

## تحلیل محیط نیمه بی نهایت همسان جانبی به پیچش وارد بر جداره‌ی حفره با طول محدود\*

محمد رضا محمودیان<sup>(۱)</sup>مرضی اسکندری قادی<sup>(۲)</sup>

**چکیده** در این مقاله یک محیط نیمه بی نهایت با رفتار ایزوتروپ (همسان) جانبی که محور ایزوتروپی (همسانی) آن عمود بر سطح آزاد است و حفره‌ی استوانه‌ای با طول محدود در امتداد محور ایزوتروپی در آن ایجاد شده است، در نظر گرفته شده و پاسخ آن به پیچش معلوم روی دیواره‌ی این استوانه و حول محور استوانه به صورت تحلیلی بررسی می‌شود. بدین منظور معادلات تعادل استاتیکی حاکم بر مسأله در دستگاه مختصات استوانه‌ای نوشته شده و با تقسیم محیط به دو ناحیه و نوشتن معادلات تعادل برای هر ناحیه به صورت مجزا و استفاده از تبدیل کسینوسی فوریه، جابه‌جایی محیط در فضای تبدیل یافته ارائه می‌گردد. به کمک قضیه عکس تبدیل انتگرالی جابه‌جایی‌ها در فضای اصلی مسأله حاصل می‌شود. با نوشتن شرایط مرزی و پیوستگی، معادله‌ی انتگرالی کوشی حاکم بر مسأله به دست می‌آید. با حل معادله‌ی انتگرالی حاکم، توابع تنش و تغییر مکان در هر نقطه از محیط به دست می‌آیند. نتایج به دست آمده برای محیط‌های همسان جانبی با نتایج موجود برای محیط‌های همسان مقایسه می‌شود.

**واژه‌های کلیدی** پیچش، همسان جانبی، نیم فضا، حفره‌ی استوانه‌ای، تبدیل کسینوسی فوریه، معادلات انتگرالی.

### Analytical Solution for a Transversely Isotropic Half-Space due to Torsion on the Wall of a Finite Length Cylindrical Cavity

M.R Mahmoodian

M. Eskandari-Ghadi

**Abstract** In this article, a transversely isotropic linear elastic half-space with depth wise isotropy axis of material containing a cylindrical cavity of finite length is considered to be under the effect of an arbitrary torsion force applied on the wall of the cavity. To this end, the equation of equilibrium has been written in a cylindrical coordinate system, by dividing the involved domain to two regions and considering the equation of equilibrium in each region and by means of Fourier cosine integral transforms, the non-zero displacement component is obtained in the transformed domain. With the aid of the inversion theorem of the Fourier cosine integral transform, the displacements are determined in the real domain. By writing boundary and continuity conditions, a governing generalized Cauchy singular integral equation is obtained. By solving the governing integral equation, the shear stress and the torsional displacement are obtained for any point. The degenerated results for isotropic media are compared with existing results reported in the literature, where there exists an excellent agreement. The results of the paper may be used as the benchmark for the related research in the transversely isotropic media.

**Key Words** Torsion, Transversely isotropic, Half-space, Cylindrical cavity, Fourier cosine transform, Integral equations.

\* تاریخ تصویب مقاله ۸۹/۱۱/۰۲ و تاریخ دریافت نسخه نهایی اصلاح شده ۹۰/۸/۱۰

(۱) دانشجوی دکترا مهندسی عمران- سازه، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه علم و فرهنگ.

(۲) نویسنده‌ی مسؤل: دانشیار دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران.

## مقدمه

مسئله‌ی انتشار امواج در یک محیط ناشی از بارگذاری خارجی و تحلیل پاسخ یک محیط الاستیک به اعمال تنش بر روی جدار حفره‌ای در داخل آن از جمله مباحثی است که در قرن گذشته توجه بسیاری از محققان و مهندسان ریاضیات کاربردی و مکانیک مهندسی را به خود جلب کرده است. مسئله‌ی بررسی میزان تنش و کرنش به وجود آمده در یک محیط نیمه‌بی‌نهایت تحت اثر نیروهای ناشی از شمع‌های کوتاه یا بلند نیازمند به بررسی اندرکنش شمع و محیط است و این خود نیاز به تحلیل محیط نیمه بی‌نهایت تحت اثر نیروهای ناشی از شمع مؤثر بر فصل مشترک جدار شمع و محیط دارد.

وسترگارد، اولین بار در سال ۱۹۴۱، یک محیط بی‌نهایت با رفتار ارتجاعی با یک حفره‌ی استوانه‌ای با طول بی‌نهایت را در نظر گرفت و پاسخ استاتیکی آن به فشار شعاعی روی طول محدودی از دیواره‌ی حفره را به دست آورد [15]. آنالیز سه‌بعدی حفره‌ی استوانه‌ای توسط گرین و زرنا در سال ۱۹۴۴ انجام گرفت [3]. در سال ۱۹۵۲، سلبرگ به تحلیل یک محیط ارتجاعی تحت اثر فشار آنی بر سطح داخلی حفره پرداخت [12]. بعدها جردن در سال ۱۹۶۲ مسئله‌ی مشابه را با اعمال فشار دینامیکی خطی بر روی قسمتی از دیواره‌ی حفره حل کرد [4]. در سال ۱۹۸۰، پارتز به مطالعه‌ی اعمال تنش پیچشی خطی متحرک که به صورت دایره‌ای در امتداد محور داخلی حفره‌ی استوانه‌ای، واقع در یک محیط الاستیک بی‌نهایت در حرکت بود، پرداخت [10]. هم‌چنین اسنیدون در سال ۱۹۵۲ و کل و هات در سال ۱۹۵۸، حالت دو بعدی مسئله‌ی پارتز را مورد بررسی قرار داده بودند [1,14]. پارتز در سال ۱۹۸۲ به بررسی اعمال فشار شعاعی و تنش پیچشی خطی، به طور مجزا، بر روی دیواره‌ی حفره‌ی نامحدود در یک محیط بی‌نهایت الاستیک پرداخت و نتایج عددی برآورد مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی در نزدیکی نیرو و در طول حفره را ارائه نمود [7]. پارتز در سال

۱۹۸۳ مسئله‌ی پیچش خود را در حالت دینامیکی حل کرد و نتایج آن را با حالت استاتیکی قبلی، مقایسه نمود [8]. در این مقاله جابه‌جایی‌ها و تنش‌های حاصل از اعمال فشار خطی بر جداره‌ی حفره‌ی استوانه‌ای به صورت انتگرال‌های بی‌نهایت بیان شده‌اند.

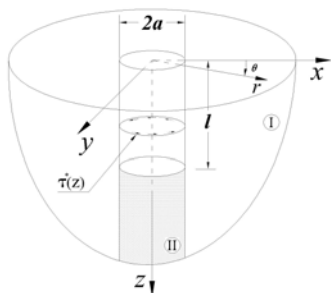
با توجه به بررسی‌های انجام شده در نزدیکی اعمال نیروی متمرکز، همگرایی انتگرال‌ها به سرعت کاهش می‌یابد و نقاط تکین خود را نشان می‌دهند. از این‌رو، نتایج در نقاطی دور از نقاط تکین دارای دقت خوبی می‌باشند. این محقق در سال ۱۹۸۶ پاسخ محیط الاستیک به فشار حلقه‌ای هارمونیک، مؤثر بر سطح حفره‌ی استوانه‌ای با طول بی‌نهایت، را به دست آورد [11]. وجود حفره با طول محدود در محیط‌های نیمه‌بی‌نهایت، به علت وجود سختی محیط در کف حفره، باعث دشواری تحلیل مسئله می‌گردد. از این‌رو، در اکثر تحقیقات اثر اعمال نیرو بر جداره‌ی حفره‌ی نامحدود در یک محیط مورد مطالعه قرار گرفته است. از آن‌جا که در بسیاری از کاربردهای مهندسی از جمله حفر فونداسیون‌ها، مطالعات ژئوتکنیکی در محل و مدل کردن گسترش تنش وارد بر دیواره‌ی حفره، با حفره‌ای با طول محدود سر و کار داریم؛ مطالعه‌ی اثر نیرو بر حفره با طول محدود مهم می‌باشد.

پک و عابدزاده در سال ۱۹۹۲ اثر تنش پیچشی بر دیواره‌ی حفره‌ای محدود در یک محیط همگن و همسان را با دقت مورد بررسی قرار داده‌اند [6]. در حال حاضر با توجه به استفاده‌ی روزافزون از مواد ناهمسان نیاز به تحقیقات در زمینه‌ی انتشار امواج در این محیط‌ها بیشتر احساس می‌شود. برای مثال، مواد کامپوزیت که در سال‌های اخیر در زمینه‌ی علوم مهندسی کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند، دارای خاصیت ناهمسانی می‌باشند. از سوی دیگر در زمین‌هایی که خاک تحت اثر نیروی ثقلی رسوب کرده است و نهشته‌های طبیعی سربار شده روی هم تشکیل داده است، خاصیت ناهمسانی وجود دارد؛ اما با توجه به ملاحظات کاربردی در زمینه‌ی مهندسی، محیط‌های

همسان جانبی با یک حفره‌ی استوانه‌ای به عمق  $l$  و شعاع  $a$  مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  را مطابق این شکل در نظر می‌گیریم. محور ایزوتروپی محیط در امتداد محور  $z$  و در نتیجه عمود بر سطح نیم فضا در نظر گرفته می‌شود. دیواره حفره در فاصله‌ی  $0 < z < l$  تحت اثر تنش برشی معلوم  $\tau^*(z)$  قرار دارد. نتیجه‌ی این تنش برشی گشتاور معلوم  $2\pi a^2 \int_0^l \tau^*(z) dz$  می‌باشد. به منظور حل مسأله، محیط را به دو ناحیه‌ی  $R_1$  و  $R_2$  به صورت ذیل تقسیم می‌کنیم (شکل ۱):

$$R_1 = \{ (r, \theta, z) \mid r > a, 0 < \theta < 2\pi, z > 0 \} \quad (۱)$$

$$R_2 = \{ (r, \theta, z) \mid r < a, 0 < \theta < 2\pi, z > l \} \quad (۲)$$



شکل ۱ حفره‌ی استوانه‌ای در محیط نیمه بی‌نهایت

با توجه به این تقسیم‌بندی، شرایط مرزی مسأله به

صورت زیر می‌باشد:

$$\tau_{r\theta 1}(a, z) = \tau^*(z), \quad 0 < z < l \quad (۳)$$

$$\tau_{z\theta 1}(r, 0) = 0, \quad r > a \quad (۴)$$

$$\tau_{z\theta 2}(r, l) = 0, \quad r < a \quad (۵)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(r, 0) = 0, \quad r > a \quad (۶)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}(r, l) = 0, \quad r < a \quad (۷)$$

ناهمسان معمولاً به صورت همسان جانبی و یا ارتوتروپیک مدل‌سازی می‌شوند [۱۶]. در حالت کلی در صورتی که در یک محیط سه‌بعدی، فرض همسان بودن ماده کنار گذاشته شود، تحلیل مسأله پیچیده و طولانی خواهد شد.

در این مقاله یک محیط نیمه بی‌نهایت با رفتار همسان جانبی که حفره‌ی استوانه‌ای با طول محدود در امتداد محور ایزوتروپی در آن ایجاد شده، در نظر گرفته شده است و پاسخ آن به پیچش معلوم روی دیواره‌ی این استوانه و حول محور استوانه به صورت تحلیلی بررسی می‌شود. بدین منظور معادلات حرکت حاکم بر مسأله در دستگاه مختصات استوانه‌ای نوشته می‌شود. با تقسیم محیط به دو ناحیه و نوشتن معادلات حرکت برای هر ناحیه به صورت مجزا و برقراری شرایط پیوستگی و مرزی پاسخ محیط تعیین می‌شود. در روش حل از تبدیل کسینوسی فوریه استفاده شده است؛ لذا جابه‌جایی‌های محیط در فضای تبدیل یافته به دست می‌آیند. به کمک قضیه‌ی عکس تبدیل انتگرالی، جابه‌جایی‌ها در فضای اصلی مسأله حاصل می‌شود. ثابت‌های انتگرال‌گیری با معرفی یک تابع میانی و ارضای شرایط پیوستگی و سازگاری بین دو ناحیه در فضای واقعی به دست می‌آیند. با نوشتن شرایط سازگاری، معادله انتگرالی کوشی حاکم بر تابع میانی مسأله حاصل می‌شود. با حل معادله‌ی انتگرالی کوشی، جابه‌جایی‌ها به دست می‌آید و با استفاده از معادلات رفتاری تنش‌ها در محیط همسان جانبی به دست می‌آیند. با برآورد عددی نشان داده می‌شود که جواب‌های مسأله در حالت ساده‌تر، مربوط به محیط‌های همسان، بر جواب‌های موجود منطبق است که دلالت بر صحت و دقت نتایج دارد.

### معادلات حاکم بر مسأله مقدار مرزی

یک محیط نیمه بی‌نهایت ارتجاعی، همگن و با رفتار

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(a, z) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(a, z), \quad z \geq 1 \quad (14)$$

رابطه‌ی (۱۴) نتیجه‌ی پیوستگی تنش برشی  
برای  $z \geq 1$  است.  $\tau_{z01}(a, z) = \tau_{z02}(a, z)$

### حل معادلات حاکم

با توجه به دامنه‌ی مسئله برای تبدیل معادلات با مشتقات جزئی (۱۲) و (۱۱) به معادلات دیفرانسیل معمولی از تبدیل کسینوسی فوریه استفاده می‌کنیم [13]. از آنجایی که دامنه‌ی  $R_1$  از  $z=0$  تا بی نهایت و دامنه‌ی  $R_2$  از  $z=1$  تا بی نهایت است، تبدیل کسینوسی فوریه توابع در این دامنه‌ها متفاوت است و به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\tilde{f}_1(r, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(r, z) \cos(\xi z) dz \quad (15)$$

$$\tilde{f}_2(r, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} f_2(r, z-1) \cos \xi(z-1) dz \quad (16)$$

که در آن  $f_1$  و  $f_2$  توابع دلخواه به ترتیب با دامنه‌های  $R_1$  و  $R_2$  هستند و  $\tilde{f}_1$  و  $\tilde{f}_2$  تبدیل فوریه کسینوسی آنها می‌باشند. بنابراین، تبدیل کسینوسی فوریه معادلات (۱۲) و (۱۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2 \tilde{u}_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{u}_i}{dr} - \left( \alpha^2 \xi^2 + \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u}_i = 0, \quad i=1,2 \quad (17)$$

که در آن از شرایط (۸-۶) استفاده شده است. با تغییر متغیر  $\zeta = r\xi$  و  $\bar{\zeta} = \alpha \zeta$  معادله‌ی (۱۷) به معادله‌ی بسل اصلاح‌شده‌ی مرتبه‌ی اول در می‌آید و جواب آن‌ها بر حسب  $r$  و  $\bar{\zeta}$  در حالت کلی به صورت:

$$\tilde{u}_i(r, \xi) = A_i(\bar{\zeta}) K_1(\alpha \xi r) + B_i(\bar{\zeta}) I_1(\alpha \xi r), \quad i=1,2 \quad (18)$$

و شرایط در بی نهایت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_i(r, z) \rightarrow 0, \quad \sqrt{(r^2 + z^2)} \rightarrow \infty, \quad i=1,2 \quad (8)$$

در این روابط اندیس ۱ مربوط به ناحیه‌ی  $R_1$  و اندیس ۲ مربوط به ناحیه  $R_2$  می‌باشد. به علاوه در این روابط  $\tau_{z0}$  و تنش‌های برشی و تنها تنش‌های غیر صفر محیط هستند و هم‌چنین  $u = u_0$  تغییر مکان در امتداد  $\theta$  در دستگاه مختصات معرفی شده است. طبیعت مسئله چنان است که  $u_r = u_z = 0$  می‌باشد. روابط بین تنش - تغییر مکان برای تنش‌های غیر صفر به صورت زیر می‌باشند [5]:

$$\tau_{r0} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right) \quad (9)$$

$$\tau_{z0} = \mu' \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (10)$$

که در آن  $\mu$  مدول برشی در صفحه ایزوتروپی و  $\mu'$  مدول برشی در صفحه عمود بر صفحه ایزوتروپی می‌باشد. معادله‌ی تعادل بر حسب تغییر مکان در هر ناحیه به صورت زیر در می‌آید [5]:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0, \quad r > a, z > 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 0, \quad r < a, z > 1 \quad (12)$$

که در آن  $\alpha^2 = \frac{\mu'}{\mu}$  نسبت سختی برشی در صفحه‌ی ایزوتروپی به سختی برشی در صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی می‌باشد. پیوستگی تنش و تغییر مکان در فصل مشترک ناحیه‌های  $R_1$  و  $R_2$  به صورت زیر می‌باشند:

$$\tau_{r01}(a, z) = \tau_{r02}(a, z), \quad z \geq 1 \quad (13)$$

$$B_2(\xi) = \frac{2}{\pi \alpha \xi I_2(\alpha \xi a)} \int_1^\infty \chi(z) \cos \xi(z-1) dz \quad (24)$$

با جاگذاری روابط (۲۴ و ۲۳) به ترتیب در روابط (۲۰ و ۱۹)، میزان جابه‌جایی در دو ناحیه بر حسب تابع مجهول  $\chi(z)$  به دست می‌آید. جابه‌جایی‌های  $u_1$  و  $u_2$  باید شرط پیوستگی (۱۴) را ارضا نمایند. با مشتق‌گیری از  $u_1$  و  $u_2$  نسبت به  $z$  داریم:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(r, z) = \frac{1}{\alpha \pi} \int_0^\infty (\phi_k(r, z - \zeta) + \phi_k(r, z + \zeta)) \times \chi(\zeta) d\zeta, \quad r > a, z \geq 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}(r, z) = \frac{-1}{\alpha \pi} \int_1^\infty (\phi_1(r, z - \zeta) + \phi_1(r, z + \zeta - 2l)) \times \chi(\zeta) d\zeta, \quad r < a, z \geq 1 \quad (26)$$

به طوری که

$$\phi_k(r, d) = \int_0^\infty \frac{K_1(\alpha \xi r)}{K_2(\alpha \xi a)} \sin(\xi d) d\xi \quad (27)$$

$$\phi_1(r, d) = \int_0^\infty \frac{I_1(\alpha \xi r)}{I_2(\alpha \xi a)} \sin(\xi d) d\xi \quad (28)$$

و با جاگذاری (۲۶ و ۲۵) در شرط پیوستگی (۱۴)، این شرط به صورت معادله انتگرالی زیر برای تعیین  $\tau(z)$  با  $z \geq 1$  به دست می‌آید:

$$\int_1^\infty (\phi_1(a^-, z - \zeta) + \phi_1(a^-, z + \zeta - 2l)) \tau(\zeta) d\zeta + \int_1^\infty (\phi_k(a^+, z - \zeta) + \phi_k(a^+, z + \zeta)) \tau(\zeta) d\zeta = - \int_0^1 (\phi_k(a^+, z - \zeta) + \phi_k(a^+, z + \zeta)) \tau^*(\zeta) d\zeta, \quad z \geq 1 \quad (29)$$

معادله‌ی (۲۹)، معادله انتگرالی تعمیم‌یافته‌ی کوشی نامیده می‌شود.

می‌باشد که در آن  $K_1(x)$  و  $I_1(x)$  توابع بسل اصلاح‌شده‌ی نوع اول و دوم از مرتبه‌ی یک می‌باشند. در ناحیه‌ی  $R_1$  هنگامی که  $r \rightarrow \infty$ ،  $I_1$  به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. به منظور داشتن جواب قابل قبول  $B_1(\xi)$  صفر می‌باشد. هم‌چنین در ناحیه‌ی  $R_2$  هنگامی که  $r \rightarrow 0$ ،  $K_1$  به بی‌نهایت میل می‌کند، در این صورت  $A_2(\xi)$ ، صفر می‌باشد. با استفاده از قضیه‌ی عکس تبدیل کسینوسی فوریه جابه‌جایی‌ها در دو ناحیه به ترتیب به صورت:

$$u_1(r, z) = \int_0^\infty A_1(\xi) K_1(\alpha \xi r) \times \cos(\xi z) d\xi, \quad r \geq a, z \geq 0 \quad (19)$$

$$u_2(r, z) = \int_0^\infty B_2(\xi) I_1(\alpha \xi r) \times \cos \xi(z-1) d\xi, \quad r \leq a, z \geq 1 \quad (20)$$

به دست می‌آیند. با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی (۱۳) روی مرز استوانه‌ای شکل در ناحیه  $R_1$  می‌توان  $\tau_{r01}$  را به صورت:

$$\lim_{r \rightarrow a^+} \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_1}{r} \right) = \mu \chi(z) = \begin{cases} \tau^*(z) & 0 < z < 1 \\ \tau(z) & z \geq 1 \end{cases} \quad (21)$$

و تابع  $\tau_{r02}$  در مرز ناحیه  $R_2$  را به شکل:

$$\lim_{r \rightarrow a^-} \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_2}{r} \right) = \mu \chi(z), \quad z \geq 1 \quad (22)$$

نوشت. همان‌طور که مشاهده می‌شود تابع  $\chi(z)$  معرف تابع کرنش برشی در صفحات موازی صفحه‌ی  $r = a$  در  $r = \theta$  بر حسب عمق می‌باشد. با جاگذاری روابط (۲۰ و ۱۹) در (۲۲ و ۲۱) و استفاده از روابط مشتق توابع بسل اصلاح شده و هم‌چنین عکس تبدیل کسینوسی فوریه ضرایب  $A_1(\xi)$  و  $B_2(\xi)$  به صورت ذیل به دست می‌آیند:

$$A_1(\xi) = \frac{-2}{\pi \alpha \xi K_2(\alpha \xi a)} \int_0^\infty \chi(z) \cos(\xi z) dz \quad (23)$$

$$\int_0^1 G(x, v) \hat{\tau}(\hat{1}/v) dv = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (36)$$

نوشت، به طوری که:

$$G(x, v) = \left[ \frac{2}{x-v} - \frac{2x-1}{v+x-2vx} + \frac{1}{x+v} \right] + \left( \frac{\hat{1}}{v} \right) \left[ k_1 \left( \frac{\hat{1}}{v} - \frac{\hat{1}}{x} \right) - k_1 \left( \frac{\hat{1}}{v} + \frac{\hat{1}}{x} - 2\hat{1} \right) + k_2 \left( \frac{\hat{1}}{v} - \frac{\hat{1}}{x} \right) - k_2 \left( \frac{\hat{1}}{v} + \frac{\hat{1}}{x} \right) \right] \quad (37)$$

و

$$g(x) = f(\hat{1}/x) \quad (38)$$

با توسیع تابع  $\hat{\tau}(\hat{1}/v)$  به صورت زوج نسبت به مبدأ می توان رابطه ی (۳۶) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 G(|x|, |v|) \hat{\tau}(\hat{1}/|v|) dv = g(|x|), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (39)$$

با بررسی رفتار تابع  $\hat{\tau}(\hat{z})$  در نقاط تکین، می توان تابع را در فاصله ی  $[-1, 1]$  به صورت:

$$\hat{\tau}(\hat{1}/x) = T(x)/(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

نوشت که در آن تابع مجهول  $T(x)$  یک تابع هموار در فاصله ی  $-1 \leq x \leq 1$  است. با در نظر گرفتن رابطه ی (۴۰) انتگرال (۳۹) به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 G(|x|, |v|) \frac{T(|v|)}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} dv = g(|x|), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (41)$$

با در نظر گرفتن نقاط تکین انتگرال فوق در محدوده ی  $[-1, 1]$  و استفاده از بسط به صورت چند جمله ای ژاکوبی  $\{P_{2n}^{(\alpha, \beta)}(x)\}$  با  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$  برای تابع تکین موجود در انتگرال و نیز زوج بودن تابع  $T(x)$  برای  $-1 \leq x \leq 1$ ، معادله ی انتگرالی به صورت دستگاه معادلات زیر نوشته می شود [2]:

### حل معادله ی انتگرالی حاکم

همان طور که در معادله ی (۲۹) مشاهده می شود توابع  $\phi_1$  و  $\phi_k$  باید برای  $r \rightarrow a$  بررسی شوند. با محاسبه ی  $\phi_1(a^-, d)$  و  $\phi_k(a^+, d)$  و تعریف متغیرهای بی بعد  $\hat{z} = \frac{z}{a}$  و  $\hat{1} = \frac{1}{a}$ ،  $\hat{\zeta} = \frac{\zeta}{a}$  زیر نوشته می شود:

$$\int_{\hat{1}}^{\infty} \left[ \frac{2}{\hat{\zeta} - \hat{z}} - \frac{1}{\hat{\zeta} + \hat{z} - 2\hat{1}} - \frac{1}{\hat{\zeta} + \hat{z}} \right] \hat{\tau}(\hat{\zeta}) d\hat{\zeta} + \int_{\hat{1}}^{\infty} [k_1(\hat{\zeta} - \hat{z}) - k_1(\hat{\zeta} + \hat{z} - 2\hat{1}) + k_2(\hat{\zeta} - \hat{z}) - k_2(\hat{\zeta} + \hat{z})] \hat{\tau}(\hat{\zeta}) d\hat{\zeta} = f(\hat{z}), \quad \hat{z} \geq \hat{1} \quad (30)$$

به طوری که

$$\hat{\tau}(\hat{z}) = \tau(z) \quad (31)$$

$$k_1(d) = \int_0^{\infty} \left( \frac{I_1(\alpha\xi)}{I_2(\alpha\xi)} - 1 \right) \sin(\xi d) d\xi \quad (32)$$

$$k_2(d) = \int_0^{\infty} \left( \frac{K_1(\alpha\xi)}{K_2(\alpha\xi)} - 1 \right) \sin(\xi d) d\xi \quad (33)$$

$$f(\hat{z}) = \int_0^{\hat{1}} a [\phi_k(a^+, \hat{z}a - \hat{\zeta}a) + \phi_k(a^+, \hat{z}a + \hat{\zeta}a)] \tau^*(\hat{\zeta}a) d\hat{\zeta} \quad (34)$$

با حل معادله ی انتگرالی (۳۰) تنش های برشی روی مرز  $r = a$  و  $z \geq 1$  به دست می آیند. برای حل معادله ی انتگرالی (۳۰) از تغییر متغیرهای زیر به منظور بی بعد کردن استفاده می کنیم:

$$v = \hat{1}/\hat{\zeta}, \quad x = \hat{1}/\hat{z} \quad (35)$$

به کمک رابطه ی (۳۵)، معادله ی (۳۰) را می توان به فرم

حفره مورد نیاز است، از این رو، با استفاده از رابطه (۱۹) می توان جابه جایی را در  $r = a$  به صورت زیر محاسبه نمود:

$$u(a, z) = \frac{a}{\alpha\pi} \{Q(\hat{z}) \quad (48)$$

$$+ \int_1^{\infty} [q_2(\hat{z} + \hat{\zeta}) + q_2(\hat{z} - \hat{\zeta})] \hat{\tau}(\hat{\zeta}) d\hat{\zeta}$$

به طوری که:

$$q_2(d) = -\int_0^{\infty} \frac{K_1(\alpha\xi)}{\xi K_2(\alpha\xi)} \cos(\xi d) d\xi \quad (49)$$

$$Q(\hat{z}) = \int_0^1 [q_2(\hat{z} + \hat{\zeta}) + q_2(\hat{z} - \hat{\zeta})] \hat{\tau}^*(\hat{\zeta}) d\hat{\zeta} \quad (50)$$

$$\hat{\tau}^*(\hat{z}) = \tau^*(z) \quad (51)$$

$q_2(d)$  به صورت یک انتگرال محیطی قابل حل می باشد [6]. حل عددی رابطه ی (۴۸) با استفاده از روش تجمع محلی به صورت

$$\frac{u(a, z)}{a} = \frac{1}{\alpha\pi} \{Q(\hat{z}) + \sum_{k=1}^N W_k [q_2(\hat{z} + \frac{\hat{1}}{v_k}) + q_2(\hat{z} - \frac{\hat{1}}{v_k})] T(v_k)\}, \quad \hat{z} \leq \hat{1} \quad (52)$$

می باشد. می توان نشان داد تنش برشی  $\tau(a, z)$  روی مرز  $r = a$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{\tau_{z0}(a, z)}{\mu} = \frac{\alpha}{\pi} \{f(\hat{z}) + \int_1^{\infty} [\frac{1}{\hat{z} - \hat{\zeta}} + \frac{1}{\hat{z} + \hat{\zeta}} + k_2(\hat{z} - \hat{\zeta}) + k_2(\hat{z} + \hat{\zeta})] \times \hat{\tau}(\hat{\zeta}) d\hat{\zeta}\}, \quad \hat{z} \leq \hat{1} \quad (53)$$

با استفاده از روش تجمع محلی برای حل انتگرال (۵۳) می توان رابطه ی اخیر را به صورت عددی

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N} W_k G(|x_j|, |v_k|) \times T(|v_k|) = g(|x_j|), \quad j = 1, \dots, 2N-1 \quad (42)$$

که در آن از روش تجمع محلی (Collocation Method) [۱۷] برای نقاط تکین تابع زیر علامت انتگرال در (۴۱) استفاده شده است. در رابطه ی (۴۲):

$$W_k = \frac{-(4N + \alpha + \beta + 2)}{(2N+1)!(2N + \alpha + \beta + 1)} \times \frac{\Gamma(2N + \alpha + 1)\Gamma(2N + \beta + 1)2^{\alpha + \beta}}{\Gamma(2N + \alpha + \beta + 1)P_{2N+1}^{(\alpha, \beta)}(v_k) dP_{2N}^{(\alpha, \beta)}(v_k) / dv} \quad (43)$$

و  $v_k, x_j$  ریشه های چند جمله ای ژاکوبی

$$P_{2N-1}^{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})}(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, 2N-1 \quad (44)$$

$$P_{2N}^{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}(v_k) = 0, \quad k = 1, \dots, 2N \quad (45)$$

می باشند. از آنجایی که  $v_k$  و  $x_j$  نسبت به مبدأ متقارن هستند، دستگاه معادلات (۴۲) برای  $j = 1, \dots, N$  به صورت

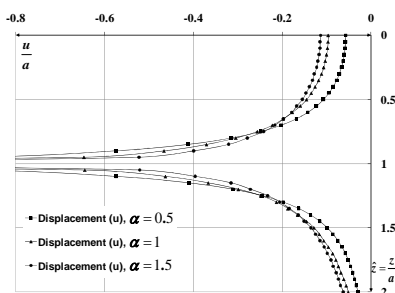
$$\sum_{k=1}^N W_k G(x_j, v_k) T(v_k) = g(x_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (46)$$

و برای  $x_N = 0$  به صورت زیر نوشته می شود:

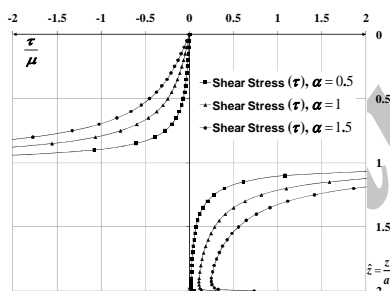
$$\sum_{k=1}^N W_k \frac{T(v_k)}{(v_k)^2} = 0 \quad (47)$$

رابطه ی (۴۶) شامل  $N$  معادله می باشد که با حل هم زمان آن ها برای  $k = 1, \dots, N$  به دست می آید. با توجه به رابطه بین  $T(x)$  و  $\hat{\tau}(\hat{z})$  و همچنین روابط (۲۴ و ۲۳ و ۲۰ و ۱۹) پاسخ محیط به تنش پیچشی معلوم  $\tau^*$  قابل محاسبه می باشد. در بسیاری از کاربردهای مهندسی تنش و جابه جایی روی دیواره ی

ضرایب  $\alpha = 0.5$  و  $\alpha = 1.5$  در نظر گرفته می‌شوند. برای محیط همسان نیز  $\alpha = 1$  می‌باشد. شکل (۳) میزان جابه‌جایی دیواره‌ی حفره بر اثر اعمال تنش پیچشی  $\tau^*(z)$  مطابق (۵۵) روی مرز  $r=a$  و در عمق  $s=1$  را نشان می‌دهد. میزان تأثیر ناهمسانی مصالح بر جابه‌جایی به وجود آمده بر دیواره‌ی حفره به طور واضح مشاهده می‌شود.



شکل ۳ تغییر مکان دیواره‌ی حفره مصالح همسان و همسان‌جانبی ( $\hat{I} = 2$ )



شکل ۴ تنش برشی دیواره حفره مصالح همسان و همسان‌جانبی ( $\hat{I} = 2$ )

میزان تنش به وجود آمده در جداره‌ی حفره بر اثر اعمال تنش پیچشی  $\tau^*(z)$  روی مرز  $r=a$  و در عمق  $s=1$  در شکل (۴) مشاهده می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تنش برشی به وجود آمده در دیواره‌ی حفره در محل اعمال تنش پیچشی، برای همه‌ی مصالح، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، و با دور شدن از محل اعمال تنش پیچشی، مصالح رفتار متفاوتی از

$$\frac{\tau_{z0}(a, z)}{\mu} = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ f(\hat{z}) + \sum_{k=1}^N W_k T(v_k) \right. \\ \times \left[ \frac{1}{v_k - \hat{1}/\hat{z}} - \frac{1}{v_k + \hat{1}/\hat{z}} \right. \\ \left. \left. + \frac{\hat{1}}{v_k^2} \left( k_2 \left( \hat{z} - \frac{\hat{1}}{v_k} \right) + k_2 \left( \hat{z} + \frac{\hat{1}}{v_k} \right) \right) \right] \right\} \quad (54)$$

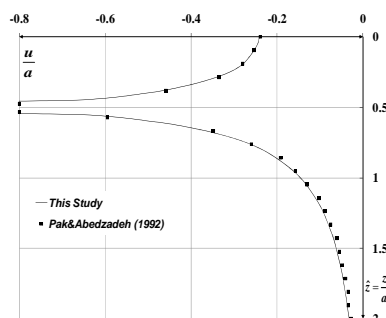
محاسبه نمود.

### برآورد عددی

به منظور بررسی پاسخ محیط، تنش پیچشی متمرکز و معلوم  $\tau^*(z)$  را در عمق  $s$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau^*(z) = a\delta(z-s), \quad 0 < s < 1 \quad (55)$$

در رابطه‌ی فوق  $\delta(x)$  تابع دلتای دیراک می‌باشد. تغییر مکان ناشی از نیروی پیچشی  $\tau^*(z)$  روی مرز  $r=a$  در عمق  $s=0.5$  برای مصالح همسان در شکل (۲) نشان داده شده است. این تغییر مکان مطابق انتظار در  $z=s$  بی‌نهایت می‌شود و با دور شدن از  $z=s$  به سرعت کاهش می‌یابد. در این شکل نتایج حاصل از این مطالعه با نتایج ارائه‌شده توسط پک و عابدزاده (۱۹۹۲) مقایسه شده است. تطابق عالی جواب‌ها معرف صحت نتایج به دست آمده می‌باشد.



شکل ۲ تغییر مکان دیواره‌ی حفره در مصالح همسان ( $\hat{I} = 2$ )

برای بررسی اثر میزان ناهمسانی به رفتار محیط، علاوه بر محیط همسان، محیط‌های همسان جانبی با



حل معادله‌ی انتگرالی کوشی با استفاده از بسط تابع مجهول به چندجمله‌ای ژاکوبی و نیز استفاده از روش تجمع محلی، یک دستگاه  $N$  معادله،  $N$  مجهولی حاصل گردیده که با حل آن‌ها تابع تنش برشی و سپس تابع تغییر مکان روی دیواره‌ی حفره در فاصله‌ی  $0 \leq z \leq 1$  به صورت انتگرال‌های خطی نیمه‌متناهی به دست آمده است. توابع زیر علامت انتگرالی به علت وجود توابع بسل اصلاح شده، توابع نوسانی می‌باشند، که در بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کنند؛ اما روند همگرایی این توابع در بی‌نهایت کند است. بنابراین، یکی از موارد مهم در برآورد انتگرال‌ها در این مقاله تعیین بی‌نهایت فیزیکی است. برای بررسی نتایج، تنش برشی معلوم روی دیواره‌ی حفره در عمق  $s$  فرض شده است و در نتیجه توابع تغییر مکان و تنش به صورت توابعی از  $s$  محاسبه گردیده‌اند. به منظور نشان دادن تأثیر میزان ناهمسانی مصالح بر پاسخ محیط، نتایج مختلف برای تغییر مکان و تنش دیواره‌ی حفره ارائه گردیده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود به علت تفاوت‌های موجود بین نتایج مصالح همسان و همسان جانبی، لازم است در کاربردهای مهندسی برای نزدیک بودن پاسخ به واقعیت، مصالح به درستی معرفی گردند.

خود نشان می‌دهند و با نزدیک شدن به مرز  $z=0$  میزان تنش برشی برای هر دو مصالح به سمت صفر میل می‌کند. میزان تنش برشی روی دیواره‌ی حفره برای مصالح متفاوت، در مرزهای  $z=0$ ،  $z=1$  و در محل اعمال گشتاور پیچشی یکسان و در سایر قسمت‌ها متفاوت می‌باشد. تفاوت تنش برشی در محیط‌های متفاوت مطابق شکل (۴) به معنی اهمیت در نظر گرفتن اثر نایزوتروپی محیط در بررسی این رفتار می‌باشد.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش تحلیلی برای به دست آوردن پاسخ محیط نیمه بی‌نهایت با رفتار همسان جانبی به پیچش وارد بر جدار حفره با طول محدود ارائه شده است. با تقسیم محیط به دو ناحیه‌ی  $R_1$  و  $R_2$  و استفاده از تبدیل کسینوسی فوریه، معادلات تعادل در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  برای هر ناحیه به معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب عمق تبدیل شده، به طوری که با حل آنها، شرایط پیوستگی دو ناحیه به معادله‌ی انتگرالی کوشی منجر شده است. با

### مراجع

1. Cole J. and Huth, J., "Stresses produced in a half plane by moving loads ", *J. Appl. Mech.*, Vol. 25, pp. 443-436, (1958).
2. Erdogan, F., "Mixed boundary-value problems in mechanics ", *Mech. Today*, Vol. 4, pp. 1-86, (1979).
3. Green, A. E. and Zerna, W., "*Theoretical elasticity* ", Cambridge University press, London, (1944).
4. Jordan, D.W., "The stress wave from a finite cylindrical explosive source ", *J. Math. Mech.*, Vol. 11, pp. 503-551, (1962).
5. Lekhnitskii, S.G., "*Theory of elasticity of an anisotropic body* ", Mir Publisher, Moscow, (1981).
6. Pak, R.Y.S. and Abedzadeh, F., "Torsional traction on an open finite cylindrical cavity ", *Proc. R. Soc. Lond. A.*, Vol. 438, pp. 133-144, (1992).
7. Parnes, R., "Applied tractions on the surface of an infinite cylindrical bore ", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 19, pp. 165-177, (1982).

8. Parnes, R., "Elastic response to a time-harmonic torsion-force acting on a bore surface ", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 19, pp. 925-934, (1983).
  9. Parnes, R. "On singularities due to a concentrated pressure loading of a cylindrical cavity ", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, pp. 267-276, (1984).
  10. Parnes, R., "Progressing torsional loads along a bore in an elastic medium ", *Int. J. Solids Structures* , Vol. 16, pp. 653-670, (1980).
  11. Parnes, R., "Steady-state ring-load pressure on a bore hole surface ", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 22, pp. 73-86, (1986).
  12. Selberg, W. L., "Transient compression waves from spherical and cylindrical cavities ", *Ark. Fys.* , Vol. 5, pp. 97-108, (1952).
  13. Sneddon, I.N., "*Fourier transforms*", McGraw-Hill: New York, 1<sup>st</sup> Edition, (1951).
  14. Sneddon I.N., "Stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid", *Rendiconti Circolo Mtematico di Palermo* 2, pp. 57-62, (1952).
  15. Westergaard, H.M., Theodore von karman Anniversary Volume, pp. 154-161, Caltech, (1941).
۱۶. خجسته، ع، رحیمیان، م و اسکندری قادی، م، «تحلیل سه بعدی محیط نیمه بی نهایت با رفتار ایزوتروپ جانی تحت اثر بار مماس بر سطح در فضای فرکانسی»، نشریه دانشکده فنی، جلد ۴۰، شماره ۵، آبان (۱۳۸۵).
۱۷. فرشاد، م، «ریاضیات عالی مهندسی»، جلد دوم، انتشارات بعثت، چاپ اول، (۱۳۶۷).