کاربرد الگوی WAF در شبیه‌سازی عددی امواج غلتشی★

علی مهدوی[۱] ناصر طالب بیدختی[۲]

چکیده *در این مقاله الگوی شار متوسط وزن‌دار (WAF) برای حل معادلات غیر خطی آب کم‌عمق و بررسی تکامل و انتشار امواج غلتشی در آبراهه‌های با شیب تند به‌کار رفته است. در حقیقت این الگو دقت شارهای محاسبه‌شده توسط روش کلاسیک HLL را افزایش می‌دهد. همچنین الگوی WAF علاوه بر توانایی شبیه‌سازی ناپیوستگی‌های مرتبط با امواج غلتشی، یک رهیافت قوی برای از بین بردن ناپایداری‌های عددی ناشی از عمق ناچیز آب، که معمولاً در شبیه‌سازی امواج غلتشی مشاهده می‌شوند، ارائه می‌نماید. نیم‌رخ‌های محاسبه‌شده عمق آب و سرعت جریان تطابقی رضایت‌بخش را با حل تحلیلی موجود نشان می‌دهند. نتایج عددی مربوط به تکامل زمانی دامنه‌ی موج برای جریان-هایی با اعداد فرود مختلف با آنچه که از یک مدل دیگر به‌دست می‌آید، مقایسه شده‌اند. هم‌چنین مقایسه‌هایی میان نتایج این دو مدل برای تاریخچه‌ی زمانی عمق آب صورت پذیرفته است. تطابق مشاهده شده، از کارایی و دقت الگوی پیشنهادی در مدل‌سازی امواج غلتشی حکایت می‌کند و این در حالیست که الگوی حاضر در پیاده‌سازی رایانه‌ای ساده‌تر است و به زمان اجرایی کوتاه‌تر نیاز دارد.*

واژه‌های کلیدی معادلات غیرخطی آب کم عمق، موج غلتشی، الگوی تسخیر شوک، شار متوسط وزن‌دار.

Application of WAF Method in Numerical Simulation of Roll Waves

A. Mahdavi N. Talebbeydokhti

Abstract *In this paper, the weighted average flux (WAF) method is used to investigate the development and propagation of roll waves in inclined steep channels. In fact, the WAF method improves the accuracy of the classic HLL scheme in evaluating numerical interface fluxes. The present shallow water solver is capable of efficiently capturing flow discontinuities associated with roll waves. In addition, it provides a robust approach to eliminate the numerical instabilities due to small water depths usually encountered in roll wave modeling. The simulated free surface profile and flow velocity show very satisfactory agreement with available analytical solution. The numerical results for time evolution of wave amplitude under different undisturbed Froude numbers are compared with those obtained by another numerical model. Comparisons are also made between water depth time histories computed by these two models. The observed agreement implies the efficiency and accuracy of the present scheme while it is relatively simpler in computer implementation and consumes shorter simulation run times.*

Keywords Nonlinear shallow water equations, roll wave, shock capturing scheme, weighted average flux

★ تاریخ دریافت مقاله ۹۰/۷/۲۵ و تاریخ پذیرش آن ۹۱/۱۰/۲۴ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول، دانشجوی دکتری، بخش مهندسی راه، ساختمان و محیط زیست، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز.

(۲) استاد بخش مهندسی راه، ساختمان و محیط زیست، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز.

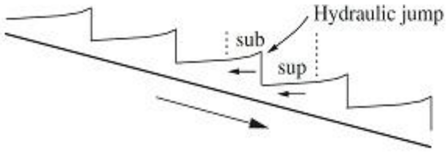
مقدمه

با در نظر گرفتن جریانی یکنواخت بر روی بستر دارای اصطکاک در یک مجرای باز شیب‌دار، هنگامی که عـدد فرود این جریان دست‌نخورده‌ی یکنواخت از مقدار مشخصی بیش‌تر شود، ناپایداری‌هایی در سطح آزاد جریان رخ می‌دهد. تحت چنین شرایطی چنانچه یک اغتشاش کوچک به جریان دائم یکنواخت اعمال گردد، در نهایت مجموعه‌ای از امواج شکننده یا اُشترک (bore) در الگویی پله‌مانند در جریان به‌وجود می‌آید. این الگوی ناپیوسته‌ی متناوب به امواج غلتشی (roll waves) موسوم است. امواج غلتشی با سرعت ثابت و تغییرات متوالی رژیم جریان منتشر می‌شوند. جریان فوق بحرانی با گذر از یک پرش هیدرولیکی در یک چارچوب متحرک با سرعت یکنواخت به جریان زیر بحرانی تبدیل می‌شود (شکل ۱). به بیان دیگر از دیدگاه ناظری متحرک که با سرعت موج غلتشی به سمت پایین‌دست جریان حرکت می‌نماید، نیمرخ موج با تغییرات متوالی جریان فوق بحرانی به زیر بحرانی همراه است. این در حالیست که از دیدگاه یک ناظر ثابت، جریان در سراسر آبراهه‌ی فوق بحرانی می‌باشد.

امواج غلتشی به‌صورت معمول در مجاری ساخته‌ی دست انسان نظیر آبراهه‌ها و سرریزها به‌وجود می‌آیند. این امواج در فلوم‌های آزمایشگاهی نیز تولید شده‌اند [1]. رخداد چنین امواجی علامت این است که تغییرات در جریان و عمق آب می‌توانند قابل توجه باشد. هم‌چنین وجود امواج غلتشی ممکن است سبب سرریزی از کناره‌های آبراهه گردد. این امر مشکلاتی عملی برای مهندسان هیدرولیک به‌همراه دارد [2]. هرچند امواج غلتشی اغلب در مجاری مصنوعی رخ می‌دهند، این امواج در جریان‌های طبیعی نیز دیده شده‌اند که از آن جمله می‌توان به آبراهه‌های یخی، جریان‌های ثقلی در آزمایشگاه، اقیانوس و دریاچه‌ها اشاره نمود [3]. علاوه بر این، اغتشاشات شبیه به امواج غلتشی در موارد گوناگون دیگری نظیر جریان چند فازی [4]، جریان گل [5] و جریان در مجاری کشسان مانند جریان هوا و خون در رگ [6]، رخ می‌دهند.

بخش عمده‌ای از تحقیقات مرتبط با امواج غلتشی به تعیین شرایط لازم برای شکل‌گیری امواج غلتشی اختصاص یافته است. رهیافت اساسی در این زمینه عبارت است از بررسی پایداری یک جریان یکنواخت بر روی شیب ثابت که اغتشاشی بر سطح آزاد آن اعمال گردیده است. در مطالعات پیشین، با حل معادلات ناویر–استوکس برای جریان لایه‌ای و اعمال اغتشاشات سینوسی بر سطح آزاد جریان، عدد فرود آستانه برای رخداد موج غلتشی در حدود $F_0 = 0.5$ تعیین شده است [7, 8]. هم‌چنین برای جریان‌های آشفته، با در نظر گرفتن یک آبراهه‌ی عریض، توزیع سرعت یکنواخت و ضریب اصطکاک ثابت، عدد فرود آستانه‌ی رخداد موج غلتشی برابر با $F_0 = 2$ به دست می‌آید [1, 9].

باید توجه داشت که رخداد امواج غلتشی به وجود اصطکاک در مقابل جریان بستگی دارد و در صورت عدم وجود اصطکاک موج غلتشی شکل نمی‌گیرد [10]. هم‌چنین می‌توان شرایط لازم برای تشکیل این امواج را بر مبنای مقاومت جریان به‌دست آورد [11]. با این وجود امواج غلتشی بر روی بسترهای بسیار نامنظم به‌وجود نمی‌آیند[12]. به بیان دیگر مقاومت بیش از حد جریان مانع از شکل‌گیری امواج غلتشی می‌گردد به طوری‌که برای تشکیل امواج غلتشی بایستی مقاومت جریان از یک مقدار مشخص کم‌تر باشد [13]. شایان ذکر است پدیده‌ی امواج غلتشی می‌تواند پتانسیل فرسایش خاک را افزایش دهد. دلیل این امر تغییرات زمانی و مکانی جریان در خلال رخداد چنین امواجی گزارش شده است [14,15].



شکل ۱ انتشار امواج غلتشی در یک آبراهه که با تغییرات متوالی جریان از حالت فوق بحرانی(sup) به حالت زیر بحرانی(sub) در یک چارچوب متحرک از طریق ایجاد پرش هیدرولیکی همراه است [20]

به احتمال قوی Thomas اولین محققی بود که امواج غلتشی بزرگ دامنه (large-amplitude) را به‌صورت تحلیلی توصیف نمود[11,16]. وی با در نظر گرفتن یک موج متناوب با شکل و سرعت ثابت، به تولید نظری نیم‌رخی شبیه به نیم‌رخ امواج غلتشی پرداخت. بر مبنای ایده‌ی بنیادین این محقق، Dressler حلی بسته برای امواج غلتشی دائمی در یک آبراهه‌ی عریض با اصطکاک ثابت ارائه داد [13]. پس از آن Brock به توسعه‌ی یک مدل نظری بر مبنای معادلات غیر خطی آب کم عمق (nonlinear shallow water equations) پرداخت [17]. این معادلات که بر فرض توزیع فشار هیدرو استاتیک و سرعت متوسط‌گیری شده در عمق استوارند برای شبیه‌سازی جریان‌هایی که در آن بعد عمودی جریان از بعد افقی آن بسیار کوچک‌تر است، به کار می‌روند. تاکنون محققان بسیاری بر پایه‌ی این معادلات به بررسی جنبه‌های مختلف شکل‌گیری و انتشار امواج غلتشی پرداخته‌اند.

Liu و همکاران (۲۰۰۵) به‌کمک معادلات غیرخطی آب کم‌عمق به بررسی جریان شیاری (rill flow) پرداختند [18]. این محققان بر مبنای کارهای گذشته [13,17] و با فرض برابری عمق متوسط جریان و عمق جریان یکنواخت، ضمن ارائه‌ی روابطی برای نیمرخ و سرعت موج نشان دادند که پدیدار شدن امواج غلتشی، افزایش تنش برشی جریان را به‌همراه دارد و از همین روی سبب تسریع فرآیند فرسایش خاک و تولید شیارهایی در سطح خاک می‌گردد.

Bohorquez (2007) در چارچوب معادلات غیرخطی آب کم‌عمق، شکل‌گیری امواج غلتشی در سیلاب های جریان یافته بر بستر شیب‌دار را مطالعه نمود [19]. این محقق با به‌کارگیری روش تفاضل محدود برای حل معادلات حاکم، تکامل خطی و غیرخطی اغتشاش اولیه را بررسی نمود. Que and Xu (2006) با ارائه‌ی یک مدل حجم محدود که در آن از الگوی موسوم به (Bhatnagar, Gross and Krook) (BGK) برای حل معادلات آب کم‌عمق استفاده شده بود، به بررسی شکل‌گیری و تکامل امواج غلتشی پرداختند [20]. با وجود توانایی الگوی BGK در شبیه‌سازی جریان‌های مختلف، این الگوی عددی در پیاده‌سازی رایانه‌ای پیچیده است و در مقایسه با الگوی مورد استفاده در این مطالعه به زمان اجرای طولانی‌تری نیاز دارد.

در این مقاله پس از تشریح معادلات حاکم، جزئیات روش عددی مورد استفاده برای تخمین شار عددی و چگونگی پیاده‌سازی عبارت چشمه در مدل عددی به تفصیل ارائه می‌گردد. در ادامه پس از بیان معیار ناپایداری جریان و شرایط اولیه و مرزی برای شبیه‌سازی موج غلتشی، با طرح یک آزمون کلاسیک شکست سد و مقایسه‌ی نتایج با حل تحلیلی موجود، توانایی مدل در شبیه‌سازی یک جریان ناپیوسته مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. همچنین مقایسه‌ای از نتایج مدل عددی و حل تحلیلی برای یک موج غلتشی ارائه خواهد گردید. آن‌چه کم‌تر در متون علمی پیشین مورد توجه قرار گرفته‌است چگونگی شکل‌گیری نیم‌رخ سطح آزاد در حالات آستانه‌ی رخداد و عدم رخداد موج غلتشی می‌باشد. به‌همین منظور این پدیده‌ها در انتهای این نوشتار بررسی خواهند شد.

معادلات حاکم

معادلات آب کم‌عمق دارای کاربردهای وسیعی در مهندسی هیدورلیک و مهندسی سواحل می‌باشد. این معادلات که در واقع قوانین بقای جرم و اندازه حرکت را بیان می‌کنند، تاکنون در شبیه‌سازی پدیده‌هایی نظیر امواج جذر و مد در مصب‌ها و آب‌های ساحلی، انتشار امواج اُشترک، انتشار و بالاروی امواج بلند، پرش هیدرولیکی ایستا و جریان رودخانه و مجاری باز، با موفقیت به‌کار گرفته شده‌اند. معادلات آب کم‌عمق در حالت پایستار (conservative form) و یک‌بعدی به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial F(V)}{\partial x}=S(V) \quad (۱)$$

رابطه‌ی فوق در واقع دستگاهی از معادلات غیرخطی هذلولوی بوده که در آن V بردار متغیرهای پایستار، $F(V)$ بردار شار (flux vector) و $S(V)$ عبارت چشمه (source term) نامیده می‌شوند:

$$V=\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix},\quad F(V)=\begin{bmatrix} hu \\ hu^2+\frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix},\quad S(V)=\begin{bmatrix} 0 \\ ghS_0-C_f u^2 \end{bmatrix}. \quad (۲)$$

در رابطه‌ی فوق g شتاب گرانش، x مختصات افقی، t زمان، $h=h(x,t)$ عمق آب، S_0 شیب بستر، $u=u(x,t)$ سرعت افقی متوسط‌گیری شده در عمق و C_f ضریب اصطکاک بستر می‌باشند [20]. معادله‌ی (۱) تحت عنوان صورت دیفرانسیلی معادلات بقای جرم و بقای اندازه‌ی حرکت شناخته می‌شود و استفاده از آن تنها در مواردی که جواب‌ها هموار می‌باشند، صحیح است. هنگامی که یک ناپیوستگی در جریان وجود دارد، بایستی از حالت انتگرالی معادلات استفاده شود. معادله‌ی (۱) پس از انتگرال‌گیری در حجم کنترل به‌صورت زیر قابل بیان است [21]:

$$\frac{V_i^{n+1}-V_i^n}{\Delta t}=-\frac{F_{i+1/2}-F_{i-1/2}}{\Delta x}+S_i \quad (۳)$$

که در آن Δx اندازه‌ی سلول محاسباتی و Δt گام زمانی می‌باشد. پایین نوشت i معرف مرکز سلول محاسباتی i ($x=x_i$) و بالانوشت‌های n و $n+1$ به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی گام‌های زمانی معلوم و مجهول می‌باشند. $F_{i+1/2}$ و $F_{i-1/2}$ نیز که به شارهای بین سلولی موسومند، به ترتیب به شار عددی در نقاط $x=x_{i+1/2}$ (مرز بین سلول های i و $i+1$) و $x=x_{i-1/2}$ (مرز بین سلول‌های $i-1$ و i) اشاره می‌نمایند. در قسمت بعد به چگونگی تخمین این شارهای عددی پرداخته می‌شود.

الگوی شار متوسط وزن‌دار برای معادلات آب کم‌عمق

تاکنون برای حل عددی دستگاه معادلات پایستار روش‌های گوناگونی طراحی شده و به‌کار رفته است. این روش‌ها عموماً در قالب روش‌های اجزای محدود، المان محدود و حجم محدود طبقه‌بندی می‌شوند. از این میان، روش حجم محدود از آن‌جایی‌که در حل جریان‌های ناپیوسته به عبارت‌های اضافی نظیر لزجت مصنوعی نیاز ندارد و خاصیت پایستاری معادلات را به‌خوبی حفظ می‌نماید از مقبولیت بیشتری برخوردار است.

روش‌های گودانف (Godunov methods) که با حل مسأله‌ی ریمان در مرز هر سلول همراه می‌باشند و از جهات انتشار موج برای تخمین شار بین سلولی بهره می‌برند، یکی از مهم‌ترین زیرمجموعه‌های روش حجم محدود به‌شمار می‌روند. Brook و همکاران (۱۹۹۹) ضمن استفاده از روش گودانف برای حل جریان در لوله‌های تغییرشکل‌پذیر نشان دادند نتایج حاصل در مقایسه با الگوی تفاضل محدود مک کورمک (MacCormack) از دقت بیش‌تری برخوردار است [22].

در این مطالعه برای تخمین شار عددی از الگوی شار متوسط وزن‌دار (WAF) (Weighted Average Flux) که روشی از نوع گودانف است و یک حل‌کننده

تقریبی مسأله‌ی ریمان به‌شمار می‌رود، استفاده گردیده است. بر اساس این الگو، شار عددی در مرز هر سلول به‌صورت ترکیبی وزن‌دار از شارهای مرکزی سلول‌های چپ و راست مرز و شار در ناحیه‌ی میانی موسوم به ناحیه‌ی ستاره تخمین زده می‌شود (شکل۲). شار عددی در ناحیه‌ی ستاره $F(V^*)$، با استفاده از حل کننده‌ی تقریبی ریمان از نوع (HLL) (Harten, Lax and van Leer) با توجه به شارهای چپ و راست مرز و سرعت امواج به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F(V^*) = \frac{S_R F(V_L) - S_L F(V_R) + S_R S_L (V_R - V_L)}{S_R - S_L} \quad (۴)$$

که در آن $\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_i$ و $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_{i+1}$ همچنین S_L و S_R به ترتیب به سرعت موج در سمت چپ و راست مرز $i+1/2$ اشاره می‌کنند. برای تخمین این سرعت‌ها از روابط زیر استفاده می‌شود [23]:

$$S_R = \max(u_R + \sqrt{gh_R}, u^* + \sqrt{gh^*})$$

$$S_L = \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u^* - \sqrt{gh^*}) \quad (۵)$$

در عبارات فوق h^* و u^* به ترتیب مقادیر عمق و سرعت جریان در ناحیه ستاره می‌باشند که به صورت زیر قابل محاسبه‌اند:

$$h^* = \frac{1}{g}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4}(u_L - u_R)\right]^2$$

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \quad (۶)$$

برای ساختاری شبیه به آنچه در شکل (۲) نشان داده شده است، شار WAF در مرز $i+1/2$ به صورت زیر قابل بیان است [21]:

$$F_{i+1/2}^{WAF} = \sum_{k=1}^{N+1} w_k F_{i+1/2}^{(k)} \quad (۷)$$

با تعریف عدد کورانت موج k به‌شکل $c_k = S_k \Delta t/\Delta x$ که در آن S_k سرعت موج k می‌باشد، برای وزن‌های w_k می‌توان نوشت:

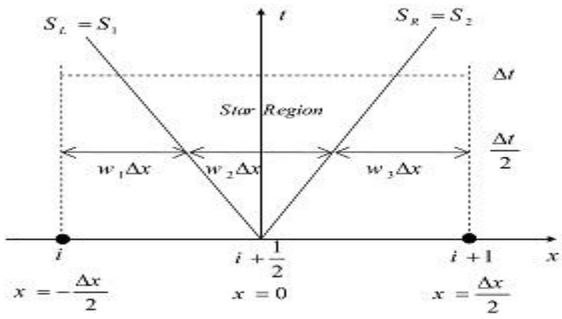
$$w_k = \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}), \quad c_0 = -1, \quad c_{N+1} = 1 \quad (۸)$$

در روابط (۸ و۷)، N تعداد معادلات پایستار (برای دستگاه معادلات یک بعدی آب کم‌عمق: $N = 2$) و $F_{i+1/2}^{(k)}$ بیانگر شار عددی در بازه‌ی k به طول $w_k \Delta x$ است (شکل۲). با اعمال شرط موسوم به تغییرات کلی از بین رونده (TVD) (Total Variation Diminishing)، که متضمن جوابی عاری از نوسان غیر فیزیکی در نزدیکی نواحی ناپیوسته جریان است، رابطه‌ی (۷) به شکل زیر بازنویسی می‌گردد [21]:

$$F_{i+1/2}^{TVD\text{-}WAF} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \text{sign}(c_k)\varphi_{i+1/2}^{(k)} \Delta F_{i+1/2}^{(k)} \quad (۹)$$

که در آن sign( ) به تابع علامت اشاره می‌نماید. با تعریف شارهای $F_{i+1/2}^{(1)} = F(V_L)$، $F_{i+1/2}^{(2)} = F(V^*)$ و $F_{i+1/2}^{(3)} = F(V_R)$، پرش در شار عددی به شکل $\Delta F_{i+1/2}^{(k)} = F_{i+1/2}^{(k+1)} - F_{i+1/2}^{(k)}$ محاسبه می‌شود. در رابطه (۹)، $\varphi_{i+1/2}^{(k)}$ تابع محدود کننده شار جهت اعمال شرط TVD می‌باشد که با اعمال مقدار مناسب استهلاک عددی به الگوی WAF، یکنوایی (monotonicity) حل در نواحی دارای گرادیان زیاد را تضمین می‌نماید. تاکنون انتخاب‌های گوناگونی برای تابع محدود کننده‌ی شار پیشنهاد شده است [21]. در مطالعه‌ی حاضر از محدودکننده‌ی موسوم به SUPERBEE استفاده شده است:

$$\varphi_{i+1/2}^{(k)} = 1 - \left(1 - |c_k|\right). \max\left[0, \min\left(1, 2r^{(k)}\right), \min\left(2, r^{(k)}\right)\right] \quad (۱۰)$$



شکل ۲ ساختار الگوی WAF در مرز سلول محاسباتی برای حل معادلات یک‌بعدی آب کم‌عمق

که در آن:

$$r^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{\Delta h^{(k)}_{i-1/2}}{\Delta h^{(k)}_{i+1/2}} & \text{for } c_k > 0, \\[2ex] \dfrac{\Delta h^{(k)}_{i+3/2}}{\Delta h^{(k)}_{i+1/2}} & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (۱۱)$$

در رابطه‌ی فوق، $\Delta h^{(k)}_{i+\alpha}$ ($\alpha=-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}$) پرش در متغیر h در خلال موج k می‌باشد [21]. شایان ذکر است که روش WAF با اعمال اندکی تغییر در سرعت‌های موج، به‌راحتی برای مسائلی که بخشی از ناحیه‌ی محاسباتی در ابتدا یا در خلال محاسبات خشک می‌باشد، قابل استفاده است. به‌عنوان نمونه می‌توان از این روش برای شبیه‌سازی مرز متحرک خط ساحلی و مطالعه‌ی پدیده‌های انتشار و بالاروی امواج منفرد بهره جست [24].

پیاده‌سازی عبارت چشمه در الگوی عددی

آن‌چه در بخش پیشین به تفصیل بیان گردید، تنها برای صورت همگن معادلات آب کم‌عمق (یعنی $S(V)=0$) قابل استفاده است. در حضور عبارت چشمه، می‌توان الگوی WAF را بدون تغییر به‌کار برد به‌شرطی که عبارت چشمه طی یک یا چند گام جداگانه انتگرال‌گیری، وارد محاسبات گردد [21, 24]. در مطالعه‌ی حاضر برای دست‌یابی به‌دقت مرتبه‌ی دوم در زمان، دستگاه معادلات زیر که متشکل از سه معادله‌ی مقدار اولیه است در الگویی متوالی حل می‌گردد.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ODEs:} & \dfrac{dV}{dt}=S(V) \\ \text{ICs:} & V^n \end{array}\right\} \xrightarrow{\Delta t'} V^{(1)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{PDEs:} & \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \text{ICs:} & V^{(1)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\Delta t} V^{(2)} \qquad (۱۲)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ODEs:} & \dfrac{dV}{dt}=S(V) \\ \text{ICs:} & V^{(2)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\Delta t'} V^{n+1}$$

که در آن $\Delta t'=\Delta t/2$ می‌باشد. فرآیند حل سه‌مرحله‌ای دستگاه فوق بدین نحو قابل تشریح است: در مرحله‌ی اول با استفاده از مقادیر جریان در گام زمانی قبل به‌عنوان شرط اولیه، یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی که در برگیرنده‌ی عبارت چشمه است، حل می‌گردد و شرط اولیه الگوی WAF به‌دست می‌آید. خروجی الگوی WAF در مرحله‌ی دوم، به‌عنوان شرط اولیه در مرحله سوم برای حل معادله‌ای نظیر مرحله‌ی اول اعمال می‌گردد تا مقدار متغیرهای جریان در گام جدید زمانی حاصل شود. به‌طور خلاصه این فرآیند حل به‌شکل $V^{n+1}=A^{(\Delta t')}H^{(\Delta t)}A^{(\Delta t')}V^n$ نیز قابل بیان است که در آن A و H به‌ترتیب عملگر عبارت چشمه و عملگر معادله‌ی همگن نامیده می‌شوند. در مطالعه‌ی کنونی از الگوی انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای برای حل معادلات چشمه (مراحل اول و سوم) استفاده

گردیده است. این عملگر ضمنی دارای دقتی از مرتبه‌ی دو است و برای معادله‌ی مرحله‌ی اول با رابطه‌ی زیر داده می‌شود (پیوست الف):

$$\left[I-\frac{\Delta t'}{2}\left(\frac{\partial S(V)}{\partial V}\right)_i^n\right]\Delta V_i=\Delta t' S(V_i^n) \qquad (۱۳)$$

که در آن $\mathbf{I}$ ماتریس واحد است و $\Delta \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i^{(1)} - \mathbf{V}_i^n$ معرف پرش در متغیرهای پایستار می‌باشد. عبارت $\partial \mathbf{S(V)}/\partial \mathbf{V}$ در سمت چپ رابطه‌ی فوق بیانگر ماتریس ژاکوبین بردار چشمه می‌باشد.

معیار پایداری محاسبات

از آنجایی‌که الگوی WAF، الگویی صریح می‌باشد، پایداری محاسبات با اعمال معیار کورانت- فردریش- لویی(CFL) بر مقدار گام زمانی تأمین می‌شود.

$$\Delta t = C_n \min_i \frac{\Delta x}{|u_i| + \sqrt{gh_i}}, \quad 0 < C_n \le 1 \qquad (۱۴)$$

که در آن C_n عدد CFL می‌باشد. رابطه‌ی فوق بیان می‌کند که در یک گام زمانی موج نباید مسافتی بیش از طول یک گام مکانی را طی کند.

شرایط هیدرولیکی جریان ناپایدار

حل جریان یکنواخت به‌صورت $h = h_0$ و $u = u_0$ برای معادلات غیر خطی آب کم‌عمق از توازن میان نیروهای گرانش و اصطکاک بر روی یک شیب ثابت حاصل می‌شود به نحوی که:

$$gh_0S_0 = C_f u_0^2 \qquad (۱۵)$$

امواج غلتشی معمولاً بر روی آبراهه‌های دارای شیب تند با عدد فرود جریان بزرگ‌تر از ۲ ($u_0 > 2\sqrt{gh_0}$) اتفاق می‌افتند [1]. این موضوع با توجه به رابطه‌ی (۱۵) به‌شکل زیر قابل بیان است.

$$S_0 > 4C_f \qquad (۱۶)$$

رابطه فوق که نشان دهنده‌ی شرایط ناپایدار جریان است، در حقیقت بیانگر عدول از معیار پایداری جریان یکنواخت ($u_0 \le 2\sqrt{gh_0}$) می‌باشد. این معیار براساس تحلیل خطی پایداری استوار است.

شرایط اولیه و مرزی برای شبیه سازی امواج غلتشی

همان‌طور که قبلاً اشاره شد امواج غلتشی با اعمال یک اغتشاش به جریان ناپایدار به‌وجود می‌آیند. با در نظر گرفتن شکل سینوسی برای این اغتشاش، شرایط اولیه‌ی عمق جریان عبارت است از:

$$h(x,0) = h_0\left[1+\varepsilon \sin(k_w x)\right] \qquad (۱۷)$$

که در آن k_w به حاصل‌ضرب عدد موج (wavenumber) در عدد 2π اشاره می‌نماید و ε عامل بزرگ‌نمایی (amplification factor) اغتشاش اولیه می‌باشد که برابر است با نسبت دامنه‌ی اغتشاش به عمق جریان اولیه‌ی یکنواخت. در محاسبات صورت پذیرفته در این تحقیق عامل بزرگ‌نمایی برابر با ۰/۵٪ عمق اولیه‌ی جریان یکنواخت در نظر گرفته شده است به‌عبارت دیگر $\varepsilon = 0.005$ می‌باشد. هم‌چنین سرعت اولیه‌ی جریان به شکل زیر اعمال می‌شود [20]:

$$u(x,0) = u_0 + r_p \varepsilon \sin(k_w x + \theta_p) \qquad (۱۸)$$

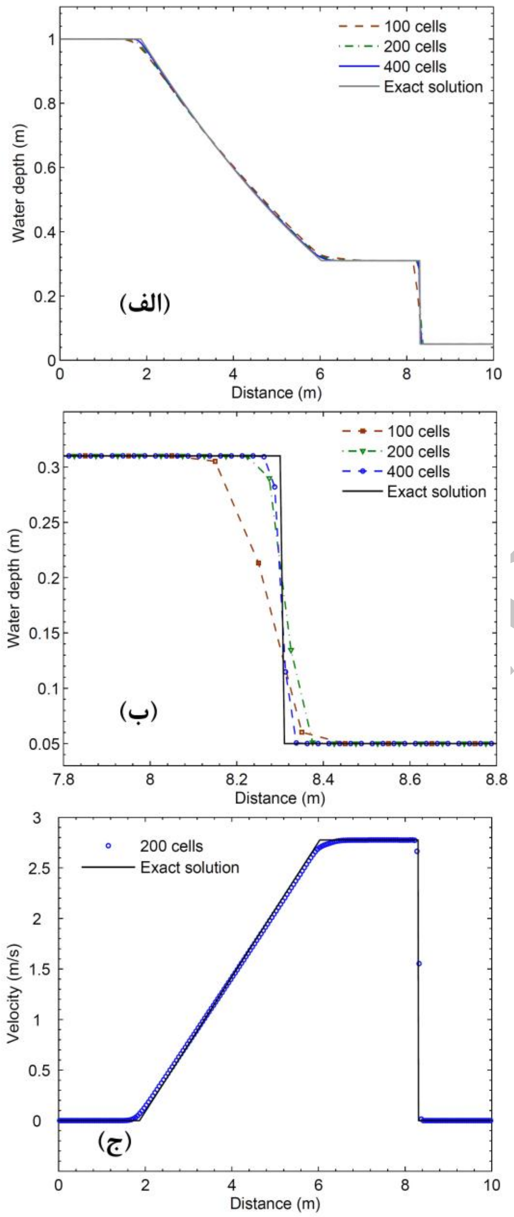
که در آن دو متغیر θ_p اختلاف فاز میان عمق و سرعت اغتشاش و ضریب r_p، هر دو توابعی از سرعت اولیه‌ی جریان یکنواخت و عدد موج و فرکانس زاویه‌ای اغتشاش می‌باشند [20]. در مدل عددی، شرایط مرزی در دو انتهای چپ و راست دامنه‌ی محاسباتی به‌صورت دوره‌ای (periodic) در نظر گرفته شده است. بر این اساس در هر لحظه مقادیر متغیرهای جریان در دو مرز انتهایی با یکدیگر برابر می‌باشد. به‌عبارت دیگر:

$$V(x_L,t) = V(x_R,t) \quad (19)$$

که در آن x_L و x_R به‌ترتیب به مختصات مرزهای چپ و راست ناحیه‌ی حل اشاره می‌نمایند. در تحقیقی Zanuttigh and Lamberti (2002) به‌کمک روش WAF به مطالعه‌ی امواج غلتشی پرداختند [25]. مدل این محققان به داده‌های سرعت و دامنه‌ی موج غلتشی به‌عنوان شرط مرزی بالادست نیازمند می‌باشد و این درحالی‌است که مدل توسعه یافته در مطالعه‌ی حاضر با توجه به شرط مرزی اعمالی رابطه‌ی (۱۹) به داده‌های یادشده نیازی ندارد و این شرط مرزی با خاصیت دوره‌ای امواج غلتشی هم‌خوانی دارد.

نتایج و بحث

شکست سد. بررسی امواج ناشی از شکست سد، یک مسأله‌ی بسیار جالب نظری و در عین حال کاربردی در مهندسی هیدرولیک می‌باشد. به‌عنوان اولین آزمون محاسباتی، الگوی عددی ارائه‌شده برای شبیه‌سازی امواج ناشی از شکست سد به‌کار می‌رود. در این مثال، آب ساکن بالادست به عمق $h_1 = 1.0\ m$ به‌وسیله‌ی یک دیواره‌ی قائم (سد) که در وسط کانالی به طول $L = 10\ m$ قرار دارد، از آب ساکن پایین دست به عمق $h_2 = 0.05\ m$ جدا می‌شود. در این حالت نسبت عمق آب پایین دست به بالادست برابر با $h_2 / h_1 = 0.05$ می‌باشد و مرزهای چپ و راست دامنه‌ی محاسباتی با شرط مرزی غیر بازتابی (non reflective) در مدل عددی گنجانده می‌شوند. در لحظه‌ی $t = 0$ دیواره به‌صورت ناگهانی برداشته می‌شود و یک موج اُشترک به سمت پایین‌دست و یک موج منفی به سمت بالادست انتشار می‌یابند. مقایسه‌ی نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی برای نیم‌رخ سطح آزاد جریان در زمان $t = 1.0\ s$ با حل دقیق [21] در شکل (۳- الف) نشان می‌دهد که الگوی عددی ارائه شده به خوبی قادر به شبیه‌سازی ناپیوستگی عمق در جبهه‌ی اُشترک می‌باشد. در شکل (۳- ب) روند افزایش دقت مدل با زیاد شدن تعداد سلول‌های محاسباتی به‌روشنی قابل مشاهده است. هم‌چنین نتایج شبیه‌سازی سرعت جریان در زمان $t = 1.0\ s$ در شکل(۳- ج) با جواب تحلیلی مقایسه شده است. تطابق میان نتایج این آزمون و حل تحلیلی، تأکیدی بر ویژگی تسخیر شوک مدل ارائه‌شده می‌باشد.



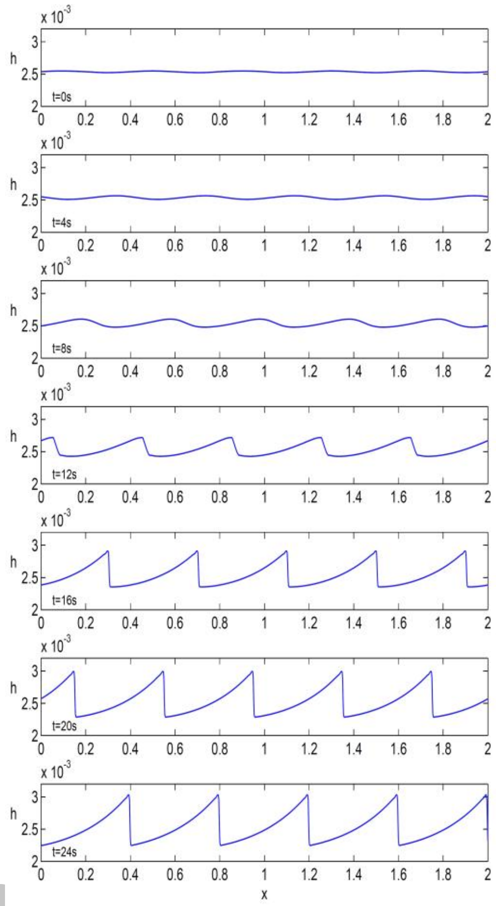
شکل ۳ الف: نیمرخ طولی موج ناشی از شکست سد، ب: جزئیات جبهه‌ی موج، ج: سرعت جریان در زمان $t = 1.0s$

شبیه‌سازی موج غلتشی

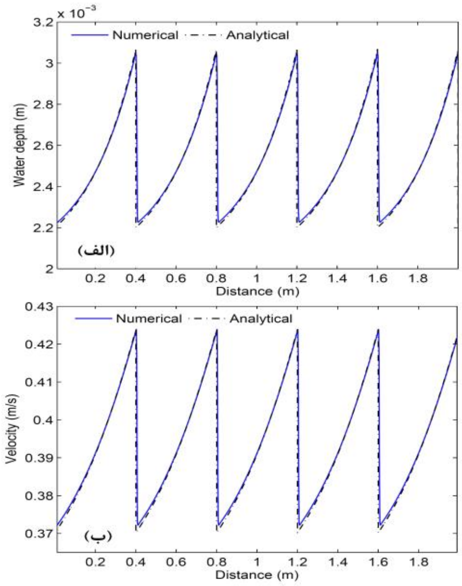
در این بخش الگوی عددی پیشنهادی برای مدل‌سازی فرآیند تکامل اغتشاش و ایجاد موج غلتشی مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک جریان دائم یکنواخت با شرایط $F_0 = 2.5$ ، $q_0 = 0.001\,m^2s^{-1}$ و $C_f = 0.006$ ، در لحظه‌ی $t = 0$ تحت اغتشاشی با مشخصات $k_w = 10\pi$ و $\varepsilon = 0.005$ قرار دارد. شیب بستر بنا بر رابطه‌ی (۱۵) برابر با $S_0 = 0.0375$ محاسبه گردیده و دامنه‌ی محاسباتی به طول $L = 2.0\,m$ با اختصاص $x_L = 0$ و $x_R = 2.0\,m$ تعریف می‌شود. در شکل(۴)، تکامل این اغتشاش و روند شکل‌گیری موج غلتشی در زمان‌های مختلف به تصویر کشیده شده است. پس از گذشت زمان موج به تکامل نهایی خود رسیده و قطار موج متشکل از پنج موج متوالی، بدون تغییر شکل با سرعت ثابت در طول آبراهه به پایین دست انتشار می‌یابد. نیم‌رخ این قطار موج و سرعت جریان در شکل(۵) با حل تحلیلی ارائه‌شده در [13] مقایسه شده‌اند. بیشینه خطای محاسباتی (یعنی: $\max\left(\left|h_{numerical} - h_{analytical}\right| / h_{analytical}\right)$) در حضیض موج رخ می‌دهد و برابر با ۰/۷٪ می‌باشد.

همان‌طور که در بخش مقدمه بیان شد، شکل‌گیری امواج غلتشی با تغییرات متوالی رژیم جریان در طول آبراهه همراه است. تحت همان شرایط جریان و اغتشاش پیشین، چنانچه ناظری با سرعت موج غلتشی با جریان حرکت نماید، عدد فرود جریان از دیدگاه وی مطابق با آن‌چه که در شکل (۶) به تصویر کشیده شده تغییر می‌نماید. تحت شرایط مذکور، سرعت ثابت حرکت موج غلتشی برابر با $c = 0.55\,ms^{-1}$ می‌باشد. هم‌چنین نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد فرود جریان اولیه F_0 ، عدد فرود از دیدگاه ناظر متحرک $F_{mr} = (c-u)/\sqrt{gh}$ در محدوده‌ی وسیع‌تری تغییر می‌نماید (شکل۷). دلیل این امر این است که افزایش F_0 سبب افزایش F_{mr} فوق بحرانی ($F_{mr}(max)$ در شکل ۷) و نیروی مخصوص (specific force) قبل از پرش هیدرولیکی می‌گردد و این عامل به کاهش عمق جریان فوق بحرانی قبل از پرش می‌انجامد. به همین منظور بایستی نیروی مخصوص بعد از پرش نیز افزایش یابد تا تعادل نیروی مخصوص (با احتساب نیروی اصطکاک بستر) برقرار گردد. به‌روشنی افزایش نیروی مخصوص بعد از پرش سبب می‌شود که جریان زیر بحرانی عمق بیشتر و عدد F_{mr} کمتری را تجربه نماید ($F_{mr}(min)$ در شکل ۷). همان‌گونه که نتایج نشان می‌دهد برای حالت آستانه رخداد موج غلتشی، جریان از دیدگاه ناظر متحرک، بحرانی ($F_{mr}(min) = F_{mr}(max) = 1$) خواهد بود.

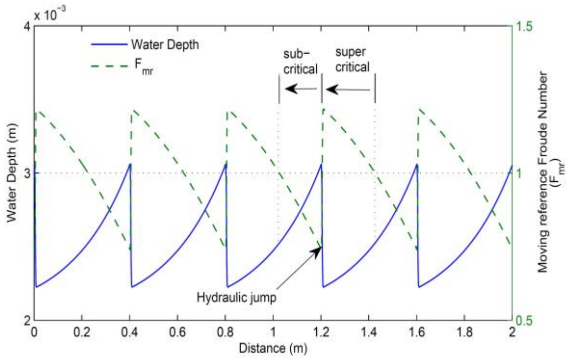
مقایسه‌ی تاریخچه‌ی زمانی عمق و سرعت جریان در وسط آبراهه ($x = 1.0\,m$) در شکل(۸) حاکی از تطابق رضایت‌بخش نتایج مدل حاضر با نتایج مدل Que and Xu [20] می‌باشد. هم‌چنین این محققان با فرض تغییرات نمایی دامنه‌ی اغتشاش، یک رابطه‌ی لگاریتمی برای رشد و زوال دامنه‌ی موج به‌دست آوردند که در محدوده‌ی خطی صادق است و لگاریتم طبیعی دامنه‌ی موج را به‌صورت تابعی خطی از زمان بیان می‌کند. با این وجود، با گذشت زمان و اهمیت یافتن اثرات غیرخطی، رشد دامنه‌ی موج کُند می‌گردد و در نهایت متوقف می‌شود. این موضوع در شکل(۹)، که لگاریتم طبیعی دامنه‌ی موج بر حسب زمان برای اعداد فرود مختلف را نشان می‌دهد، به‌خوبی نمایان است. شرایط جریان و اغتشاش درست مانند حالت قبل در نظر گرفته شده‌اند. در زمان‌های اولیه، تغییرات زمانی دامنه‌ی موج تطابقی قابل قبول با رابطه‌ی تحلیلی ارائه شده در [20] نشان می‌دهد، حال آن‌که با گذشت زمان دامنه موج به مقدار ثابتی می‌رسد. بازه‌ی زمانی بروز رفتار خطی موج با کاهش عدد فرود جریان یکنواخت، طولانی‌تر می‌شود. برای فراهم آوردن امکان مقایسه در ناحیه‌ی غیرخطی، نتایج مدل BGK نیز در شکل (۹) آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر دو مدل در پیش‌بینی دامنه موج تکامل‌یافته برای اعداد فرود مختلف جواب‌های یکسانی به‌دست داده‌اند.



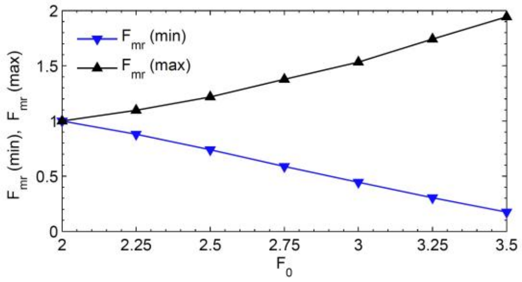
شکل ۴ تکامل زمانی نیم‌رخ موج غلتشی برای جریان و اغتشاشی با مشخصات: $F_0 = 2.5$، $q_0 = 0.001\ m^2s^{-1}$، $C_f = 0.006$، $k_w = 10\pi$ و $\varepsilon = 0.005$ (محورها بر حسب متر می‌باشند)



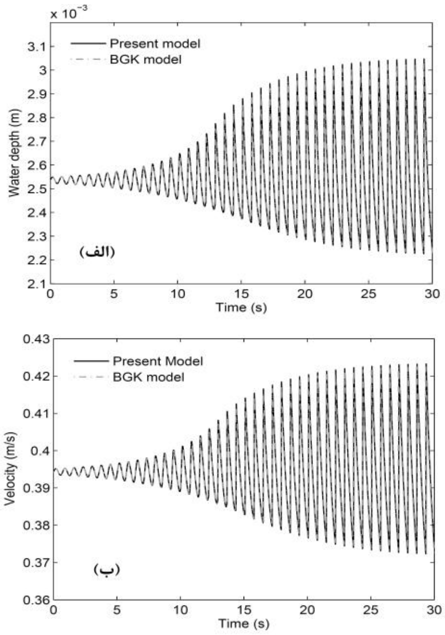
شکل ۵ مقایسه‌ی نتایج مدل عددی و حل تحلیلی [13] برای (الف): نیم‌رخ سطح آزاد و (ب): سرعت جریان در طول آبراهه



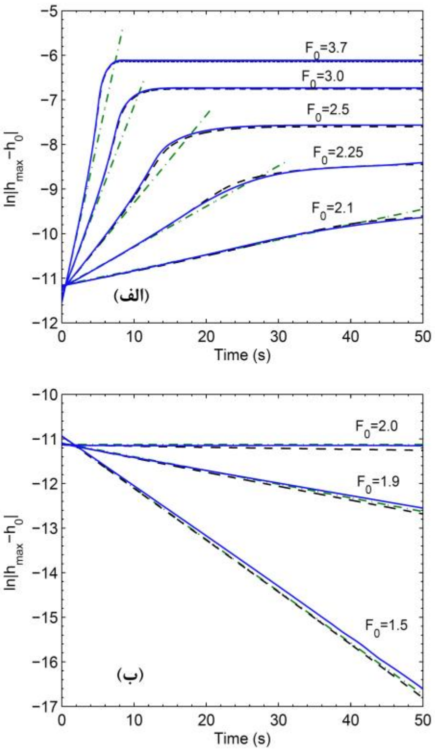
شکل ۶ نیم‌رخ موج غلتشی و عدد فرود جریان محاسبه‌شده در چارچوب متحرک متصل به موج غلتشی



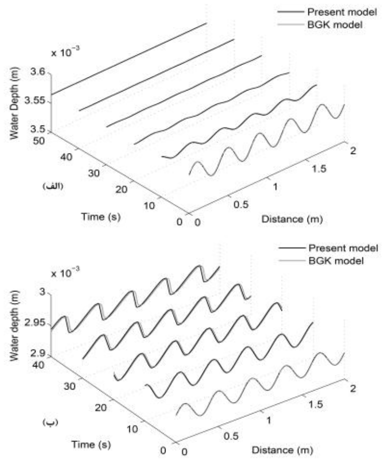
شکل ۷ بیشینه و کمینه عدد فرود جریان محاسبه‌شده در چارچوب متحرک متصل به موج غلتشی به‌عنوان تابعی از عدد فرود جریان یکنواخت



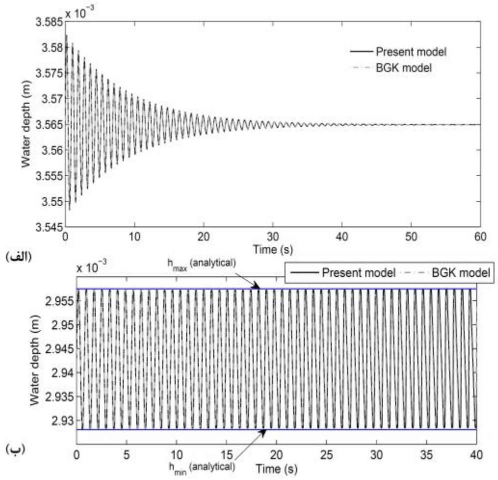
شکل ۸ مقایسه‌ی نتایج مدل عددی حاضر و الگوی BGK برای (الف): تاریخچه‌ی زمانی عمق جریان و (ب): تغییرات زمانی سرعت جریان در وسط آبراهه‌ای به طول $L = 2.0\ m$



شکل ۹ الف و ب : لگاریتم طبیعی دامنه‌ی موج به‌عنوان تابعی از زمان برای اعداد فرود مختلف و پارامترهای: $k_w = 10\pi$ ، $C_f = 0.006$ ، $q_0 = 0.001\ m^2s^{-1}$ و $\varepsilon = 0.005$ [(—): مدل عددی حاضر، (-•-): رابطه‌ی تحلیلی و (– –): مدل عددی BGK]



شکل ۱۰ نیم‌رخ سطح آزاد در طول آبراهه به‌صورت تابعی از زمان و مقایسه‌ی آن با مدل BGK. (الف): اضمحلال اغتشاش برای $F_0 = 1.5$ و (ب): آستانه‌ی رخداد موج غلتشی در $F_0 = 2$



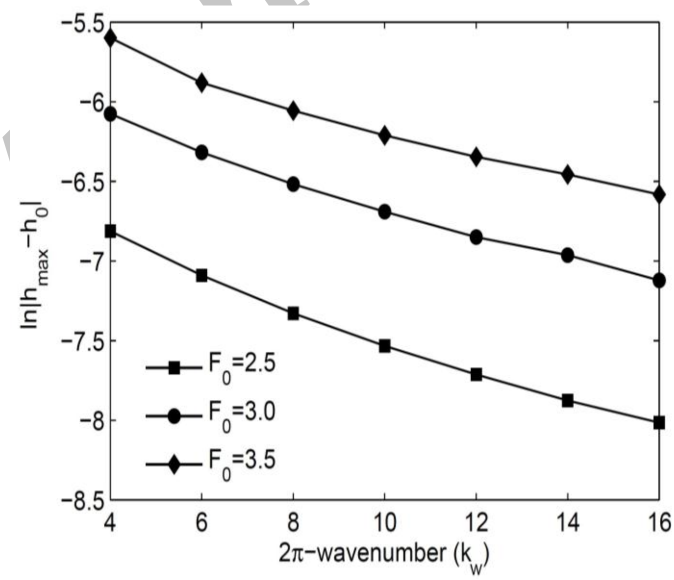
شکل ۱۱ مقایسه‌ی نتایج مدل حاضر و الگوی BGK برای تاریخچه‌ی زمانی عمق جریان در وسط آبراهه. (الف): $F_0 = 1.5$ ، (ب): $F_0 = 2$

در حالت حدی $F_0 = 2$ که آستانه‌ی رخداد موج غلتشی به‌شمار می‌رود، همان‌گونه که انتظار می‌رود هیچ‌گونه تغییری در دامنه‌ی موج شبیه‌سازی شده به‌وجود نیامده است. هم‌چنین برای اعداد فرود کوچک‌تر از این مقدار حدی، تغییرات دامنه‌ی موج نسبت به زمان دارای سیری نزولی می‌باشد. این زوال دامنه به همراه آستانه‌ی رخداد موج غلتشی در شکل (۱۰) در قالب نیم‌رخ‌های سطح آزاد جریان به‌تصویر کشیده شده‌اند. به‌روشنی در حالت $F_0 = 1.5$ ، همان‌طور که شرایط جریان پایدار ایجاب می‌نماید، دامنه‌ی اغتشاش با گذشت زمان مستهلک گشته و از بین رفته است (شکل ۱۰-الف). حال آن‌که برای $F_0 = 2$ ، هرچند تقارن اولیه‌ی موج تاحدودی دست‌خوش تغییر گردیده است (این موضوع در نتایج مدل BGK نیز دیده می‌شود)، نیم‌رخی با دامنه‌ی ثابت نسبت به زمان مشاهده می‌شود (شکل ۱۰- ب). برای حالات نشان داده شده در شکل (۱۰)، تغییرات زمانی عمق جریان در وسط آبراهه با آن‌چه که مدل BGK به‌دست داده است، در شکل (۱۱) مقایسه گردیده است. برای حالت $F_0 = 1.5$ این دو الگو زوال دامنه‌ی

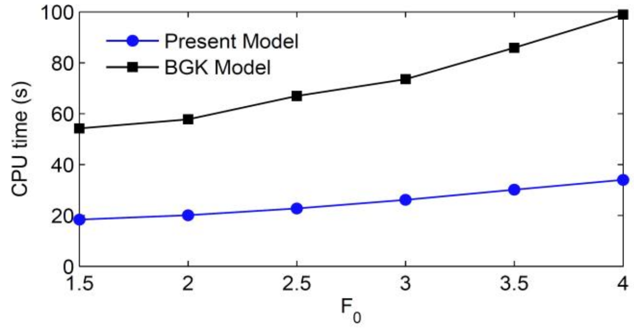
اغتشاش را با روندی مشابه و تطابقی قابل قبول پیش‌بینی کرده‌اند (شکل ۱۱- الف). دو خط افقی بالا و پایین در شکل (۱۱- ب) بیشینه و کمینه‌ی عمق را مطابق با دیدگاه نظری نشان می‌دهند. بر این اساس، بیشینه و کمینه‌ی عمق برای آستانه‌ی رخداد موج غلتشی به‌ترتیب با روابط $h_{max} = (1+\varepsilon)h_0$ و $h_{min} = (1-\varepsilon)h_0$ قابل بیان می‌باشند. همان‌طور که در شکل (۱۱- ب) مشاهده می‌شود، مدل حاضر عدم رشد و عدم زوال دامنه (دامنه ثابت) برای آستانه‌ی رخداد موج غلتشی را تا حدودی به‌تر شبیه‌سازی نموده است.

شکل (۱۲) لگاریتم طبیعی دامنه‌ی موج بر حسب پارامتر k_w (حاصل‌ضرب عدد موج در عدد 2π) برای اعداد فرود مختلف را نشان می‌دهد. نتایج حاکی از آن است که به‌ازای هر عدد فرود ثابت، افزایش k_w با کاهش دامنه‌ی موج همراه است. شایان ذکر است که افزایش عدد موج به‌معنی کاهش طول موج می‌باشد. علاوه بر این، به‌ازای هر k_w ثابت، افزایش عدد فرود سبب افزایش دامنه‌ی موج غلتشی گردیده است.

Lukáčová-Medviďová and Teschke (2006) ضمن انجام مقایسه بین الگوهای مختلف حل عددی معادلات آب کم‌عمق بر اهمیت زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات رایانه‌ای (زمان پردازنده‌ی مرکزی: CPU time) تأکید و از آن به‌عنوان معیاری جهت ارزیابی بهینه بودن مدل عددی یاد کردند [26]. به‌همین منظور در این مطالعه مقایسه‌ای میان زمان پردازنده‌ی مرکزی مدل حاضر و مدل BGK تحت شرایط مشابه جریان صورت پذیرفت. برای انجام این مقایسه ۵۰ ثانیه از جریان با استفاده از ۱۰۰۰ سلول محاسباتی و عدد CFL برابر با $C_n = 0.65$ توسط این دو مدل بر روی رایانه‌ای با پردازنده‌ی مرکزی 3.20 GHz شبیه‌سازی گردید. برنامه‌ها تحت شرایطی یکسان در محیط FORTRAN 90 اجرا شدند. همان‌طور که نتایج این مقایسه در شکل (۱۳) نشان می‌دهد، الگوی پیشنهادی در این مطالعه به زمان اجرایی حدوداً یک‌سوم زمان اجرای مدل BGK برای حل مسائل مشابه احتیاج دارد.



شکل ۱۲ لگاریتم طبیعی دامنه‌ی موج به‌عنوان تابعی از k_w برای اعداد فرود مختلف



شکل ۱۳ زمان مصرفی پردازنده‌ی مرکزی جهت شبیه‌سازی پنجاه ثانیه از جریان برای اعداد مختلف فرود اولیه با استفاده از مدل حاضر و الگوی BGK

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مدل عددی ارائه شده در این مطالعه، از الگوی شار متوسط وزن‌دار برای تخمین شار عددی و یک الگوی ضمنی برای پیاده‌سازی عبارت چشمه در معادلات یک‌بعدی آب کم‌عمق در حالت پایستار بهره می‌برد. مدل توسعه‌یافته بدون نیاز به هرگونه عبارت اضافی نظیر لزجت مصنوعی، که تعیین آن معمولاً با سعی و خطا توأم است، قادر است که هر گونه ناپیوستگی در متغیرهای جریان را به‌نحوی مؤثر در تعداد نسبتاً کمی سلول محاسباتی حل نماید. طرح یک مسأله‌ی کلاسیک شکست سد و مقایسه‌ی نتایج مدل با حل تحلیلی موجود نشان داد که علاوه بر سرعت جریان، هم جبهه قائم موج اُشترک و هم نواحی ملایم نیم‌رخ موج منفی به خوبی شبیه‌سازی گردیده‌اند. بررسی فرآیند تکامل اغتشاش و شکل‌گیری موج غلتشی در چارچوب یک مسأله مقدار اولیه و مقایسه نتایج حاصل با حل تحلیلی موجود، حاکی از توانایی الگوی پیشنهادی در مدل سازی عمق و سرعت جریان می‌باشد. شبیه‌سازی جریان برای مقدار آستانه‌ی رخداد ناپایداری، به ایجاد نیم‌رخی بدون رشد در دامنه انجامید و این در حالی‌است که برای اعداد فرود کوچک‌تر از مقدار آستانه، اغتشاش به‌طور کامل از بین رفته و جریان پایداری خود را حفظ می‌کند.

چگونگی تغییرات لگاریتم طبیعی دامنه‌ی موج نسبت به پارامتر k_w (حاصل‌ضرب عدد موج در عدد 2π) بررسی گردید و نشان داده شد که به‌ازای هر عدد فرود ثابت با افزایش طول موج غلتشی دامنه‌ی موج نیز افزایش می‌یابد. علاوه بر آن، نتایج حاکی از آن است که با افزایش عدد فرود جریان اولیه F_0، عدد فرود از دیدگاه ناظر متحرک F_{mr} در محدوده‌ای گسترده‌تر تغییر می‌نماید که این به‌معنی عمیق‌تر شدن حضیض موج و افزایش ارتفاع قله‌ی موج است. دو موضوع اخیر در متون علمی پیشین کم‌تر مورد اشاره قرار گرفته است.

استفاده از الگوی حاضر و الگوی BGK برای بررسی تغییرات زمانی دامنه‌ی موج حاکی از تطابق نتایج این دو الگو برای اعداد فرود مختلف می‌باشد. این در حالی‌است که الگوی پیشنهادی در پیاده‌سازی رایانه‌ای بسیار ساده‌تر است و برای شبیه‌سازی یک جریان حاوی ناپیوستگی نظیر امواج غلتشی به زمان محاسباتی نسبتاً ناچیزی نیاز دارد.

سپاسگزاری

بدین‌وسیله نویسندگان مقاله از آقای Que Yin-Tik و پروفسور Kun Xu از دانشگاه علم و فناوری هونگ کنگ (HKUST) به خاطر در اختیار گذاشتن مدل عددی BGK قدردانی می‌نمایند.

پیوست الف: استخراج رابطه‌ی عملگر چشمه

در این قسمت چگونگی به‌دست آوردن رابطه‌ی عملگر چشمه رابطه‌ی (۱۳) تشریح می‌گردد. این عملگر ضمنی برای حل معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{S}(\mathbf{V})$ با شرط اولیه $V = V^n$ به‌کار می‌رود. برای نیل به این هدف در اولین گام، عبارت چشمه به‌کمک بسط تیلور تقریب زده می‌شود:

$$S(V_i^{(1)}) = S(V_i^n) + \left(\frac{\partial S(V)}{\partial t}\right)_i^n \Delta t' + O(\Delta t')^2 \quad \text{(الف–۱)}$$

از طرفی به‌کمک قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial S(V)}{\partial t} = \frac{\partial S(V)}{\partial V} \times \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{(الف–۲)}$$

در رابطه‌ی فوق $\partial\mathbf{S}(\mathbf{V})/\partial\mathbf{V}$، ماتریس ژاکوبین بردار چشمه است که با رابطه‌ی (الف–۳) محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial S(V)}{\partial V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ gS_0 & -\dfrac{2C_f u}{h} \end{bmatrix} \quad \text{(الف–۳)}$$

مشتق زمانی بردار متغیر پایستار با استفاده از روش تفاضل محدود قابل محاسبه است:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_i^{(1)} - V_i^n}{\Delta t'} \quad \text{(الف–۴)}$$

با معرفی $\Delta\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i^{(1)} - \mathbf{V}_i^n$ و جایگذاری روابط (الف–۲) و (الف–۴) در رابطه (الف–۱)، بسط تیلور عبارت چشمه به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$S(V_i^{(1)}) = S(V_i^n) + \left(\frac{\partial S(V)}{\partial V}\right)_i^n \Delta V_i + O(\Delta t')^2 \quad \text{(الف–۵)}$$

در همین حال طبق قاعده‌ی انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای می‌توان نوشت:

$$\mathbf{V}_i^{(1)} = \mathbf{V}_i^n + \frac{\Delta t'}{2}\left[\mathbf{S}(\mathbf{V}_i^{(1)}) + \mathbf{S}(\mathbf{V}_i^n)\right] \quad \text{(الف–۶)}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (الف–۵) در رابطه‌ی (الف–۶) و پس از اندکی عملیات جبری، عملگر چشمه برای معادله‌ی اول از دستگاه معادلات (۱۲) حاصل می‌گردد:

$$\left[\mathbf{I} - \frac{\Delta t'}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}}\right)_i^n\right]\Delta\mathbf{V}_i = \Delta t'\mathbf{S}(\mathbf{V}_i^n) \quad \text{(الف–۷)}$$

که در آن $\mathbf{I}$ ماتریس واحد می‌باشد.

مراجع

1. Brock, R. R., "Development of roll-wave trains in open channels", *J. Hydraul. Div.*, 95(4), pp. 1401–1427, (1969).
2. Montes, S., "Hydraulics of Open Channel Flow", ASCE Press, USA, (1998).
3. Balmforth, N. J. and Mandre, S., "Dynamics of roll waves" *J. Fluid Mech*., 514, pp. 1–33, (2004).
4. Woods, B. D., Hurlburt, E. T., and Hanratty, T. J., "Mechanism of slug formation in downwardly inclined pipes" , *Intl. J. Multiphase Flow*, 26, pp. 977–99, (2000).
5. Engelund, F. and Zhaohui, W., "Instability of hyperconcentrated flow", *J. Hydraul. Eng.*, 110(3), pp. 219–233, (1984).
6. Pedley, T. J., "The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels", Cambridge University Press, UK, (1980).

7. Benjamin, T. B., "Wave formation in laminar flow down an inclined plane", *J. Fluid Mech.*, 2, pp. 554–573, (1957).
8. Yih, C. S., "Stability of liquid flow down an inclined plane", *Phys. Fluids*, 6(3), pp. 321–334, (1963).
9. Stoker, J. J., "Water Waves: The Mathematical Theory with Applications", Interscience, New York, (1957).
10. Cornish, V., "Ocean Waves and Kindred Geophysical Phenomena", Cambridge University Press, London, (1934).
11. Thomas, H. A., "The propagation of stable wave configurations in steep channels", Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, (1937).
12. Rouse, H., "Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers", McGraw-Hill, New York, (1938).
13. Dressler, R. F., "Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined channel flows", *Commun. Pure Appl. Maths*, 2, pp. 149–194, (1949).
14. Yoon, Y.N. and Wenzel Jr., H.G., "Mechanics of sheet flow under simulated rainfall", *J. Hydraul. Div.*, 97(9), pp. 1367–1386, (1971).
15. Emmett, W. W., "Overland flow", Hillslope Hydrology, Kirkby, M. J. (editor), Wiley, New York, pp. 145–175, (1978).
16. Thomas, H. A., "The propagation of waves in steep prismatic conduits", *Proc. Hydraulics Conf.*, Univ. of Iowa, pp. 214–229, (1939).
17. Brock, R. R., "Periodic permanent roll waves", *J. Hydraul. Div.*, 96(12), pp. 2565–2580, (1970).
18. Liu, Q. Q., Chen, L., Li, J. C., and Singh, V. P., "Roll waves in overland flow", *J. Hydrol. Eng*., 10(2), pp. 110-117, (2005).
19. Bohorquez, P., "Roll waves in floods on inclines", *Proc. Numerical Modelling of Hydrodynamics for Water Resources*, Garcia-Navarro, P., Playan, E. (editors), pp. 361–366, (2007).
20. Que, Y.-T. and Xu, K., "The numerical study of roll-waves in inclined open channels and solitary wave run-up", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 50(9), pp. 1003–1027, (2006).
21. Toro, E.F., "Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows", Wiley, Chichester, UK, (2001).
22. Brook, B. S., Falle, S. A. E. G., and Pedley, T. J., "Numerical solutions for unsteady gravity-driven flows in collapsible tubes: evolution and roll-wave instability of a steady state", *J. Fluid Mech*., 396, pp. 223–256, (1999).
23. Toro, E. F., "Riemann problems and the WAF method for solving the two-dimensional shallow water equations", *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 338, pp. 43–68, (1992).
24. Mahdavi, A. and Talebbeydokhti, N., "Modeling of non-breaking and breaking solitary wave run-up using shock-capturing TVD-WAF scheme", *KSCE J. Civil Eng.*, 15(6), pp. 945–955, (2011).

25. Zanuttigh, B. and Lamberti, A., "Roll waves simulation using shallow water equations and weighted average flux method", *J. Hydraulic Res*., 40(5), pp. 610–622, (2002).

26. Lukáčová-Medviďová, M. and Teschke, U., "Comparison study of some finite volume and finite element methods for the shallow water equations with bottom topography and friction terms", *ZAMM J. Applied Math. Mech*., 86(11), pp. 874–891, (2006).