخته خواهد شد.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه هسته‌های تغییر شکل‌یافته زوج-زوج محدود جرمی $250 \leq A \leq 152$ مورد بررسی قرار گرفت. مدل دینامیکی جزئی اندرکنش بوزونی در حد تقارنی $SU(3)$ برای محاسبه ترازهای انرژی باندهای مختلف این هسته‌ها به کار برده شد. توانایی مدل انتخابی برای توصیف طیف انرژی این هسته‌ها و حذف تبهگنی ذاتی موجود در مدل اندرکنش بوزونی برای هسته‌های دورانی روشن است. این مدل جابه‌جایی باندهای انرژی و قرار گرفتن باند گاما در انرژی بالاتر نسبت به باند بتا را نیز به درستی توصیف می‌نماید. هم‌چنین افت و خیز

1. R.K. Sheline, *vibrational states in deformed even-even nuclei*, *Rev. Mod. Phys.* **32**, 1 (1960).
2. J.B. Gupta, *Global view of the rotational structure of the $K^\pi = 2^+\gamma$ -bands*, *Eur. Phys. J. A*, **55**, 122 (2019).
3. A.V. Afanasjev, N. Itagaki, D. Ray, *Rotational excitations in near neutron-drip line nuclei: The birth and death of particle-bound rotational bands and the extension of nuclear landscape beyond spin zero neutron drip line*, *Phys. Lett. B*, **794**, 7 (2019).
4. J.P. Elliott, *Collective motion in the nuclear shell model. I. Classification schemes for states of mixed configurations*, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **245**, 128 (1958).
5. G. Thiamova, D.J. Rowe, J.L. Wood, *Coupled-SU(3) models of rotational states in nuclei*, *Nuclear Phys. A*, **780**, 112 (2006).
6. F. Iachello, A. Arima, *The Interacting Boson Model* (Cambridge U. Press, Cambridge, 1987).
7. R.F. Casten, D.D. Warner, *The interacting boson approximate*, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 389 (1988).
8. D.D. Warner, R.F. Casten, W.F. Davidson, *Interacting boson approximation description of the collective states of ^{168}Er and a comparison with geometrical models*, *Phys. Rev. C*, **24**, 1713 (1981).
9. A. Leviatan, *Partial dynamical symmetries*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **66**, 93 (2011).
10. N. Fouladi, J. Fouladi, H. Sabri, *Investigation of low-lying energy spectra for deformed prolate nuclei via partial dynamical SU(3) symmetry*, *Eur. Phys. J. Plus*, **130**, 112 (2015).
11. H.A. Weidenmüller, G.E. Mitchell, *Random matrices and chaos in nuclear physics: Nuclear structure*, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 539 (2009).
12. T.A. Brody, et al, *Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations*, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385 (1981).
13. J.F. Shriner, G.E. Mitchell, T. Von Egidy, *Fluctuation properties of spacing of low-lying nuclear levels*, *Z. Phys. A*, **338**, 309 (1991).
14. A.Y. Abul-Magd, et al, *Statistical analysis of composite spectra*, *Ann. Phys.* **321**, 560 (2006).
15. A. Brody, *A statistical measure for the repulsion of energy levels*, *Lett. Nuovo Cimento*, **7**, 482 (1973).
16. M.V. Berry, M. Robnik, *Semi-classical level spacing when regular and chaotic orbits coexist*, *J. Phys. A*, **17**, 2413 (1984).
17. M.A. Jafarizadeh, et al, *Investigation of spectral statistics of nuclear systems by maximum likelihood estimation method*, *Nucl. Phys. A*, **891**, 29 (2012).
18. T. Von Egidy, H.H. Schmidt, A.N. Behkami, *Nuclear level densities and level spacing distributions: Part II*, *Nucl. Phys. A*, **481**, 189 (1988).
19. R.A. Molina, *Pairing and spectral statistics of low energy levels*, *Eur. Phys. A*, **28**, 125 (2006).
20. A. Jalili Majarshin, et al, *Systematic analysis on spectral statistics of odd-A nuclei*, *Annals of Physics*, **407**, 250 (2019).
21. *National Nuclear Data Center (Brookhaven National laboratory)*, *chart of nuclides*. (<http://www.nndc.bnl.gov/chart/reColor.jsp?newColor=dm>)
22. Live chart, *table of nuclides*, <http://www.nds.iaea.org>.
23. J.E. Garcia-Ramos, A. Leviatan, P. Van Isacker, *Partial Dynamical Symmetry in Quantum Hamiltonians with Higher-Order Terms*, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 112502 (2009).
24. N. Whelanm, Y. Alhassid, A. Leviatan, *Partial dynamical symmetry and the suppression of chaos*, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2208 (1993).
25. V. Paar, D. Vorkapic, *Broken isospin symmetry in the shell model and chaotic behavior*, *Phys. Lett. B*, **205**, 7 (1988).
26. V. Paar, D. Vorkapic, *Quantum chaos for exact and broken K quantum number in the interacting-boson model*, *Phys. Rev. C*, **41**, 2397 (1990).
27. P.W. Zhao, *Multiple chirality in nuclear rotation: A microscopic view*, *Phys. Lett. B*, **773**, 1 (2017).
28. Yu Zhang, Qiu-Yue Li, Xiao-Xia Wang, *Emergent spectral degeneracies in the quantum phase transitions in the interacting boson model*, *Phys. Rev. C*, **93**, 054330 (2016).
29. H. Sabri, *Spectral statistics of rare-earth nuclei: investigation of shell model configuration effect*, *Nucl. Phys. A*, **941**, 364 (2015).
30. H. Sabri, R. Malekzadeh, *Investigation of decay modes and stability effects on spectral Statistics of different nuclei*, *Nucl. Phys. A*, **963**, 78 (2017).