



توصیف میکروسکوپی هسته‌های گذاری فرد- فرد با استفاده از مدل اندرکنش بوزون- فرمیونی

مریم قیانوری^{۱*}، نرجس امیری^۲، محمدرضا جعفریزاده^۳، حسن حسین خانی^۱

۱. پژوهشکده‌ی پلاسما و گداخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی، صندوق پستی: ۵۱۱۱۳-۱۴۳۹۹، تهران- ایران

۲. گروه هسته‌ای، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، صندوق پستی: ۵۱۶۶۴، تبریز- ایران

۳. گروه نظری، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، صندوق پستی: ۵۱۶۶۴، تبریز- ایران

مقاله‌ی پژوهشی

تاریخ دریافت مقاله: ۹۸/۵/۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۸/۲۵

چکیده

مطالعه رفتار دینامیکی سیستم‌های هسته‌ای مختلف از موارد مورد علاقه تحقیقات طی سالیان اخیر بوده است. طیف انرژی، مقادیر اندازه حرکت‌های چند قطبی الکتریکی، مغناطیسی و . . . جزو مواردی می‌باشند که معرف رفتار یک سیستم در قالب یک گروه تقارنی می‌باشد. در این مقاله، مدل‌های حل‌پذیر جبری برای تعیین ویژه حالات و ویژه مقادیر هسته‌های فرد- فرد در منطقه گذار ارتعاشی به گامای ناپایدار $(SO(6) \leftrightarrow U(5))$ با استفاده از جبر آفین $SU(1,1)$ و با در نظر گرفتن درجات آزادی پروتون و نوترون در چارچوب مدل اندرکنش بوزون- فرمیون- فرمیون پیشنهاد شد. هدف ما مطالعه رفتار دینامیکی هسته‌های فرد- فرد در حال گذار و در نهایت معرفی شرایط خاص ممکن برای تحقق وجود این گذارها می‌باشد. حالت‌های کم‌انرژی پاریته مثبت هسته فرد- فرد مس ($^{60-66}\text{Cu}$) با استفاده از مدل‌های پیشنهادی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. از مقایسه نتایج حاصله از مدل‌های پیشنهادی با داده‌های تجربی، می‌توان دریافت که نتایج مدل IBFFM-2 نسبت به IBFFM-1 به داده‌های تجربی نزدیک‌تر است که این تأییدی است بر استفاده از تابع موج و هامیلتونیان مدل IBFFM-2 است. مقادیر کنترل پارامتر حاصله نیز ترکیب دو ساختار ارتعاشی و گامای ناپایدار را برای این ایزوتوپ‌های فرد- فرد $^{60-66}\text{Cu}$ نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: جبر آفین $SU(1,1)$ ، مدل اندرکنش بوزون- فرمیون- فرمیون، هسته‌های فرد- فرد

Microscopic description of odd-odd transitional nuclei by using interacting-boson-fermion -model

M. Ghapanvari^{*1}, N. Amiri², M.A. Jafarizadeh³, H. Hossein Khani¹

1. Plasma and Nuclear Fusion Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOI, P.O.Box: 14399-51113, Tehran - Iran

2. Department of Nuclear Physics, Faculty of Physics, University of Tabriz, P.O.Box: 51664, Tabriz -Iran

3. Department of Theoretical Physics and Astrophysics, University of Tabriz, P.O.Box: 51664, Tabriz -Iran

Research Article

Received 31.7.2019, Accepted 16.11.2019

Abstract

Studying the dynamical behavior of various nucleus systems has become an interesting subject of research over recent years in nuclear physics. The Energy spectrum and magnitude of momentum of electric and magnetic multi-poles may describe the behavior of a nuclei collection under a special symmetry group. In this paper, solvable algebraic models by using the affine $SU(1,1)$ Lie Algebra and proton, and neutron degrees of freedom in the framework of an interacting-boson-fermion model (IBFFM) is suggested to determine the exact energy and eigenstate of the $SO(6) \leftrightarrow U(5)$ transitional odd-odd mass nuclei. The main goal is to study the dynamical behavior of the nucleus in the transition state and then to investigate the special conditions that make this transition process possible. The positive parity low-lying energy states of the $^{60-66}\text{Cu}$ isotopes within the proposed methods are investigated. The obtained results compare well with the available experimental data and IBFFM-1, which augments the reliability of the wave function and Hamiltonian obtained within the suggested IBFFM-2 model. The values of control parameters confirm the mixing of both vibrating and rotating structures in the $^{60-66}\text{Cu}$ isotopes.

Keywords: Affine $SU(1,1)$ algebra, Interacting-boson-fermion- model, Odd-odd mass nuclei

*Email: m.ghapanvari@tabrizu.ac.ir

۱. مقدمه

در بسیاری از نمونه‌ها در فیزیک، مجبوریم سیستم‌های بوزونی و فرمیونی را به صورت هم‌زمان در نظر بگیریم که کوپل فرمیون‌ها و بوزون‌ها منجر به مدل اندرکنش بوزون- فرمیونی می‌شود که برای بررسی خواص هسته‌هایی با عدد جرمی فرد (هسته‌های فرد- زوج و زوج- فرد) مورد استفاده قرار گرفته است [۶-۱]. در مدل IBFM تقارن‌های بوز- فرمی متناسب با هر یک از تقارن‌های دینامیکی مدل IBM است [۶-۳]. هم‌چنین مفاهیم و روش‌های تقارن بوز- فرمی و ابرتقارن می‌تواند با در نظر گرفتن هسته فرد بسط داده شود.

ساختار هسته فرد- فرد در طیف‌سنجی هسته‌ای بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۱۴-۶]. بدین منظور، به مطالعه گذار فاز در هسته فرد- فرد پرداخته شد و از آن جایی که تعداد هسته‌های فرد- فرد محدودی در طبیعت وجود دارد، تعداد مطالعات کمی در مورد این هسته‌ها به‌ویژه مسئله گذار فاز موجود است. توکی^۱ و همکاران به مطالعه گذار فاز در یک سیستمی که یک ذره و یک حفره به یک مغز چرخنده سه محوری کوپل می‌شوند، پرداختند [۱۵]. آن‌ها نشان دادند که ویژگی‌های مشخص گذاری در هسته با عدد جرمی فرد می‌تواند هم‌چنین در سیستم‌های فرد- فرد نیز وجود داشته باشد. پس از بررسی‌های انجام شده روی طیف هسته‌های فرد- فرد، به این نتیجه رسیدیم که ایزوتوپ‌های فرد- فرد مس می‌تواند گزینه مناسبی برای مطالعات گذار فاز $U(5)-O(6)$ در هسته فرد- فرد باشد [۱۶-۱۹]. ایزوتوپ‌های فرد- فرد در نمونه‌ای که تک پروتون و تک نوترون یک حالت با $Z=3/2$ را اشغال می‌کند، توسط پار^۲ و همکاران بررسی شد. آن‌ها برای توصیف چنین هسته‌هایی یک الگوریتم ارایه دادند و مدل پیشنهادی خود را در مورد ایزوتوپ ^{64}Cu تست کردند [۱۶]. مطالعه هسته‌های سبک (هسته $N \approx Z$) به دلیل بیشینه بودن تقارن آیزواسپین در نزدیکی خط پایداری $N=Z$ ، یکی از موضوعات مهم و جالب می‌باشد. آیزواسپین باید در محاسبات هسته‌های سبک با پروتون‌ها و نوترون‌های ظرفیتی اشغال‌کننده پوسته‌های اصلی یکسان وارد شود. یک بسط مهم از مدل اندرکنش بوزون (IBM) که بوزون نوترون- پروتون را علاوه بر دو نوع بوزون پروتون- پروتون و نوترون- نوترون مدل IBM-۲ در نظر می‌گیرد، مدل اندرکنش بوزونی ۳ (IBM-۳) نام دارد. بنابراین در این مدل تقارن آیزواسپین پایسته می‌ماند.

در مقاله [۱۸]، به مطالعه‌ی گذر فاز کوانتومی در هسته‌ها براساس مدل تغییر شکل کوانتومی جبری پرداختیم. از ویژگی‌های اساسی الگوهای تغییر شکل یافته‌ی کوانتومی عدم بر هم خوردن قوانین پایستگی مربوط به تکانه زاویه‌ای، تعداد کل ذرات هسته و تصویر ایزواسپین است. لذا هامیلتونین گذار تغییر شکل یافته را برای IBM-۱ و IBM-۲ و IBM-۱ BFFM ارایه داده و سپس با مدل‌های ارایه‌شده به توصیف ایزوتوپ‌های $^{120-128}\text{Xe}$

ایزوتوپ‌های $^{123-131}\text{Xe}$ پرداختیم. سطوح انرژی و مقادیر $B(E2)$ برای این ایزوتوپ‌ها محاسبه و با داده‌های تجربی مقایسه شد [۱۸]. در این مقاله، یک مدل حل‌پذیر برای هسته‌های فرد- فرد گذار فازی شکلی از حد کروی به حد چرخنده گامای ناپایدار را به وسیله جبر آفین $SU(1,1)$ در چارچوب مدل IBM-۱ بدون در نظر گرفتن درجات آزادی پروتون و نوترون پیشنهاد دادیم و سپس توصیف میکروسکوپی مدل با قابلیت تمایز بین پروتون و نوترون را ارایه کردیم که منجر به مدل IBM-۲ BFFM می‌شود. در این مدل‌ها، یک پروتون و یک نوترون منفرد با ممنوم زاویه $J=3/2$ به یک مغزی کروی زوج- زوج که گذار از شکل‌های کروی به گامای ناپایدار را با تغییر پارامتر کنترلی انجام می‌دهد، کوپل می‌شود. نحوه ایجاد این مدل‌ها در بخش چارچوب تئوری کار به صورت کامل توضیح داده خواهند شد. در ادامه به منظور بررسی کارآمدی مدل پیشنهادی، ایزوتوپ هسته‌های گذاری $^{60-66}\text{Cu}$ انتخاب شد. طیف انرژی برای بررسی درستی مدل‌های پیشنهادی محاسبه گردید. نتایج توصیف میکروسکوپی با داده‌های تجربی و پیشگویی‌های مدل IBM-۱ BFFM مقایسه شد.

۲. چارچوب تئوری کار

۱.۲ فرمالیسم مدل IBM-۱ BFFM در ناحیه گذار $O(6)-U(5)$ براساس جبر آفین $SU(1,1)$

در این مقاله، به جای استفاده از روش مرسوم [۱، ۲]، از هامیلتونین گذار حاصل از ترکیب هامیلتونین دو حد با استفاده از پارامترهای کنترلی که مبنی بر جبر آفین $SU(1,1)$ با بعد بی‌نهایت می‌باشد استفاده می‌نماییم [۲۰، ۲۱]. جبر لی متناظر با گروه تقارنی $SU(1,1)$ با استفاده از سه عملگر $\{S_+, S_-, S_0\}$ توصیف می‌شود که روابط جابه‌جایی زیر بین آن‌ها برقرار می‌باشد:

$$[S_+, S_-] = -iS_0, [S_+, S_0] = iS_+, [S_-, S_0] = iS_- \quad (1)$$

به منظور کاربرد مفیدتر، از عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده $S_{\pm} = S_{\pm} \pm iS_0$ با روابط جابه‌جایی زیر استفاده می‌کنیم [۲۰، ۲۱].

$$[S_0, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}, [S_+, S_-] = -2S_0 \quad (2)$$

حال می‌توان عملگرهای کازیمیر این گروه را به صورت زیر بیان نمود [۲۰، ۲۱]:

$$\hat{C}_\mp = S_0(S_0 - 1) - S_+ S_- \quad (3)$$

نمایش گروه $SU(1,1)$ صرفاً با استفاده از یک عدد کوانتومی K صورت می‌پذیرد، بنابراین نمایش پایه‌های فضای هیلبرت این جبر به صورت $|K, \mu\rangle$ خواهد بود که K هر مقدار

1. Toki
2. Paar

منفرد که به یک سیستم بوزونی کوپل می شود توصیف می گردد.

در این جا فرض بر این است که در هسته های فرد- فرد، قسمت بوزونی گذار از فاز $U(5)-O(6)$ را انجام دهد. با استفاده از جبر آفین $SU(1,1)$ سعی شد، مدل حل پذیری برای گذار فاز ارایه شود و مدل پیشنهادی برای ایزوتوپ های مس بررسی شدند. ساختار جبر متناظر با این مدل در شکل ۱ نشان داده شده است. هامیلتونین هسته فرد- فرد به صورت مجموع قسمت های بوزونی و قسمت های شرح دهنده اندرکنش باقی مانده بین بوزون و فرمیون و هم چنین اندرکنش فرمیون-

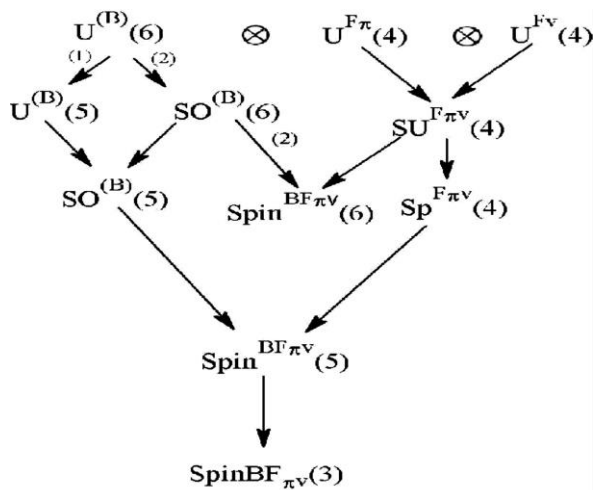
فرمیون شرح داده می شود. هامیلتونین با $j_\pi = \frac{3}{2}$ و $j_\nu = \frac{3}{2}$ در منطقه گذار بین حدود $U^{BF_{\nu}}(5)-O^{BF_{\nu}}(6)$ برحسب مولدهای جبر $SU(1,1)$ و اپراتور کازیمیر زنجیره های زیرگروه (شکل ۱) به صورت زیر پیشنهاد شد:

$$\hat{H} = gS_{B,\nu}^+ S_{B,\nu}^- + \alpha S_{B,\nu} + \beta \hat{C}_\tau (SO^B(5)) + \delta \hat{C}_\tau (Sp^{F_\nu}(4)) + \beta' \hat{C}_\tau (Spin^{BF_{\nu}}(5)) + \gamma \hat{C}_\tau (Spin^{BF_{\nu}}(3)) \quad (11)$$

در هامیلتونین پیشنهادی، هنگامی که $c_s = 0$ و $c_d \neq 0$ حد ارتعاشی $(U^{BF_{\nu}}(5))$ و $c_s = c_d$ حد گامای ناپایدار $(O^{BF_{\nu}}(6))$ را خواهیم داشت و منطقه گذر هنگامی که $c_s \neq c_d$ باشد حاصل می گردد. برای محاسبه ویژه مقادیر هامیلتونین (۱۱)، ویژه حالات این سیستم را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$|k, \nu, s, \nu_d, (\zeta_1, \zeta_\tau), (\tau_1, \tau_\tau), JM\rangle = NS_{x_1}^+ S_{x_2}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle^{BF_{\nu}} \quad (12)$$

$$S_{x_i}^+ = \frac{c_s}{1-c_s^2 x_i} S^+(s) + \frac{c_d}{1-c_d^2 x_i} S^+(d)$$



شکل ۱. ساختار جبر مدل IBFFM-۱ پیشنهادی در هسته فرد- فرد گذاری.

مثبت به خود گرفته و $\mu = K, K+1, \dots$ خواهد بود. با اثر عملگر کازیمیر روی این حالت داریم:

$$\hat{C}_\tau (SU(1,1)) |\kappa\mu\rangle = \kappa(\kappa-1) |\kappa\mu\rangle \quad (4)$$

$$S^\circ |\kappa\mu\rangle = \mu |\kappa\mu\rangle \quad (5)$$

مولدهای گروه $Su^d(1,1)$ از جفت شدگی d بوزون ها به صورت زیر ایجاد می گردند [۲۰، ۲۱]:

$$S_B^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(d^+ d^+), S_B^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{d} \tilde{d}),$$

$$S_B^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_g \mathcal{G}(d_g^+ d_g + d_g \tilde{d}_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\hat{n}_d + 5)$$

$$\hat{n}_d = \sum_\mu d_\mu^+ d_\mu \quad (6)$$

به صورت مشابه، از جفت شدگی s بوزون ها، جبر $SU^s(1,1)$ به وسیله مولدهای زیر شکل می گیرد:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}S^{+\tau}, \frac{1}{\sqrt{2}}S^\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}(S^+S + SS^+) \quad (7)$$

حال می توان به صورت مشابه، جبر بی نهایت بعدی تولید نمود:

$$S_n^\pm = c_s^{2n+1} S^\pm(s) + c_d^{2n+1} S^\pm(d) \quad (8)$$

$$S_n^\circ = c_s^{2n} S^\circ(s) + c_d^{2n} S^\circ(d) \quad (9)$$

کمیات C_d و C_s پارامترهای حقیقی بوده و n مقادیر $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را به خود می گیرد. این مولدها در روابط جابه جایی زیر صدق می نمایند:

$$[S_m^\circ, S_n^\pm] = \pm S_{m+n}^\pm, [S_m^+, S_n^-] = -2\delta_{m+n+1}^\circ \quad (10)$$

بنابراین مجموعه عملگرهای $\{S_m^\mu, \mu = \circ, +, -; m = 0, \pm 1, \dots\}$ یک جبرلی آفین $SU(1,1)$ بدون گستردگی مرکزی را فراهم می آورند. تقارن های بوز- فرمی متناسب با هر یک از تقارن های دینامیکی مدل IBM-۱ در نظر گرفته می شود. پیش تر مدل حل پذیر جدیدی برای گذار فازی- شکلی بین حدهای تقارن دینامیکی کروی به چرخنده گامای ناپایدار در هسته هایی با عدد جرمی فرد با استفاده از جبر آفین $SU(1,1)$ پیشنهاد کردیم [۱۷، ۱۸-۲۱]. رویکرد مبتنی بر تقارن بوزون- فرمیون می تواند هم چنین برای سیستم های فرد- فرد به کار برده شود. به عبارت دیگر، مدل اندرکنش بوزون- فرمیونی (IBFM-۱) می تواند برای توصیف هسته های فرد- فرد بسط داده شود که مدل اندرکنش بوزون- فرمیون- فرمیون (IBFFM-۱) نامیده می شود. ساختار هسته فرد- فرد به صورت یک پروتون و نوترون

۲.۲.۱ معرفی مدل اندرکنش بوزونی ۲

در مدل‌های IBM-۱، IBFM-۱ و IBFFM-۱، بین پروتون و نوترون تفاوتی قائل نبودیم. بنابراین، تعداد بوزون‌های پروتونی با تعداد بوزون‌های نوترونی جمع می‌شد، هم‌چنین در اندرکنش‌ها، نیروهای کولنی را در نظر نگرفتیم. اما در مدل لایه‌ای کاملاً آشکار است که در هسته‌های سنگین و متوسط، پروتون‌ها و نوترون‌ها، لایه‌های متفاوتی را اشغال می‌کنند و این بیان‌گر این می‌باشد که اندرکنش بین جفت‌های پروتونی و جفت‌های نوترونی از اندرکنش بین جفت‌های هم‌نوع متفاوت است. این موضوع در تضاد با این است که نیروهای کوتاه‌برد هسته‌ای از نوع بار مستقل می‌باشد و در IBM-۱ هم از آن استفاده نشده است. از آن‌جا که ساده‌سازی‌های صورت گرفته در IBM-۱ باعث می‌شود که به هنگام برازش داده‌های تجربی، پارامترها از هسته‌ای به هسته‌ی دیگر به‌صورت نامنظم تغییر کند، تفسیر و تعبیر آن‌ها مشکل خواهد بود. از طرفی مدل IBM-۲ با تفاوت قائل شدن بین پروتون و نوترون نتایجی را ارائه می‌دهد که به راحتی می‌توان آن‌ها را با نمونه SD مدل لایه‌ای توجیه کرد. IBM-۲ مفهوم کاربردی‌تری دارد، زیرا همه‌ی پارامترهای آن به تعداد بوزون‌های پروتونی و بوزون‌های نوترونی وابسته‌اند و این محاسبه‌ی طیف‌های هسته‌ای ناآشنا را ممکن می‌سازد.

مدل اندرکنش بوزون فرمیون خاص هسته A- فرد را به وسیله جفت‌شدگی درجات آزادی تک ذره و جمعی را به شیوه‌های که برای مدل تجمعی انجام شد شرح می‌دهد. مدل متناظر با این حالت مدل اندرکنش بوزونی ۲ است که با در نظر گرفتن فرمیون‌ها در این مدل به مدل اندرکنش بوزون فرمیون ۲ منجر می‌شود. حالتی که p و n جفت نشوند، در هسته حالت فرد- فرد صورت می‌پذیرد. بنابراین در این مدل، بوزون‌های p(n) با $J^P = 0^+$ به‌وسیله $J^P = 2^+$ و $S_\pi(S_\nu)$ و پروتون‌ها و نوترون‌های جفت نشده نیز با عمل‌گرهای a_ν و a_π نمایش داده می‌شوند. در این مدل تعداد کل بوزون‌ها و فرمیون‌ها به صورت زیر خواهند بود [۲]:

$$\begin{aligned} N_B &= N_{B\pi} + N_{B\nu} \\ N_F &= N_{F\pi} + N_{F\nu} \end{aligned} \quad (18)$$

در رابطه، $N_{B\pi}(N_{B\nu})$ بیان‌گر تعداد بوزون پروتونی (نوترونی) است در حالی‌که تعداد فرمیون پروتونی (نوترونی) با $N_{F\pi}(N_{F\nu})$ نشان داده شده است. ساختار جبر مدل جمع مستقیم همه ۴ جبر به‌صورت زیر می‌باشد [۲].

$$U_\pi^B(\epsilon) \otimes U_\nu^B(\epsilon) \otimes U_\pi^F(\Omega_\pi) \otimes U_\nu^F(\Omega_\nu) \quad (19)$$

$$\Omega_\pi = \sum_{j_\pi} (2j_\pi + 1) \quad (20)$$

$$\Omega_\nu = \sum_{j_\nu} (2j_\nu + 1) \quad (21)$$

که $JM, (\tau_\nu, \tau_\pi), (\zeta_\nu, \zeta_\pi), v_d$ اعداد کوانتومی گروه‌های $Sp^{BF_{\pi\nu}}(2), Spin^{BF_{\pi\nu}}(3), Spin^{BF_{\pi\nu}}(5), Sp^{BF_{\pi\nu}}(4), O^B(5)$ هستند. به‌منظور تعیین مقادیر مجاز این اعداد کوانتومی برای هر تعداد بوزون داده شده، روش ارایه شده در مرجع [۱۶] به‌کار برده شد. با ضرایب کلبش گوردن (CG)، پایین‌ترین حالت، $|lw\rangle^{BF_{\pi\nu}}$ ، برحسب قسمت‌های بوزونی و فرمیونی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} |lw\rangle^{BF_{\pi\nu}} &= \sum_{m_\pi m_\nu m_\pi M_b} C_{M, m_\pi, M_b}^{J, j_{\pi\nu}, L_b} C_{m_\pi, m_\nu, m_\nu}^{j_{\pi\nu}, j_\pi, j_\nu} \\ |j_\pi m_\pi\rangle |j_\nu m_\nu\rangle |lw\rangle_{M_b}^B & \\ |lw\rangle_{M_b}^B &= \\ \left| N_{B\pi}, k_d = \frac{1}{2} \left(v_b + \frac{\delta}{2} \right), \mu_d = \frac{1}{2} \left(n_d + \frac{\delta}{2} \right), k_s = \frac{1}{2} \left(v_s + \frac{\delta}{2} \right), \mu_s = \frac{1}{2} \left(n_s + \frac{\delta}{2} \right), L_b M_b \right\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

نماد $C_{M, m_\pi, M_b}^{J, j_{\pi\nu}, L_b}$ و $C_{m_\pi, m_\nu, m_\nu}^{j_{\pi\nu}, j_\pi, j_\nu}$ ضرایب کلبش گوردن را نشان می‌دهند

$$\begin{aligned} S_n^\circ |lw\rangle^{BF_{\pi\nu}} &= \Lambda_n^\circ |lw\rangle^{BF_{\pi\nu}} \\ \Lambda_n^\circ &= c_s^{v_n} \left(v_s + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} + c_d^{v_n} \left(v_d + \frac{\delta}{2} \right) \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

حال ویژه مقادیر هامیلتونین (۱۱) به‌صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{aligned} E^{(k)} &= h^{(k)} + \alpha \Lambda_n^\circ + \beta v_d (v_d + 3) + \delta (\zeta_\nu (\zeta_\nu + 2) + \zeta_\pi (\zeta_\pi + 1)) + \\ &\beta' (\tau_\nu (\tau_\nu + 2) + \tau_\pi (\tau_\pi + 1)) + \gamma J (J + 1) \end{aligned} \quad (15)$$

$$h^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha}{x_i} = \sum_{i=1}^k \frac{c_s^{v_i} \left(v_s + \frac{1}{2} \right) + c_d^{v_i} \left(v_d + \frac{\delta}{2} \right)}{1 - c_s^{v_i} x_i} - \sum_{i \neq j} \frac{2}{x_i - x_j} \quad (16)$$

هم‌چنین عدد کوانتومی (k) با استفاده از رابطه ۱۸ به تعداد کل بوزون‌های سیستم مرتبط می‌شود.

$$N_B = 2k + v_d + v_s \quad (17)$$

۲.۲ توصیف میکروسکوپی

به منظور در نظر گرفتن درجات آزادی نوترون- پروتونی در مدل پیشنهادی، ابتدا باید مختصری به معرفی مدل اندرکنش بوزونی ۲ که شامل درجات آزادی پروتون و نوترونی است بپردازیم.

در این رابطه داریم:

$$S_n^\pm = \sum_t c_{s;t}^{\gamma n+1} S^\pm(s;t) + c_{d;t}^{\gamma n+1} S^\pm(d;t)$$

$$S_n^\circ = \sum_t c_{s;t}^{\gamma n} S^\circ(s;t) + c_{d;t}^{\gamma n} S^\circ(d;t) \quad (24)$$

در این روابط جمع روی اندیس‌های نوترون v و پروتون π است. ویژه حالت‌های هامیلتونین (۲۴) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\left| k; v_s^\pi, v_s^v, v^\pi, v^v, n_\Delta^\pi J_\pi, n_\Delta^v J_v; JM \right\rangle =$$

$$NS_{x_1}^+ S_{x_r}^+ \dots S_{x_k}^+ |lw\rangle^{BF_{\pi v}}$$

$$|lw\rangle^{BF_{\pi v}} =$$

$$\sum_{m_\pi m_v} \sum_{M_\pi M_v} C_{M_\pi, m_\pi}^{J_\pi, j_\pi, J_\pi} C_{m_\pi, m_\pi}^{j_\pi, j_\pi, j_\pi} C_{M_v, m_v}^{J_v, j_v, J_v} C_{m_v, m_v}^{j_v, j_v, j_v} |j_\pi m_\pi\rangle |j_v m_v\rangle$$

$$|lw\rangle_\pi^B |lw\rangle_v^B$$

$$|lw\rangle_\pi^B =$$

$$\left| N_{B\pi}, k_{d,\pi} = \frac{1}{2} \left(v^\pi + \frac{\delta}{2} \right), \mu_{d,\pi} = \frac{1}{2} \left(n_{d,\pi} + \frac{\delta}{2} \right), k_{s,\pi} = \frac{1}{2} \left(v_s^\pi + \frac{1}{2} \right), \mu_{s,\pi} = \frac{1}{2} \left(n_{s,\pi} + \frac{1}{2} \right); L_\pi M_\pi \right\rangle$$

$$|lw\rangle_v^B =$$

$$\left| N_{Bv}, k_{d,v} = \frac{1}{2} \left(v^v + \frac{\delta}{2} \right), \mu_{d,v} = \frac{1}{2} \left(n_{d,v} + \frac{\delta}{2} \right), k_{s,v} = \frac{1}{2} \left(v_s^v + \frac{1}{2} \right), \mu_{s,v} = \frac{1}{2} \left(n_{s,v} + \frac{1}{2} \right); L_v M_v \right\rangle \quad (25)$$

اگر $N_{B\pi} + N_{Bv} = 2k + v_s^\pi + v_s^v + v^\pi + v^v$ باشد، داریم:

$$S_{x_i}^+ = \sum_t \left(\frac{c_{s;t}}{1 - c_{s;t}^\gamma} S^+(s;t) + \frac{c_{d;t}}{1 - c_{d;t}^\gamma} S^+(d;t) \right) \quad (26)$$

برای توصیف طیف انرژی سیستم‌های مورد مطالعه باید مقدار C تا x_i از روابط زیر حاصل گردد:

$$\frac{\alpha}{x_i} = \sum_{t=\pi, v} \frac{c_{s;t}^\gamma \left(v_s^t + \frac{1}{2} \right)}{1 - c_{s;t}^\gamma x_i} + \frac{c_{d;t}^\gamma \left(v_s^t + \frac{\delta}{2} \right)}{1 - c_{d;t}^\gamma x_i} - \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j} \quad (27)$$

ویژه مقادیر هامیلتونین (۲۴) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E^{(k)} = h^k + \alpha \Lambda_i +$$

$$\beta \left(v_\pi (v_\pi + 3) + v_v (v_v + 1) \right) +$$

$$\delta \left(\zeta_{\pi v} (\zeta_{\pi v} + 3) + \zeta_{v \pi} (\zeta_{v \pi} + 1) \right) +$$

$$\gamma J_{\pi v} (J_{\pi v} + 1) + \gamma' S (S + 1) + \eta J (J + 1) \quad (28)$$

$\Omega_\pi (\Omega_v)$ ابعاد فضای فرمیونیک هستند.

برای جفت‌شدگی بوزون‌ها و فرمیون‌ها دو روت اصلی وجود دارد: اولین روت آن است که ابتدا بوزون‌ها و سپس فرمیون‌ها جفت شوند که در نهایت ترکیباتی از بوزون‌ها و فرمیون‌ها با هم جفت شوند. روت دوم حالتی است که ابتدا پروتون‌ها و سپس نوترون‌ها جفت شوند و در نهایت ترکیبات پروتون‌ها و نوترون‌ها جفت شوند [۳].

عملگر هامیلتونین مدل اندرکنش بوزون فرمیون ۲ دارای فرم زیر می‌باشد:

$$H = H_B + H_F + V_{BF} \quad (22)$$

در این هامیلتونین قسمت بوزونی با H_B قسمت فرمیونی H_F و V_{BF} بیان‌گر اندرکنش بوزون و فرمیون است. این هامیلتونین شامل پارامترهای زیادی است که مطالعه با استفاده از همه این پارامترها غیر ممکن است [۲۱].

۲.۲.۲ مدل اندرکنش بوزون- فرمیون- فرمیونی ۲ (IBFFM-۲) ارایه شده براساس جبر آفین $SU(1,1)$

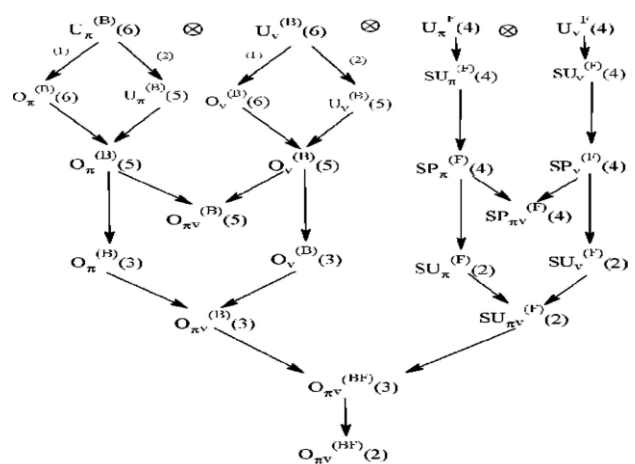
روش ذکر شده را می‌توان در مورد IBFFM-۲ هم به کار برد. چون خواهیم حد میکروسکوپی هسته فرد- فرد را بررسی کنیم، پس باید ساختار جبر قسمت بوزونی مطابق با مدل IBM-۲ باشد. بنابراین اولین روت که ابتدا بوزون‌ها و سپس فرمیون‌ها جفت شوند و در نهایت ترکیباتی از بوزون‌ها و فرمیون‌ها با هم جفت می‌شوند، انتخاب شد. تجزیه گروهی مربوط به IBFFM-۲ در شکل ۲ نشان داده شده است.

در این مورد می‌توان هامیلتونین را به صورت زیر نوشت:

$$\hat{H} = g S_{B,\pi}^+ S_{B,\pi}^- + \alpha S_{B,v}^+ +$$

$$\beta \hat{C}_\gamma (O_{\pi v}^B(\delta)) + \delta \hat{C}_\gamma (Sp^{F_{\pi v}}(\epsilon)) +$$

$$\gamma \hat{C}_\gamma (O_{\pi v}^B(\delta)) + \gamma' \hat{C}_\gamma (SU_{\pi v}^F(\zeta)) + \eta \hat{C}_\gamma (O_{\pi v}^{BF}(\zeta)) \quad (23)$$



شکل ۲. ساختار جبر مدل IBFFM-۲ پیشنهادی در هسته فرد- فرد گذاری.

که در آن

$$\Lambda_i = \sum_{t=\pi, \gamma} c_{s,t}^{\gamma} \left(v_s^t + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{\gamma} + c_{d,t}^{\gamma} \left(v_d^t + \frac{5}{\gamma} \right) \frac{1}{\gamma} \quad (29)$$

۳. روش تعیین پارامترها

همپلتونین‌های ارایه شده به ازای $C_s=C_d$ تقارن دینامیکی $OBF(6)$ به ازای $C_s = 0, C_d \neq 0$ برای توصیف حد تقارنی $UBF(5)$ و نهایتاً به ازای $C_s \neq C_d \neq 0$ برای مطالعه ناحیه گذاری مورد استفاده قرار می‌گیرند. C_d را می‌توان ثابت در نظر گرفت و C_s می‌تواند مقادیری بین صفر تا C_d را اختیار کند. در این مقاله ما مقدار C_d را یک در نظر می‌گیریم و C_s متغیری بین صفر تا یک خواهد بود. هسته‌های مختلف بسته به مقدار پارامتر کنترلی C_s بین حدود $UBF(6)$ با $C_s = 0$ و یا $OBF(6)$ با $C_s = 1$ طبقه‌بندی می‌شوند. هسته‌های متناظر با نقطه بحرانی گذار فازی تقارن $E(5)$ نیز با مقدار بینابینی پارامتر کنترلی یعنی $C_s = 0.5$ توصیف می‌شوند. از طرفی این پارامتر کنترلی میزان ترکیب پیش‌بینی آرایش‌های کروی و تغییر شکل یافته را در طیف انرژی و ساختار هسته‌های ناحیه گذار فازی- شکلی مشخص می‌نماید. نزدیک شدن مقدار این پارامتر به مقادیر هر کدام از حدود تقارن $OBF(6)$ یا $UBF(5)$ ، معرف سهم بیشتر تقارن متناظر در هسته انتخابی می‌باشد.

برای تعیین طیف انرژی هر هسته انتخابی در این ناحیه مطالعاتی، باید مجموعه‌ای از معادله‌های غیرخطی بت- آنساتز با تعداد k مجهول حل شود. بدین منظور ابتدا با تغییر متغیر زیر

$$C = \frac{C_s}{C_d} \leq 1, y_i = c_d^{\gamma} x_i \quad (30)$$

شکل جدید رابطه (۱۷) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$h^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha}{y_i} = \sum_{i=1}^k \frac{C^{\gamma} \left(v_s + \frac{1}{\gamma} \right) + \left(v_d + \frac{1}{\gamma} \right)}{1 - C^{\gamma} y_i} - \sum_{i \neq j} \frac{2}{y_i - y_j} \quad (31)$$

پس کمیت C کنترل پارامتر و پارامترهای $\delta, \gamma, \alpha, g$ مقادیر حقیقی هستند. برای تعیین ریشه‌های بت- آنساتز جهت تعیین ترازهای انرژی هسته مورد مطالعه با مقادیر v_s, v_d خاص ابتدا با استفاده از مقادیر حاصل از برازش طیف انرژی به مقادیر تجربی قابل دسترس مقدار کمیت α و C تعیین شده و سپس معادله بالا به ازای حالت $i=1$ حل می‌شود سپس با استفاده از برنامه‌های محاسباتی موجود از جمله *matlab, mathematica* سایر ریشه‌های این سیستم به‌طور کامل محاسبه می‌گردد. لازم به توضیح است که محاسبات مورد نظر به ازای مقادیر مختلف ثابت‌های حاصل از فرایند برازش اطلاعات تجربی [۲۲] تا جایی تکرار می‌شود تا مقدار خطای محاسباتی که به صورت

$$\sigma = \left(\frac{1}{N_{tot}} \sum_{i,tot} |E_{exp}(i) - E_{col}(i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

تعریف می‌شود، به کمینه مقدار خود برسد. به‌منظور به‌دست آوردن طیف انرژی و محاسبات واقعی برای این هسته‌ها، نیاز است تا متغیر هامپلتونین‌های معادله‌های (۱۱) و (۲۴) تعیین شود. متغیرها شامل معادله‌های بت- آنساتز با فرایند برازش کمینه مربعات به داده‌های تجربی به دست می‌آید و سپس با تعیین این متغیرها، ویژه مقادیر محاسبه می‌شوند. مقدار خطای محاسباتی از رابطه بالا محاسبه می‌شود که کمیت برازش را مشخص می‌کند [۳].

۴. محاسبه طیف انرژی ایزوتوپ‌های $^{60-66}Cu$ مقایسه با داده‌های تجربی موجود

به منظور بررسی کارآمدی مدل‌های پیشنهادی در حدود تقارن دینامیکی و منطقه گذار، حالت‌های پارینه مثبت ایزوتوپ‌های سبک مس با یک تک پروتون و تک نوترون بیرون پوسته بسته $Z=28$ و $N=28$ ($^{60-66}Cu$) انتخاب شدند. در این مطالعه حالت‌های پارینه مثبت هسته فرد- فرد $^{60-66}Cu$ مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند. دلایل این انتخاب به شرح زیر است:

۱. حالت‌های پارینه مثبت این هسته‌ها با قرار گرفتن تک پروتون در پوسته $2p_{3/2}$ و تک نوترون در پوسته‌های مجاز $2p_{1/2}, 2p_{3/2}$ و $1f_{5/2}$ ایجاد می‌شود. در این‌جا یک فرضیه ساده‌سازی انجام شد که حالات تک ذره بر روی $j=3/2$ ایجاد شوند. بنابراین حالت‌های پارینه مثبت هسته فرد-فرد مس با در نظر گرفتن تک پروتون و تک نوترون بیرون پوسته بسته با ممنومم زاویه‌ای $-\left(\frac{3}{2}\right)$ ایجاد می‌شود.

مطالعات صورت گرفته بر روی ایزوتوپ‌های فرد مس و هسته‌های زوج همسایه آن نشان‌دهنده آن است که ایزوتوپ‌های مس دارای ویژگی گذار از حد ارتعاشی به گامای ناپایدار است. پس ساختار هسته فرد- فرد مس به صورت یک تک پروتون و یک تک نوترون با $j=3/2$ که به یک مغز جمعی که گذار از حالت کروی به چرخنده گامای ناپایدار را انجام می‌دهد، در نظر گرفته شده است. برای به‌دست آوردن طیف انرژی و محاسبات واقعی برای این هسته‌ها نیاز است تا پارامترهای هامپلتونین‌های معادله‌های (۱۱) و (۲۴) تعیین شوند. متغیرها شامل معادله‌های بت آنساتز با فرایند برازش کمینه مربعات به داده‌های تجربی به‌دست می‌آید و سپس با تعیین این متغیرها، ویژه مقادیر محاسبه می‌شوند. مقدار خطای محاسباتی از رابطه (۳۱) محاسبه می‌شود که کمیت برازش را مشخص می‌کند. لازم به‌ذکر است که داده‌های تجربی از مراجع [۱۶-۲۶، ۲۲] برگرفته شده است. بهترین برازش برای پارامترهای هامپلتونین‌های (۱۱) و (۲۴) و هم‌چنین کنترل پارامترهایی که در کار کنونی استفاده شده است، در جدول‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است. اعداد کوانتومی حالت‌های متفاوت هر ایزوتوپ مشخص و یک مقایسه بین انرژی تجربی و تئوری در جدول‌های ۳ (الف تا د) نشان داده شده است. جدول ۱ پارامترهای هامپلتونین مدل ۱-IBFFM و جدول ۲ پارامترهای مدل ۲-IBFFM را نشان می‌دهد. شکل ۳، یک

انرژی این ایزوتوپ‌ها در مقایسه با طیف تجربی مقادیر متفاوتی را نشان می‌دهند زیرا برای کاهش خطا برای این هسته‌ها از چارچوب IBFFM-۲ استفاده شده است. شکل‌های ۴ تا ۸ مقایسه بین طیف انرژی تجربی و پیشگویی‌های مدل‌های پیشنهادی را برای ایزوتوپ‌های $^{60-66}\text{Cu}$ در منطقه کم انرژی را نشان می‌دهد.

مقایسه‌ای از خطای محاسبات صورت گرفته توسط مدل IBFFM-۱ و مدل IBFFM-۲ پیشنهادی را نشان می‌دهد. طیف انرژی برای ایزوتوپ‌های مس ($^{60-66}\text{Cu}$) در چارچوب IBFFM-۱ با توجه به مقادیر جدول ۱، در جدول‌های ۳ (الف) تا (د) آورده شده است. نتایج ترکیب دو تقارن را برای این هسته با توجه به مقدار کنترل پارامتر نشان می‌دهد. برخی از ترازهای

جدول ۱. پارامترهای هامیلتونین (۱۱) استفاده شده در محاسبه ایزوتوپ‌های فرد-فرد Cu. همه کمیت‌ها برحسب keV هستند

هسته	C_s	α	β	δ	β'	γ	σ
^{60}Cu	۰٫۰۰۱	۱۶۳٫۰۸	-۴۰٫۰۲	۲٫۵۴	۰٫۷۳۲	۳۷٫۴	۲۳۲٫۶
^{62}Cu	-۰٫۵۷	۱۵٫۲۸	۲۳۳٫۶۸	۵٫۴۰۵	۴٫۳۲۸	-۶٫۵	۱۵۶٫۸
^{64}Cu	۰٫۲	۱۱۵٫۷	۲۶٫۶۳۸	۴٫۴۹۳	-۲٫۵۴	-۱۰٫۴	۱۲۱
^{66}Cu	-۰٫۱۵	۲۸٫۰۸	۱٫۹۴	۷٫۰۵	۲٫۳۷	-۱۱٫۷	۱۸۳٫۶

جدول ۲. پارامترهای هامیلتونین (۲۴) استفاده شده در محاسبه ایزوتوپ‌های فرد-فرد Cu. همه کمیت‌ها برحسب keV هستند

هسته	C_{sv}	C_{st}	α	β	δ	γ	γ'	η	σ
^{60}Cu	۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۱	۷۳٫۲	-۹٫۷	-۵٫۱	-۱۲٫۰۳	۹٫۴	۳۷٫۴	۱۵۳٫۹
^{62}Cu	-۰٫۵۷	-۰٫۵۷	۸٫۸	۱۱۷٫۱۵	۲۹٫۱۴	۵۸٫۵۷	-۱۶٫۳	۲۶٫۲	۱۱۴٫۳
^{64}Cu	۰٫۲	۰٫۲	۴۳٫۶۲	-۱۶٫۹	۴٫۰۳	-۱۳٫۴۵	۸٫۱	۱۰٫۳	۵۹٫۸۲
^{66}Cu	-۰٫۱۵	-۰٫۱۵	۹۹	-۳۰٫۴۵	-۱٫۳۴	-۸٫۳۵	۱٫۰۴	۳۹٫۵	۶۴٫۵

جدول ۳ (الف). اعداد کوانتومی حالت‌های متفاوت و یک مقایسه بین انرژی تئوری مدل‌های پیشنهادی و تجربی هسته ^{60}Cu

J	J_{π}	S	$\zeta_{1\pi}$	$\zeta_{1\nu}$	V_2	V_1	Vdn	Vdp	V_{sn}	V_{sp}	ζ_2	ζ_1	τ_2	τ_1	V_d	$E_{exp.}$	$E_{IBFFM-\gamma}$	$E_{IBFFM-\pi}$	^{60}Cu
۲	۰	۲	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	$ 2_1^+$
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۶۲٫۲	۱۵۲٫۲	۲۹۸٫۳	$ 2_1^+$
۲	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۲۸۷٫۱	۳۵۸٫۹	۳۷۳٫۹	$ 2_2^+$
۲	۲	۳	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۲	۱	۳۳۵٫۶۴	۵۰٫۸	۳۶۷٫۳	$ 2_2^+$
۱	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۳۶۴٫۵	۲۸۱٫۲	۲۲۴٫۲	$ 2_1^-$
۳	۱	۳	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۴۵۳٫۸۲	۴۶۸٫۲	۵۲۷٫۵	$ 3_1^-$
۴	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۵۵۷٫۵۳	۵۱۴٫۴	۶۱۳٫۱	$ 4_1^-$
۳	۲	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۵۸۷	۵۹۳٫۸	۳۱۳٫۸	$ 3_2^-$
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۶۷۰٫۰۷	۶۴۰٫۵	۴۶۸٫۷	$ 1_1^-$
۳	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۷۸۱٫۰۲	۶۹۸	۵۰۹٫۴	$ 3_2^-$
۵	۲	۳	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۱۶۰۳٫۶	۱۵۵۰	۱۲۸۷	$ 5_1^-$

جدول ۳ (ب). اعداد کوانتومی حالت‌های متفاوت و یک مقایسه بین انرژی تئوری مدل‌های پیشنهادی و تجربی هسته ^{62}Cu

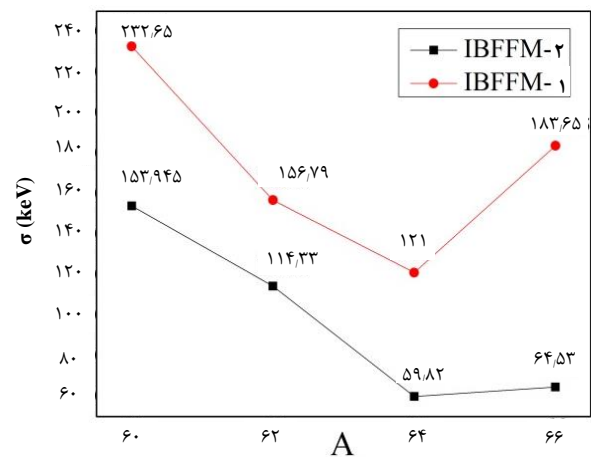
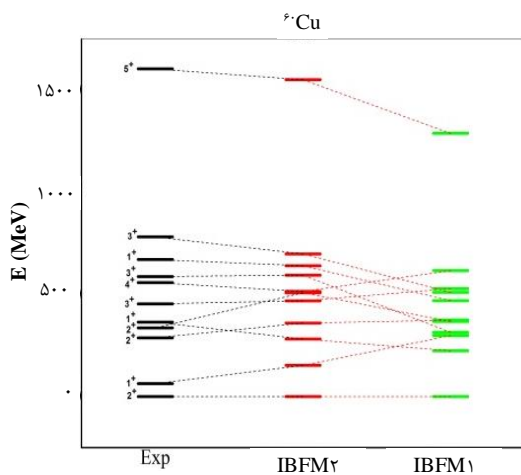
J	J_{π}	S	$\zeta_{1\pi}$	$\zeta_{1\nu}$	V_2	V_1	Vdn	Vdp	V_{sn}	V_{sp}	ζ_2	ζ_1	τ_2	τ_1	V_d	$E_{exp.}$	$E_{IBFFM-\gamma}$	$E_{IBFFM-\pi}$	^{62}Cu
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	$ 1_1^+$
۲	۰	۲	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۴۰٫۸	۴۶٫۹	۱۷٫۵	$ 2_1^+$
۲	۲	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۲۴۳٫۴	۲۷۷٫۴	۵۱۷٫۴	$ 2_2^+$
۲	۲	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۲	۱	۱	۲۸۷٫۸	۲۸۰٫۱	۴۹۷٫۹	$ 2_2^+$
۴	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۳۹۰٫۱	۳۵۹٫۹	۴۲۶٫۲	$ 4_1^-$
۳	۱	۳	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۴۲۶٫۱	۳۱۱٫۲	۴۰۳٫۲	$ 3_1^-$
۱	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۵۴۸٫۳	۵۲۹٫۹	۵۴۳٫۴	$ 1_1^-$
۱	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۶۳۷٫۴	۸۳۴٫۲	۵۱۷٫۵	$ 1_2^-$
۲	۱	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۶۴۴٫۸	۸۵۶	۴۸۲٫۵	$ 2_1^-$
۳	۲	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۶۷۴٫۹	۶۶۰٫۴	۴۷۸٫۳	$ 3_2^-$
۲	۲	۳	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۲	۱	۷۲۷٫۷۲	۹۳۷٫۶	۴۵۰٫۳	$ 2_2^-$

جدول ۳ (ج). اعداد کوانتومی حالت‌های متفاوت و یک مقایسه بین انرژی تئوری مدل‌های پیشنهادی و تجربی هسته ^{66}Cu

J	J_{π}	S	$\zeta_{1\pi}$	$\zeta_{1\nu}$	V_2	V_1	V_{dn}	V_{dp}	V_{sn}	V_{sp}	ζ_2	ζ_1	τ_2	τ_1	V_d	$E_{\text{exp.}}$	$E_{\text{IBFFM-2}}$	$E_{\text{IBFFM-1}}$	^{66}Cu
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	$ 1_1^-\rangle$
۲	۰	۲	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱۵۹,۲	۱۷۲,۲	۱۷۳,۹	$ 2_1^+\rangle$
۲	۲	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۲۷۸,۲	۲۵۴,۶	۲۴۴,۸	$ 2_2^+\rangle$
۱	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۳۴۳,۹	۳۲۳	۲۸۶,۵	$ 1_2^-\rangle$
۳	۰	۳	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۳۶۲,۲	۳۷۳	۵۱۸,۶	$ 3_1^-\rangle$
۴	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۵۷۴,۶	۴۴۳,۷	۵۹۲,۴	$ 4_1^-\rangle$
۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۲	۱	۶۰۸,۷	۵۷۰,۸	۷۳۴,۵	$ 2_2^-\rangle$	
۱	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۶۶۳	۷۶۳,۱	۷۹۵,۳	$ 1_3^-\rangle$
۲	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۷۳۹	۷۰۳,۳	۷۵۸,۷	$ 2_3^-\rangle$
۳	۲	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۷۴۶,۲	۷۳۳,۱	۶۷۵,۸	$ 3_2^-\rangle$
۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۸۷۸,۲	۹۱۵,۵	۶۳۲,۱	$ 0_1^-\rangle$
۳	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۸۹۵,۷	۹۶۳	۶۹۱	$ 3_3^-\rangle$
۱	۲	۳	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۹۲۷	۸۳۱	۷۸۶	$ 1_4^-\rangle$

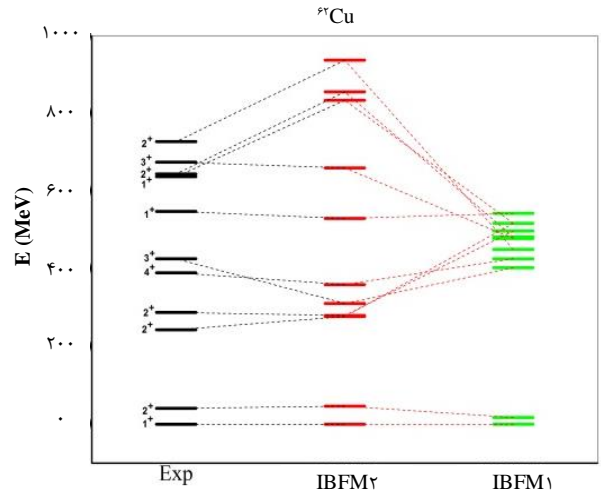
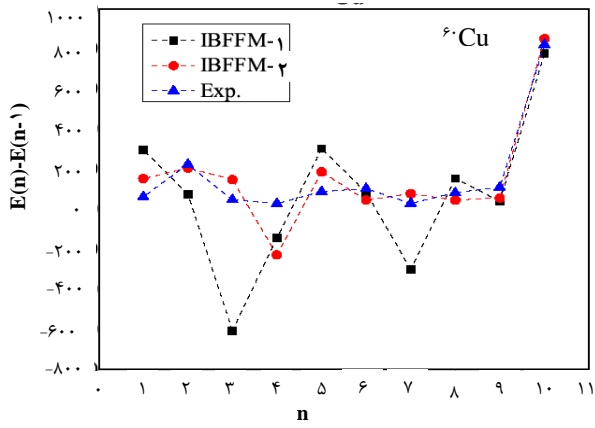
جدول ۳ (د). اعداد کوانتومی حالت‌های متفاوت و یک مقایسه بین انرژی تئوری مدل‌های پیشنهادی و تجربی هسته ^{66}Cu

J	J_{π}	S	$\zeta_{1\pi}$	$\zeta_{1\nu}$	V_2	V_1	V_{dn}	V_{dp}	V_{sn}	V_{sp}	ζ_2	ζ_1	τ_2	τ_1	V_d	$E_{\text{exp.}}$	$E_{\text{IBFFM-2}}$	$E_{\text{IBFFM-1}}$	^{66}Cu
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	$ 1_1^-\rangle$
۲	۰	۲	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱۸۵,۹۵	۱۸۲,۲	۲۵	$ 2_1^-\rangle$
۳	۰	۳	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۲۷۵,۰۳	۳۵۲,۴	۱۰۱,۴	$ 3_1^-\rangle$
۱	۲	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۳۸۵,۷۸	۳۷۳	۲۳۰,۱	$ 1_2^-\rangle$
۲	۲	۲	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۴۶۵,۱۶	۴۵۴,۶	۴۸۹,۵	$ 2_2^-\rangle$
۴	۲	۴	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۱	۵۹۰,۷	۵۲۰,۸	۶۹۹,۷	$ 4_1^-\rangle$
۲	۲	۲	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۲	۱	۷۲۹,۸	۶۹۵,۲	۸۸۹,۱	$ 2_3^-\rangle$
۲	۲	۲	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۲	۱	۸۲۲,۷	۸۷۲,۶	۹۶۵,۵	$ 2_4^-\rangle$
۲	۲	۲	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱۰۱۷,۱	۱۰۶۳	۹۷۴,۹	$ 2_5^-\rangle$
۱	۲	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱۰۵۲	۹۶۲,۹	۹۸۶,۶	$ 1_3^-\rangle$

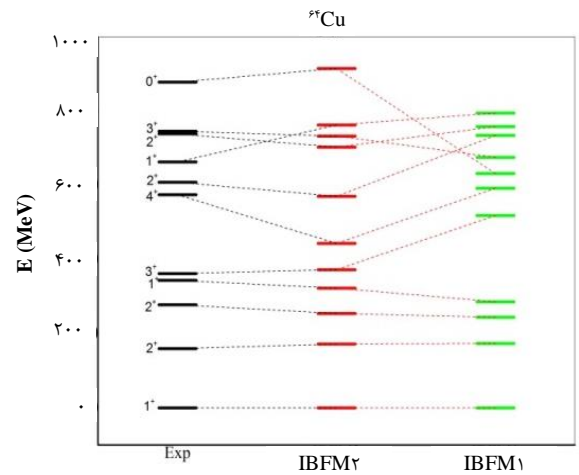
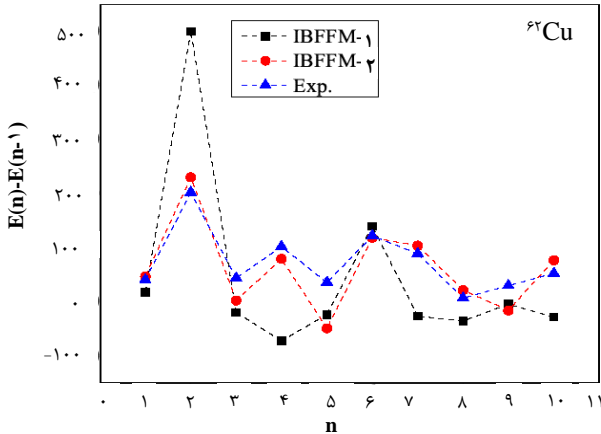


شکل ۴. مقایسه بین ترازهای تجربی موجود [۲۳] و پیشگویی‌های مدل‌ها (IBFFM-۲ و IBFFM-۱) برای ایزوتوپ مس ^{66}Cu .

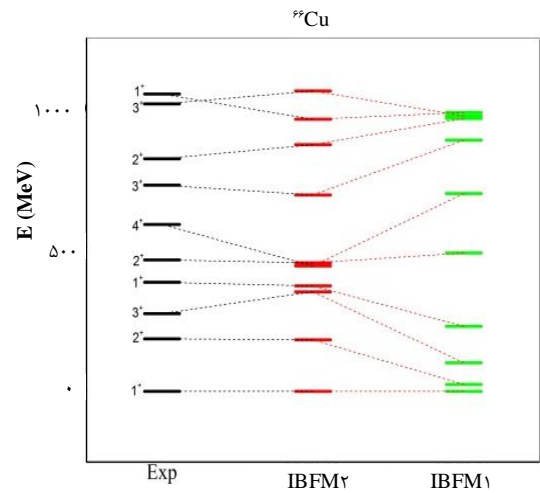
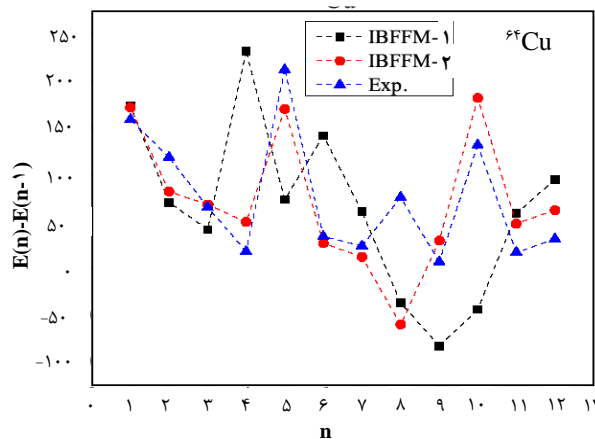
شکل ۳. مقایسه خطای محاسبات مدل IBFFM-۱ و مدل IBFFM-۲.



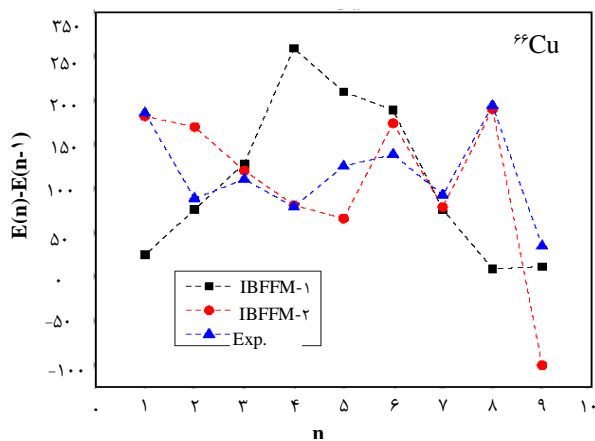
شکل ۵. مقایسه بین ترازهای تجربی موجود [۲۴] و پیشگویی‌های مدل‌ها (IBFFM-۲ و IBFFM-۱) برای ایزوتوپ مس ^{60}Cu .



شکل ۶. مقایسه بین ترازهای تجربی موجود [۲۵] و پیشگویی‌های مدل‌ها (IBFFM-۲ و IBFFM-۱) برای ایزوتوپ مس ^{62}Cu .



شکل ۷. مقایسه بین ترازهای تجربی موجود [۲۶] و پیشگویی‌های مدل‌ها (IBFFM-۲ و IBFFM-۱) برای ایزوتوپ مس ^{66}Cu .



شکل ۸. تفاوت انرژی‌های متوالی را برای ایزوتوپ‌های مس فرد-فرد نسبت به تعداد ترازهای انرژی برای مدل‌های پیشنهادی و داده‌های تجربی [۲۲-۲۶].

مراجع

1. A. Arima, F. Iachello, *The Interacting Boson Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
2. A. Arima, F. Iachello, *The interacting boson model*. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, **31**(1), 75-105 (1981).
3. F. Iachello, P. Van. Isacker, *The interacting boson-fermion model*. Cambridge: Cambridge University Press (1991).
4. F. Iachello, O. Scholten, *Interacting boson-fermion model of collective states in odd-A nuclei*, *Physical Review Letters*, **43**(10), 679 (1979).
5. F. Iachello, *Dynamical supersymmetries in nuclei*. *Physical Review Letters*, **44**(12), 772 (1980).
6. J. Vervier, *Boson-fermion symmetries and supersymmetries in nuclear physics*. *La Rivista del Nuovo Cimento*, **10**(9), 1-102 (1978).
7. S. Brant, V. Paar, D. Vretenar, *SU(6) model for odd-odd nuclei (OTQM/IBOM) and boson-aligned phase diagram in O(6) limit*, *Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei*, **319**(3), 355-356 (1984).
8. S. Brant, et al, *IBFFM description of energy levels and electromagnetic properties of ^{134}Cs* , *Physics Letters B*, **195**, 111-115 (1987).
9. S. Brant, V. Paar, *IBFFM yrast states in odd-odd nuclei associated with O(6) and SU(3) limits*, *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei*, **329**(2), 151-159 (1988).
10. P. Van Isacker, J. Jolie, *Description of vibrational odd-odd nuclei with the interacting boson-fermion-fermion model*, *Nuclear Physics A*, **503**(2), 429-451 (1989).
11. T. Hübsch, V. Paar, *Three dynamical boson-fermion symmetries for odd-odd nuclei*. *Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei*, **319**(1), 111-112 (1984).
12. T. Hübsch, V. Paar, D. Vretenar, *Spin(6) boson-fermion dynamical symmetry for odd-odd nuclei*. *Physics Letters B*, **151**(5-6), 320-324 (1985).
13. V. Kitipova, *Description of even-even and odd-odd nuclei in the Interacting boson model*. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, **323**(2), 247-248 (1986).
14. D.D. Warner, R.F. Casten, A. Frank, *Average resonance capture studies of ^{198}Au : A test of symmetry schemes for odd-odd nuclei*. *Physics Letters B*, **180**(3), 207-212 (1986).
15. H. Toki, H.L. Yadav, Amand Faessler, *Study of transitional odd-odd mass nuclei*, *Z. Physik A* **292**, 79-94 (1979).
16. T. Hübsch, V. Paar, *Spin $BF_{\pi}(5)$ boson fermion dynamical symmetry and supersymmetry for odd-odd nuclei associated with $U_b(5)$ boson limit and exemplification for ^{62}Cu* , *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei*, **327**(3), 287-289 (1987).
17. M. Ghapanvari, et al, *Isospin excitation and shape phase transition in odd-mass Cu isotopes*, *International Journal of Modern Physics E*, **26**(06), 1750036 (2017).
18. M.A. Jafarizadeh, et al. *Study of phase transition of even and odd nuclei based on q-deformed SU(1, 1) algebraic model*. *Nuclear Physics A*, **972**, 86-106 (2018).
19. A.K. Singh, G. Gangopadhyay, *Structure of odd-odd Cu isotopes in the framework of the interacting boson-fermion-fermion model*. *Physical Review C*, **55**(2), 726 (1997).
20. F. Pan, J.P. Draayer, *New algebraic solutions for SO(6) \leftrightarrow U(5) transitional nuclei in the interacting boson model*. *Nuclear Physics A*, **636**(2), 156-168 (1998).
21. M.A. Jafarizadeh, M. Ghapanvari, N. Fouladi, *Algebraic solutions for $U^{BF}(5)$ - $O^{BF}(6)$ quantum phase transition in odd-mass-number nuclei*. *Physical Review C*, **92**(5), 054306 (2015).
22. *National Nuclear Data Center (Brookhaven National Laboratory) Chart of nuclides*, <http://www.nndc.bnl.gov/chart/reColor.jspnewColor=dm>.
23. M.M. King, *Nuclear data sheets update for A= 60*. *Nuclear Data Sheets*, **69**(1), 1 (1993).
24. A.L. Nichols, B. Singh, J.K. Tuli, *Nuclear data sheets for A= 62*. *Nuclear Data Sheets*, **113**(4), 973-1114 (2012).
25. B. Singh, *Nuclear data sheets for A= 64*. *Nuclear Data Sheets*, **108**(2), 197-364 (2007).
26. E. Browne, J.K. Tuli, *Nuclear data sheets for A= 66*. *Nuclear Data Sheets*, **111**(4), 1093-1209 (2010).

نتایج نشان می‌دهد، طیف انرژی ایزوتوپ‌های مس به خوبی ایجاد شده است و طیف انرژی تئوری در مقایسه با طیف تجربی در IBFFM-۲ نتایج بهتری را نشان می‌دهد، هم‌چنین مقدار کنترل پارامتر ترکیب دو تقارن را برای این هسته‌ها نشان می‌دهد. بنابراین ایزوتوپ‌های $^{60-66}\text{Cu}$ ویژگی‌های چرخنده گامای ناپایدار دارند، اما ویژگی‌های ارتعاشی آن برجسته است که با توجه به نزدیک بودن به لایه بسته کروی، شکل ایزوتوپ‌های هسته Cu با تغییر شکل جزیی قابل پیش‌بینی بود.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، از ایده‌ی گذار فاز کوانتومی که به تغییرات ناگهانی ساختار حالت پایه‌ی هسته‌های اتمی برمی‌گردد؛ یعنی شکل هسته به‌طور تدریجی در گذر از یک هسته به همسایگی آن تغییر می‌کند و گاهی می‌تواند این تغییرات ناگهانی باشد؛ استفاده شده است. حل‌های دقیقی برای ویژه مقادیر و ویژه توابع برای هسته‌های فرد- فرد گذاری در منطقه گذار $U(5)$ - $O(6)$ براساس ساختار جبر دوگانگی و جبرلی آفین $SU(1,1)$ در چارچوب مدل IBFFM-۱ و IBFFM-۲ به دست آمد.

ایزوتوپ‌های مس مورد مطالعه در ناحیه گذار فاز بین حدود $U(5)$ و $SO(6)$ قرار دارند. در مطالعه گذار فازی $U(5)$ به $SO(6)$ ، هامیلتونین شامل دو حد خواهد بود و برای نشان دادن میزان ترکیب هر یک از تقارن‌های از پارامتر کنترلی باید استفاده نمود. اگر هامیلتونین کلی سیستم ترکیبی از دو حالت را در نظر گرفته شود، باعث افزایش اعداد کوانتومی در حالت سیستم و ایجاد مشکل در حل مسأله خواهد شد. به‌همین منظور از رهیافت جدید جبر بی‌نهایت بعدی $SU(1,1)$ استفاده شد. ساده‌تر شدن محاسبات، امکان کنترل حرکت در زنجیره‌ی ایزوتوپی با یک پارامتر کنترلی، مزیت‌های اساسی این مدل می‌باشد.

طیف کامل ایزوتوپ‌های هسته فرد- فرد Cu با هامیلتونین گذار $U(5)$ - $SO(6)$ در پایه جبر آفین $SU(1,1)$ برای IBFFM-۱ و IBFFM-۲ به دست آمد. مقایسه بین داده‌های تجربی و تئوری تطابق خوبی را نشان داد که بیان‌گر صحت مدل‌های پیشنهادی است. هم‌چنین طیف انرژی تئوری در مقایسه با طیف تجربی در IBFFM-۲ نتایج بهتری را نشان می‌دهد. مقادیر کنترل پارامتر حاصله برای ایزوتوپ‌های مس وجود ویژگی‌های ارتعاشی را پیش‌بینی می‌کند و ایزوتوپ ^{62}Cu بهترین گزینه برای هسته‌گذاری در منطقه گذار ارتعاشی به گامای ناپایدار است. هم‌چنین نتایج نشان می‌دهند که ویژگی‌های مشخص در هسته‌های گذاری با عدد جرمی فرد می‌تواند در هسته‌های فرد- فرد نیز وجود داشته باشد.