



## تأثیر الکترون‌های پرنرزی بر دوشاخگی ترابحرانی امواج الکترواستاتیکی فرکانس پایین در پلاسما

حسن علی نژاد\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، صندوق پستی: ۴۸۴، بابل - ایران

\*Email: alinejad@nit.ac.ir

مقاله‌ی پژوهشی

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۹/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۲/۴

## چکیده

در این مقاله انواع دو شاخگی‌ها و ویژگی‌های فضای فاز مربوط به انتشار امواج یون- صوتی در یک پلاسما با حضور الکترون‌های پرنرزی با توزیع غیرحرارتی و یون‌های گرم مطالعه شده است. ابتدا یک سیستم دینامیکی برای تحول این امواج فرکانس پایین به دست آمده است و سپس منحنی دوشاخگی سیستم در فضای پارامتری نقاط تعادل و چگالی الکترون‌های پرنرزی ترسیم شده است. محاسبات عددی انجام شده روی پایداری سیستم نشان می‌دهد که به ازای مقادیر معینی از چگالی الکترون‌های پرنرزی در پلاسما، تحول دینامیکی امواج به شکلی است که در آن دوشاخگی ترابحرانی رخ می‌دهد. به ازای مقادیر بحرانی از جمعیت الکترون‌های سریع دو موج سالیوتونی و تناوبی غیرخطی بهم برخورد می‌کنند و سپس پایداری آن‌ها تغییر می‌کند. علاوه بر این، با افزایش چگالی الکترون‌های سریع از این مقدار بحرانی، دوشاخگی زین- گره اتفاق می‌افتد که منجر به انتشار یک موج تناوبی در پلاسما می‌شود. محدوده وجود دوشاخگی‌ها و گذار بین امواج غیرخطی به ازای مقادیر مختلف دمای یونی و چگالی الکترون‌های پرنرزی نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: تحلیل دوشاخگی، امواج فرکانس پایین، فضای فاز، الکترون‌های پرنرزی

## Effect of energetic electrons on transcritical bifurcation of low-frequency electrostatic waves in plasma

H. Alinejad\*

Department of Physics, Faculty of Basic Science, Babol Noshirvani University of Technology, P.O.Box: 484, Babol - Iran

Research Article

Received 11.12.2021, Accepted 24.4.2022

## Abstract

This paper studies the bifurcation types and phase portrait properties of ion-acoustic traveling waves in a plasma comprising warm adiabatic ions and energetic electrons with a nonthermal distribution function. A dynamical system is first derived for the evolution of the low-frequency wave, and then the bifurcation response is determined on the fixed points-energetic electron concentration plane. Our numerical results show that the motion dynamics of traveling waves undergo a transcritical bifurcation for a given value of energetic electrons. Both solitary and nonlinear periodic waves coalesce and switch their stability at the critical electron density value. Moreover, for higher values of the fast electrons density, a saddle-node bifurcation occurs, which leads to the propagation of periodic waves in plasma. The existence domain of bifurcation and transition between nonlinear modes are also determined for different values of ion temperature and energetic electrons density.

**Keywords:** Bifurcation analysis, Low-frequency waves, Phase portrait, energetic electrons

## ۱. مقدمه

پلازما به عنوان یک سیستم پیچیده و غیرخطی بستر مناسبی برای انتشار انواع متعددی از امواج صوتی و اپتیکی با طیف وسیع فرکانسی است که ساختار نسبتاً متفاوتی از هم دارند. در بین آن‌ها، امواج یون- صوتی یکی از مهم‌ترین مدهای الکترواستاتیکی فرکانس پایین در محیط پلازما می‌باشد که در اثر نوسانات یون‌ها در حضور الکترون‌های زمینه که نقش نیروی بازگرداننده را فراهم می‌کنند، منتشر می‌شوند [۱]. از زمانی که ایکیزی و همکارانش [۲]، در آزمایشگاه امواج یون- صوتی را مشاهده کرده‌اند تعداد زیادی از محققین پلازما ساختار این امواج را با استفاده از روش‌های غیرخطی بررسی کرده‌اند. رایج‌ترین تکنیک بررسی چنین مدهایی، تحلیل رابطه پاشندگی و استفاده از روش اختلال کاهشی یا تابع شبه پتانسیل بوده است [۳، ۴] که ابزارهای مناسبی برای مطالعه ساختارهای جای‌گزیده نظیر سالیتون‌ها، دو لایه‌ها و امواج ضربه هستند در حالی که بیش‌تر تحقیقات مرتبط با مطالعه امواج یون- صوتی در حضور الکترون‌هایی با توزیع ماکسولی پایه‌ریزی شده است بیش‌تر محیط‌های پلاسمای فضایی [۵] و پلاسمای تجربی نظیر آزمایش‌های لیزر- پلازما [۶]، وجود الکترون‌های پرنرژی را نشان می‌دهند که خیلی سریع‌تر از یون‌ها حرکت می‌کنند. توزیع الکترون‌های پرنرژی و غیرحرارتی اولین بار توسط کرنز و همکارانش [۵] معرفی شد و هدف آن در ابتدا توصیف داده‌های تجربی گزارش شده از سفینه‌های فضایی در خصوص وجود امواج سالیتونی با قطبیت دوگانه بوده است. در حال حاضر چنین ذرات پرنرژی یکی از مؤلفه‌های اصلی در مطالعه پلاسمای فضایی و آزمایشگاهی است [۷-۱۳]. با وجود این‌که تکنیک‌های متداول بررسی امواج نظیر تحلیل پاشندگی و اختلال کاهشی اطلاعات مفیدی در خصوص ساختار امواج رونده در پلازما را ارائه می‌دهند تحلیل دینامیک غیرخطی به عنوان یک ابزار کلاسیک و اثرگذار در بررسی پایداری سیستم‌های پیچیده نظیر پلازما می‌تواند اطلاعات جامع و متفاوتی از روش‌های مرسوم را ارائه کند. در این میان خیلی از ویژگی‌های دینامیکی سیستم را می‌توان از طریق بررسی و تحلیل فضای فاز مطالعه کرد [۱۴-۱۸]. علاوه بر این استفاده از تحلیل دوشاخگی‌ها در سیستم‌های دینامیکی نظیر دوشاخگی زین- گره، دوشاخگی ترابحرانی و دوشاخگی هوپف، به همراه تئوری آشوب جزئیات بیش‌تری را در خصوص گذار سیستم به حالت تلاطم نشان می‌دهد [۶]. اخیراً بعضی از محققین با به‌کار بردن تحلیل فضای فاز در سیستم‌های دینامیکی ویژگی‌های متفاوتی

از امواج رونده را در پلازما گزارش کرده‌اند [۱۹-۲۳]. وجود سوپرسالیتون‌ها، امواج پرودیگ غیرخطی با دامنه خیلی بالا به همراه امواج سالیتون‌گونه، ساختارهایی از مدهای الکترواستاتیک هستند که منطبق با مدارهای هموکلینیک و مسیرهای بسته تناوبی در نمودار فضای فاز، می‌توانند در محیط پلازما منتشر شوند. برانگیختگی امواج غیرخطی با دامنه بلند در یک ستون پلاسمایی برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ توسط ایکیزی [۲۴] گزارش شده بود برای انتشار چنین امواجی با دامنه بلند نشان داده شده بود که چگالی الکترون‌ها باعث ایجاد ساختاری با دامنه بلند از پتانسیل موج یون صوتی می‌شود. در پلاسمای آزمایشگاهی که از ترکیب گازهای آرگون Ar و سولفور هگزا فلوراید SF<sub>6</sub> تولید شده بود وجود امواج تناوبی یون صوتی با دامنه‌های بزرگ به همراه امواج سالیتون‌گونه مشاهده شده است [۲۵، ۲۶]. در چنین محیطی نشان داده شد که تجمع الکترون‌ها به همراه چگالی یون‌های منفی باعث تغییر ویژگی‌های انتشار امواج می‌گردند. نکته جالب توجه، مشاهده نتایج مشابهی از اثرات چگالی یون‌های منفی روی امواج یون صوتی در اتمسفر و نواحی پایین یونسفر هست که نشان‌دهنده انتشار امواج تناوبی غیرخطی با دامنه بلند به همراه امواج سالیتونی است [۲۷]. در بیش‌تر آزمایشات تجربی امواج یون صوتی با دامنه بالا مشاهده شده است که کاملاً متفاوت از امواج سالیتونی به دست آمده از معادله KdV بوده است [۲۸، ۲۹]. علاوه بر این، گزارشاتی از انجام شبیه‌سازی ذره در جعبه (PIC) جهت تأیید وجود امواج غیرخطی تناوبی دامنه بالا و امواج سالیتون‌گونه صورت گرفته است [۳۰، ۳۱] که نشان‌دهنده انتشار غیرخطی امواج سالیتون‌گونه و تناوبی غیرخطی الکترواستاتیک در پلاسمای فضایی و به طور خاص در منطقه شفق قطبی است. علاوه بر آن در سال ۲۰۱۶ لوتکار و همکارانش [۳۲] با استفاده از مدل یک بعدی با یک اختلال گوسی نشان دادند که امواج تناوبی یون صوتی با دامنه بالا و سوپرسالیتون‌ها در حضور الکترون‌ها پرنرژی با توزیع کاپا می‌توانند در محیط منتشر می‌شوند.

علاوه بر این، ساها و همکارانش [۳۳] انتشار انواع مختلف مدهای یون صوتی غیرخطی را در محیط پلازما با تحلیل فضای فاز بررسی کرده‌اند. آن‌ها هم‌چنین با در نظر گرفتن توزیع ذرات غیرماکسولی در حضور ذرات سنگین غبار تحول دینامیکی امواج الکترواستاتیک را مطالعه کردند [۳۴-۳۶]. هم‌چنین آن‌ها نشان دادند که فضای فاز سیستم شامل مدارهای تناوبی و بسته‌ای است که هر کدام از این مسیرها نمایانگر انتشار مدهای نوسانی با فرکانس پایین هستند. علاوه بر این، در



## Archive of SID

که در رابطه فوق، چگالی یون‌ها  $n_i$  به چگالی حالت تعادلی  $n_e$ ، سرعت  $u_i$  به سرعت یون صوتی  $C_s = (k_B T_e / m_i)^{1/2}$  که  $k_B$  ثابت بولتزمن و  $T_e$  دمای الکترونی است، پتانسیل الکتريکی  $\phi$  به  $k_B T_e / e$  زمان  $t$  و مکان  $x$  به ترتیب به فرکانس یونی  $\omega_{pi}^{-1} = (m_i / 4\pi n_e e^2)^{1/2}$  و  $\lambda_D = (k_B T_e / 4\pi n_e e^2)^{1/2}$  بهنجار شده‌اند. فشار یون‌های سیالی  $p_i$  به  $n_e k_B T_i$  نرمالیزه شده است. در این جا  $\gamma = (2 + N) / N$  ضریب آدیاباتیک یونی است که  $N$  تعداد درجات آزادی می‌باشد و مقدارش در این شرایط پلاسمایی  $N=1$  است و  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x}$  مشتق همرفتی می‌باشد. از طرفی دیگر برای الکترون‌های سریع و پرنرژی، بهترین تابع توزیع سرعت با کم‌ترین میزان انحراف معیار که با داده‌های تجربی مطابقت دارد تابع توزیع غیرحرارتی می‌باشد که برحسب پارامتر غیرهمدمایی به شکل بهنجار شده زیر توصیف می‌شود [۵].

$$n_e = (1 - \beta\phi + \beta\phi^2) e^{\phi} \quad (5)$$

که در آن  $\beta = 4\alpha / (1 + 3\alpha)$  و  $\alpha$  پارامتریست که جمعیت الکترون‌های پرنرژی را نشان می‌دهد. با توجه به ایجاد ناپایداری ناشی از تغییر دم تابع توزیع الکترونی، پارامتر غیرهمدمایی  $\alpha$  نمی‌تواند از مقدار معین  $\alpha = 0.25$  بیش‌تر شود. لازم به ذکر است در غیاب الکترون‌های پرنرژی ( $\alpha \rightarrow 0$ )، توزیع فوق به توزیع ماکسولی منجر می‌شود.

## ۳. دینامیک امواج رونده

برای بررسی ساختار و پایداری امواج رونده یون- صوتی بهتر است چارچوب مرجعی را معرفی کنیم که ذرات پلازما همراه آن با سرعت  $M$  (عدد ماخ) حرکت می‌کنند. با در نظر گرفتن تبدیل  $\xi = x - Mt$  و اعمال شرایط مرزی مناسب، یعنی در صورتی که  $\xi \rightarrow \pm\infty$  کمیات پلاسمایی  $n \rightarrow 1$ ،  $u \rightarrow 0$ ،  $\phi \rightarrow 0$ ،  $p \rightarrow 1$  میل می‌کنند، با استفاده از روش پتانسیل [۴] می‌توان معادلات پایه ۱-۵ را به شکل معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر به دست آورد:

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = \alpha\phi + b\phi^2 + c\phi^3 \quad (6)$$

بعضی از مقالات اثرات اختلال تناوبی خارجی روی انتشار امواج بررسی شده است که گذار از حرکت‌های تناوبی به چرخه‌های حدی را در پلاسماهای مغناطیسه و غیرمغناطیسه نشان می‌دهد و در شرایط خاص باعث ایجاد رفتار آشوبناک در سیستم می‌شود [۳۷-۳۹]. اخیراً، ما اثر قطبیت ذرات غبار را روی دوشاخگی امواج غبار یون- صوتی بررسی کرده‌ایم [۴۰] و نشان داده‌ایم که چگالی ذرات غبار با بارهای مثبت و منفی تحول امواج غبار یون صوتی را به نحوی کنترل می‌کند که دوشاخگی ترابحرانی اتفاق بیافتد و ساختار امواج رونده در محیط به جمعیت ذرات غبار در این نقاط بحرانی وابسته است.

علی‌رغم مطالعات قبلی روی تحول دینامیکی امواج با استفاده از تحلیل فضای فاز، تاکنون انواع دوشاخگی‌ها که به واسطه تغییر کوچکی در مقدار پارامترهای پلاسمایی اتفاق می‌افتند و می‌توانند ساختار مدهای انتشار در پلازما را کنترل کنند، بررسی نشده است. به همین دلیل در این مقاله با استفاده از تئوری دوشاخگی‌ها، ابتدا معادله مشخصه‌ای را برای نقاط تعادل سیستم دینامیکی امواج یون صوتی به دست می‌آوریم و سپس با بررسی پایداری سیستم نشان خواهیم داد که چگالی الکترون‌های پرنرژی، دینامیک سیستم پلازما را به نحوی کنترل می‌کند که سبب ایجاد دوشاخگی ترابحرانی می‌شود. به ازای مقادیر بحرانی چگالی الکترون‌های پرنرژی، امواج تناوبی غیرخطی و سالیوتونی به هم نزدیک می‌شوند و سپس طوری برخورد می‌کنند که پایداری‌شان تغییر می‌کند و سپس با یک ساختار متفاوتی در محیط منتشر می‌شوند.

## ۲. معادلات مدل

اگرچه رفتار دینامیکی سیستم‌های پیچیده مستلزم داشتن اطلاعات دقیقی از مسیر تک تک ذرات در محیط است اما برای محیط‌های پلاسمایی بسیاری از رفتارهای دینامیکی سیستم را می‌توان برحسب کمیات‌های ماکروسکوپیکی نظیر چگالی، سرعت و فشار براساس معادلات هیدرودینامیکی توصیف کرد [۴۱]. در شرایطی که محیط پلازما شامل یون‌های گرم و الکترون‌های پرنرژی باشد دستگاه معادلاتی که تحول زمانی ذرات یونی را توصیف می‌کنند عبارتند از:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i u_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\sigma}{n_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{dp_i}{dt} + \gamma p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n_e - n_i \quad (4)$$



که در آن ضرایب  $a, b, c$  به ترتیب به صورت زیر برحسب کمیات پلاسمایی به دست می‌آیند:

$$\alpha = (1 - \beta) - \frac{1}{M^2 - 3\sigma}$$

$$b = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3(M^2 + \sigma)}{(M^2 - 3\sigma)^2} \right]$$

$$c = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta M^2 + 3\sigma M^2 + 9\sigma^2}{(M^2 - 3\sigma)^3} - \left( \frac{1}{3} + \beta \right) \right]$$

برای پیدا کردن ساده‌ترین شکل توصیف تحول یک سیستم می‌توان از روش کاهش ابعاد سیستم‌های دینامیکی استفاده کرد که در آن معادله غیرخطی مرتبه دوم، به دو معادله مرتبه اول مستقل از زمان تبدیل می‌شود. چنین توصیفی یک ابزار قوی است که به خوبی تئوری‌های موجود برای توصیف امواج را در بر می‌گیرد. علاوه بر آن ویژگی‌های اصلی جواب‌های موج رونده را با دقت بیشتری نشان می‌دهد. در چنین شرایطی می‌توان از معادله ۶ دستگاه معادلات جفت شده غیرخطی زیر را نتیجه گرفت:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = Z \quad (7)$$

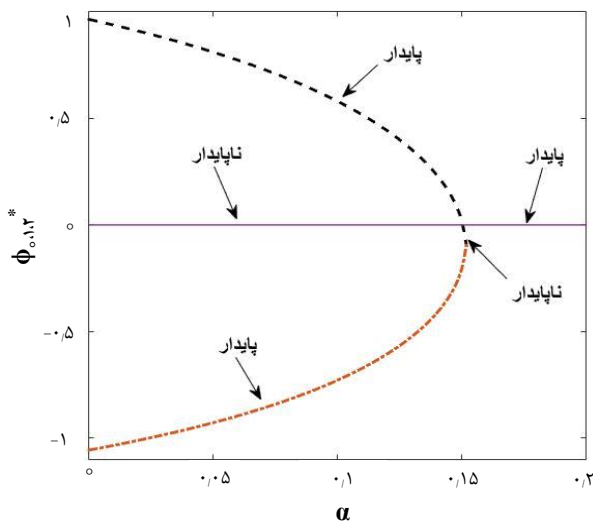
$$\frac{dZ}{d\xi} = \alpha\phi + b\phi^2 + c\phi^3 \quad (8)$$

که در آن کمیت  $Z$  منفی اندازه میدان الکتروستاتیک می‌باشد. معادلات فوق یک سیستم دینامیکی تخت را تشکیل می‌دهند که به وسیله پربندهای هامیلتونی زیر توصیف می‌شوند:

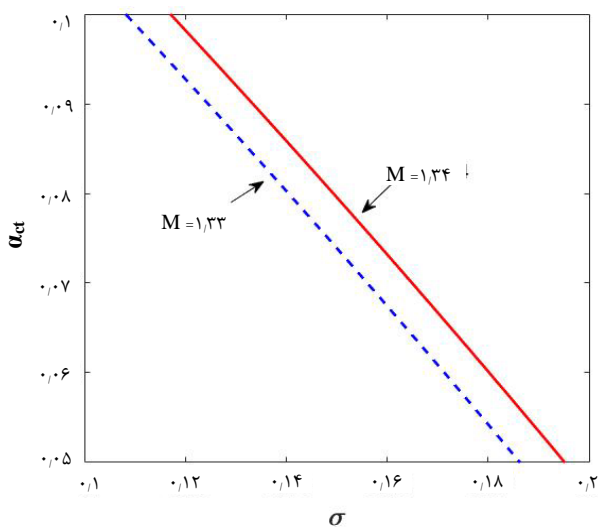
$$H = \frac{1}{2}Z - \frac{\alpha}{2}\phi - \frac{b}{3}\phi^2 - \frac{c}{4}\phi^3 = \text{ثابت} \quad (9)$$

مسیرهای مختلفی که مطابق با مقادیر متفاوت هامیلتونی است نشان‌دهنده جواب‌های موج رونده غیرخطی است که وابسته به محدوده وسیعی از تغییر پارامترهای پلاسمایی می‌باشند. علاوه بر این، معادلات دینامیکی ۷ و ۸، نقاط دوشاخگی یعنی جایی‌که با تغییر کوچک پارامترهای پلاسمایی شکل موج عوض می‌شود و گذاری بین امواج رونده اتفاق می‌افتد را مشخص می‌کنند. این مسأله نشان می‌دهد که نقاط ثابت سیستم، شکل فضای فاز را کنترل می‌کنند [۱۸]. نقاط تعادل سیستم‌های دینامیکی، نقاطی هستند که معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم یک جواب ثابت بدون وابستگی به زمانی داشته باشد. با چنین شرایطی نقاط تعادلی سیستم فوق

$(\phi_{0,1,2}^*, Z = 0)$  هستند که  $\phi_0^*$  نقطه تعادل بدیهی و  $\phi_{1,2}^*$  نقاط تعادل غیربدیهی هستند که از معادلات ۷ و ۸ حاصل می‌شوند. با توجه به تغییر پارامترهای پلاسمایی نظیر چگالی الکترون‌های پراثری، چنین نقاط تعادلی می‌توانند به‌وجود بیایند یا این که از بین بروند و شکل امواج رونده در محیط به مقدار نقطه تعادل و پایداری آن وابسته است. برای تعیین نقاط تعادل سیستم و بررسی پایداری و ناپایداری این نقاط از روش عددی در نرم‌افزار متلب استفاده می‌کنیم. نتایج این محاسبات در شکل ۱ تا ۶ نمایش داده شده است.

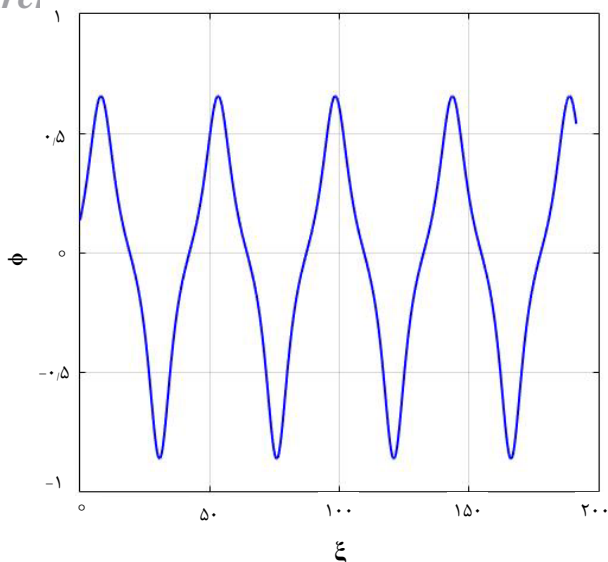


شکل ۱. تغییرات نقاط تعادل و پایداری سیستم دینامیکی با جمعیت الکترون‌های پراثری به ازای  $M=1.33$  و  $\sigma=0.02$ . در این نمودار  $\phi_0^*$  (خط ممتد)،  $\phi_1^*$  (نمودار خط‌چین) و  $\phi_2^*$  (نمودار نقطه‌ای) در نظر گرفته می‌شود.

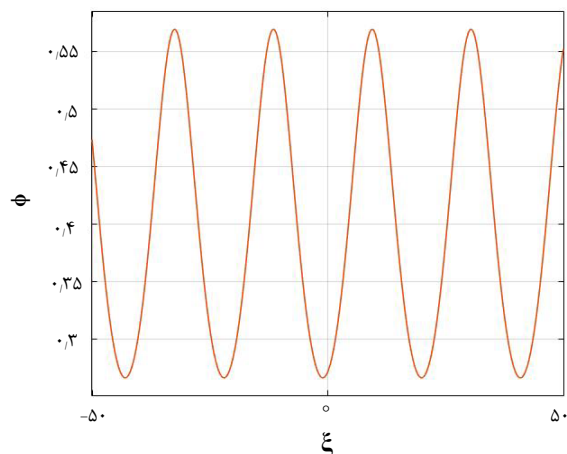


شکل ۲. تغییرات مقادیر بحرانی الکترون‌های پراثری برای ایجاد دوشاخگی ترابحرانی با دمای یون‌ها.





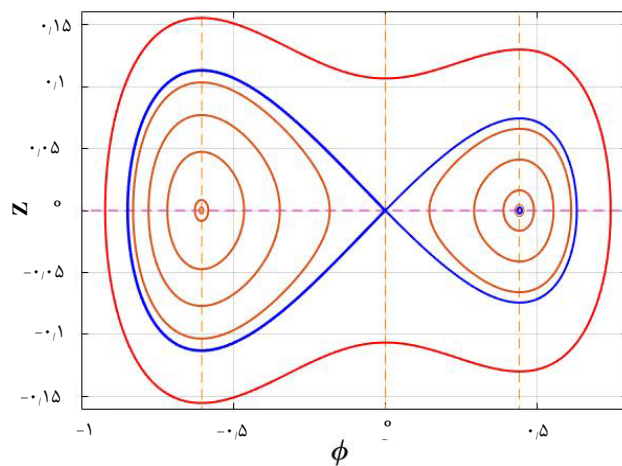
شکل ۵. تحول زمانی امواج تناوبی غیرخطی با دامنه خیلی بالا برای مقادیر الکترون‌های پرنرژی کمتر از مقدار بحرانی دوشاخگی و به ازای  $\alpha=0.12$ ,  $M=1.33$  و  $\sigma=0.02$ .



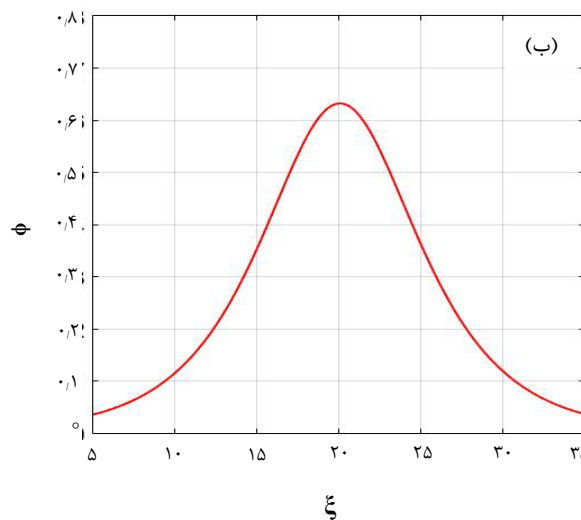
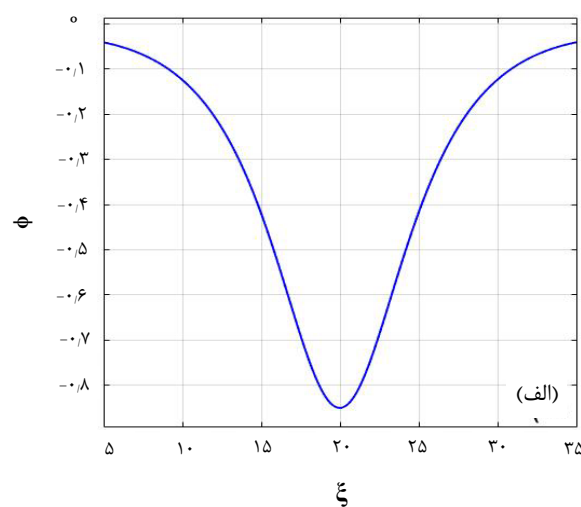
شکل ۶. تحول زمانی امواج پربودیک برای مقادیر الکترون‌های پرنرژی بیشتر از مقدار بحرانی دوشاخگی و به ازای  $\alpha=0.16$ ,  $M=1.33$  و  $\sigma=0.02$ .

شکل ۱ موقعیت نقاط تعادل و دوشاخگی‌های سیستم را به ازای مقادیر مختلف جمعیت الکترون‌های پرنرژی نشان می‌دهد. همان‌طوری‌که مشاهده می‌شود نقطه تعادل بدیهی  $\phi^*$  برای تمام مقادیر  $\alpha$  وجود دارد و هرگز از بین نمی‌رود ولی مقادیر غیربدیهی نقاط تعادل فقط به ازای مقادیر  $\alpha < 0.15$  وجود دارند. این نشان می‌دهد که پارامتر غیرهمدمایی وجود نقاط تعادل و انتشار امواج رونده مطابق با آن‌ها را کنترل می‌کند. برای تعیین انواع دوشاخگی‌ها و ساختار امواج رونده، از تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی می‌توان معادله مشخصه زیر را به دست آورد:

$$\lambda^2 - 3c\phi_{0,1,2}^* - 2b\phi_{0,1,2}^* - \alpha = 0 \quad (10)$$



شکل ۳. نمودار فضای فاز سیستم دینامیکی امواج یون- صوتی برای مقادیر الکترون‌های پرنرژی کمتر از مقدار بحرانی به ازای  $\alpha=0.12$  و  $M=1.33$ .



شکل ۴. تحول زمانی امواج سالیونی (الف) دامنه منفی (ب) دامنه مثبت به ازای  $\alpha=0.12$ ,  $M=1.33$  و  $\sigma=0.02$ .



شکل ۱ تعداد و پایداری نقاط تعادل را نشان می‌دهد. پایداری هر نقطه تعادل را می‌توان با تعیین ماتریس ژاکوبی معادلات ۷ و ۸ هم تعیین کرد. با خطی‌سازی معادلات دینامیکی، ژاکوبی سیستم را می‌توان به صورت  $J = 2\alpha + b\varphi_{1,r}^*$  به دست آورد. در سیستم‌های دینامیکی شکل موضعی مسیرهای نزدیک نقاط تعادل به وسیله علامت ژاکوبی مشخص می‌شود [۱۸]. برای حالتی که  $J < 0$ ، باشد نقاط تعادل سیستم زینی است و برای  $J > 0$ ، تعادل به صورت یک مسیر دایره‌ای بسته پایدار می‌باشد.

شکل ۳، نتایج تحلیل عددی معادلات ۷ و ۸ مربوط به نمودار فضای فاز را برای مقادیری از الکترون‌های پرنرزی کم‌تر از مقدار دوشاخگی ترابحرانی یعنی  $\alpha < \alpha_{CT}$  نشان می‌دهد. همان‌طوری‌که در این شکل مشاهده می‌شود مسیرهای نزدیک به نقاط تعادل  $(\varphi_{1,r}^*, Z^*)$  دایره‌ای با مراکز این نقاط هستند در صورتی‌که  $(\varphi_0^*, Z^*)$  یک نقطه زینی است. بنابراین شکل فوق یک جفت مدار هموکلینیک در نقطه زینی همراه با دو مدار تناوبی غیرخطی حول مراکز دایره‌ها را نشان می‌دهد. در این‌جا که مدارهای بسته با شعاع‌های مختلف نمایانگر مقادیر متفاوت هامیلتونی سیستم هستند. لازم به ذکر است که در سیستم‌های دینامیکی، مدار هموکلینیک نشان‌دهنده انتشار امواج سالیتمونی و مدارهای بسته انتشار امواج تناوبی غیرخطی را توصیف می‌کنند [۲۰]. از نظر فیزیکی تحول دینامیکی موج یون صوتی که توسط معادلات (۱ تا ۴) توصیف شده است وابسته به پارامترهای پلاسمایی نظیر جمعیت الکترون‌های پرنرزی و دمای یونی می‌باشد در چنین شرایطی تغییر هر کدام از پارامترها باعث می‌شود ضریب پاشندگی و غیرخطیتهای محیط تغییر کند.

از آن‌جایی که شکل و نوع انتشار امواج به طور مستقیم به اندازه ضریب پاشندگی و غیرخطیتهای محیط وابسته است لذا از نظر فیزیکی تغییر جمعیت الکترون‌های پرنرزی می‌تواند باعث تغییر در تحول امواج یون صوتی در محیط گردد. به طور مثال، برای داشتن امواج سالیتمونی تعادل بین ترم‌های پاشندگی و غیرخطیتهای نیاز می‌باشد در صورت افزایش ضریب غیرخطی به‌واسطه تغییر پارامترهای فیزیکی، افزایش ضریب پاشندگی نیاز است تا تعادل بین این دو ترم حفظ گردد و موج سالیتمونی منتشر گردد.

حال با توجه به نمودار فضای فاز می‌توان شکل موج سالیتمونی را به ازای مقادیر مشخصی از جمعیت الکترون‌های پرنرزی ترسیم کرد. شکل ۴ ساختار چنین امواج جای‌گزیده‌ای را نشان می‌دهد که فقط وقتی در محیط منتشر می‌شوند که  $\alpha$  از مقدار بحرانی  $\alpha_{CT}$  کوچک‌تر باشد. در پلاسماهای آزمایشگاهی

که در عبارت بالا  $\lambda$  آهنگ رشد یا واپاشی جواب‌های نقاط تعادلی می‌باشد. با استفاده از تحلیل عددی مقادیر ویژه، محدوده‌های پایداری و ناپایداری نقاط تعادل در شکل ۱ مشخص شده است که به اندازه پارامتر غیرهمدمایی بستگی دارد. به ازای مقادیر معین جمعیت الکترون‌های پرنرزی که در محدوده  $0.15 < \alpha < 0$  باشند هر سه نقطه تعادلی بدیهی و غیربدیهی وجود دارند. با این حال پایداری نقاط تعادل به ازای مقدار خاصی از  $\alpha$  تغییر می‌کند. این نشان می‌دهد که وقتی  $\alpha$  به یک مقدار بحرانی می‌رسد پایداری  $\varphi_0^*, \varphi_1^*$  جابه‌جا می‌شود در این‌صورت دینامیک غیرخطی امواج یون صوتی با یک دوشاخگی ترابحرانی در نقطه  $\varphi_0^* = 0$  مواجه می‌شود. با استفاده از تحلیل دوشاخگی سیستم‌های دینامیکی، می‌توان این مقدار بحرانی را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\alpha_{CT} = 1 - \frac{4}{M^2 + 3\sigma + 3} \quad (11)$$

که در آن  $\alpha_{CT}$  مقدار جمعیت الکترون‌های سریع را در نقطه دوشاخگی ترابحرانی نشان می‌دهد که وابسته به پارامترهای پلاسمایی است. شکل ۲ تأثیر تغییرات دمایی یون‌ها را روی نقاط دوشاخگی ترابحرانی نمایش می‌دهد همان‌طوری‌که مشاهده می‌شود، با افزایش دمای یون‌ها، مقادیر مورد نیاز از جمعیت الکترون‌های پرنرزی برای وجود دوشاخگی ترابحرانی کاهش می‌یابد. علاوه بر این مقدار بحرانی  $\alpha_{CT}$ ، که به ازای مقادیر بالاتر از آن پایداری امواج تغییر می‌کند، با افزایش عدد ماخ مقدارش افزایش می‌یابد. این نشان می‌دهد که تغییر پارامترهای پلاسمایی شرایطی را ایجاد می‌کند که شکل جدیدی از دوشاخگی ترابحرانی به وجود می‌آید و به واسطه آن تحول امواج یون صوتی کنترل خواهد شد. اثری مشابه از نقش الکترون‌های پرنرزی روی نوع و دامنه امواج یون صوتی جای‌گزیده قبلاً توسط ورهیسست و همکارانش [۴۲] با استفاده از تحلیل شبه‌پتانسیل مشاهده شده بود.

#### ۴. تحلیل فضای فاز و ساختار امواج

برای بررسی شکل‌های مختلف انتشار موج یون- صوتی در پلاسمای تئوری فضای فاز می‌تواند یک توصیف دقیقی از شکل امواج و تبدیل آن‌ها در محیط با توجه به تغییر پارامترهای پلاسمایی ارائه دهد. جواب‌های سیستم دینامیکی در شکل میدان‌های برداری، اشکال مختلف امواج رونده در محیط را نشان می‌دهند و مسیرهای بسته متفاوت در فضای فاز مطابق با ساختار متفاوت امواج هستند. همان‌طوری‌که مشاهده شد،



و تنها امواج تناوبی با دامنه معین می‌توانند در محیط پلاسما منتشر شوند.

### ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، پیدایش دوشاخگی ترابحرانی و پیچیدگی دینامیکی وابسته به آن در انتشار امواج یون صوتی در یک پلاسمای دو مؤلفه‌ای با حضور الکترون‌های پرنرژری مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور یک معادله دینامیکی از معادلات هیدرودینامیک حاکم بر تحول یون‌های گرم حاصل شده است که قادر است ویژگی‌های مهم انتشار امواج و گذار بین آن‌ها را نشان دهد. با استفاده از روش‌های تحلیلی و محاسبات عددی وجود نقاط تعادل و پایداری انتشار امواج مورد بررسی قرار گرفته است و با ترسیم نقاط دوشاخگی مشاهده شده است که برای تحول امواج یون- صوتی دوشاخگی ترابحرانی اتفاق می‌افتد که در آن به ازای تغییر مقادیر کوچک پارامترهای پلاسمایی نظیر چگالی الکترون‌های پرنرژری و دمای یونی، امواج سالیوتونی و امواج تناوبی غیرخطی بهم برخورد می‌کنند و سپس پایداری این امواج تغییر می‌کند. هم‌چنین نشان داده‌ایم که با افزایش دمای یون‌ها، مقادیر مورد نیاز جمعیت الکترون‌های پرنرژری برای ایجاد دوشاخگی ترابحرانی کاهش می‌یابد. به ازای مقادیر کوچک‌تر از پارامتر دوشاخگی، امواج سالیوتونی، امواج تناوبی غیرخطی به همراه امواج تناوبی با دامنه خیلی بالا می‌توانند در محیط منتشر شوند. بررسی نمودار سری زمانی تغییرات امواج تناوبی با دامنه خیلی بزرگ یک الگوی مثلث گونه‌ای را در هر چرخه نوسانی نشان می‌دهد. علاوه بر دو شاخگی ترابحرانی که منجر به تغییر ناگهانی در پایداری نقاط تعادل به ازای مقادیر معینی از چگالی الکترون‌های سریع می‌شود. مشاهده شده است که به ازای مقادیری از جمعیت الکترون‌های پرنرژری که بزرگ‌تر از مقدار دوشاخگی ترابحرانی است دو موج سالیوتونی و تناوبی غیرخطی به هم برخورد می‌کنند و در نهایت قادر به انتشار در محیط پلاسما نیستند. در چنین شرایطی نوع دیگری از دوشاخگی، مشابه دوشاخگی زین- گره اتفاق می‌افتد که وابسته به تغییرات پارامترهای پلاسمایی است.

نتایج به دست آمده در این پژوهش نشان می‌دهد که تحلیل فضای فاز و تئوری دوشاخگی‌ها، ویژگی‌های اساسی جدیدی از انتشار امواج الکترواستاتیک غیرخطی را آشکار می‌کنند که می‌توانند سهم به‌سزایی در درک بهتر تحول دینامیکی سیستم‌های پیچیده نظیر پلاسمای آزمایشگاهی و فضایی داشته باشند.

که از ترکیب گازهای آرگون و سولفور هگزا فلوراید تولید شده بود [۲۵، ۲۶] ساختار مشابهی از امواج سالیوتون‌گونه مشاهده شده است که به جمعیت الکترون‌ها و چگالی یون‌های منفی وابسته بودند. علاوه بر این، نتیجه حاضر مطابق با نتایج شبیه‌سازی ذره در جعبه می‌باشد که وجود امواج سالیوتونی را تأیید می‌کند [۳۰-۳۲]. مطابق با شکل ۱، به ازای مقادیر بزرگ‌تر از  $\alpha_{ct} = 0.15$ ، یک تغییر ناگهانی در ناپایداری امواج سالیوتونی و تناوبی رخ می‌دهد در چنین شرایطی نقطه تعادل  $\Phi_0^*$  یک موج تناوبی و  $\Phi_1^*$  ساختار سالیوتونی را توصیف می‌کنند. با توجه به شکل ۴ مشاهده می‌شود که در حضور الکترون‌های پرنرژری محیط پلاسما می‌تواند هم‌زمان شرایط لازم را برای انتشار سالیوتون‌های مثبت و منفی فراهم کند. در چنین شرایطی دامنه امواج سالیوتونی منفی بزرگ‌تر از امواج سالیوتونی مثبت است. در نمودار فضای فاز ۳، مسیرهای بسته‌ای بالای نقطه زینی مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده انتشار امواج تناوبی غیرخطی با دامنه خیلی زیاد نسبت به امواج تناوبی قبلی می‌باشند.

شکل ۵ نمودار چنین امواجی را نشان می‌دهد. همان‌طوری که مشاهده می‌شود، دامنه این امواج به مراتب از امواج تناوبی و سالیوتونی بیشتر است و یک شکل مثلث‌گونه متفاوتی را در هر چرخه نوسانی نمایش می‌دهد [۱۹، ۲۰]. این نتیجه با یافته‌های حاصل از مشاهدات تجربی و فضایی مراجع [۲۸، ۲۹]، که در آن‌ها ساختار امواج تناوبی یون صوتی با دامنه بلند مشاهده شده است مطابقت می‌کند علاوه بر این نتایج شبیه‌سازی ذره در جعبه نیز انتشار چنین ساختارهای تناوبی را تأیید می‌کند [۳۰-۳۲].

علاوه بر دوشاخگی ترابحرانی در شکل ۱ که منجر به تغییر ناگهانی در پایداری نقاط تعادل به ازای مقادیر مشخصی از غیرهمدمایی می‌شود، با افزایش اندک جمعیت الکترون‌های پرنرژری به مقدار  $\alpha = 0.15$ ، مشاهده می‌شود که دو نقطه تعادل  $\Phi_0^*$ ،  $\Phi_1^*$  به هم برخورد می‌کنند و از بین می‌روند. در چنین شرایطی دوشاخگی زین- گره اتفاق می‌افتد که باعث عدم انتشار امواج سالیوتونی و امواج تناوبی با دامنه خیلی بالا می‌شود. در این شرایط، به ازای مقادیر  $\alpha > 0.15$ ، فقط یک موج تناوبی می‌تواند در محیط منتشر شود.

شکل ۶ تحول چنین موج تناوبی یون- صوتی را نشان می‌دهد که مقدار غیرهمدمایی الکترون‌ها از مقدار بحرانی دوشاخگی زین- گره بیشتر است. بنابراین برای شرایطی که تجمع خیلی زیادی از الکترون‌های پرنرژری در محیط وجود داشته باشد امکان انتشار امواج سالیوتونی در محیط وجود ندارد



1. L. Stenflo, *Generalized Lorenz equations for acoustic-gravity waves in the atmosphere*, *Phys. Scr.*, **53(1)**, 83-84 (1996).
2. H. Ikezi, R. Taylor, D. Baker, *Formation and Interaction of Ion-Acoustic Solitons*, *Phys. Rev. Lett.*, **25(1)**, 11-14 (1970).
3. H. Washimi, T. Taniuti, *Propagation of Ion-Acoustic Solitary Waves of Small Amplitude*, *Phys. Rev. Lett.*, **17(19)**, 996-998 (1966).
4. R.Z. Sagdeev, *Reviews of Plasma Physics*, Edited by M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1966).
5. R.A. Cairns, et al, *Electrostatic solitary structures in non-thermal plasmas* *Geophys. Res. Lett.*, **22(20)**, 2709-2712 (1995).
6. G. Hairapetian, R.L. Stenzel, *Expansion of a Two-Electron-Population Plasma into Vacuum*, *Phys. Rev. Lett.*, **61(14)**, 1607-1610 (1988).
7. R. Lundin, et al, *Plasma energization on auroral field lines as observed by the Viking spacecraft*, *Geophys. Res. Lett.*, **14(4)**, 443-446 (1987).
8. D.S. Hall, *Electrons in the boundary layers near the dayside magnetopause*, *J. Geophys. Res.*, **96(A5)**, 7869-7891 (1991).
9. J.R. Asbridge, S.J. Bame, I.B. Strong, *Outward flow of protons from the Earth's bow shock*, *J. Geophys. Res.*, **73(17)**, 5777-5782 (1968).
10. R. Lundin, et al, *First measurements of the ionospheric plasma escape from Mars*, *Nature*, **341**, 609-612 (1989).
11. S.S. Dolginov, *The magnetic field and the magnetosphere of the planet Mars*, *Adv. Space Res.*, **12(8)**, 187-211 (1992).
12. S.R. Pillay, F. Verheest, *Effect of non-thermal ion distributions on the Jeans instability in dusty plasmas*, *J. Plasma Phys.*, **71(2)**, 177-184 (2005).
13. F. Verheest, M.A. Hellberg, I. Kourakis, *Dust-ion-acoustic supersolitons in dusty plasmas with nonthermal electrons*, *Phys. Rev. E*, **87**, 043107 (2013).
14. G.M. Zaslavsky, et al., *Large-scale behavior of the tokamak density fluctuations*, *Phys. Plasmas.*, **7(9)**, 3691-3695 (2000).
15. M. Nurujjaman, R. Narayanan, A.N. Iyengar, *Parametric investigation of nonlinear fluctuations in a dc glow discharge plasma*, *Chaos*, **17(4)**, 043121-6 (2007).
16. A.M. Wharton, et al, *Theoretical and numerical modelling of chaotic electrostatic ion cyclotron (EIC) oscillations by Jerk equation*, *Phys. Plasmas.*, **21(2)**, 022311-6 (2014).
17. P. Feng, J. Zhang, W. Wang, *Spike-like solitary waves in incompressible boundary layers driven by a travelling wave*, *Chaos*, **26(6)**, 063104-9 (2016).
18. S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. (Perseus, Massachusetts, 1994).
19. A.E. Dubinov, D.Y. Kolotov, *Ion-Acoustic Super Solitary Waves in Dusty Multispecies Plasmas*, *IEEE Trans. Plasma Sci*, **40(5)**, 1429-1433 (2012).
20. A.E. Dubinov, D.Y. Kolotov, *Ion-acoustic supersolitons in plasma*, *Plasma Phys. Rep.*, **38**, 909-912 (2012).
21. F. Verheest, M.A. Hellberg, I. Kourakis, *On-acoustic supersolitons in plasmas with two-temperature electrons: Boltzmann and kappa distributions* *Phys. Plasmas*, **20**, 082309-12 (2013).
22. G.S. Lakhina, S.V. Singh, A.P. Kakeel, *Ion acoustic solitons/double layers in two-ion plasma revisited*, *Phys. Plasmas*, **21(6)**, 062311-8 (2014).
23. S.A.El. Wakil, E.M. Abwafa, A.A. Elhanbaly, *Super-soliton dust-acoustic waves in four-component dusty plasma using non-extensive electrons and ions distributions*, *Phys. Plasmas*, **24**, 073705-06 (2017).
24. H. Ikezi, *Experiments on ion-acoustic solitary waves*, *Phys. Fluids*, **16(10)**, 1668-1675 (1973).
25. Y. Nakamura, I. Tsukabayashi, *Modified Korteweg—de Vries ion-acoustic solitons in a plasma*, *J. Plasma Phys.*, **34(3)**, 401-415 (1985).
26. I. Cooney, M.T. Gavin, K.E. Lonngren, *Radiation of ion acoustic waves in a dispersive positive ion-negative ion plasma*, *IEEE Trans. Plasma. Sci.*, **19(3)**, 545-547 (1991).
27. W. Swider, *Electron loss and the determination of electron concentrations in the D-region*, *Pur. Appl. Geophys.*, **127**, 403-414 (1988).
28. I.D. Kaganovich, et al, *Negative Ion Density Fronts during Ignition and Extinction of Plasmas in Electronegative Gases*, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 1918-1921 (2000).
29. F.S. Mozer, et al, *New Features of Time Domain Electric-Field Structures in the Auroral Acceleration Region*, *Phys. Rev. Lett*, **79**, 1281-1285 (1987).
30. Q.M. Lu, D.Y. Wang, S. Wang, *Generation mechanism of electrostatic solitary structures in the Earth's auroral region*, *J. Geophys. Res.*, **110**, A3223-8 (2005).
31. B. Kakad, A. Kakad, Y. Omura, *Nonlinear evolution of ion acoustic solitary waves in space plasmas: Fluid and particle-in-cell simulations*, *J. Geophys. Res.*, **119**, 5589-5599 (2014).
32. A. Lotekar, A. Kakad, B. Kakad, *A fluid simulation-based evidence of the soliton-type behavior of super solitary waves in plasma*, *Phys Plasmas*, **23(10)**, 102108 (2016).
33. A. Saha, J. Tamang, *Effect of q-nonextensive hot electrons on bifurcations of nonlinear and supernonlinear ion-acoustic periodic waves*, *Adv. Space Res*, **63(5)**, 1596-1606 (2019).
34. J. Tamang, A. Saha, *Bifurcations of small-amplitude supernonlinear waves of the mKdV and modified Gardner equations in a three-component electron-ion plasma*, *Phys. Plasmas*, **27(1)**, 012105-09 (2020).



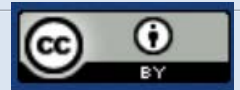


## Archive of SID

35. A. Saha, P.K. Prasad, S. Banerjee, *Bifurcation of ion-acoustic superperiodic waves in auroral zone of Earth's magnetosphere*, *Astrophys. Space Sci.*, **364**, 180 (2019).
36. P.K. Prasad, A. Saha, *Bifurcation analysis of ion-acoustic waves for Schrödinger equation in nonextensive Solar wind plasma*, *Adv. Space Res.*, **67(1)**, 9-19 (2021).
37. T.K. Das, et al, *Effect of dust ion collisional frequency on transition of dust ion acoustic waves from quasiperiodic motion to limit cycle oscillation in a magnetized dusty plasma*, *Phys. Plasmas*, **24(7)**, 073707 (2017).
38. S.A. Iqbal, M.G. Hafez, S.A. Karim, *Bifurcation analysis with chaotic motion of oblique plane wave for describing a discrete nonlinear electrical transmission line with conformable derivative*, *Results in Physics*, **18**, 103309 (2020).
39. Z. Rahim, M. Adnen, A. Qamar, *Nonlinear excitations of magnetosonic solitary waves and their chaotic behavior in spin-polarized degenerate quantum magnetoplasma*, *Chaos*, **31(2)**, 023133 (2021).
40. H. Alinejad, *Effect of dust polarity on transcritical bifurcation of dust ion-acoustic waves in a nonextensive dusty plasma*, *Chaos, Solitons and Fractals*, **157**, 111907-8 (2022).
41. F.F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, (New York: Plenum Press, 1984).
42. F. Verheest, M.A. Hellberg, *Compressive and rarefactive solitary waves in nonthermal two-component plasmas*, *Phys. Plasmas*, **17(10)**, 102312-7 (2010).

## COPYRIGHTS

©2021 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.



استناد به این مقاله

حسن علی‌نژاد (۱۴۰۱)، تأثیر الکترون‌های پرنرزی بر دوشاخگی ترابحرانی امواج الکترواستاتیک فرکانس پایین در پلاسما، ۱۰۲، ۱۰۰-۱۰۸

DOI: [10.24200/nst.2022.1472](https://doi.org/10.24200/nst.2022.1472)

Url: [https://jonsat.nstri.ir/article\\_1411.html](https://jonsat.nstri.ir/article_1411.html)