

## رابطه سازی یک جزء سه پهلو با ترک کشسان - مومسان\*

دکتر محمد رضایی پزند<sup>(۱)</sup> سید روح... موسوی<sup>(۲)</sup>

**چکیده** در هنگام ایجاد ترک نرمی سازه افزایش می‌یابد. افزایش نرمی باعث زیاد شدن تغییر مکان‌ها خواهد شد. در این مقاله، یک جزء سه پهلو دارای ترک میانی رابطه سازی خواهد شد. اساس رابطه سازی این جزء بر روی افزایش نرمی ناشی از ترک خوردگی گذاشته شده است. برای رابطه سازی، ابتدا رابطه میان نرخ رهایی انرژی و ضریب شدت تنش در مکانیک شکست استفاده می‌شود و مقدار انرژی ناشی از ترک خوردگی حساب می‌شود. در ادامه، درایه‌های ماتریس نرمی اضافی ناشی از ترک خوردگی، در یک دستگاه مستقل نیرویی، به دست می‌آید. ماتریس مزبور، به نرمی پیش از ترک خوردگی افزوده می‌شود. با بهره‌جویی از ماتریس‌های مبدل نیرویی و نرمی، ماتریس سختی جزء ترک خورده برای مسأله مستوی حساب می‌گردد. ماتریس سختی به دست آمده از این روش، میزان کاهش سختی ناشی از ترک خوردگی را در ماتریس سختی جزء سالم وارد کرده است.

**واژه‌های کلیدی** اجزای محدود، مکانیک شکست، ترک، نرمی، سختی، ضریب شدت تنش، ماتریس مواد، نرخ رهایی انرژی.

## Formulating a Triangular Element with Elasto – Plastic Crack

M. R. Pajand

S. R. Mousavi

**Abstract** Cracking increases the flexibility and displacement of structures. This paper introduces a triangular element with internal crack considering the increase in flexibility of the element. First, Relationship between strain energy release rate and stress intensity factor by fracture mechanic approach is used to calculate energy released by the crack. Then, additional flexibility matrix is obtained in the independent system. This matrix is added to the compliance matrix of a non-cracked element. Finally, Stiffness matrix is calculated by compliance matrix and transformation matrix for the plane problem. Stiffness matrix obtained with this approach includes the decreasing effect of stiffness due to cracking.

**Key Words** Finite Element, Fracture Mechanic, Crack, Flexibility, Stress Intensity Factor, Material Matrix, Energy Release Rate.

\* تاریخ دریافت نسخه نهایی اصلاح شده ۸۷/۶/۱۹ و تاریخ تصویب مقاله ۸۷/۷/۱۷.

(۱) استاد، گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

(۲) کارشناس ارشد، گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

## مقدمه

هنگام ترک خوردن، سختی سازه کاهش، و میرایی آن افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، وجود ترک در یک عضو سازه‌ای، سبب افزایش نرمی می‌گردد. در سال ۲۰۰۰ میلادی، چانگ و لی، با بهره‌جویی از این ویژگی، ماتریس سختی جزء تیری ترک خورده را در حالت دو بعدی تشکیل دادند. در این پژوهش، آن‌ها از نسبت تغییر بسامد طبیعی سازه، در دو مود گوناگون، هنگام ترک خوردگی استفاده کردند و به آسیب‌یابی ترک در تیر طره‌ای پرداختند [1].

در سال ۲۰۰۲ میلادی، سینها و فریس ول، با به کار گرفتن یک الگوی بسیار ساده، ماتریس سختی جزء تیری ترک خورده را رابطه‌سازی کردند. در این الگو، نرمی به صورت خطی از حالت بدون ترک به حالت ترک خورده، تغییر می‌کند [2]. در سال ۲۰۰۳ میلادی، کرازوک، یک جزء تیری ترک خورده به کار برد که در آن ترک به وسیله یک فنر، الگوسازی شده بود. نرمی خمشی و برشی این فنر با استفاده از قضیه کاستیگلیانو و قانون‌های مکانیک شکست به دست می‌آمدند. وی با حل معادله دیفرانسیل نوسان آزاد تیر و برقراری شرط‌های مرزی، پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو را حساب کرد [3].

در سال ۲۰۰۱ میلادی، کرازوک و هم‌کاران، یک جزء صفحه خمشی با ترک میانی را رابطه‌سازی کردند. این الگو براساس مکانیک شکست کشسان - مومسان و روش اجزای محدود استوار بود. آن‌ها ماتریس نرمی صفحه مستطیلی با چهار گره و سه درجه آزادی در هر گره را حساب کردند [4]. در همان سال، بلتی و هم‌کاران، ماتریس مواد را برای یک جزء غشایی بتن مسلح به دست آوردند. در این پژوهش، رفتار غیر خطی بتن مسلح در شکست، وارد تحلیل شد. آن‌ها توانستند اثرهای سخت‌شوندگی کششی ناشی از میل‌گردها، قفل

و بست دانه‌ای، عمل شاخه‌ای میل‌گردها، غیرهم‌سان شدن رفتار جزء پس از ترک خوردگی و نرم‌شوندگی کرنشی را وارد ماتریس مواد کنند. این ماتریس تابعی از میزان بازشدگی و لغزش لبه‌های ترک می‌باشد [5]. در همین سال، ساودرا، یک جزء تیری ترک خورده را در حالت سه بعدی، رابطه‌سازی کرد و ماتریس سختی آن را به دست آورد [6].

در سال ۲۰۰۳ میلادی، فوستر و مارتی جزء غشایی ترک را برای بتن مسلح رابطه‌سازی نمودند. آن‌ها رابطه بین تنش و کرنش در محورهای محلی ترک را نوشتند سپس ماتریس مواد را به محورهای محلی جزء یاد شده انتقال دادند و اثرهای سخت‌شوندگی کششی فودلاها را به آن افزودند [7].

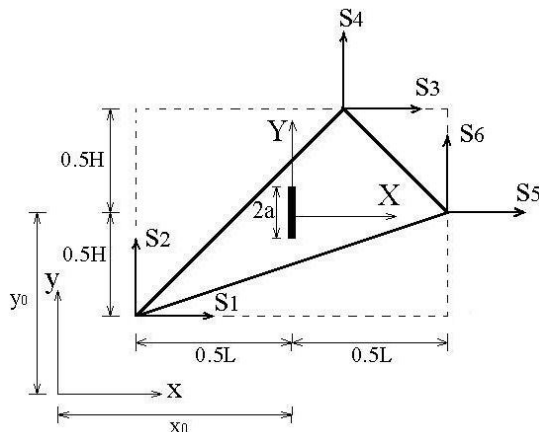
در این مقاله، یک جزء مستوی دارای ترک میانی، رابطه‌سازی خواهد شد. درجه‌های آزادی این جزء در درون صفحه سازه واقع‌اند که برای تحلیل سازه‌هایی مناسب‌اند که بارها در صفحه سازه وارد شوند. این جزء در تحلیل دیوار برشی، تیرهای عمیق و سدهای وزنی ترک‌دار، کاربرد دارد. یکی از مزیت‌های این جزء، مثلثی بودن آن می‌باشد که توانایی پوشش بهتر سطوح را در شبکه‌بندی شکل‌های نامنظم خواهد داشت. از دیگر مزیت‌ها، وجود ترک در داخل جزء می‌باشد. این ویژگی، امکان به کارگیری این جزء را در مسائل تخمین خسارت فراهم می‌آورد. از محدودیت‌های جزء یاد شده این است که باید ترک در میانه جزء قرار گیرد.

## ماتریس نرمی جزء سه پهلو ترک‌دار

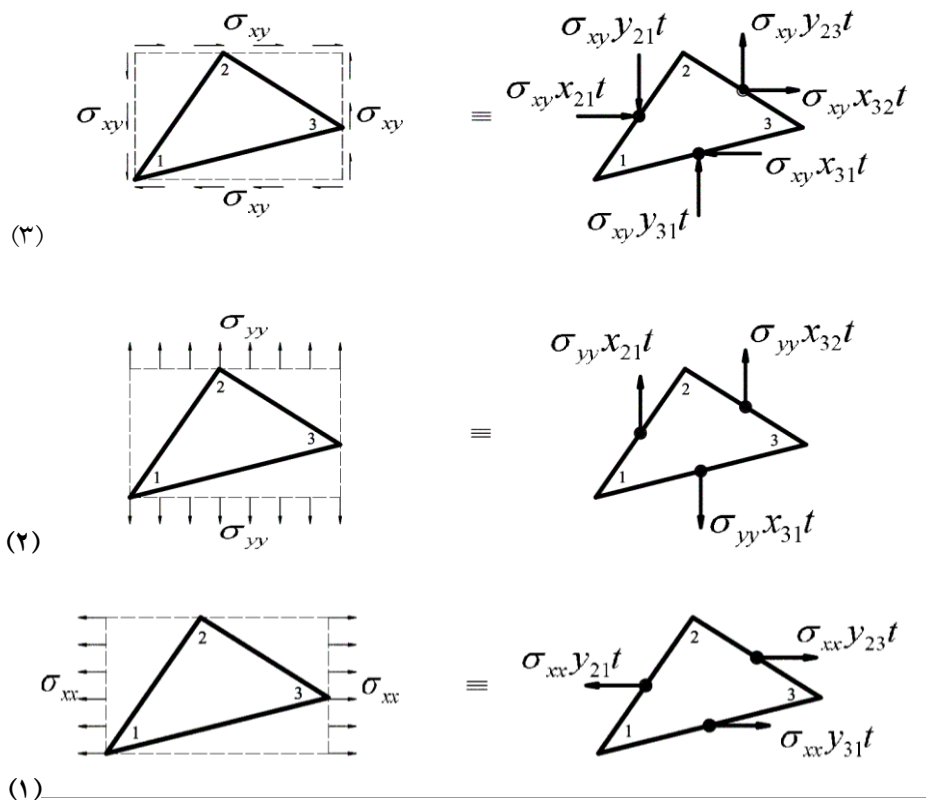
بر اساس ویژگی درایه‌های ماتریس نرمی جزء‌های ترک‌دار، می‌توان آن‌ها را حساب کرد. سپس با وارون‌سازی، ماتریس سختی به دست می‌آید. باید افزود، ترک سبب به وجود آمدن تغییر مکان اضافی بین مقطع‌های دو سوی آن می‌شود؛ در نتیجه، ماتریس

در جزء سالم، تنش‌ها در همه نقطه‌های جزء، ثابت می‌باشد. می‌توان، همانند شکل (۱-۲)، میدان تنش ثابت  $\sigma_{xx}$  را با نیروهای معادل ایستایی آن در وسط گره‌های مثلث جایگزین نمود.

نرمی جزء افزایش می‌یابد. در ادامه این کار، نخست، ماتریس نرمی جزء سالم حساب می‌گردد و به دنبال آن، می‌توان نرمی اضافی ناشی از ترک خوردگی را به آن افزود.



شکل ۱ نیروهای وابسته عضو



شکل ۲ نیروهای ایستایی روی جزء

رابطه سازی یک جزء سه پهلو ...

همانند شکل های (۲-۲) و (۳-۲)، برابری های زیر در دسترس قرار می گیرد:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} y_{32} & 0 & -x_{32} \\ 0 & -x_{32} & y_{32} \\ -y_{31} & 0 & x_{31} \\ 0 & x_{31} & -y_{31} \\ y_{21} & 0 & -x_{21} \\ 0 & -x_{21} & y_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(۳)

ماتریس مبدل نیرویی، در تحلیل به روش نرمی نقش بسزایی دارد. این ماتریس، نیروهای وابسته عضوی را به نیروهای مستقل گرهی پیوند می دهد. نیروهای وابسته  $S_1$  تا  $S_6$  همانند شکل (۱) می باشد. این نیروها به وسیله سه معادله ایستایی به هم وابسته اند. نیروهای مستقل گرهی  $F_1$ ،  $F_2$  و  $F_3$ ، به صورت شکل (۳) انتخاب می گردد.

این نیروها براساس رابطه های زیر به گره های مجاور منتقل می شوند:

$$S_1 = \frac{1}{2}(y_{31} - y_{21})t \cdot \sigma_{xx} = \frac{1}{2}y_{32}t \cdot \sigma_{xx}; S_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{1}{2}(y_{23} - y_{21})t \cdot \sigma_{xx} = -\frac{1}{2}y_{31}t \cdot \sigma_{xx}; S_4 = 0$$

$$S_5 = \frac{1}{2}(y_{23} + y_{31})t \cdot \sigma_{xx} = \frac{1}{2}y_{21}t \cdot \sigma_{xx}; S_6 = 0$$

(۱)

در رابطه های (۱)، ضخامت جزء می باشد. عامل های  $x_{ij}$  و  $y_{ij}$ ، به وسیله رابطه های زیر به دست می آیند:

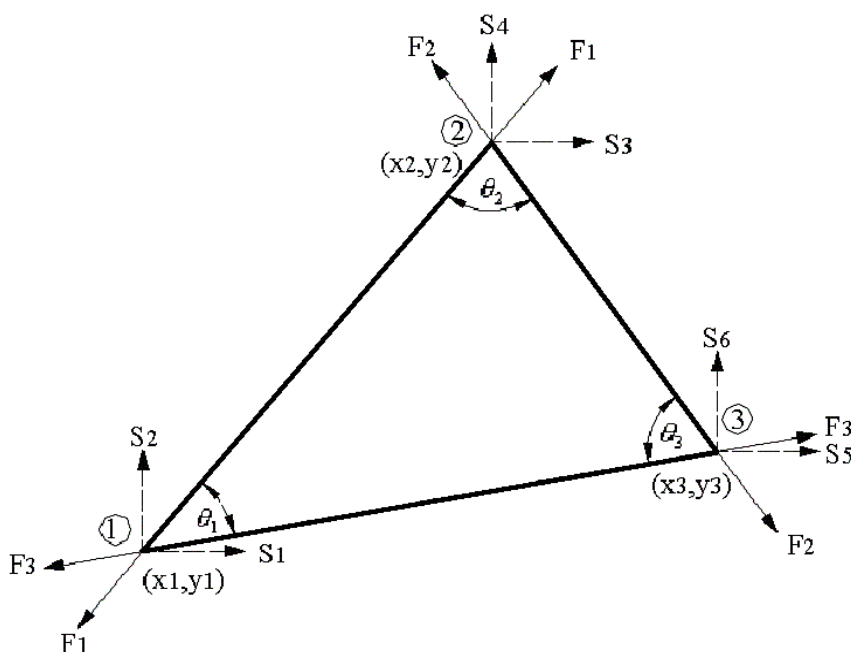
$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

(۲)

پس از به کارگیری این فرایند، برای  $\sigma_{xy}$  و  $\sigma_{yy}$



شکل ۳ نیروهای مستقل گرهی

$$[c]^0 = \int_V [\bar{c}]^T [\phi] [\bar{c}] dv \quad (7)$$

در این رابطه،  $[\phi]$  وارون ماتریس مواد می باشد که به شکل زیر است:

$$[\phi] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (8)$$

ماتریس نرمی جزء سالم،  $[c]^0$  را می توان به صورت زیر درآورد:

$$[c]^0 = \frac{2}{Et} \begin{bmatrix} \left( \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \right) & & \\ (\cos \theta_2 \cot g \theta_2 - \nu \sin \theta_2) & & \\ (\cos \theta_1 \cot g \theta_1 - \nu \sin \theta_1) & & \\ \left( \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2 \sin \theta_3} \right) & (\cos \theta_3 \cot g \theta_3 - \nu \sin \theta_3) & \\ (\cos \theta_2 \cot g \theta_2 - \nu \sin \theta_2) & (\cos \theta_1 \cot g \theta_1 - \nu \sin \theta_1) & \\ \left( \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_3} \right) & & (\cos \theta_3 \cot g \theta_3 - \nu \sin \theta_3) \end{bmatrix} \quad (9)$$

زاویه های  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  وابسته به گوشه های جزء اند. ضریب کشسانی، ضخامت و نسبت پواسون جزء، به ترتیب:  $E, t, \nu$  می باشند. در هنگام ایجاد ترک، تنش های عمود بر امتداد ترک و تنش های برشی لبه های آن، به سوی صفر نزدیک می شود؛ در نتیجه، انرژی نهفته کل کاهش یافته و نرمی افزایش خواهد یافت. براساس قضیه کاستیگلیانو، درایه های ماتریس نرمی اضافی در هنگام ترک خوردگی، به شکل زیر در دسترس قرار می گیرد [1,6]:

رابطه های زیر، بین نیروهای نامبرده برقرارند:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{12} & 0 & l_{31} \\ -m_{12} & 0 & m_{31} \\ l_{12} & -l_{23} & 0 \\ m_{12} & -m_{23} & 0 \\ 0 & l_{23} & -l_{31} \\ 0 & m_{23} & -m_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{S\} = [T]\{F\} \quad (4)$$

در رابطه کنونی،  $m_{ij}, l_{ij}$  کسینوس های هادی لبه  $ij (i, j=1,2,3)$  می باشد. اگر فقط  $F_1$  به جزء وارد شود، تنش های ناشی از این نیرو با استفاده از رابطه های (۳) و (۴) به صورت زیر در دسترس قرار می گیرند:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\ell_{12}^2 F_1}{th_3} ; \sigma_{yy} = \frac{2m_{12}^2 F_1}{th_3} \quad (5)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2\ell_{12} m_{12} F_1}{th_3}$$

در این جا،  $h_3$  ارتفاع سه پهلو از گوشه (۳) می باشد. از سوی دیگر، رابطه بین تنش ها و نیروهای مستقل گرهی به صورت زیر می باشد [8]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{2}{t} \begin{bmatrix} \frac{\ell_{12}^2}{h_3} & \frac{\ell_{23}^2}{h_1} & \frac{\ell_{31}^2}{h_2} \\ \frac{m_{12}^2}{h_3} & \frac{m_{23}^2}{h_1} & \frac{m_{31}^2}{h_2} \\ \frac{\ell_{12} m_{12}}{h_3} & \frac{\ell_{23} m_{23}}{h_1} & \frac{\ell_{31} m_{31}}{h_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\sigma\} = [\bar{c}]\{F\} \quad (6)$$

یادآور می شود که ماتریس نرمی جزء سالم به وسیله رابطه زیر حساب می گردد:

رابطه سازی یک جزء سه پهلو ...

می آید:

$$\begin{cases} k_{Ie,1} = \frac{2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_3} \ell_{12}^2 F_1 \\ k_{Ie,2} = \frac{2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_1} \ell_{23}^2 F_2 \\ k_{Ie,3} = \frac{2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_2} \ell_{31}^2 F_3 \end{cases}$$

(۱۶)

$$\begin{cases} k_{Iie,1} = \frac{-2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_3} \cdot \ell_{12} \cdot m_{12} \cdot F_1 \\ k_{Iie,2} = \frac{-2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_1} \cdot \ell_{23} \cdot m_{23} \cdot F_2 \\ k_{Iie,3} = \frac{-2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_2} \cdot \ell_{31} \cdot m_{31} \cdot F_3 \end{cases}$$

(۱۷)

در رابطه‌های کنونی، تابع تصحیح  $Y(g)$  به صورت زیر است [4]:

$$Y(g) = 1 + 0.01876 \left(\frac{2a}{H}\right) + 0.1825 \left(\frac{2a}{H}\right)^2 + 2.024 \left(\frac{2a}{H}\right)^3 - 2.4316 \left(\frac{2a}{H}\right)^4 \quad (18)$$

در رابطه (۱۸)،  $2a$  طول ترک و  $H$  ارتفاع مستطیل محیط بر جزء در راستای ترک می‌باشد. این عامل‌ها در شکل (۱) نمایش داده شده‌است. براساس الگوی ایروین، برای ترک میانی، ضریب شدت تنش کشسان - مومسان به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$k_I = Y(g) \sigma \sqrt{2a + 2r_p} \quad (19)$$

در این‌جا،  $\sigma$  تنش اسمی است. باید آگاه بود، تابع  $Y(g)$  به هندسه ترک و اندازه‌های جزء بستگی دارد.

$$[c_{ij}]^1 = \frac{\partial^2 u^1}{\partial F_i \partial F_j} \quad (10)$$

در این‌جا،  $F_j$  و  $F_i$  نیروهای مستقل گرهی می‌باشند ( $i, j = 1, 2, 3$ ). انرژی کرنشی رها شده در هنگام ترک خوردگی،  $u^1$ ، به شکل زیر حساب می‌گردد:

$$u^1 = \frac{1}{E} \int_A \left( \sum_{i=1}^3 k_{I,i}^2 + \sum_{i=1}^3 k_{II,i}^2 \right) dA \quad (11)$$

در این رابطه،  $k_I$  و  $k_{II}$  به ترتیب، ضریب‌های شدت تنش متناظر با حالت‌های I و II ترک خوردگی، و  $E$  ضریب کشسانی مواد می‌باشد. ضریب‌های شدت تنش کشسان در جزء دارای ترک میانی به صورت زیر است [4,9]:

$$k_{Ie} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sigma_{XX}(0, Y) \sqrt{\frac{a+Y}{a-Y}} dY \quad (12)$$

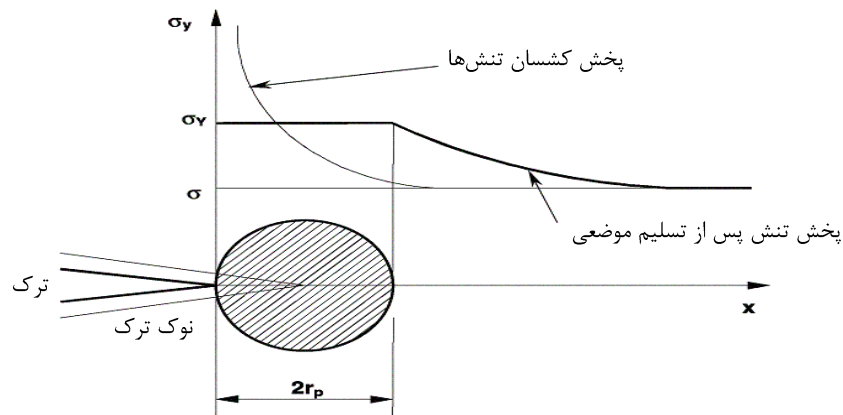
$$k_{Iie} = \frac{-1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sigma_{XY}(0, Y) \sqrt{\frac{a+Y}{a-Y}} dY \quad (13)$$

براساس رابطه (۶) مقدار  $\sigma_{XX}(0, Y)$  به وسیله برابری‌های زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\sigma_{XX}(0, Y) = \frac{2}{t} \left[ \frac{\ell_{12}^2}{h_3} F_1 + \frac{\ell_{23}^2}{h_1} F_2 + \frac{\ell_{31}^2}{h_2} F_3 \right] \quad (14)$$

$$\sigma_{XY}(0, Y) = \frac{2}{t} \left[ \frac{\ell_{12} m_{12}}{h_3} F_1 + \frac{\ell_{23} m_{23}}{h_1} F_2 + \frac{\ell_{31} m_{31}}{h_2} F_3 \right] \quad (15)$$

با جاگذاری برابری‌های (۱۴)، (۱۵) در رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) و در نظر گرفتن تابع تصحیح ابعاد جزء، ضریب شدت تنش برای حالت کشسان، به دست



شکل ۴ ناحیه مومسان درنوک ترک

با جایگذاری رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) در برابری (۲۱)، ضریب شدت کشسان- مومسان بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{cases} k_{I,1} = \frac{2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_3} \cdot \ell_{12}^2 \cdot F_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{Y^2(g)}{\pi} \left( \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yi}} \right)^2} \\ k_{I,2} = \frac{2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_1} \cdot \ell_{23}^2 \cdot F_2 \cdot \sqrt{1 + \frac{Y^2(g)}{\pi} \left( \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yi}} \right)^2} \\ k_{I,3} = \frac{2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_2} \cdot \ell_{31}^2 \cdot F_3 \cdot \sqrt{1 + \frac{Y^2(g)}{\pi} \left( \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yi}} \right)^2} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} k_{II,1} = \frac{-2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_3} \cdot \ell_{12} \cdot m_{12} \cdot F_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{Y^2(g)}{\pi} \left( \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yi}} \right)^2} \\ k_{II,2} = \frac{-2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_1} \cdot \ell_{23} \cdot m_{23} \cdot F_2 \cdot \sqrt{1 + \frac{Y^2(g)}{\pi} \left( \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yi}} \right)^2} \\ k_{II,3} = \frac{-2\sqrt{\pi a} \cdot Y(g)}{th_2} \cdot \ell_{31} \cdot m_{31} \cdot F_3 \cdot \sqrt{1 + \frac{Y^2(g)}{\pi} \left( \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yi}} \right)^2} \end{cases} \quad (23)$$

در حالی که نوک ترک کشسان و یا مومسان

ایروین، اثر افزایش نرمی در نتیجه تسلیم نوک ترک را با یک شعاع فرضی  $r_p$  نشان داد. او در سال ۱۹۶۰، برای محاسبه  $r_p$  رابطه زیر را پیشنهاد نمود [10]:

$$r_p = \alpha \left( \frac{k_{Ie}}{\sigma_{yi}} \right)^2 \quad (20)$$

در این برابری،  $k_{Ie}$  ضریب شدت تنش حالت یکم ترک خوردگی در تغییر شکل کشسان و  $\sigma_{yi}$  تنش تسلیم مواد می‌باشد. عامل  $\alpha$ ، به وسیله رابطه زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{مسئله تنش مستوی} \\ \frac{1}{6\pi} & \text{مسئله کرنش مستوی} \end{cases}$$

از جاگزینی رابطه (۲۰) در برابری (۱۹)، نتیجه زیر پیدا می‌شود:

$$k_I = Y(g) \cdot \sigma \cdot \sqrt{2a + \frac{1}{\pi} \left( \frac{k_{Ie}}{\sigma_{yi}} \right)^2} = k_{Ie} \sqrt{1 + \frac{Y^2(g)}{\pi} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{yi}} \right)^2} \quad (21)$$

رابطه سازی یک جزء سه پهلو ...

$$[C]^I = \begin{bmatrix} C_{11}^I & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^I & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^I \end{bmatrix} \quad (27)$$

با روی هم گذاری، ماتریس نرمی کل جزء به وسیله برابری زیر حساب می شود:

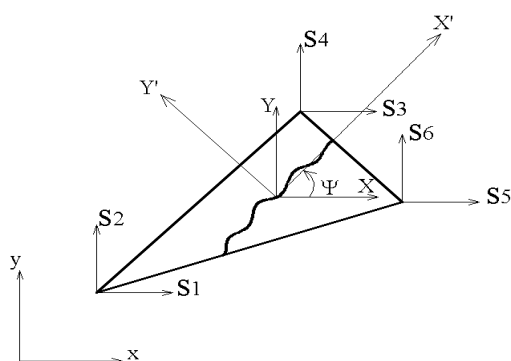
$$[C] = [C]^0 + [C]^I \quad (28)$$

### ماتریس سختی جزء پیشنهادی

با داشتن ماتریس نرمی جزء ترک دار در دستگاه مستقل گرهی و به کارگیری ماتریس مبدل نیرویی در برابری (۴)، ماتریس سختی جزء، توسط رابطه انتقالی زیر در دسترس قرار می گیرد:

$$[K_e] = [T]^T [C]^{-1} [T] \quad (29)$$

برای واریسی کردن درستی الگوی پیشنهادی، این روش با الگوی ترک پخش شده، مقایسه خواهد شد. رشید برای نخستین بار الگوی ترک پخش شده را پیشنهاد کرد [11]. براساس این الگو، هنگامی که تنش کششی اصلی از مقاومت کششی جسم بیشتر شود، ترک ایجاد می گردد. پس از پیدایش ترک، جسم به صورت غیر هم سان رفتار می کند. شکل (۵)، جزئی را نشان می دهد که در جهت محور محلی  $X'$  ترک خورده است. در شکل یاد شده، زاویه امتداد ترک با محور  $X$  می باشد:



شکل ۵ ترک پخش شده

باشد، رابطه های زیر برقرار می شود:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} = 0 & \text{کشسان کامل} \\ \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} = 1 & \text{مومسان کامل} \end{cases} \quad (24)$$

در ادامه این کار، به بررسی حالت مومسان نوک ترک پرداخته می شود. با جایگزینی رابطه های (۲۲) و (۲۳) در رابطه های (۱۰) و (۱۱) و ساده سازی، درایه های ماتریس نرمی اضافی ناشی از ترک خوردگی، در دسترس قرار می گیرد:

$$\begin{aligned} C_{12}^I = C_{21}^I = \frac{\partial^2 u^I}{\partial F_1 \partial F_2} &= 0 \\ C_{13}^I = C_{31}^I = C_{32}^I = C_{23}^I &= 0 \\ C_{11}^I &= \frac{2\pi H^2}{Et} \left( \frac{\ell_{12}^4}{h_3^2} + \frac{\ell_{12}^2 \cdot m_{12}^2}{h_3^2} \right) \cdot F(g) \\ C_{22}^I &= \frac{2\pi H^2}{Et} \left( \frac{\ell_{23}^4}{h_1^2} + \frac{\ell_{23}^2 \cdot m_{23}^2}{h_1^2} \right) \cdot F(g) \\ C_{33}^I &= \frac{2\pi H^2}{Et} \left( \frac{\ell_{31}^4}{h_2^2} + \frac{\ell_{31}^2 \cdot m_{31}^2}{h_1^2} \right) \cdot F(g) \end{aligned} \quad (25)$$

در این جا،  $F(g)$  به صورت زیر معرفی می گردد:

$$\begin{aligned} F(g) = & -4.359g^{17} - 2.356g^{15} + 7.135g^{13} + 0.759g^{11} \\ & - 6.256g^9 + 0.5398g^7 + 2.658g^5 + 0.0409g^3 \end{aligned} \quad (26)$$

در رابطه بالا،  $g = \frac{2a}{H}$  می باشد. سرانجام، ماتریس نرمی اضافی ناشی از ترک خوردگی به صورت زیر در می آید:

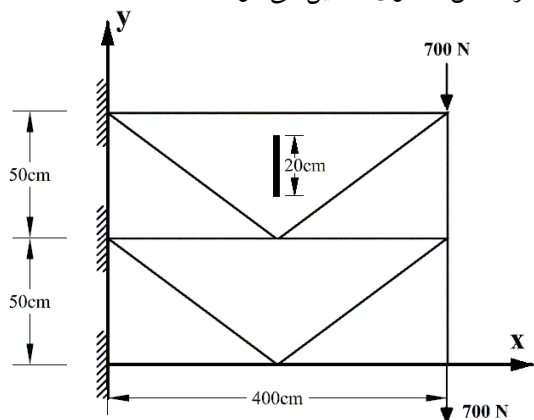


رابطه زیر به دست می آید:

$$[K] = \int_A [B]^T [D_{cr}]_G [B] t dA \quad (33)$$

### نمونه های عددی

مثال ۱: تیر طره ای با طول ۴ متر، ارتفاع یک متر و ضخامت ۰/۱ متر تحلیل می گردد. ضریب کشسانی سازه ۲۱۰۰۰۰ نیوتن بر میلی متر مربع و نسبت پواسون آن ۰/۳ می باشد. این تیر، دارای ترک میانی قائمی به بزرگی ۰/۲ متر است. شبکه بندی سازه همانند شکل (۶) است. چگالی مواد تیر ۹۸۱۰۰ نیوتن بر متر مکعب می باشد. این سازه در سر آزاد خود، در بالا و پایین، زیر اثر بار متمرکز ۷۰۰ نیوتن قرار دارد. این تیر به وسیله شش جزء تنش مستوی تحلیل می شود:



شکل ۶ تیر عمیق با شش جزء

در ادامه، تغییر مکان های قائم زیر این تیر و مقدارهای ویژه آن، توسط الگوی پیشنهادی حساب می شود. سپس، با نتایج ترک پخش شده، مقایسه می گردد. شکل های (۷) و (۸) پاسخها را نشان می دهند.  
**مثال ۲:** در این نمونه عددی، تیر پیشین، به وسیله سی و یک جزء تنش مستوی، مورد تحلیل قرار می گیرد. شبکه بندی سازه همانند شکل (۹) می باشد.

هنگامی که جسم ترک می خورد، باید ماتریس مواد اصلاح گردد. ساده ترین رابطه ای که می تواند رفتار جسم را پس از ترک مشخص نماید به شکل زیر است [11,12]:

$$\begin{Bmatrix} d_{\sigma_{x'}} \\ d_{\sigma_{y'}} \\ d_{\tau_{x'y'}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_t G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{\epsilon_{x'}} \\ d_{\epsilon_{y'}} \\ d_{\gamma_{x'y'}} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \{d_{\sigma'}\} = [D_{cr}]_l \{d_{\epsilon'}\} \quad (30)$$

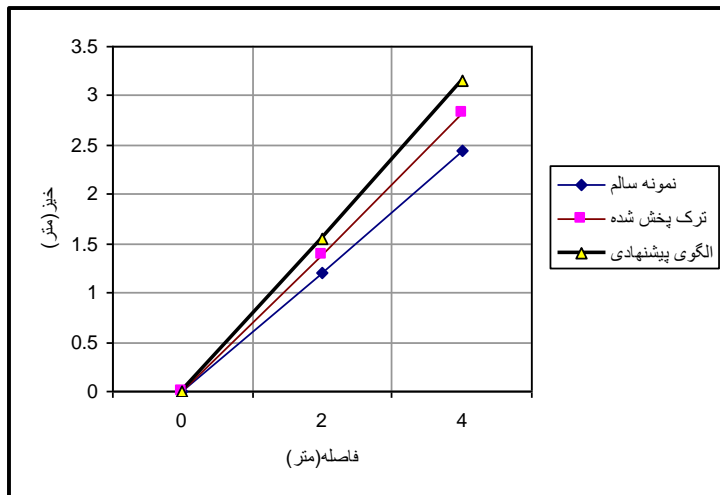
در هنگام ترک خوردگی، مقداری از نیروی برشی، توسط لبه ها منتقل می گردد. ضریب  $\beta_t$  اثر قفل و بست دانه ای را وارد تحلیل می کند. این ضریب در هنگام رشد ترک تغییر خواهد کرد؛ به گونه ای که در آغاز ترک خوردگی، این ضریب یک است و با گسترش ترک به سوی صفر نزدیک می شود. انتخاب این مقدار به نوع و دقت تحلیل بستگی دارد. با این همه به طور معمول، این ضریب برابر با ۰/۱ انتخاب می شود. برای محاسبه ماتریس سختی جزء، ماتریس مواد آن از محورهای محلی (l) به محورهای کلی (G) منتقل می گردد:

$$[D_{cr}]_G = [E]^T [D_{cr}]_l [E] \quad (31)$$

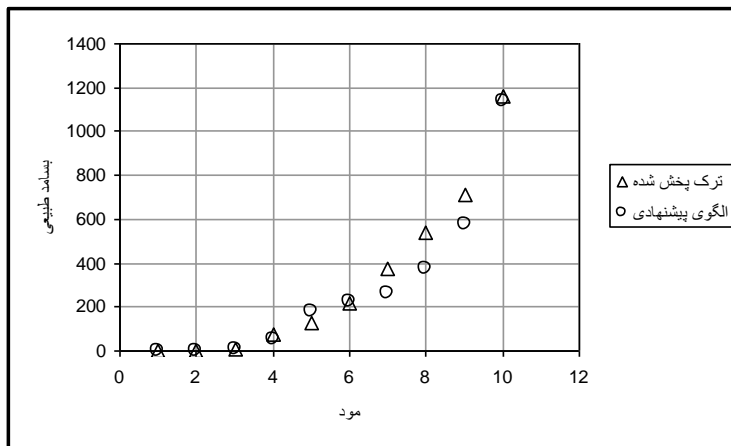
$$[E] = \begin{bmatrix} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi \\ \sin^2 \psi & \cos^2 \psi \\ -2 \cos \psi \sin \psi & 2 \cos \psi \sin \psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \psi \sin \psi \\ -\cos \psi \sin \psi \\ (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \end{bmatrix} \quad (32)$$

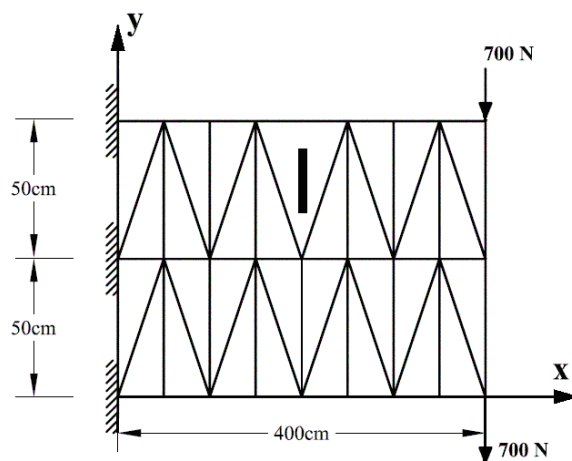
با داشتن ماتریس مواد جزء ترک خورده  $[D_{cr}]_G$  و نیز ماتریس کرنش [B]، ماتریس سختی آن [K] از



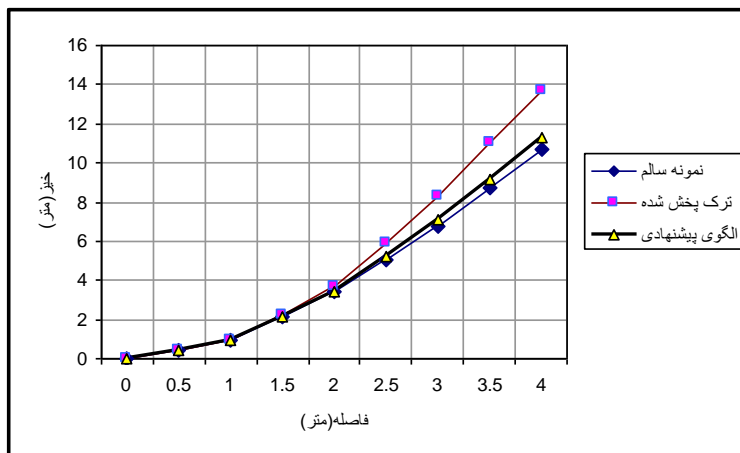
شکل ۷ نمودار خیز قائم تیر



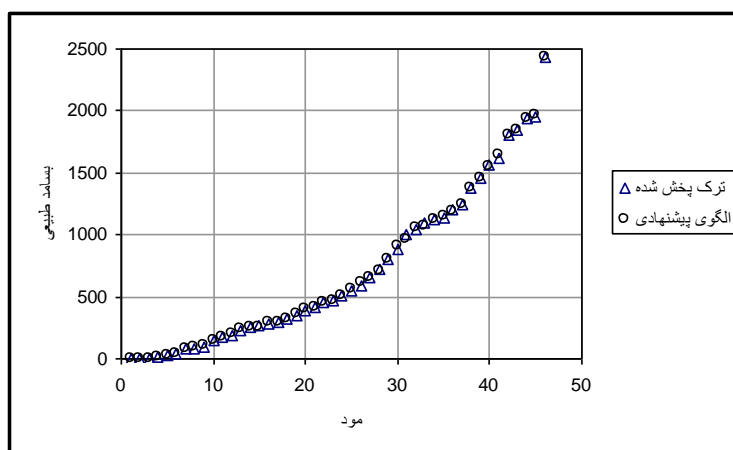
شکل ۸ مقایسه بسامدهای طبیعی



شکل ۹ تیر عمیق با سی و یک جزء



شکل ۱۰ نمودار خیزهای قائم تیر



شکل ۱۱ مقایسه بسامدهای طبیعی تیر با سی و یک جزء

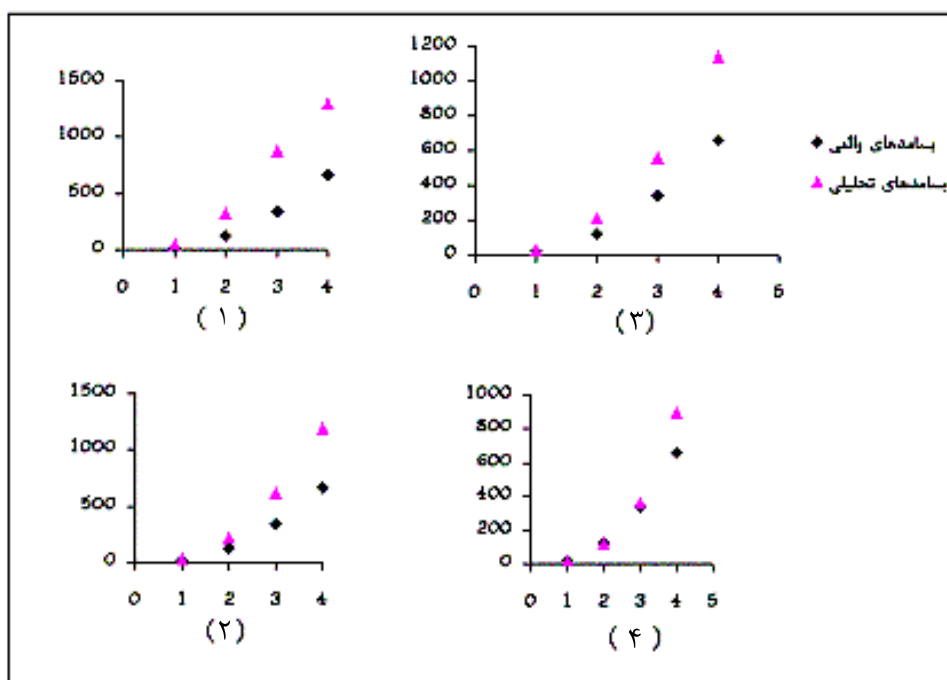
تکیه گاه است. صورت کلی مسأله در مرجع [2] نشان داده شده است. چگالی مواد،  $25506$  نیوتن بر مترمکعب می باشد.

بسامدهای طبیعی این مسأله، به وسیله الگوی پیشنهادی، برای تعداد جزء های متفاوت به دست می آید و با نتایج الگوی تیری مرجع [2] مقایسه می گردد. این مقادارها در جدول (۱) درج شده است.

خیز قائم زیر تیر، در شکل (۱۰) مقایسه می شود. بسامدهای طبیعی این سازه برحسب رادیان بر ثانیه در شکل (۱۱) به نمایش در آمده اند. مثال ۳: تیر طره ای از جنس آلومینیم به طول  $0.996$ ، ارتفاع  $0.25$  و ضخامت  $0.5$  متر در دست می باشد. ضریب کشسانی سازه  $6979 \times 10^9$  نیوتن بر مترمربع و نسبت بواسون آن  $0.33$  می باشد. این تیر دارای ترک قائمی به بزرگی  $4$  میلی متر در فاصله  $0.275$  متری از

جدول ۱ بسامدهای چهار مود نخست نوسان سازه (هرتز)

مود	پاسخ واقعی	مرجع [2]	جزء ۷۹	جزء ۱۵۵	جزء ۱۸۸	جزء ۳۹۹
۱	۲۰/۰۰۰	۱۹/۶۴۱	۴۰/۰۴۶	۳۱/۷۰۲	۲۹/۱۲۹	۲۱/۰۱
۲	۱۲۴/۲۵۰	۱۲۴/۱۰۶	۳۱۹/۹۸	۲۱۷/۰۵۶	۲۰۹/۵۴۳	۱۲۶/۶۱۳
۳	۳۴۰/۸۱۳	۳۴۰/۷۵۸	۸۷۸/۷۳	۶۱۵/۰۷۶	۵۵۹/۲۵۸	۳۵۷/۸۱۳
۴	۶۶۲/۸۱۳	۶۶۳/۰۲۰	۱۲۹۹/۸۴	۱۱۸۳/۸۶۸	۱۱۴۲/۱۶۴	۸۹۶/۲۱۳



شکل ۱۲ مقایسه بسامدهای طبیعی الگوی پیشنهادی و مقادیرهای واقعی

### نتیجه گیری

در هنگام ایجاد ترک، ماتریس سختی سازه کاهش پیدا می کند. بر این اساس، تغییر مکان های سازه افزایش و بسامدهای طبیعی آن، کاهش می یابد. در نمونه عددی یکم، تیر عمیقی با شش جزء تحلیل شد. تغییر مکان های الگوی ترک پخش شده، در طول تیر، کم تر از

شکل (۱۲)، مقادیرهای واقعی بسامدهای چهار مود اول سازه را با مقادیرهای به دست آمده از الگوی پیشنهادی مقایسه می کند. بر این اساس، آشکار می گردد که با زیاد شدن تعداد جزء، پاسخ های الگوی پیشنهادی به جواب های واقعی نزدیک تر می شوند. این سخن در شکل های (۱-۱۲) تا (۴-۱۲) نمایان است.

$\sigma_{yy}$	تنش قائم راستای y	الگوی پیشنهادی بوده است. بنابراین، وقتی شبکه بندی درشت باشد، نتیجه های نمونه پیشنهادی از الگوی ترک پخش شده، محافظه کارانه تر است. در نمونه عددی دوم، تیر طره ای با سی و یک جزء تحلیل شد. پاسخ ها آشکار می سازد که هر چه شمار جزء ها بیشتر گردد، خیز تیر تحلیل شده به واقعیت نزدیک تر می شود؛ از این رو، رابطه سازی پیشنهادی برای تعداد جزء های زیاد، نتایج خوبی در دسترس قرار می دهد. از سوی دیگر، نتایج آن در شبکه بندی های درشت، نسبت به ترک پخش شده، محافظه کارانه تر است.
$\theta_i$	زاویه گوشه i ام جزء	
G	ضریب برشی	
$k_{II}$	ضریب شدت تنش حالت II ترک	
E	ضریب کشسانی	
$m_{ij}, l_{ij}$	کسینوس های هادی امتداد ij	
$[K_e]$	ماتریس سختی جزء پیشنهادی	
$[T]$	ماتریس مبدل نیرویی	
$[C]^1$	ماتریس نرمی اضافی در اثر ایجاد ترک	
$[C]$	ماتریس نرمی کل	
a	نصف طول ترک	نتایج نمونه عددی سوم آشکار می کند که پاسخ های الگوی پیشنهادی در موده های نخستین به مقادیر واقعی نزدیک تر می شود. این ویژگی به خاطر حساسیت شدید ماتریس نرمی، به دگرگونی بسامدهای پایین سازه می باشد؛ از این رو در سازه هایی مثل دیوار برشگیر و تیر عمیق، جزء سه پهلوی نویسنندگان، کارآیی بالاتری خواهد داشت. بر این اساس، راه کار پیشنهادی، برای این گونه سازه ها با شمار جزء کم تر، پاسخ های خوبی به ارمغان می آورد.
$\sigma_{xy}$	تنش برشی	
$\sigma_{xx}$	تنش قائم راستای x	
$\psi$	زاویه امتداد ترک با محور X ها	
t	ضخامت جزء	
$k_I$	ضریب شدت تنش حالت I ترک	
$\beta_t$	ضریب قفل وبست دانه ای	
$u^1$	انرژی کرنشی رها شده در هنگام ترک	
$[E]$	ماتریس دوران کرنش ها	
$[B]$	ماتریس کرنش	
$[D_{cr}]$	ماتریس مواد جزء ترک خورده	
$[C]^0$	ماتریس نرمی جزء سالم	<b>نشانه ها</b>
v	نسبت پواسون	$h_i$
$[\phi]$	وارون ماتریس مواد	$\sigma_{yi}$
		ارتفاع جزء سه پهلو از گوشه i ام
		تنش تسلیم مواد

## مراجع

1. Lee, Y. S., and Chung, M. J., "A Study on Crack Detection using Eigen Frequency Test Data", *Computers and Structures*, 77 (3), pp. 327–342, (2000) .
2. Sinha, J. K., Friswell, M. I., and Edwards, S., "Simplified Models for the Location of Cracks in Beam Structures using Measured Vibration Data", *Journal of Sound and Vibration*, 25 (1) , pp.13–38, (2002) .

3. Krawczuk, M., Palacz, M., and Ostachowicz, W., "The Dynamic Analysis of a Cracked Timoshenko Beam by the Spectral Element Method", *Journal of Sound and Vibration*, 264 (5), pp.1139–1153, (2003).
4. Krawczuk, M., Zak, A., and Ostachowicz, W., "Finite Element Model of Plate with Elasto – Plastic Through Crack", *Computers and Structures*, 79 (5), pp. 519–532, (2001).
5. Beletti, B., Cerioni, R., and Iori, I., "Physical Approach for Reinforced – Concrete (PARC) Membrane Elements", *Journal of Structural Engineering*, 127 (12), pp.1412–1426, (2001).
6. Saavedra, P. N., and Cuitino, L. A., "Crack Detection and Vibration Behavior of Cracked Beams", *Computers and Structures*, 79 (16), pp.1451–1459, (2001).
7. Foster, S. J., and Marti, P., "Cracked Membrane Model: Finite Element Implementation" *Journal of Structural Engineering*, 129 (9), pp.1155–1163, (2003).
8. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, (1968).
9. Qian, G. L., Gu, S. N., and Jiang, J. S., "A Finite Element Model of Cracked Plates and Application to Vibration Problems", *Computers and Structures*, 39 (5), pp. 483–487, (1991).
10. Tada, H., Paris, P. C., and Irwin, G. R., "The Stress Analysis of Crack Hand Book", ASME Press, (2000).
11. Chen, W. F., "Plasticity in Reinforced Concrete", Mc Graw – Hill, (1982).
12. Kotsovos, M. D., and Pavlovic, M. N., "Structural Concrete: Finite Element Analysis for Limit – State Design", T. Telford, (1995).