نشریه مهندسی عمران		سال بیست و یکم، شماره دو، ۱۳۸۹

تحلیل هم‌زمان گسترش دینامیکی ترک و تماس سطوح آن در روش المان مرزی یک‌دامنه*

بابک امیدوار[۱]		محمد رحیمیان[۲]		اسدا... نورزاد[۳]		علیرضا صناعی ها[٤]

چکیده در این مقاله، فرمول بندی تحلیل هم‌زمان گسترش دینامیکی ترک و تماس سطوح آن در محیط دو بعدی ارائه می‌شود. در فرمول بندی معرفی شده، معادلات انتگرال مرزی تغییر مکان و بردار تنش و معادلات مربوط به شرایط تماس به طور هم‌زمان در فضای زمانی در محیط یک دامنه حل می‌شود. روش ارائه شده، دارای این قابلیت است که با گسترش ترک، احتیاجی به تغییر شبکه‌ی المان بندی قبلی نیست و گسترش ترک در مود مرکب و تماس وجوه آن با اضافه کردن المان های جدید به نوک ترک، در مش بندی قبلی به طور اتوماتیک قابل اعمال است. قابلیت تحلیل گسترش دینامیکی ترک و تماس سطوح آن به طور هم‌زمان و اتوماتیک، در هیچ یک از تحقیقات مبتنی بر روش ترک منفرد و نرم افزارهای تجاری موجود، وجود ندارد. کاربرد این روش به منظور تأیید و نشان دادن کارآیی آن در چند مسأله گسترش وتماس سطوح‌ترک‌های لبه‌ای در صفحه‌ی T شکل ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی روش المان مرزی دوگانه، دامنه زمانی، گسترش ترک گسسته، مکانیک شکست دینامیکی، مسأله تماس.

Simultaneous Analysis of Dynamic Crack Growth and Contact of Crack Faces in Single-Region Boundary Element Method

B. Omidvar		M. Rahimian		A. Noorzad		A. Sanaeiha

Abstract *The formulation of simultaneous analysis of dynamic crack growth and contact of its faces in two-dimensional domain is introduced. Displacement and traction boundary integral equations and additional contact equations are used simultaneously in one region in the time domain. The proposed method has the capability of automatic modelling of crack propagation and contact of crack faces in mixed mode fractures by adding only new elements in front of crack tips. This automatic capability of simultaneous analysis of dynamic discrete crack propagation and contact problem is not enhanced in any of available commercial softwares. In order to verify the proposed method and so as to show the versatile features and capabilities of the method, dynamic crack growth of edge cracks and contact of crack faces in a T shaped plate is analysed.*

Key Words Dual Boundary Element Method, Time Domain, Discrete Crack Propagation, Dynamic Fracture Mechanics, Contact Problem.

---

* تاریخ تصویب مقاله ۸۸/۱۰/۲۷ و تاریخ دریافت نسخه‌ی نهایی اصلاح شده ۸۹/٦/۲٦

(۱) نویسنده‌ی مسئول، استادیار، دانشگاه تهران، دانشکده‌ی محیط زیست، گروه مدیریت در سوانح طبیعی

(۲) استاد، دانشگاه تهران، دانشکده‌ی فنی، گروه مهندسی عمران

(۳) استادیار، دانشگاه تهران، دانشکده‌ی فنی، گروه مهندسی عمران

(٤) دانشجوی دکتری، دانشگاه تهران، دانشکده‌ی فنی، گروه مهندسی عمران

مقدمه

هدف مکانیک شکست دینامیکی، بررسی نحوه‌ی رشد ترک‌های پیش رونده در سازه های تحت بار دینامیکی می‌باشد [1]. سازه‌های با شکل دلخواه و با شرایط مرزی وابسته به زمان، نیازمند تحلیل به وسیله‌ی روش های عددی می‌باشند. بررسی نحوه‌ی مدل‌سازی عددی گسترش دینامیکی ترک و تماس وجوه آن از دیرباز مورد توجه محققین بوده است. روش های مختلفی توسط پژوهشگران برای مدل کردن گسترش دینامیکی ترک به صورت ترک منفرد به کار گرفته شده است که از بین آنها، روش های اجزای محدود و المان های مرزی فراگیرتر هستند. مکانیک شکست دینامیکی حالاتی را در بر می‌گیرد که در آن، اینرسی باید در فرمول بندی مسأله دخالت داده شود. این شرایط در بارگذاری دینامیکی یا هنگام گسترش سریع ترک تحت بارگذاری استاتیکی، حاصل می شود.

ترک در مدل ترک منفرد در روش اجزای محدود به صورت جدایش مرز بین المان ها نمایش داده می‌شود. گسترش ترک در محیط نیز با استفاده از معیار مقاومت یا معیار مکانیک شکست، تعیین می شود و انتشار آن از طریق اصلاح شبکه بندی، ایجاد، جابه‌جایی و یا آزادسازی گره‌ها در مدل اجزای محدود، اعمال می‌گردد. عیب عمده‌ی این روش، صرف هزینه‌ی محاسباتی زیاد به دلیل تغییر مداوم شبکه‌ی اجزا محدود در حین آنالیز و یا لزوم پیش فرض اولیه‌ی مسیر گسترش ترک، قبل از انجام تحلیل است. از بین روش های عددی به کار رفته بر اساس مدل ترک منفرد اجزا محدود دینامیکی، می‌توان به کارهای کوبایاشی و همکارانش [2] و جانگ و همکارانش [3] اشاره کرد که در هر دو، از تکنیک آزادسازی گرهی در مسیر از پیش تعیین شده برای گسترش ترک استفاده شده است.

در روش المان مرزی، معادلات دیفرانسیلی حاکم به معادلات انتگرالی تبدیل می‌شود که روی مرز اعمال می‌شود. سپس مرز به قطعات مرزی (المان‌های مرزی) تقسیم‌بندی می‌شود و انتگرال‌گیری عددی، روی المان‌های مرزی انجام می‌شود. همانند روش‌های عددی دیگر، با ارضای شرایط مرزی، سیستم معادلات خطی جبری حاصل می‌شود که از حل آن جواب یکتای مسأله به دست می‌آید.

روش المان مرزی را می‌توان به راحتی برای مرزها با هندسه‌ی پیچیده به کار برد. علاوه بر آن، از آن جا که در این روش، تمام تقریب‌ها روی مرز صورت می‌گیرد، می‌توان مناطقی که در آن متغیرها تغییرات سریع دارند را با دقت بیشتری نسبت به روش اجزاء محدود، مدل کرد و این امر، مزیت استفاده از روش المان مرزی را در مسائل مکانیک شکست، مشخص می‌کند. در روش المان مرزی، زمان کمتری برای آماده سازی اطلاعات لازم است. این امر، نتیجه‌ی مستقیم مدل کردن مرز است و بنابراین بعد مسأله یک درجه کم می‌شود و در نتیجه، زمان لازم برای آماده سازی اطلاعات و چک کردن اطلاعات به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. علاوه براین، ایجاد تغییر در شبکه‌ی المان‌بندی، ساده‌تر می‌شود. این جنبه‌ی مثبت، خصوصاً در مسائلی مانند مطالعات طراحی اولیه، گسترش ترک و مسائل تماس دارای اصطکاک که المان‌بندی مجدد لازم دارد، بسیار با اهمیت است. از مزایای دیگر روش المان مرزی، می‌توان به دقت بالای میدان های تنش وتغییر مکان در داخل محیط و نیاز به حافظه‌ی کمتر در کامپیوتر نسبت به روش‌های دیگر به علت کاهش تعداد نقاط گرهی و المان ها اشاره کرد. علاوه بر این، از آن‌جا که نقاط داخلی در پاسخ‌های روش المان مرزی اختیاری است، استفاده کننده می‌تواند به جای کل ناحیه‌ی داخلی، توجه خود را روی قسمت خاصی از ناحیه‌ی داخلی متمرکز کند.

از جنبه‌های مثبت استفاده از روش المان مرزی، کاهش بعد مسأله است. در یک مسأله دو بعدی، فقط خط مرزی دامنه را المان‌بندی می‌کنیم و در مسائل سه

بعدی، تنها المان‌بندی سطح دامنه، کافی است. درمقایسه با روش‌هایی که در آن دامنه المان‌بندی می‌شود، روش‌های المان‌های مرزی، کاهش چشم‌گیری در آماده سازی اطلاعات ایجاد می‌کنند و هم‌چنین سیستم معادلات بسیار کوچک‌تری را نتیجه می‌دهند. علاوه براین، توصیف راحت‌تر جسم به این معنی است که مناطق تمرکز تنش بالا را با کارایی بیشتری می‌توان مدل کرد؛ زیرا مکان‌هایی از شبکه که در معرض تمرکز تنش قرار دارند، به میزان یک بعد محدودتر شده‌اند. این توانایی در مدل‌سازی دقیق‌تر و کاراتر مناطق تمرکز تنش، دلیل اصلی موفقیت روش المان‌های مرزی در بررسی مسائل مکانیک شکست است.

مدل‌سازی ترک‌های پایدار و اندرکنش آن‌ها در محیط بی نهایت دو بعدی در حالت الاستو استاتیک در مرجع [٤] با استفاده از روش المان مرزی دوگانه مورد بررسی قرار گرفته است. کاربرد روش المان مرزی دوگانه در بررسی اندرکنش ترک ها در حالت الاستو دینامیک و شرایط کنش مسطح تحت اثر امواج طولی در مراجع [٥] و [٦] ارائه شده است. کمالی [٧] اندرکنش دینامیکی ترک ها را در محیط سه بعدی با استفاده از روش مذکور مورد بررسی قرارداد. مدل‌سازی ترک های گسترش یابنده و بررسی گسترش دینامیکی ترک، با استفاده از روش المان مرزی، توسط محققین به شیوه های مختلف صورت گرفته است. اعمال روش المان مرزی چند دامنه به مسائل گسترش دینامیکی ترک توسط گالگو و دومینگوئز [8] صورت گرفته است. در این مرجع از دامنه‌ی زمانی همراه با المان‌های نقطه‌ی یک چهارم استفاده شده است. در روش چند دامنه، مرزهای مجازی که از مسیر ترک عبور می‌کنند، یکتا نیستند و این مشکل روش چند دامنه است که در بررسی گام به گام گسترش ترک، مرزهای مجازی در هرگام گسترش ترک، باید مرتباً تعریف شوند و این مسأله اتوماتیک کردن روش را دچار مشکل می‌کند. پورتلا و هم‌کارانش [9] و مای و علی آبادی [10,11] کاربرد روش المان مرزی دوگانه را در تحلیل گسترش ترک در مود مرکب، در مسائل دوبعدی و سه بعدی استاتیکی مکانیک شکست خطی ارائه کرده‌اند. در مرجع [12]، فدلینسکی و هم‌کارانش، روش المان مرزی دوگانه را در دامنه زمانی برای تحلیل گسترش سریع ترک در حالت مود مرکب به کار برده‌اند. هم‌چنین گنزالس و هم‌کارانش [13] استفاده از چندین پردازشگر را در به کارگیری حافظه‌های غیر متمرکز در مدل‌سازی گسترش ترک با به کارگیری روش المان مرزی دوگانه، ارائه نموده‌اند.

فدلینسکی، خصوصیات کلی روش های المان مرزی (روش زیر دامنه، روش ناپیوستگی تغییر مکانی، روش تقابل دوگانه) استفاده شده در تحلیل سازه های ترک دار را با هم مقایسه نمود [14]. سیلوریا و هم‌کارانش [15] با استفاده از تابع گرین عددی و معیار انرژی کرنشی حداقل به مدل‌سازی گسترش ترک در حالت شبه استاتیکی با استفاده از روش المان مرزی پرداخته‌اند و مسیر گسترش ترک را در حالت مکانیک شکست خطی در محیط های دو بعدی به دست آورده‌اند. لی و هم‌کارانش [16] مسأله‌ی کج شدن ترک در سطح مشترک مصالح مختلف را با استفاده از روش المان مرزی چند دامنه در محیط دو بعدی، مدل‌سازی عددی نمودند.

اخیراً مطالعاتی در مورد گسترش ترک با استفاده از روش المان مرزی در اثر خستگی انجام گرفته است. ملینگ و هم‌کارانش [17] با استفاده از روش المان مرزی دوگانه، گسترش دینامیکی ترک را در اثر خستگی مورد بررسی قرار داده‌اند. هم‌چنین یان [18] با استفاده از روش المان مرزی به مدل‌سازی گسترش ترک در محیط دو بعدی در اثر خستگی پرداخته است. او در مقاله‌ی خود برای مدل‌سازی ترک از روش غیر پیوستگی تغییر مکان به همراه المان های نوک ترک بهره گرفته است.

در هیچ یک از مراجع فوق، اثرات تماس وجوه ترک در نظر گرفته نشده است. در این مقاله فرمول‌بندی‌ای ارائه می‌شود که می توان گسترش دینامیکی ترک و تماس وجوه آن را به صورت هم‌زمان در فضای زمانی مدل کرد. به این منظور از روش المان مرزی دوگانه در فضای زمانی استفاده می‌شود و از

معادله‌ی انتگرال مرزی تغییر مکان، برای یکی از سطوح ترک و از معادله‌ی انتگرال مرزی بردار تنش، برای سطح دیگر ترک استفاده می‌شود. معادلات اضافی تماس نیز دسته بندی می‌شود و به صورت معادلات قید و با استفاده از روش تراکم استاتیکی اعمال می‌گردد. در هرگام از گسترش ترک، یک آنالیز تک دامنه صورت می گیرد، به دلیل این‌که از یک محیط برای آنالیز استفاده می‌شود؛ در صورتی‌که از المان‌های ناپیوسته استفاده شود، دیگر نیازی به المان بندی دوباره‌ی مرزها نیست و هنگام گسترش ترک، ضمن ارضاء شرایط تماس، فقط المان‌های جدید ناپیوسته به المان های قبلی اضافه می‌شود و این از مزایای روش ارائه شده است.

فرمول‌بندی گسترش ترک در روش المان مرزی دوگانه در فضای زمانی

در حالاتی که با مسائل غیرخطی سروکار داشته باشیم، مثلاً هنگامی که شرایط مرزی یا هندسه‌ی مسأله تغییر می‌کند، نمی‌توان از اصل برهم نهی در فضای فرکانسی استفاده کرد و حل مسأله در فضای زمانی الزامی است. مسأله گسترش و پیشرفت ترک در محیط، باعث غیرخطی شدن مسأله می‌شود وبه همین دلیل باید مسأله را در فضای زمانی بررسی کرد.

تغییرمکان در نقطه x'روی مرز Γ از دامنه V را در زمان t به وسیله‌ی قضیه تقابل دینامیکی گرافی [19] به صورت معادله‌ی انتگرالی تغییر مکان، می‌توان نشان داد [20]:

$$c_{ij}(x')u_i(x',t) = \int_\Gamma \int_0^t \big[U_{ij}(x,t;x',\tau)t_i(x,\tau) - T_{ij}(x,t;x',\tau)u_i(x,\tau)\big]d\tau d\Gamma(x) + \rho\int_V\int_0^t\big[U_{ij}(x,t;x',\tau)b_i(x)\big]d\tau dV(x) + \rho\int_V\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_i(x,0)}{\partial t}U_{ij}(x,t;\zeta,0)+\\ u_i(x,0)\dfrac{\partial U_{ij}(x,t;\zeta,0)}{\partial t}\end{bmatrix}dV(x) \quad (۱)$$

u_i؛ تغییر مکان در مرز و t_i؛ بردار تنش مرزی و ρ؛ جرم حجمی است. c_{ij}؛ عبارت پرش است و مقادیر زیر را می‌گیرد:

الف - δ_{ij} هنگامی که x' داخل حجم V باشد.

ب - $0.5\,\delta_{ij}$ هنگامی که x' روی مرز هموار Γ باشد.

ج - 0 هنگامی که x' خارج حجم V و سطح Γ باشد.

هسته‌های $U_{ij}(x,t;x',\tau)$ و $T_{ij}(x,t;x',\tau)$ پاسخ‌های اساسی در محیط نامحدود هستند و به ترتیب، تغییر مکان و بردار تنش را در نقطه‌ی دامنه‌ی x در زمان t در اثر بار واحد اعمال شده در نقطه‌ی چشمه x' در زمان قبلی τ نمایش می‌دهند.

اگر نیروی حجمی وجود نداشته باشد و جسم در ابتدا ساکن باشد، فقط انتگرال روی مرز باقی می‌ماند :

$$c_{ij}(x')u_i(x',t) = \int_\Gamma\int_0^t\big[U_{ij}(x,t;x',\tau)t_i(x,\tau)\big]d\tau d\Gamma(x) - \int_\Gamma\int_0^t\big[T_{ij}(x,t;x',\tau)u_i(x,\tau)\big]d\tau d\Gamma(x) \quad (۲)$$

هنگامی که دو وجه ترک در یک سطح قرار دارند، استفاده‌ی مستقیم از رابطه‌ی فوق منجر به بروز مشکلات ریاضی می‌شود [20]. اگر هندسه ترک متقارن باشد، با اعمال شرط مرزی متقارن و مدل کردن یک وجه ترک، می‌توان بر این مشکل غلبه کرد. در حالت کلی برای مسائل نامتقارن ترک نیازمند به کارگیری روش زیر دامنه می باشد. در این حالت در صورت گسترش ترک، نیاز است که در ابتدای مدل‌سازی، مسیر گسترش ترک از قبل پیش بینی شود و در حین تحلیل مسئله، رهاسازی گره ها در محل گسترش ترک نیز لازم است. در المان مرزی دوگانه، نیازی به معرفی مرزهای مجازی و مسیر پیش فرض گسترش ترک در ابتدای حل مسئله نیست. در مسائل چند دامنه معرفی مرزهای مجازی بین دامنه ها و در مسیر ترک ها، می‌تواند گزینه های مختلفی داشته باشد. روش المان مرزی دوگانه، روشی عمومی و کارا برای مدل‌سازی مسائل ترک است. در این روش، معادله‌ی

انتگرال مرزی تغییرمکان برای یکی از سطوح ترک و معادله انتگرال مرزی مستقل دیگری به نام معادله‌ی انتگرال مرزی بردار تنش برای سطح دیگر نوشته می‌شود. و بدین‌ترتیب می‌توان مسائل کلی ترک در مود مرکب را با به کارگیری این روش و با فرمول‌بندی برای یک منطقه حل کرد.

با استفاده از روابط تنش کرنش و قانون بنیادی ماده (قانون هوک) و با توجه به این که x' روی مرز هموار است، مقدار c_{ij} برابر $0.5\delta_{ij}$ می شود. به این ترتیب معادله‌ی انتگرالی مستقل بردار تنش (رابطه (۳)) از معادله‌ی انتگرالی تغییر مکان حاصل می‌گردد [21]:

$$\frac{1}{2}t_j(x',t) = -n_i(x')\int_\Gamma\int_0^t\left[T_{kij}(x,t;x',\tau)u_k(x,\tau)d\tau\right]d\Gamma(x) + n_i(x')\int_\Gamma\int_0^t\left[U_{kij}(x,t;x',\tau)t_k(x,\tau)d\tau\right]d\Gamma(x) \tag{۳}$$

n_i، بردار عمود بر سطح رو به خارج محیط در نقطه مرزی x' است. هسته‌های $U_{kij}(x,t;x',\tau)$ و $T_{kij}(x,t;x',\tau)$ پاسخ‌های اساسی معادله‌ی انتگرالی بردار تنش در محیط نامحدود هستند. پاسخ های اساسی T_{ij} و U_{kij} و T_{kij} را می توان با استفاده از مشتقات مکانی U_{ij} می توان به دست آورد [۲۲] :

$$T_{ij} = \lambda\left(\frac{\partial U_{mj}}{\partial x_m}\right)n_i(x) + \mu\left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial U_{kj}}{\partial x_i}\right)n_k(x) \tag{٤}$$

$$U_{kij} = \lambda\delta_{ij}\frac{\partial U_{km}}{\partial x'_m} + \mu\left(\frac{\partial U_{kj}}{\partial x'_i} + \frac{\partial U_{ki}}{\partial x'_j}\right) \tag{٥}$$

$$T_{kij} = \lambda\delta_{ij}\frac{\partial T_{km}}{\partial x'_m} + \mu\left(\frac{\partial T_{kj}}{\partial x'_i} + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x'_j}\right) \tag{٦}$$

λ و μ ضرایب لامه هستند.

برای حل عددی مسئله ترک در حالت مود مرکب، باید متغیرهای زمانی و مکانی جزء‌بندی شود. مرز مسئله Γ به M المان مرزی با P گره در هر المان تقسیم می‌شود. زمان مشاهده t به N گام زمانی تقسیم می‌شود. تغییرات زمانی متغیرهای مرزی با Q مقدار درهرگام زمانی مشخص می‌شود. تغییرمکان و بردار تنش با استفاده از توابع شکلی $N^p(\zeta)$ و زمان با استفاده از توابع انترپولاسیون $M^q(\zeta)$ تقریب زده می‌شود. معادلات انتگرال مرزی برای هرکدام از گره‌های المان مرزی به کار گرفته می‌شود. گسترش ترک با اضافه کردن المان‌های جدید در جلوی نوک ترک، مدل‌سازی می‌شود. تعداد المان‌ها در یک گام زمانی مشخص n عبارتست از :

$$M(n) = M_0 + M_c(n) \tag{۷}$$

که در آن M_0 تعداد اولیه‌ی المان‌هاست و $M_c(n)$ تعداد المان‌های اضافه شده است که بر اساس الگوریتم زیر محاسبه می گردد:

الف- ابتدا طول گسترش ترک L' در گام زمانی مورد نظر از رابطه‌ی (۸) محاسبه می گردد:

$$L' = V_c \times \Delta T \tag{۸}$$

در رابطه‌ی (۸)، V_c؛ برابر سرعت گسترش ترک و ΔT ؛ تغییر زمان در گام مورد نظر گسترش ترک می‌باشد.

ب- سپس تعداد المان ها به منظور جلوگیری از ناپایداری عددی به گونه‌ای تعیین می‌گردد که دو شرط $L < c_2\Delta T/0.7$, $c_1\Delta T < L$ ارضاء شود [23].

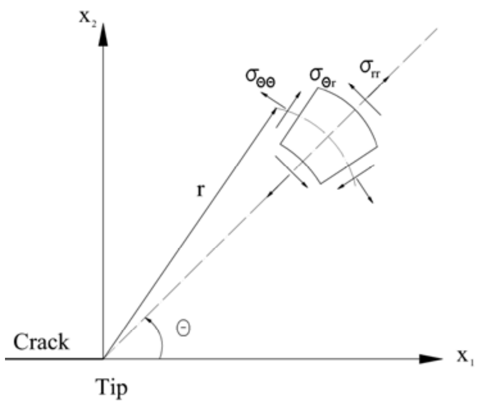
با تعیین تعداد المان‌ها می توان شرط فوق را رعایت کرد. در رابطه‌ی بالا $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ سرعت انتشار موج فشاری و $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ سرعت انتشار موج برشی در محیط می باشد. لازم به ذکر است که در مرز ترک از المان های درجه ی دو غیر پیوسته استفاده می شود تا شرایط لازم برای وجود انتگرال های منفرد هادامارد در گره های مرزی حاصل گردد [24-26]. همان طور که ذکر گردید، هنگامی که شرط $0.7<c\Delta T/L<1$ برقرار نشود، گاهی اوقات در پاسخ رفتار نوسانی غیر عادی حاصل می‌گردد که در برخی حالات، تغییر ابعاد المان ها این

مشکل را برطرف می کند. مرور کلی بر روش هـای رفـع نوسانات غیر عادی در مسائل المان مرزی در مرجع [27] آمده است. در مقاله‌ی حاضر، ابعاد المـان هـا طـوری در نظر گرفته شده است که با ایـن مـشکل برخـورد نـشود. جهت گسترش ترک نیز به ضرایب شدت تنش دینـامیکی موجود و سرعت گسترش ترک بستگی دارد. برای تعیـین جهت گسترش ترک، روش‌های مختلفـی وجـود دارد. از آن‌جا که معیار تـنش محیطـی حـداکثر از لحـاظ کـاربرد راحت‌تر است و از لحاظ درک مستقیم قابل فهم‌تر است، در این‌جا از آن برای تعیین جهت گـسترش تـرک اسـتفاده می‌شود. با توجه به شکل (۱) تنش محیطی عبارت است از:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \quad (۹)$$

هنگامی که ضـرایب شـدت تـنش دینـامیکی K_I و K_{II} مشخص باشـد، در یـک فاصـله‌ی معـین r از نـوک ترک، با معلوم بودن مشخصات مصالح و سرعت گسترش تـرک، تـنش محیطـی تـابعی از θ خواهـد بـود. بـرای تشخیص جهت گسترش ترک، بایـد مـشخص گـردد در کدام زاویه θ تنش محیطی $\sigma_{\theta\theta}$ حداکثر می‌شود. در این تحقیق برای تشخیص ماکزیمم تابع $\sigma_{\theta\theta}$ از روش مقطـع طلایی [28] استفاده شده اسـت. در روش تـنش محیطـی حداکثر، جهت گسترش تـرک عمـود بـر راسـتای تـنش محیطی کششی حداکثر در نظر گرفته می‌شود.

لازم به ذکر است که میدان تـنش در اطـراف نـوک ترک بـر اسـاس ضـرایب شـدت تـنش و سـرعت تـرک مشخص می شود. سرعت گسترش ترک نیـز بـرای مـواد مختلف بر اسـاس نتـایج آزمـایش و بـا مـشخص شـدن ضرایب شدت تنش قابل حصول است [1]. به عنوان مثال برای فولاد ٤٣٤٠ سرعت گسترش ترک بر اساس ضرایب شدت تنش در مرجع [29] ارائه شـده اسـت. در تحقیـق حاضر، سرعت گسترش ترک ثابت در نظـر گرفتـه شـده است که تأثیری بر الگوریتم انتخابی ندارد.



شکل ۱ مؤلفه‌های تنش در نزدیکی نوک ترک در سیستم مختصات قطبی$(r\,,\theta)$

با توجه به نکات فوق، بعد از جزء‌بندی کردن زمان و مکان، معادلات انتگرال مرزی تغییرمکان و بردار تـنش به صورت زیر در می‌آید [12]:

$$c_{ij}^{l}u_i^{ln} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{Q}\left\{\begin{array}{l} t_i^{mpnq}\int_{-1}^{1}\left[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^{n}}U_{ij}^{ln}(\zeta,\tau)M^{q}(\tau)d\tau\right]N^{p}(\zeta)J^{m}(\zeta)d\zeta \\ -u_i^{mpnq}\int_{-1}^{1}\left[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^{n}}T_{ij}^{ln}(\zeta,\tau)M^{q}(\tau)d\tau\right]N^{p}(\zeta)J^{m}(\zeta)d\zeta \end{array}\right\}$$
$$l=1,2,\ldots,L_1 \quad (۱۰)$$

$$\frac{1}{2}t_j^{ln} = n_i^{l}\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{n=1}^{N}\sum_{q=1}^{Q}\left\{\begin{array}{l} t_k^{mpnq}\int_{-1}^{1}\left[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^{n}}U_{kij}^{ln}(\zeta,\tau)M^{q}(\tau)d\tau\right]N^{p}(\zeta)J^{m}(\zeta)d\zeta \\ -u_k^{mpnq}\int_{-1}^{1}\left[\int_{\tau^{n-1}}^{\tau^{n}}T_{kij}^{ln}(\zeta,\tau)M^{q}(\tau)d\tau\right]N^{p}(\zeta)J^{m}(\zeta)d\zeta \end{array}\right\}$$
$$l=1,2,\ldots,L_2 \quad (۱۱)$$

کـه در آن L_1 و L_2 بـه ترتیـب، تعـداد نقـاط روی هم‌گذاری برای معادلات تغییرمکان و بردار تنش اسـت و $L_1+L_2=L$ است که L، تعداد کل گره‌هاست. J^m؛ ژاکوبین

و ζ؛ مختصه‌ی محلی $(-1 \le \zeta \le 1)$ است.

تعداد المان‌ها و در نتیجه تعداد گره‌های مرزی در فرمول‌های (۱۰) و (۱۱) به زمان مشاهده t بستگی دارد و تعداد نقاط روی هم گذاری L_1 و L_2، با رشد ترک افزایش می‌یابد. پس از اینکه موقعیت مکانی گره‌های روی هم گذاری تعیین شد، با زمان تغییر نمی‌کند. باید توجه کرد که بر روی مرزهای خارجی از معادلات انتگرال مرزی تغییر مکان و بر روی یک وجه ترک(ترک ها) از انتگرال مرزی تغییر مکان و در وجه دیگر ترک(ترک ها) از معادله‌ی انتگرال مرزی بردار تنش استفاده می شود. بدین ترتیب تعداد المان هایی که معادله انتگرال مرزی تغییر مکان برای آن ها به کار می رود (L_1) و تعداد المان هایی که معادله‌ی انتگرال مرزی بردار تنش برای آن‌ها استفاده می‌شود (L_2) در هر لحظه قابل محاسبه است. لازم به ذکر است که معادلات انتگرال مرزی تغییر مکان که منفرد قوی هستند، نسبت به معادلات انتگرال مرزی بردار تنش که هایپر سینگولار هستند از لحاظ عددی خوش رفتار تر است و به این دلیل در مرزهای خارجی معمولاً از معادلات انتگرال مرزی تغییر مکان استفاده می گردد [۷].

با اعمال معادله‌ی انتگرال مرزی تغییر مکان برای نقاط روی‌هم‌گذاری در مرزهای خارجی و یک سطح ترک و اعمال معادله‌ی انتگرال مرزی بردار تنش برای سطح دیگر ترک، یک سری معادلات جبری غیروابسته حاصل می‌شود.

در انتگرال‌گیری نسبت به زمان در هر گام زمانی تغییرات تغییر مکان خطی و تغییرات تنش ثابت فرض می شود و انتگرال گیری تحلیلی صورت می‌گیرد. برای انتگرال‌گیری نسبت به مکان و برای انتگرال های منفرد قوی از روش جداسازی قسمت منفرد با در نظر گرفتن دو و سه جمله‌ی اصلی بست تیلور استفاده می شود و سپس از انتگرال‌گیری عددی و انتگرال‌گیری تحلیلی برای ترم های مختلف آن استفاده می‌گردد. در انتگرال گیری تحلیلی، المانی را که نقطه‌ی منفرد روی آن قرار دارد به چند مثلث تبدیل کرده که نقطه‌ی منفرد در راس آن ها قرار دارد و سپس مثلث به یک مربع نگاشت می شود. به این ترتیب دترمینان ژاکوبین در دو رأس مربع که نگاشت نقطه‌ی منفرد است، صفر می شود و این امر با محاسبه‌ی انتگرال عددی به کاهش درجه‌ی منفرد بودن آن کمک می‌کند. هم‌چنین لازم به ذکر است که وجود انتگرال‌های منفرد قوی و هیپرسینگولار در معادلات مرزی، نیازمند به کارگیری تعاریف خاصی از انتگرال های منفرد است که منجر به استفاده از مفاهیم انتگرال مقدار اصلی کوشی و انتگرال مقدار معین هادامارد می‌گردد. برای جزئیات بیشتر می‌توان به مرجع [۲۲] و [26,30] مراجعه کرد. بعد از انجام انتگرال‌گیری‌های لازم و عملیات جبری، رابطه‌ی ماتریسی زیر برای زمان مشاهده‌ی T (گام Nام) حاصل می‌گردد [13]:

$$[F]^{NN}\{u\}^N = [G]^{NN}\{t\}^N + \sum_{n=1}^{N-1}\left([G]^{Nn}\{t\}^n - [F]^{Nn}\{u\}^n\right) \qquad (۱۲)$$

$\{u\}^N$ و $\{t\}^N$ شامل مقادیر گرهی تغییرمکان ها و بردارهای تنش در گام زمانی N ام است. $[F]^{Nn}$ و $[G]^{Nn}$ به پاسخ‌های اساسی و توابع انترپولاسیون بستگی دارد. بالانویس Nn بر این نکته تأکید دارد که ماتریس به تفاضل بین گام‌های زمانی N و n بستگی دارد. ستون‌های ماتریس‌های $[F]^{NN}$ و $[G]^{NN}$، با توجه به شرایط مرزی جابه‌جا می‌شود تا ماتریس های $[A]^{NN}$ و $[B]^{NN}$ حاصل شود. ماتریس $[A]^{NN}$ در بردار مجهولات تغییرمکان و بردار تنش $\{x\}^N$ ضرب می‌شود و ماتریس $[B]^{NN}$ در بردار مقادیر مرزی معلوم $\{y\}^N$ ضرب می‌شود:

$$[A]^{NN}\{x\}^N = [B]^{NN}\{y\}^N + \sum_{n=1}^{N-1}\left([G]^{Nn}\{t\}^n - [F]^{Nn}\{u\}^n\right) \qquad (۱۳)$$

در مورد ترک‌های پایدار، فقط لازم است ماتریس‌های متناظر با حداکثر تفاضل N-n محاسبه شود و بقیه ی ماتریس‌ها با توجه به خاصیت انتقال زمان در گام‌های قبل محاسبه شده است. ماتریس‌های؛ $[A]^{NN}$ و $[B]^{NN}$ فقط در گام اول محاسبه می‌شوند؛ زیرا در تمام گام‌ها یکی هستند و برای حل رابطه‌ی (۱۳) کافی است فقط در تکرار اول وارون $[A]^{NN}$ محاسبه شود. هنگام گسترش ترک مراحل زیر باید صورت گیرد :

الف- گسترش ترک براساس ضریب شدت تنش دینامیکی فعلی و سرعت گسترش ترک محاسبه شود.

ب- المان‌های جدید در نوک ترک رشد کننده اضافه شود که در این حالت به تعداد گره‌های موجود اضافه می‌شود.

ج- ماتریس‌های: $[G]^{Nn}$ و $[F]^{Nn}$ برای n=1 براساس هندسه‌ی جدید محاسبه شود.

د- ماتریس‌های: $[G]^{Nn}$ و $[F]^{Nn}$ برای n=2 تا n=N اصلاح شوند. در این حالت به بعد ماتریس‌های: $[G]^{Nn}$ و $[F]^{Nn}$ که در گام‌های قبل محاسبه شده‌اند، اضافه می‌شود و سطرها و ستون‌های متناظر با المان‌ها و گره‌های جدید به آن‌ها اضافه می‌شود. ماتریس: $[A]^{NN}$ بعد از اصلاح باید معکوس شود.

ه - سیستم معادلات باید حل شود و روند حل مسئله ادامه یابد.

همان‌طور که قبلاً ذکر گردید $[A]^{NN}$ در حالت ترک پایدار لازم است تنها یک بار معکوس شود و در حالت گسترش ترک، در هر گام گسترش ترک باید $[A]^{NN}$ اصلاح شده و سپس معکوس گردد. به منظور کوتاه کردن محاسبات، ماتریس: $[A]^{NN}$ اصلاح شده از اضافه کردن سطرها و ستون های جدید به ماتریس متناظر آن در گام قبل حاصل می‌گردد تا زمان اجراء برنامه طولانی نشود. در مسئله با ابعاد بزرگ، قسمت اعظم زمان اجرای برنامه مربوط به عکس کردن ماتریس$[A]^{NN}$ می باشد و زمان اجرای برنامه تقریباً نسبت مستقیم با تعداد گام های افزایش ترک دارد.

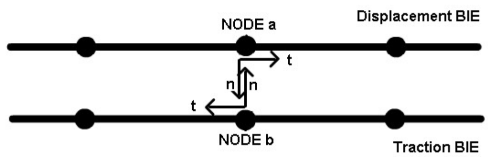
در رابطه‌ی (۱۲)، عبارت دوم در سمت راست رابطه‌ی اثر تاریخچه بارگذاری در گام‌های قبلی برگام فعلی است. نکته قابل توجه این است که هنگام گسترش ترک، گره‌های جدیدی به هندسه‌ی مرزی مسئله اضافه می‌شود که در گامهای قبلی، این نقاط در داخل میدان قرار داشته‌اند. لزومی به محاسبه‌ی تغییرمکان و بردارهای تنش این نقاط در گام‌های قبلی نیست. این امر را به این صورت می‌توان توجیه کرد که اگر در سطوح جدید ایجاد شده ترک در گام‌های قبل که ترک وجود نداشت، مرزهایی تعریف شود و دو سطح به هم بسته شود؛ در این صورت در سیستم مختصات کلی، تغییر مکان‌های گره‌های متناظر در دو مرز مجازی در نظر گرفته شده یکسان و بردارهای تنش آن‌ها مختلف‌العلامت است. با توجه به این که نقاط متناظر روی دو وجه ترک دارای هندسه‌ی یکسان هستند، برای این گره‌ها ماتریس‌های [G] یکسان و ماتریس‌های [F] مختلف‌العلامه خواهند بود و با توجه به این که ماتریس‌های [G] در بردار {t} و ماتریس‌های [F] در بردار {u} ضرب می‌شود بنابراین دو گره مقابل در مرزهای مجازی اثر یکدیگر را خنثی می‌کند و در نتیجه احتیاجی به محاسبه‌ی تغییرمکان و بردار تنش در محل گره‌های جدید در گام‌های قبلی که هنوز ترک به این گره‌ها نرسیده است، نمی‌باشد.

مسأله تماس در دو وجه مقابل ترک

تماس وجوه مقابل ترک از نکاتی است که در تعیین دقیق‌تر رفتار سازه‌های ترک خورده باید در نظر گرفته شود. سه مود مختلف تماس وجود دارد :

۱- مود چسبیدگی، ۲- مود لغزش، ۳- مود جدایی.

شکل (۲)، یک زوج گره تماس را روی سطوح مقابل ترک و مختصات محلی هرگره را نشان می‌دهد.



شکل ۲ دو المان تماس و یک زوج گره تماس و بردارهای عمود و مماس بر سطح

قانون اصطکاک کولمب به عنوان رابطه‌ی بنیادی سطوح تماس در نظر گرفته شده است. مودهای چسبیدگی و لغزش، به ضریب اصطکاک μ وابسته هستند. درهر زوج گره، تماس بردار تنش مماسی t_t و بردار تنش عمودی t_n به شرح زیر به یکدیگر مربوط می‌شود :

- اگر $|t_t| < \mu|t_n|$ باشد، دو گره تماس به یکدیگر چسبیده‌اند.
- اگر $|t_t| = \mu|t_n|$ باشد، امکان لغزش مماسی بین دو گره تماس وجود دارد. علامت طوری انتخاب می‌شود که t_t خلاف جهت لغزش باشد.
- حالت $|t_t| > \mu|t_n|$ غیرقابل قبول است.

در مسائل المان مرزی دوبعدی، هرگره چهار متغیردارد (t_t,t_n,u_t,u_n). از این چهار متغیر، دقیقاً دوتای آن‌ها باید معلوم باشد تا مسئله قابل حل گردد. در مسائل تماس، در گره‌هایی که در سطح تماس قرار دارند، هر چهار متغیر، مجهول است. برای دو گره که زوج تماس تشکیل می‌دهد، هشت مجهول وجود دارد و چهار معادله‌ی تعادل وجود دارد. اگر نوع تماس مشخص باشد، چهار معادله‌ی اضافی تماس به چهار معادله‌ی تعادل اضافه می‌شود.

در زیر، معادلات اضافی تماس برای سه مود مختلف تماس با توجه به قرارداد شکل (۲) ذکر شده است.

در حالت مود جدایی معادلات اضافی تماس برای زوج گره تماس به شرح زیر است:

$$t_t^a = 0$$
$$t_n^a = 0$$
$$t_t^b = 0$$
$$t_n^b = 0$$

(١٤)

در حالت مود چسبیدگی، معادلات اضافی تماس برای زوج گره تماس به شرح زیر است:

$$u_t^a + u_t^b = 0$$
$$u_n^a + u_n^b = 0$$
$$t_t^a - t_t^b = 0$$
$$t_n^a - t_n^b = 0$$

(١٥)

در حالت مود لغزش، معادلات اضافی تماس برای زوج گره تماس به شرح زیر است :

$$t_t^a - t_t^b = 0$$
$$t_n^a - t_n^b = 0$$
$$u_n^a + u_n^b = 0$$

(١٦)

اگر t_t^a در تکرار قبل در مود چسبیدگی مثبت باشد: $t_t^a = -\mu t_n^a$

اگر t_t^a در تکرار قبل در مود چسبیدگی منفی باشد: $t_t^a = +\mu t_n^a$

به دلیل این‌که وضعیت تماس هرکدام از زوج گره‌های تماس، از قبل مشخص نمی‌باشد، بنابراین لازم است که در هرگام زمانی، برای ارضای شرایط تماس، تعدادی تکرار صورت گیرد. الگوریتم به کار گرفته شده در مورد پیش‌فرض اولیه‌ی وضعیت تماس زوج‌گره‌ها و چگونگی تشخیص حالت تماس، تأثیر فراوانی در کاهش تعداد تکرارهای لازم دارد.

در حالتی که سازه دارای ترک یا ترک هایی باشد، با توجه به ماهیت دینامیکی بارگذاری، هرکدام از زوج‌گره‌های مقابل هم در روی سطوح ترک، می‌تواند زوج‌گره تماس باشد. در این حالت با توجه به این‌که در هر زوج گره تماس، هشت مجهول تغییر مکان و بردار تنش وجود دارد، معادله‌ی تعادل سازه همراه با معادلات اضافی تماس، بعد از انتقال مجهولات بردار تنش گره‌های تماس به سمت چپ معادله به صورت زیر در می‌آید [٢٢]:

$$\begin{bmatrix} [A]_{n\times n} & [G']_{n\times n} \\ [U]_{m\times n} & [V]_{m\times n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_n \\ \{t\}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^N\}_n \\ \{0\}_m \end{Bmatrix}$$

(١٧)

در رابطه‌ی فوق، n؛ تعداد معادلات تعادل (دوبرابر تعداد کل گره‌ها) و m؛ تعداد معادلات اضافی تماس (چهاربرابر زوج گره‌های تماس) است. ماتریس‌های [U] و [V] به ترتیب بیان کننده‌ی معادلات اضافی تماس مربوط به تغییرمکان‌ها و بردارهای تنش است که با استفاده از روابط (۱۴) تا (۱۶) در هر تکرار تشکیل داده می‌شود. در این رابطه بردار{t} شامل بردارهای تنش گره‌های تماس است که از سمت راست رابطه‌ی (۱۲) به سمت چپ آن منتقل شده است. ماتریس [A] در رابطه‌ی(۱۷) همان ماتریس $[A]^{NN}$ در رابطه‌ی (۱۳) است. بردار {x} مجهولات مرزی مربوط به مرزهای خارجی و مجهولات بردار تغییرمکان مربوط به گره‌های سطوح ترک است. بردار: $\{f^N\}_n$، اثرات تاریخچه‌ی زمانی گام‌های گذشته در کلیه‌ی گره‌ها و اثرات بارگذاری گام فعلی در گره‌های مرز خارجی(عبارت سمت راست رابطه‌ی (۱۳)) است. ماتریس [G′] از ستون‌های ماتریس $[G]^{NN}$ با علامت منفی تشکیل شده است که هرستون آن متناسب با یک عضو بردار مجهول { t } است. برای حل مسأله تماس، به دلیل صرفه جویی در حافظه و زمان از روش تراکم استاتیکی استفاده شده است. از رابطه‌ی (۱۷) داریم :

$$[A]\{x\}+[G']\{t\}=\{f\} \qquad (۱۸)$$

$$[U]\{x\}+[V]\{t\}=\{0\} \qquad (۱۹)$$

از رابطه‌ی (۱۸) داریم :

$$\{x\}=[A]^{-1}\{f\}-[A]^{-1}\{G'\}\{t\} \qquad (۲۰)$$

با جای‌گذاری {x} از رابطه‌ی (۲۰) در رابطه‌ی(۱۹) و محاسبه بردارهای تنش مجهول در گره‌های تماس {t} خواهیم داشت :

$$\{t\}=\left[[U][A]^{-1}[G']-[V]\right]^{-1}[U][A^{-1}]\{f\} \qquad (۲۱)$$

به این ترتیب بعد از هرتکرار، شرایط تماس که در ابتدای تکرار فرض شده است، رعایت می‌شود و بردارهای تنش تماسی {t} نیز محاسبه می‌گردد. اگر بعد از هرتکرار در تمام گره‌ها شرایط پیش‌فرض تأیید شود، تکرار متوقف می‌شود؛ در غیر این‌صورت در زوج گره‌های تماس که مود تماس فرض شده تأیید نشده است، مود پیش‌فرض اصلاح می‌گردد. به دلیل ماهیت دینامیکی بارگذاری و برای رسیدن سریع‌تر به هم گرایی، در تکرار اول، تمام زوج گره‌های تماس در مود بازشدگی فرض می‌شود و در تکرار بعدی اگر دو گره مقابل هم هم‌پوشی داشته باشند، برای آن‌ها مود چسبیدگی در نظر گرفته می‌شود. این نحوه‌ی انتخاب کمک می‌کند که اگر مود واقعی تماس، مود لغزش باشد، بتوان به راحتی جهت بردار تنش مماسی را تشخیص داد. نحوه‌ی تصمیم‌گیری در مورد وضعیت تماس گره‌های تماس در جدول(۱) آمده است:

جدول ۱ تعیین وضعیت زوج‌گره‌های تماس

فرض قبلی	تصمیم: جدایی	تصمیم: تماس
جدایی	$-u_n^a-u_n^b>0$	$-u_n^a-u_n^b\le 0$
تماس	$t_n^a\ge 0$	$t_n^a<0$

اگر وضعیت زوج گره به گونه‌ای باشد که با استفاده از جدول (۱) نتیجه‌گیری شود که برای زوج‌گره، تماس روی داده است، وضعیت تماس از لحاظ چسبندگی یا لغزش با استفاده از جدول (۲) تعیین می‌شود:

جدول ۲ تشخیص حالت گره‌های تماس یافته (لغزش یا چسبیدگی)

فرض قبلی	تصمیم: چسبیدگی	تصمیم: لغزش
چسبیدگی	$\lvert t_t^a\rvert<\mu\lvert t_n^a\rvert$	$\lvert t_t^a\rvert\ge\mu\lvert t_n^a\rvert$
لغزش	$t_t^a.(u_t^a+u_t^b)>0$	$t_t^a.(u_t^a+u_t^b)<0$

تأیید نتایج

تأیید نتایج ترک پایدار

صفحه‌ی مستطیل شکل با ترک مرکزی. صفحه‌ی مستطیل شکلی با طول: 2b=40mm و عرض: 2h=20mm که دارای ترک مرکزی به طول: 2a=4.8mm است را مطابق شکل (۳) در نظر بگیرید. خصوصیات مصالح به شرح ذیل است:

مدول برشی $\mu = 76.92\times10^{9}\,\text{Pa}$؛ ضرایب پواسون $\nu = 0.3$ و جرم حجمی $\rho = 5000\ \text{kg}/\text{m}^3$.

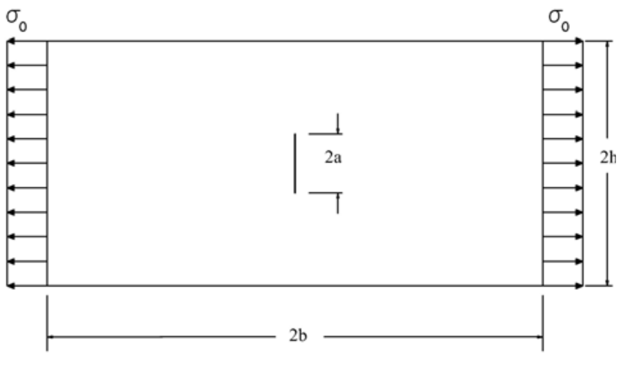
صفحه تحت شرایط کرنش مسطح است. صفحه در دو انتها تحت بارگذاری $\sigma = \sigma_\circ H(t)$ قرار دارد که در آن H(t) تابع هویساید است. مرز مسأله توسط ٦٢ المان مرزی، مدل شده است. گام زمانی $\Delta T = 0.3\mu s$ در نظر گرفته شده است و تعداد ۵۰ گام زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد K_I / K_0 در شکل (٤) رسم شده است؛ ($K_0 = \sigma_\circ\sqrt{\pi a}$) و با نتایج موجود در مرجع [30] مقایسه شده است.

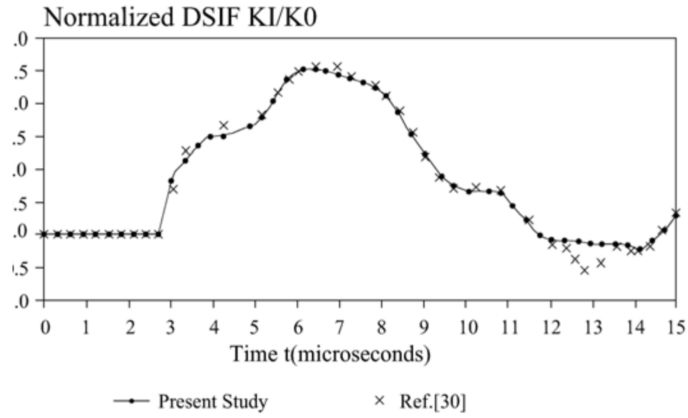
در این مثال از المان‌های منفرد نوک ترک استفاده شده است و ضریب شدت تنش توسط روش انتگرال مستقل از مسیر $\hat{J}$ محاسبه شده است. از مقایسه نتایج به دست آمده و نتایج موجود صحت فرمول‌بندی و نرم‌افزارهای ارائه شده تأیید می‌گردد.

صفحه‌ی مستطیل شکل با ترک‌هایی در اطراف سوراخ‌ها. صفحه‌ی مستطیل شکل با طول: 2b=120mm و عرض: 2h=60mm، حاوی سه سوارخ به قطر: d=10mm را مطابق شکل (۵) در نظر بگیرید. در دو طرف هر سوراخ، ترک‌هایی وجود دارد. فاصله‌ی بین مراکز سوراخ‌ها: w=30mm است. سوراخ‌های خارجی نسبت به مرکزشان دارای ترک‌های متقارن هستند که طول این ترک‌ها در صورتی‌که از مرکز دایره در نظر گرفته شود، a=10mm است. سوراخ میانی دارای یک ترک به طول a و یک ترک به طول 1.5a است که این طول ها نیز از مرکز سوراخ در نظر گرفته شده است. مشخصات مصالح به شرح ذیل است:

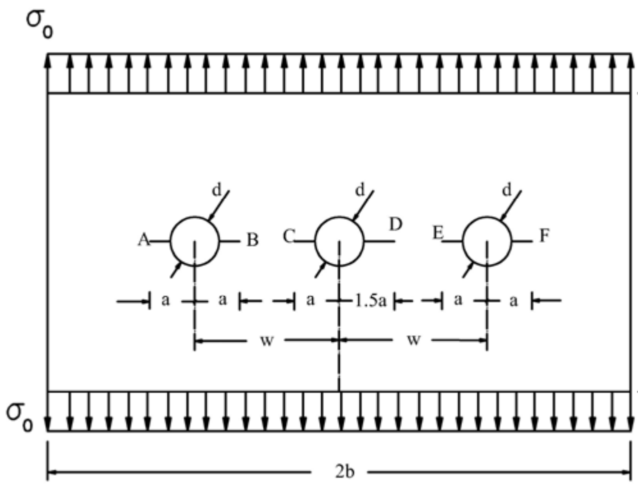
مدول الاستیسیته $E=0.2\times10^{12}\text{Pa}$؛ ضرایب پواسن $\nu = 0.3$؛ جرم حجمی $\rho = 8000\text{kg}/\text{m}^3$. صفحه تحت شرایط کرنش مسطح است ودو انتهای ترک تحت بارگذاری $\sigma = \sigma_\circ H(t)$ قرارگرفته است. مرز به ۱۲۰ المان مرزی تقسیم شده است. گام زمانی $\Delta T = 1\mu s$ در نظر گرفته شده است. ضرایب شدت تنش دینامیکی بی بعد شده برای ترک‌های: A، B، C، D، E وF، در شکل‌های (٦) و (٧) نشان داده شده و با نتایج موجود در مرجع [31] مقایسه شده است. ضرایب شدت تنش دینامیکی نسبت به $K_0 = \sigma_0\sqrt{\pi a_0}$ بدون بعد شده است. نتایج حاصل در مورد ترک پایدار تأئید می‌گردد.



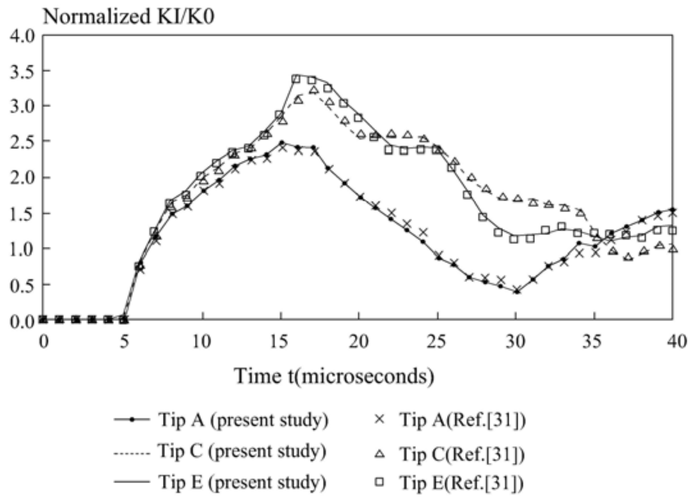
شکل ۳ صفحه‌ی مستطیل شکل با ترک مرکزی



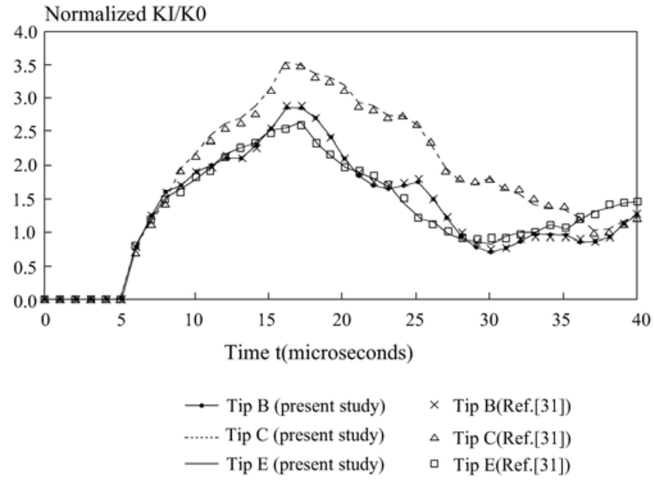
شکل ٤ ضریب شدت دینامیکی بدون بعدKI/K0 برای صفحه‌ی مستطیل شکل با ترک مرکزی



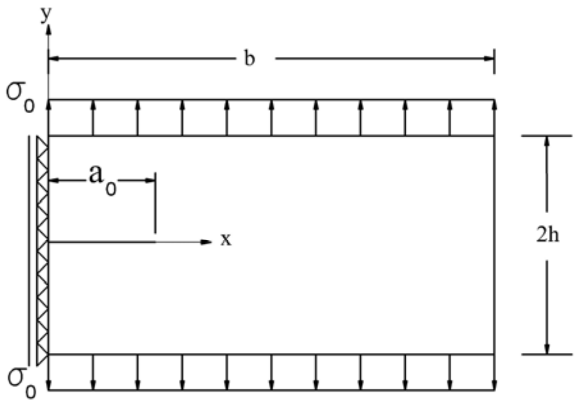
شکل ۵ صفحه‌ی مستطیل شکل با ترک هایی در اطراف سوراخ ها



شکل ٦ ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد KI/K0 برای ترک A در صفحه‌ی مستطیل شکل



شکل ۷ ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد KI/K0 برای ترک B در صفحه‌ی مستطیل شکل

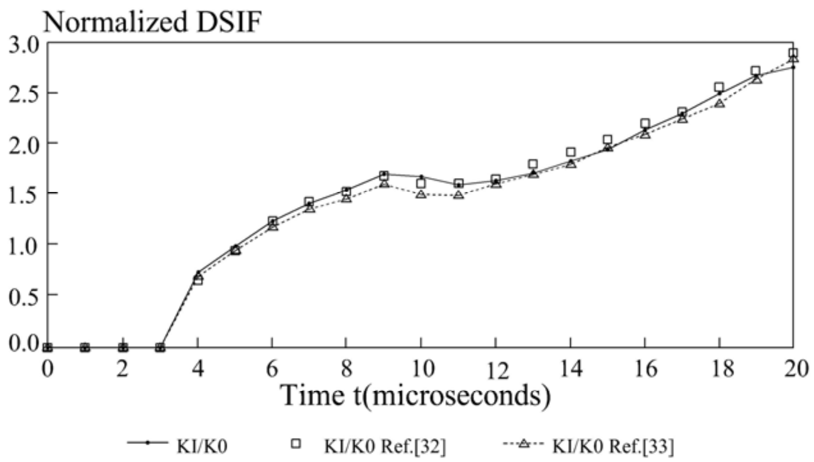


شکل ۸ صفحه‌ی مستطیل شکل با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری پله‌ای

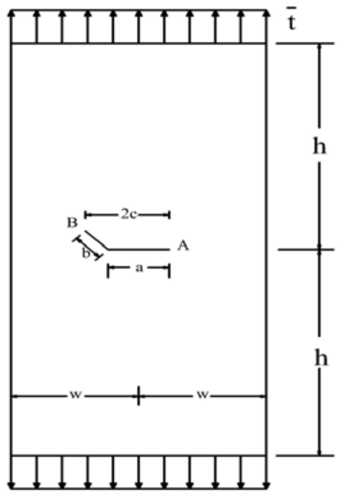
تأیید نتایج ترک گسترش یابنده

گسترش ترک لبه‌ای در صفحه مستطیل شکل. صفحه‌ی مستطیل شکل با ترک لبه‌ای مطابق شکل (۸) در قسمت‌های بالایی و پایینی، تحت بارگذاری پله‌ای $\sigma_0 = 40\text{MPa}$ (تابع زمانی هویساید) قرار گرفته است. ابعاد صفحه به شرح ذیل است: عرض صفحه؛ b=52mm، ارتفاع صفحه؛ 2h=40mm و طول اولیه ترک؛ a_0=12mm است. مشخصات مصالح صفحه به شرح مقابل است: مدول برشی $\mu = 29.4\times10^9\,\text{Pa}$ جرم حجمی $\rho = 2450\text{kgm}^{-3}$، ضریب پواسن $\nu = 0.286$.

فرض می‌شود که ترک تا زمان $t = 4.4\mu s$ پایدار است و بعد از آن با سرعت ثابت: $c=1000\text{ms}^{-1}$ گسترش می‌یابد. مرز مسأله به ٥٦ المان مرزی تقسیم‌بندی شده است و گام زمانی؛ $1\mu s$ در نظر گرفته شده است. ضریب شدت تنش دینامیکی نسبت به $\sigma_0\sqrt{\pi a_0}$ بدون بعد شده است. ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد در شکل (۹) نشان داده شده و با نتایج حاصل از مراجع [32] و [33] مقایسه شده است. از مقایسه‌ی نتایج به دست آمده و نتایج موجود، صحت فرمول‌بندی گسترش ترک و کاربرد آن در نرم‌افزارهای ارائه شده، تأیید می‌گردد.



شکل ۹ ضریب شدت دینامیکی تنش دینامیکی بدون بعد برای ترک گسترش یابنده در صفحه‌ی مستطیل شکل



شکل ۱۰ صفحه‌ی مستطیل شکل با ترک داخلی تغییر مسیر یافته

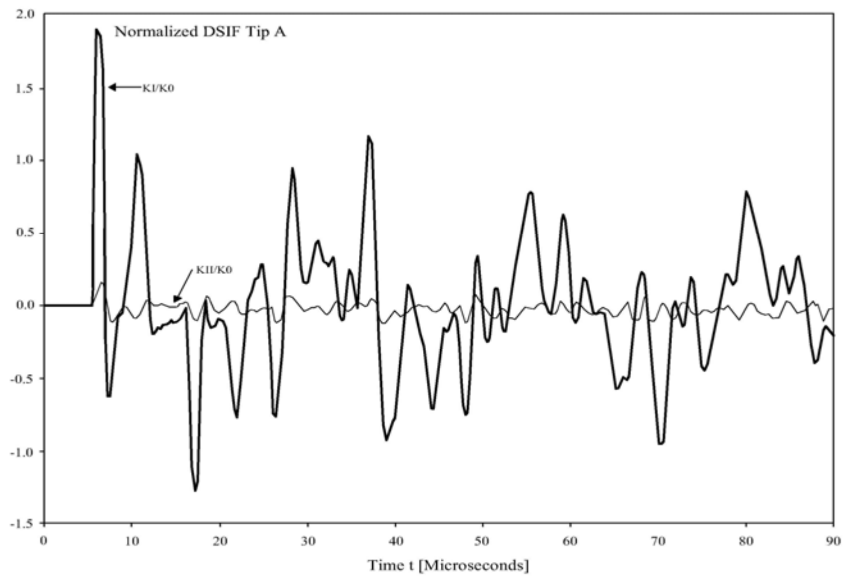
تأیید نتایج مسأله تماس

تماس در ترک داخلی تغییرمسیر یافته در صفحه‌ی مستطیل شکل. صفحه ی مستطیل شکل که دارای ترک داخلی تغییر مسیر یافته است را مطابق شکل (۱۰) در نظر بگیرید. نسبت ارتفاع به عرض ورق $\frac{h}{w}=2$ است. قسمتی از ترک به طول a عمود برجهت بردار تنش اعمال شده است و قسمت دیگر آن به طول b با آن راستا زاویه ۴۵ درجه می‌سازد. تصویر ترک در راستای عمود بر بردار تنش اعمال شده برابر با: $2c=a+\frac{b}{\sqrt{2}}$ است.

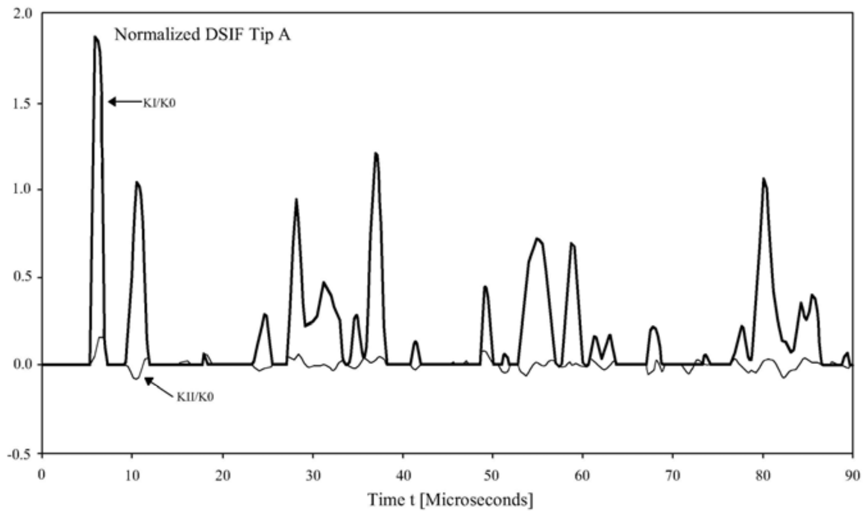
محل تغییر مسیر ترک در مرکز صفحه قرار دارد و $\frac{a}{b}=0.6, \frac{a}{w}=0.1$ در نظر گرفته شده است. خصوصیات مصالح به شرح زیر است:

مدول برشی $\mu=76.92\times10^{9}\,\text{Pa}$، ضرایب پواسون $\nu=0.3$ و جرم حجمی $\rho=5000\ \text{kg/m}^3$. صفحه در دو انتهای خود در فاصله‌ی زمانی صفر تا $1.2\mu s$ تحت بردار تنش ثابت $\bar{t}$ قرار می‌گیرد. با فرض پایدار بودن ترک، نتایج حاصل از آنالیز مسأله بدون در نظر گرفتن مسأله تماس وجوه ترک در شکل‌های (۱۱) و (۱۳) نشان

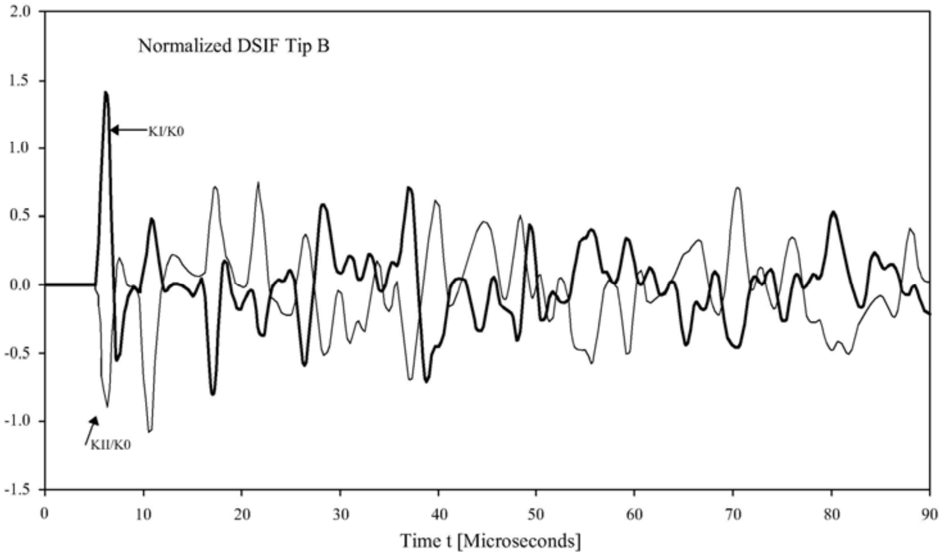
داده شده است. در ادامه با فرض پایدار بودن تـرک و بـا در نظر گرفتن مسأله تماس وجوه ترک بـه آنـالیز مـسأله پرداخته شده و تغییرات ضرایب شـدت تـنش دینـامیکی بدون بعد مودهای I و II شکست برای نـوک تـرک A و B، به ترتیب در شکل‌های (۱۲) و(۱٤) ترسیم شده‌اسـت. در این مسأله ضریب اصـطکاک ۰/۱ فـرض شـده اسـت. مشاهده می‌کنیم هنگامی‌کـه دو لبـه‌ی تـرک تمـاس پیـدا کرده‌اند، ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعـد شـده‌ی K_I در شکل های (۱۲) و (۱٤) صفر شده است و این امر، نتایج را مورد تأیید قرار می‌دهد. توجه شـود کـه در ایـن مسأله گسترش ترک در نظر گرفته نشده است. علاوه بـر این، کنترل شرایط اضافی تماس در مورد تغییرمکان‌هـا و بردارهای تنش در سطوح تمـاس، صـحت فرمـول‌بنـدی تماس و کاربرد صحیح آن را مورد تأیید قرار داد.



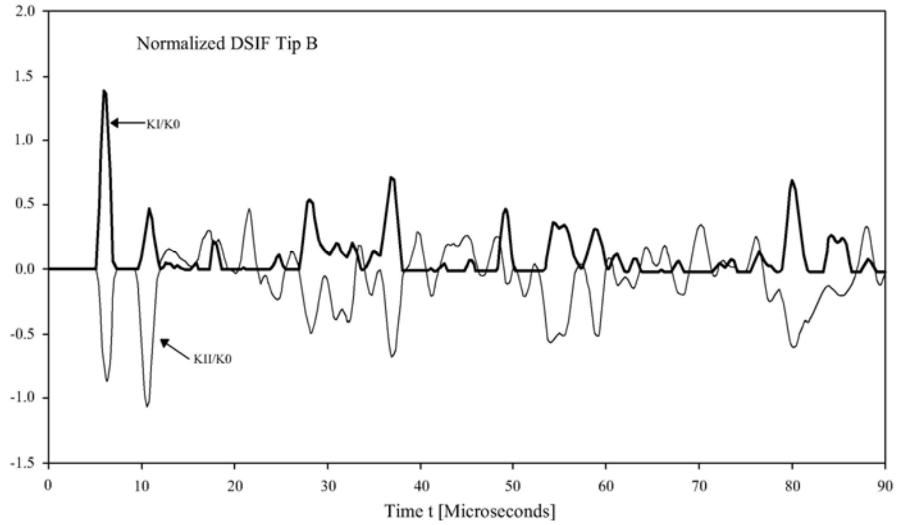
شکل ۱۱ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد برای نوک A ترک بدون در نظر گرفتن تماس



شکل ۱۲ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد برای نوک A ترک با در نظر گرفتن تماس



شکل ۱۳ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد برای نوک B ترک، بدون در نظر گرفتن تماس



شکل ١٤ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد برای نوک B ترک با در نظر گرفتن تماس

کاربرد روش ارائه شده: گسترش‌ترک و تماس سطوح ترک‌های لبه‌ای در صفحه‌ی T شکل

صفحه‌ی T شکل را که دارای دو ترک لبه‌ای است، مطابق شکل (۱۵) در نظر بگیرید. مشخصات مصالح این صفحه به شرح زیر است:

مدول الاستیسیته $۱۰^{۱۲}$× ۰/۲ مگاپاسکال، جرم حجمی ۸۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و ضریب پواسون ۰/۳ می باشد. بارگذاری از لحاظ زمانی به صورت تابع هویساید است که از زمان صفر اعمال می‌شود و ثابت می‌ماند. صفحه در قسمت تحتانی گیردار فرض شده است. این مسأله را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم. ابعاد مسأله به شرح زیر است:

a= ۸۰mm, b =٤۰ mm, d= ٦۰mm, e= ۲۰ mm,

طول هر ترک = ۲mm

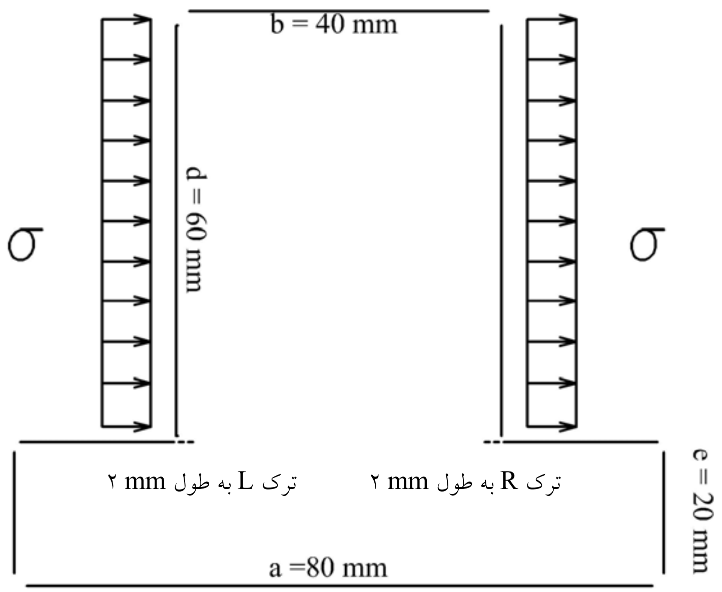
در کلیه‌ی مراحل، ضرایب شدت تنش را نسبت به $K_0 = \sigma_0\sqrt{\pi a_0}$ بی بعد می‌کنیم. مسأله را تحت بارگذاری $\sigma = \sigma_0 H(t)$ قرار می‌دهیم. حالات مختلف زیر، مورد بررسی قرار گرفته است:

حالت الف– تماس وجوه ترک و گسترش ترک را در نظر نمی‌گیریم. گام زمانی، $\Delta T = 1\mu s$ فرض شده، ۳۰۰ گام زمانی بررسی شده، ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد در شکل (۱۶) نمایش داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود در این حالت، نوسان حول پاسخ استاتیکی مشاهده می‌شود و این امر نتایج را مورد تأیید قرار می‌دهد. ضرایب شدت تنش در حالت بارگذاری استاتیکی به شرح زیر است :

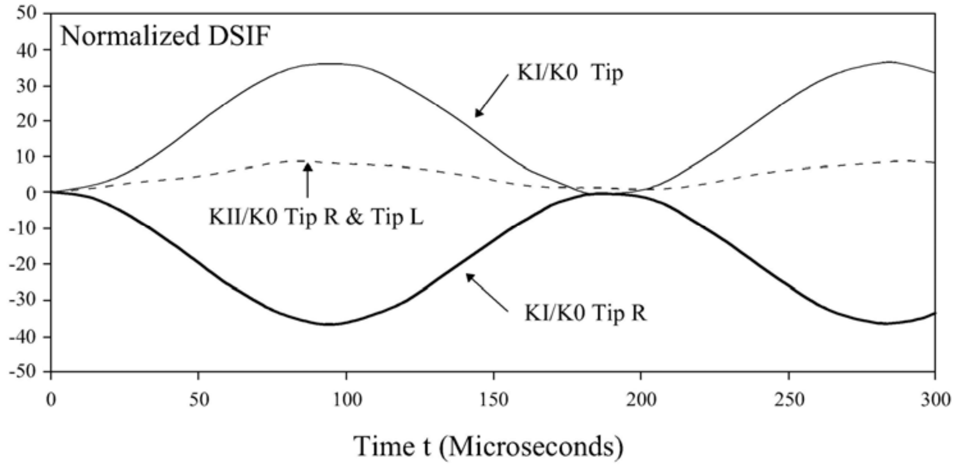
K_{II}/K_0=٤/٧١ K_I/K_0=± ۱۸/۰۲

به بیان دیگر، ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد مودهای اول و دوم شکست، در ترک L، حول مقادیر استاتیکی متناظر آن‌ها یعنی: ۱۸/۰۲ و ٤/٧١ نوسان می‌کند و در ترک R نیز ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد مودهای اول و دوم شکست حول مقادیر استاتیکی متناظر آن‌ها یعنی: ۱۸/۰۲– و ٤/٧١ نوسان انجام می‌دهد. با توجه به منفی بودن ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد مود اول در ترک R، واضح است که ترک سمت راست باید بسته شود که این امر در ادامه، مدل‌سازی شده است.

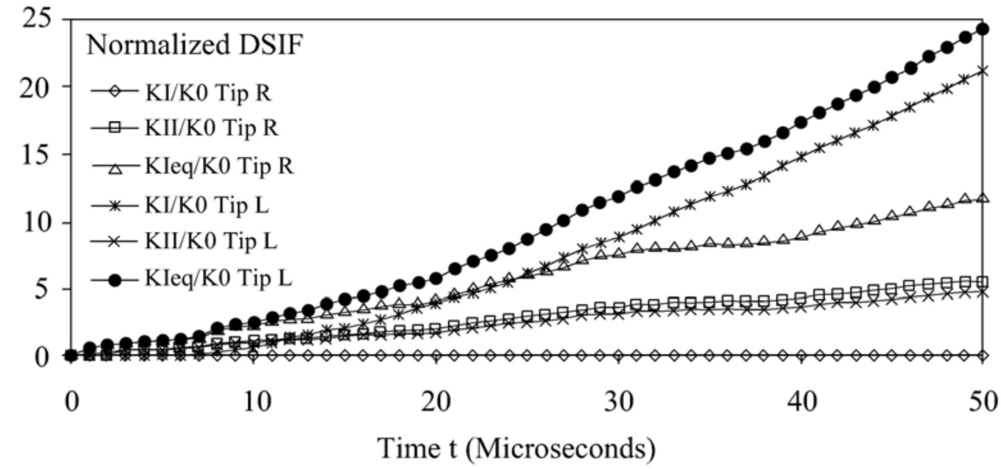
حالت ب– در این حالت تماس وجوه مقابل ترک در نظر گرفته می‌شود، ولی گسترش ترک را در نظر نمی‌گیریم. ۵۰ گام زمانی مورد بررسی قرار گرفته است. ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد در شکل (۱۷) برای نوک ترک‌های R و L، رسم شده است. ضرایب شدت تنش دینامیکی معادل بدون بعد نیز در این شکل نمایش داده شده است. مشاهده می‌کنیم که ترک سمت راست R، بسته می‌شود. غیرمنفی بودن ضریب شدت تنش مود اول، فرمول بندی مسأله تماس را تأیید می‌کند.



شکل ۱۵ صفحه‌ی T شکل با دو ترک لبه‌ای تحت بارگذاری پله‌ای



شکل ١٦ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد – صفحه‌ی T شکل تحت بارگذاری پله‌ای حالت (الف)



شکل ١٧ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد– صفحه‌ی T شکل تحت بارگذاری پله‌ای حالت (ب)

همان‌طور که از شکل (١٧) مشاهده می‌شود، با بسته شدن ترک R، ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد مود اول برابر با صفر می‌شود و ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد مود دوم شکست در ترک R، نسبت به ترک L کمی افزایش می یابد. این روند، باعث می‌شود که ترک L نسبت به ترک R، تمایل بیشتری به گسترش داشته باشد که از مقایسه ضرایب شدت تنش دینامیکی معادل بدون بعد ترک‌های R و L که در شکل (١٧) نمایش داده شده است، می‌توان این امر را نتیجه گرفت.

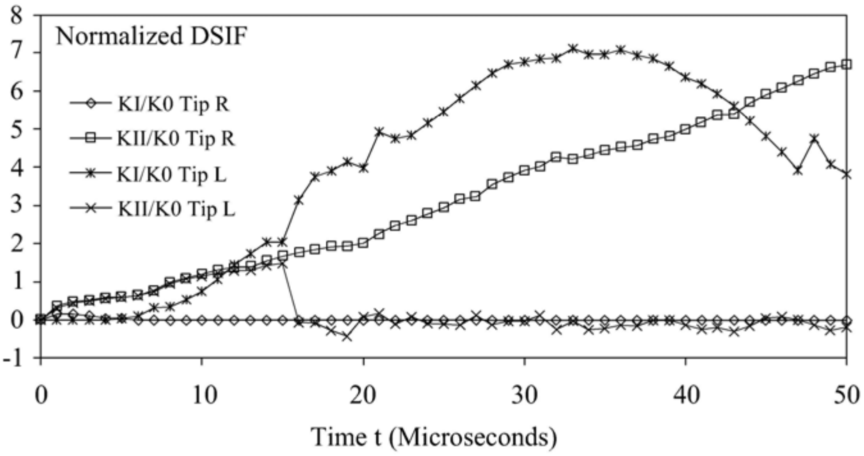
لازم به ذکر است که در این مقاله، ضریب شدت تنش دینامیکی معادل برابر با مقدار ضریب شدت تنش مود اول، شکستی فرض شده است که همان تنش کششی محیطی حاصل از مود مرکب شکست را در راستای حداکثر تنش کششی محیطی ایجاد نماید.

حالت ج– در این حالت، علاوه براین‌که تماس وجوه مقابل ترک در نظر گرفته می‌شود، به ترک سمت چپ هم اجازه گسترش می‌دهیم. برای ترک L، ضریب شدت تنش بحرانی بدون بعد برای ترک پایدار را برابر با ٤

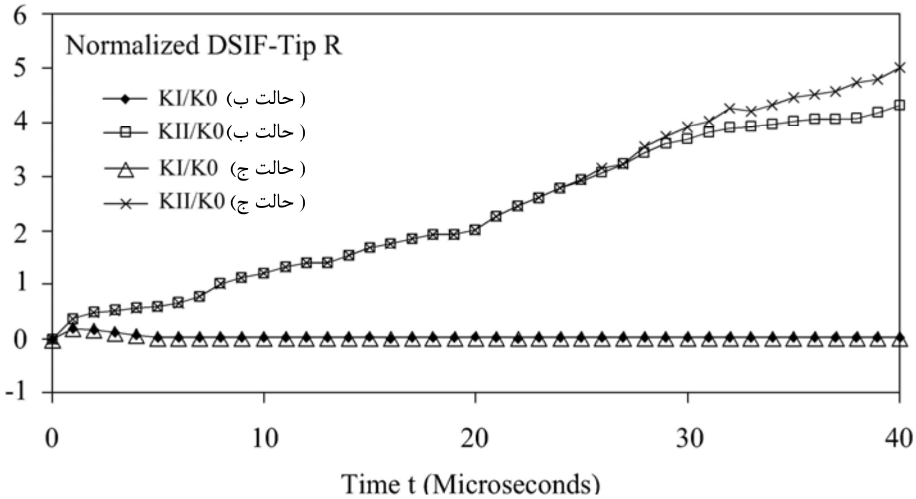
فرض می‌کنیم. در تـرک R، بـرای ضـریب شـدت تـنش بحرانی بدون بعد مقدار بزرگی فرض می‌کنیم تا در تـرک R، فقط تماس وجوه ترک در نظر گرفتـه شـود. سـرعت گسترش ترک در صورت لزوم ۱۰۰۰ متر در ثانیه در نظـر گرفته می‌شود.

تغییرات ضرایب شدت تنش بـدون بعـد در شـکل (۱۸) نمایش داده شده است که مشاهده می‌کنـیم بعـد از گسترش تـرک، K_{II} کـاهش مـی‌یابـد. در واقـع تـرک L، طوری گسترش می‌یابد که مود اول شکست حاکم شود و ضریب شدت تنش دینامیکی مود دوم شکـست در تـرک L، با شروع گسترش ترک به مقدار قابل تـوجهی کـاهش یابد. بدین ترتیب کاهش ناگهـانی ضـریب شـدت تـنش دینامیکی مود دوم شکست در ترک L، هنگام گـسترش و تغییر مسیر ترک که در شکل (۱۸) مشاهده می‌شود، قابـل توجیه است.

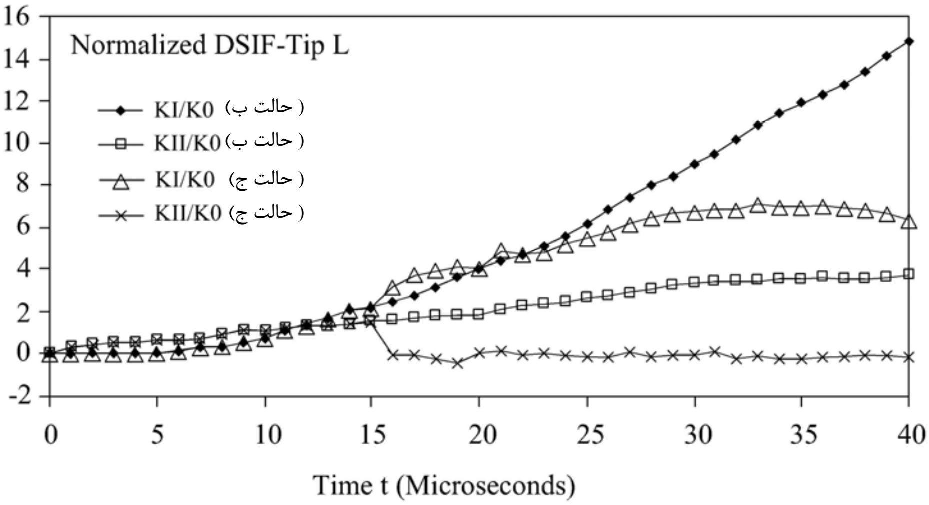
مقایـسه‌ی ضـرایب شـدت تـنش بـدون بعـد بـین حالت‌های (ب) و (ج) بـرای تـرک R، در شـکل (۱۹) و برای ترک L، در شکل (۲۰) صورت گرفته است:



شکل ۱۸ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد- صفحه T شکل، تحت بارگذاری پله‌ای حالت (ج)



شکل ۱۹ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد در ترک R – حالت (ب) و حالت (ج)



شکل ۲۰ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد در ترک L – حالت (ب) و حالت(ج)

در این حالت، ترک سمت چپ L در گام ۱۵ گسترش می‌یابد، سپس در گام‌های ۱۶ تا ۱۸ پایدار می‌ماند. در گام ۱۹ دوباره شروع به گسترش می‌کند و این گسترش ترک ادامه دارد تا این‌که مجدداً در گام ٤٧ گسترش ترک متوقف می‌شود و در گام‌های ٤٨ تا ۵۰ مجدداً ترک گسترش می‌یابد.

همان‌طور که در شکل‌های (۱۸) تا (۲۰) مشاهده می‌شود، در ترک گسترش یافته، گسترش ترک باعث می‌شود که ضریب شدت تنش مود دوم شکست کاهش یابد. چنان که اشاره شد، در این حالت به ترک سمت راست R اجازه‌ی گسترش داده نشد. گسترش ترک سمت چپ L، باعث می‌شود که مود لغزش در ترک سمت راست R، مطرح شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در ترک سمت راست، تماس حاصل شده است. نحوه‌ی گسترش ترک در شکل (۲۳– الف) نشان داده شده است.

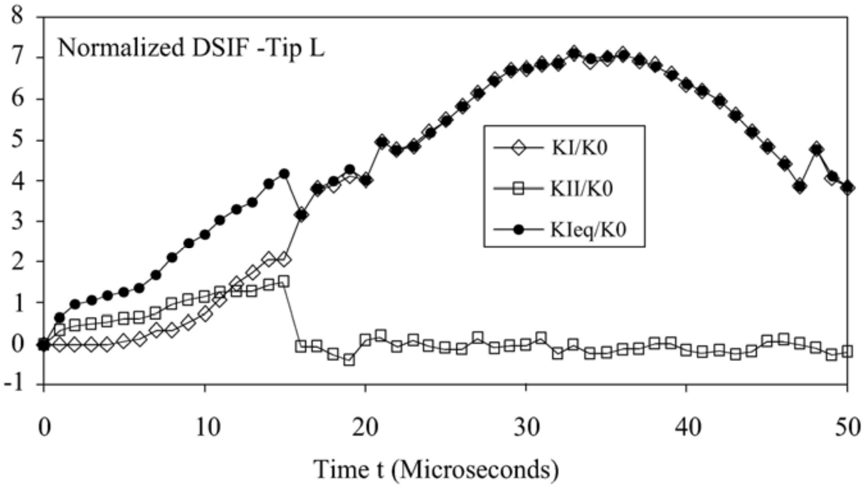
حالت د– در این حالت، علاوه بر این که تماس وجوه مقابل ترک در نظر گرفته می‌شود، به هردو ترک R و L هم اجازه‌ی گسترش داده می‌شود. ضریب شدت تنش بحرانی بدون بعد را بر هردو ترک برابر با ٤ در نظر می‌گیریم. ترک‌ها در صورت گسترش با سرعت ۱۰۰۰ متر در ثانیه گسترش می‌یابند.

تغییرات ضرایب شدت تنش بدون بعد مود بازشدگی و مود لغزش و ضریب شدت تنش معادل برای ترک‌های سمت چپ L و سمت راست R، به ترتیب در شکل‌های (۲۱) و (۲۲) رسم شده است. ضریب شدت تنش معادل در حالت مود مرکب از معادل قرار دادن تنش‌های محیطی در حالت مود مرکب و مود اول شکست به دست آمده است [۲۲] که نحوه‌ی به دست آوردن آن و چگونگی تعیین راستای گسترش ترک بر اساس معیار تنش‌های محیطی حداکثر به تفصیل در مقاله‌ی دیگری مورد بحث قرار خواهد گرفت.

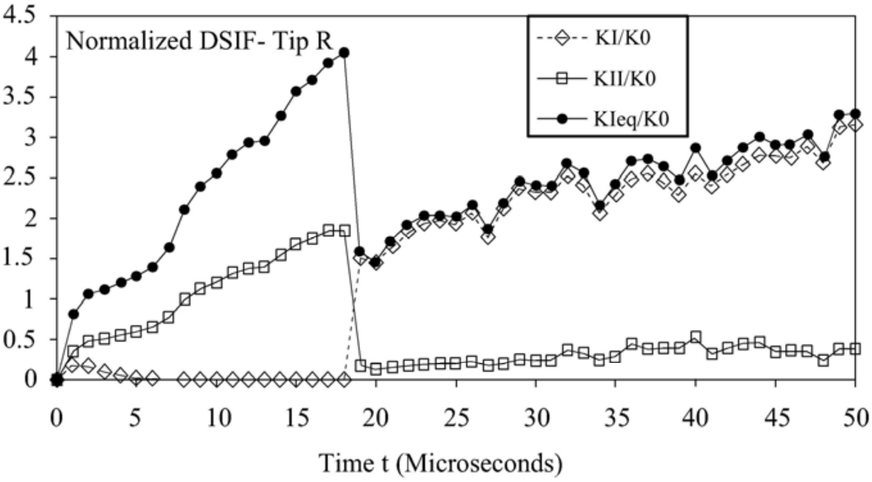
نحوه‌ی گسترش ترک سمت چپ L، مشابه حالت ج است. شروع گسترش ترک L در گام ۱۵ می باشد که در این گام، ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد به مقدار ضریب شدت تنش بحرانی بدون بعد فرض شده برابر ٤ بالغ می‌گردد. با گسترش و تغییر مسیر ترک L در این گام، مود اول شکست در این ترک حاکم می‌گردد و ضریب شدت تنش مود دوم کاهش می‌یابد. در گام‌های ۱٦ تا ۱۸، مقدار ضریب شدت تنش معادل ترک L کمتر از مقدار بحرانی آن که ٤ فرض شده است می‌باشد و در

این گام‌ها ترک L گسترش نمی‌یابد. در گام ۱۹ ضریب شدت تنش معادل در این ترک به مقدار بحرانی آن می‌رسد و مجدداً ترک L گسترش پیدا می کند و گسترش ترک L با توجه به شکل (۲۱) تا گام ٤۷ ادامه می یابد که در این گام زمانی، گسترش آن متوقف می‌گردد. در گام‌های ٤۸ تا ۵۰ ترک L مجدداً گسترش می‌یابد.

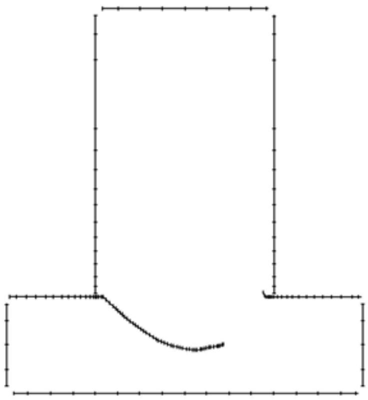
ترک R در گام ۱۸ گسترش پیدا کرده و تغییرمسیر می‌دهد و سپس متوقف می‌شود. این تغییرمسیر ترک، باعث افزایش ضریب شدت تنش K_I و کاهش ضریب شدت تنش K_{II} می‌شود (شکل (۲۲)). در این حالت نیز ترک در مسیری گسترش می یابد که مود اول شکست حاکم گردد. با گسترش ترک R در گام ۱۸، مشاهده می‌شود که مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی معادل در گام‌های بعدی از مقدار بحرانی آن کوچک‌تر است و این امر، عدم گسترش ترک R در گام‌های بعدی را توجیه می‌کند. نحوه‌ی گسترش ترک‌های R و L در شکل (۲۳- ب) نشان داده شده است.



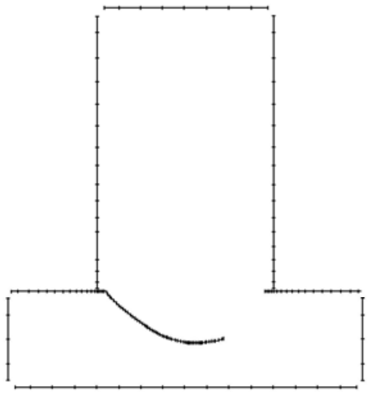
شکل ۲۱ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد در ترک L - حالت (د)



شکل ۲۲ ضرایب شدت تنش دینامیکی بدون بعد در ترک R- حالت (د)



ب- حالت د



الف- حالت ج

شکل ۲۳ گسترش ترک در صفحه T شکل تحت بارگذاری پله‌ای- حالت (ج) و حالت (د)

نتیجه گیری

یکی از مشکلات به کارگیری مدل ترک منفرد در روش المان های محدود، نحوه‌ی معرفی و مدل‌سازی مسیر گسترش ترک می باشد. به بیان دیگر در این‌گونه تحلیل‌ها یا باید مسیر گسترش ترک قبل از انجام آنالیز پیش فرض شود و یا هنگام گسترش ترک باید با استفاده از الگوریتم های پیچیده نسبت به تغییر شبکه المان بندی و محل گره ها اقدام شود. پیش فرض مسیر گسترش ترک، قبل از انجام تحلیل باعث ایجاد خطای زیاد در پاسخ مسأله می‌گردد و تغییر مش بندی، خصوصاً در حالت تحلیل دینامیکی، بسیار زمان بر است و باید به این نکته توجه شود در مسائلی که با حالات منفرد نظیر مسائل ترک و مکانیک مواجه هستیم شکست پاسخ نسبت به شبکه بندی المان محدود، بسیار حساس است. روش ارائه شده در این مقاله، نقایص مذکور را مرتفع می‌سازد و ضمن استفاده از مزایای روش المان مرزی در حل مسائل منفرد مکانیک شکست، الگوریتم و فرمول بندی را ارائه می‌دهد که به صورت اتوماتیک می‌توان نسبت به حل هم‌زمان گسترش ترک و تماس وجوه آن اقدام کرد. در روش پیشنهادی، ترک های موجود در محیط را می‌توان فقط در یک دامنه مدل کرد که این امر باعث کاهش تعداد درجات آزادی و زمان تحلیل می‌گردد و مدل‌سازی و انجام تغییر در مدل را نیز بسیار آسان می‌سازد. تحلیل هم‌زمان گسترش دینامیکی ترک و تماس سطوح آن در فضای زمانی در یک دامنه به صورت اتوماتیک و بدون دخالت کاربر از خصوصیات بارز و برجسته‌ی روش ارائه شده است. کاربرد این روش در گسترش و تماس سطوح ترک‌های لبه‌ای در صفحه‌یT شکل نشان داده شد. بروز نوسان آزاد حول پاسخ استاتیکی و عدم وجود مقدار منفی برای ضریب شدت تنش مود اول شکست در حالتی که تماس در نظر گرفته شده است، صحت فرمول بندی ارائه شده را تأیید می‌کند. باید به این نکته اشاره شود که در روش پیشنهادی، ترک‌های داخلی را نیز به راحتی می توان مدل کرد و در صورت داشتن معیار مناسب،می توان شاخه‌ای شدن ترک‌ها را بدون هیچ‌گونه تغییر اضافی تحلیل کرد. برای مدل سازی قسمت‌های گسترش یافته، کافی است که فقط المان‌های جدید به نوک ترک‌های قبلی اضافه گردد و لزومی به تغییر مش بندی قبلی نیست. روش ارائه شده در مسائل محیط‌های نامحدود و نیمه بی نهایت نیز قابل استفاده است که ارضای شرط تشعشع از مزایای دیگر آن در این‌گونه مسائل است. به عنوان مثال با استفاده از این

روش، می توان مسائل شکست و گسترش گسل ها در بروز زمین لرزه را مورد بررسی قرار داد.

لیست اصطلاحات تخصصی

1–Subregion method

2- Golden section method

فهرست علائم

- مؤلفه تغییر مکان و بردار تنش در راستای محور i — t_i و u_i
- جرم حجمی — ρ
- عبارت پرش — c_{ij}
- پاسخ‌های اساسی معادله انتگرالی تغییر مکان — T_{ij} و U_{ij}
- پاسخ‌های اساسی معادله انتگرالی بردار تنش — T_{kij} و U_{kij}
- مؤلفه بردار یکه عمود بر سطح در راستای محور i — n_i
- مرز دامنه — Γ
- ضرایب لامه — μ و λ
- نقطه روی هم‌گذاری در مرز محیط — x'
- نقاط مرزی — x
- دلتای کرونکر — δ_{ij}
- تعداد المان‌های مرزی — M
- تعداد اولیه المان‌های مرزی — M_0
- تعداد المان‌های اضافه شده در گام n ام در اثر گسترش ترک — $M_c(n)$
- مختصه محلی $(-1 \le \zeta \le 1)$ — ζ
- ژاکوبین المان m — J^m
- توابع انترپولاسیون زمانی مربوط به گره زمانی q ام — $M^q(\zeta)$
- توابع شکلی مکانی مربوط به گره مکانی p ام — $N^p(\zeta)$
- تعداد گره ها در هر المان — P
- تعداد گره های زمانی در هر گام — Q
- هسته‌های انتگرال‌گیری شده که اثر گام زمانی n را بر گام مشاهده N نشان می‌دهد. — $[G]^{Nn}$ و $[F]^{Nn}$
- بردارهای مقادیر گرهی تغییرمکان و بردار تنش در گام زمانی Nام — $\{t\}^N$ $\{u\}^N$
- بردار مقادیر مرزی مجهول در گام N ام — $\{x\}^N$
- بردار مقادیر مرزی معلوم در گام N ام — $\{y\}^N$
- تعداد کل گام‌های زمانی — N
- مؤلفه های بردار تنش مرزی در راستای مماسی و عمودی — t_n و t_t
- مؤلفه‌های بردار تغییر مکان مرزی در راستای مماسی و عمودی — u_n و u_t
- ماتریس‌های ضرایب که مرتبط با معادلات اضافی تماس مربوط به تغییرمکان‌ها و بردارهای تنش — $[V]$ و $[U]$
- بردار بار که اثرات تاریخچه گام‌های زمانی گذشته و فعلی را در برمی گیرد. — $\{f^N\}_n$
- تابع هویساید — $H(t)$
- ضرایب شدت تنش دینامیکی مود اول و دوم شکست — KII و KI
- ضریب شدت تنش دینامیکی بدون بعد شده نسبت به حالت استاتیکی — Normalized DSIF

مراجع

1. Freund, L. B., "Dynamic Fracture Mechanics", Cambridge University Press, Cambridge, (1990).

2. Kobayashi, A. S., Emery, A. S., and Mall, S., "Dynamic finite element and dynamic photoelastic analyses of two fracturing Homalite-100 plates", Exper. Mech. 16/9, pp. 321-328, (1976).

3. Jung, J., Ahmad, J., Kanninen, M. F., and Popelar, C. H., "Finite element analysis of dynamic crack

propagation. Failure preventiont and reliability", Proc. *Of the design engineering technical conference sponsored by the reliability stress analysis and failure prevention committee*, the design engineer division of ASME, Hartford, Conn., (1981).

٤. امیدوار، بابک، رحیمیان، محمد و داریوندی شوشتری، ندا، " بررسی اندرکنش ترک ها در حالت الاستو استاتیک"، مجلـه‌ی دانـشکده‌ی فنـی دانشگاه تبریز، جلد ٣٤، شماره‌ی ٣ (مهندسی عمران)، پاییز (١٣٨٦).

٥. داریوندی شوشتری ، ندا، "بررسی اندر کنش لرزه ای ترک‌ها با یکـدیگر بـا اسـتفاده از روش المـان مـرزی"، رسـاله بـرای دریافـت درجـه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی فنی دانشگاه تهران، (١٣٨٣).

٦. امیدوار، بابک، داریوندی شوشتری، ندا، رحیمیان، محمد و نورزاد، اسداله، "بررسی اندرکنش ترک ها تحت اثر امواج طولی"، مجله‌ی شـریف، جلد ٣٧، (ویژه‌ی مهندسی عمران)، بهار (١٣٨٦).

٧. کمالی یزدی، امین، "اندرکنش دینامیکی ترک‌ها در محیط سه بعدی با اسـتفاده از روش المـان مـرزی دوگانـه"، رسـاله بـرای دریافـت درجـه کارشناسی ارشد، دانشکده فنی دانشگاه تهران، (١٣٨٧).

8. Gallego, R., and Dominguez, J., "Dynamic crack propagation analysis by moving singular boundary element", *J Applied Mech*., 59, pp. 158-162, (1992).

9. Portela, A., Aliabadi, M. H., and Rooke, D. P., "Dual boundary element incremental analysis of crack propagation", *Int. J. Comput Struct* 46, pp. 237-247, (1993).

10. Mi, Y., and Aliabadi, M. H., "Three- dimensional crack growth simulation using BEM", *Int J comput struc 52*, pp. 871-878, (1994).

11. Mi, Y., and Aliabadi, M. H., "Automatic procedure for mixed mode crack growth analysis", Commun Numer Methods Eng 11, pp. 167-177, (1995).

12. Fedelinski, D. P., Aliabadi, M. H., and Rooke, D. P., "The time-domain DBEM for rapidly growing cracks", *Int J Numer Methods Eng*, 40, 1555-1572, (1997).

13. Gonzalez, P., Pena, T. F., and Rivera, F. F., "Dual BEM for crack growth analysis on distributed-memory multiprocessors", Advances in Engineering Software 31, pp. 921-927, (2000).

14. Fedelinski, P., "Boundary element method in dynamic analysis of structures with cracks", *Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28, pp. 1135–1147, (2004).

15. Silveira, N. P. P., Guimaraes, S., and Telles, J. C. F., "Numerical Green's function for crack growth simulation", Engineering Analysis with Boundary Elements, 29, pp. 978-985, (2005).

16. Lei, J., Wang, Y. S., and Gross, D., "Two dimensional numerical simulation of crack kinking from an interface under dynamic loading by time domain boundary element method", *Int. J. Solids Structures*, 6-1012, (2007).

17. Mellings, S., Baynham, J., and Adey., R., "Predicting residual strength using fully automatic crack

growth", Engineering Analysis With Boundary Elements, 26, pp. 479-488, (2002).

18. Yan, X., "Automated simulation of fatigue crack propagation for two-dimensional linear elastic fracture mechanic, problems by boundary element method", Eng Fracture Mechanics, 74, pp. 2225-2246, (2007).
19. Cruse, T. A., "Numerical Solution in three dimensional elastostatics", *Int. J. Solids Struct.*, 5, 1259-1274, (1969).
20. Brebbia, C. A., and Dominguez, J., "Boundary Elements, An Introductory course, Computational Mechanics Publications", Southampton, (1989).
21. Hong, H. K., and Chen, J. T., "Derivation of integral equations of elasticity", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 6, pp. 1028-1043, (1988).

۲۲. امیدوار، بابک، "بررسی پایداری دینامیکی سدهای بتنی ترک خورده با استفاده از روش المان مرزی دوگانه در فضای زمانی"، رساله برای دریافت درجه دکتری مهندسی عمران، دانشکده‌ی فنی دانشگاه تهران، (۱۳۸۰).

23. Manolis, G. D., and Beskos, D.E., "Boundary element methods in elastodynamics", London: Unwin Hyman, (1988).
24. Krishnasamy, G., Schemerr, L. W., Rudolphi, T.J., and Rizzo, F. J., "Hypersingular boundary integral equations: some applications in acoustic and elastic wave scattering" *J. Appl. Mech.*, 57, pp. 404-414, (1990).
25. Krishnasamy, G., Rizzo, F. J., and Rudolphi, T. J., "Continuty requirements for density functions in the boundary integral equation method", Comput. Mech., 9, pp. 267-284, (1992).
26. Krishnasamy, G., Schmerr, L. W., Rudolphi, T. j., and Rizzo, F., "Discretization considerations with hepersingular integral formulas for crack problems", in proceedings of IUTAM/IACM Symposium on Discretization Methods in Structural Mechanics, Springer Verlag. Vienna, Austria, (1989).
27. Marrero, M., and Dominguez, J.,"Numerical behavior of time domain BEM for three-dimensional transient elastodynamic problems", *Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 27, Issue 1, pp. 39-48, (2003).
28. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., "Numerical Recipes", Second Edition, Cambridge University Press, (1992).
29. Rosakis, A. J., Duffy, J., and Freund, L. B., "The determination of dynamic fracture toughness of AISC 4340 steel by the shadow spot method", *J. Mech. Phys.* Solids, 31/3, pp. 251-260, (1984).
30. Dominguez, J., "Boundary elements in dynamics", Computational Mechanics Publications, (1993).
31. Fedelinski, P., Aliabadi, M. H., and Rooke, D. P., "A single region time domain BEM for dynamic crack problems", *Int J Solids Structures*, Vol.32, No.24, pp. 3555-3571, (1997).

32. Cartwright, D. J., and Rooke, D. P., "Evaluation of Stress intensity Factors", *J. Strain Analysis*, Vol.10, pp. 217-224, (1975).

33. Watwood, V. B., "The finite element method for prediction of crack behavior", Nuclear Eng. and Des., Vol.11, pp. 323-332, (1969).