

مقایسه و دقت‌سنجی روش قطعات افقی و قائم در تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی*

مهدی خداپرست^(۱) مجتبی خاشعی^(۲) رضامحمد مومنی^(۳)

چکیده تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی، یکی از مباحث مهم در طراحی سدهای خاکی، راه‌ها، کانال‌ها و خاک‌ریزها است. یکی از روش‌های تحلیل پایداری شیروانی خاکی، تحلیل حدی با استفاده از روش قطعات افقی و قائم است. در پژوهش حاضر، به منظور بررسی نتایج حاصل از روش قطعات افقی و قائم، ابتدا دو فرمول‌بندی از هر روش انتخاب، سپس ضریب اطمینان پایداری شیروانی با استفاده از روش‌های مذکور برای تعدادی شیروانی محاسبه شده است. در ادامه با توجه به مقدار دقیق ضریب اطمینان پایداری، دقت‌سنجی روش‌های مذکور و مقایسه نتایج آنها با یکدیگر انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که مقادیر ضریب اطمینان روش قطعات قائم دقیق‌تر و با اندکی حاشیه اطمینان است در حالی که نتایج حاصل از روش قطعات افقی وابستگی زیادی به نوع فرمول‌بندی دارد. در مواردی که خاک دارای لایه‌بندی افقی است و یا در مسائل با نیروهای افقی، روش قطعات افقی سهولت بیشتری برای استفاده فراهم می‌نماید. در انتها پیشنهادهایی برای استفاده از روش قطعات ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی شیروانی خاکی، تحلیل پایداری، ضریب اطمینان پایداری، روش قطعات افقی، روش قطعات قائم، دقت‌سنجی.

Horizontal and Vertical Slices Method, Compare and Evaluation of Exactitude of in Soil Slope Stability Analysis

M. Khodaparast

M. Khashei

R. M. Momeni

Abstract Soil slope stability analysis, is one of the most important issues in the design of earth dams, roads, canals and levee. One of these methods is the limit equilibrium analysis with horizontal and vertical slices method. To evaluate the results of horizontal and vertical slice method in the calculation of stability safety factor, at first Two formulations of each method selected, then stability Safety factor has been achieved with the use of these methods for several slopes. The exact amount of stability safety factor by using of the analytical method has been obtained then the accuracy of the each method and comparison of their results with each other is studied. Considering studies at this research, concludes that at generally vertical slices method results exact and with a few confidence rand. Whereas horizontal slices method results have a relationship with selected formulation. In cases where the soil is layered horizontal or issues with horizontal forces, horizontal slices method provide greater ease of use. Finally, explained recommendations for using slice method.

Key Words Soil slope, Stability analysis, Safety factor of stability, Horizontal slices method, Vertical slices method, Evaluation of exactitude.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۶/۴ تاریخ پذیرش آن ۹۶/۹/۲۱ می‌باشد.

Email: Khodaparast@qom.ac.ir

(۱) نویسنده مسئول، دانشیار دانشگاه قم، دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی عمران.

(۲) کارشناس ارشد، دانشگاه قم، دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی عمران.

(۳) دانشجوی دکتری دانشگاه قم، دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی عمران.

مقدمه

تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی، یکی از مباحث مهم در طراحی سدهای خاکی، راه‌ها، کانال‌ها و خاک‌ریزها است. مسئله مهم دیگر در طراحی شیروانی خاکی بهینه بودن طرح از نظر اقتصادی است. در صورتی که در مراحل طراحی ضرایب اطمینان بالایی برای شیروانی اعمال شود، می‌تواند در هزینه نهایی پروژه تأثیر قابل توجهی داشته باشد که در مورد یک سد خاکی با حجم بسیار بالای عملیات خاکی، این مسئله اهمیت بیشتری خواهد داشت. بر این اساس بایستی روش‌هایی برای تحلیل پایداری شیروانی انتخاب شوند که هم از نقطه نظر پایداری و هم از نظر اقتصادی قابل توجه باشند.

برای محاسبات پایداری شیروانی‌های خاکی روش‌های زیادی وجود دارد که ممکن است نتایج حاصل از این روش‌ها در مقایسه با هم تفاوت‌هایی نیز داشته باشند. یکی از روش‌های متداول، تحلیل حدی شیروانی‌های خاکی با استفاده از روش قطعات است. این روش با فرض این که شیروانی مورد نظر در آستانه لغزش قرار دارد، نیرو و لنگرهای مقاوم و محرک را برای به دست آوردن ضریب اطمینان پایداری شیروانی بررسی می‌کند. در این روش با در نظر گرفتن یک گوه لغزش فرضی و تقسیم آن به تعدادی قطعه کوچک‌تر، اثر نیروهای مقاوم و محرک بر روی هر یک از قطعات بررسی می‌شود و در نهایت با روی هم گذاری اثرات آنها، ضریب اطمینان پایداری شیب برای کل سطح لغزش محاسبه می‌شود. در این حالت بسته به این که قطعات مورد نظر قائم یا افقی در نظر گرفته شوند روش محاسبه و فرمول بندی متفاوت خواهد بود.

در گذشته در ارتباط با مبانی و فرمول بندی روش قطعات افقی و قائم تحقیقاتی انجام شده است که در ادامه مختصری از هر یک بیان می‌شود.

پژوهش انجام شده توسط شاهقلی و فاخر [1] منجر به معرفی و ارائه فرمول بندی روش قطعات افقی با استفاده از معادلات تعادل حدی شده است. در این مقاله ابتدا روی روش قطعات قائم، مجهولات روابط تعادل و روش‌های مختلف تعادل حدی (فلنیوس، بیشاپ و...) بحث

شده است و در ادامه روی روش قطعات افقی و روش‌های فرمول بندی $4N$ برای تعادل کلی و $2N+1$ روی نیروهای افقی بحث شده است.

نوری و فاخر [2] در پژوهشی با استفاده از روش قطعات افقی به بررسی پایداری شیروانی‌های خاکی مسلح حین زلزله پرداخته‌اند. در این تحقیق بر اساس نوع و تعداد معادلاتی که ارضا می‌شوند و نیز فرضیات ساده کننده‌ای که برای حل دستگاه معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرند، توسعه روش قطعات افقی با ۵ فرمول بندی ارائه شده است که شامل یک فرمول بندی ساده با ارضای تعادل لنگر $(2N+1)$ (N تعداد قطعات مورد استفاده در تحلیل پایداری شیروانی)، دو فرمول بندی نسبتاً کامل تر با ارضای تعادل نیروهای افقی و لنگر نیروها $(3N, 4N)$ یک فرمول بندی نسبتاً کامل $(5N-1)$ و یک فرمول بندی برای بررسی مسئله گسیختگی پیش رونده است، سپس با استفاده از زبان برنامه نویسی فترن برنامه‌ای برای هر کدام از فرمول بندی‌ها نوشته شده و برای یک شیب با مشخصات معین نتایج حاصل از هر کدام از فرمول بندی‌ها با نتایج حاصل از سه روش معتبر دیگر در حالت تعادل حدی مقایسه شده است.

فاخر و سربیشه‌ای [3] تحقیقی روی معادلات حاکم بر روش قطعات افقی بر حسب روابط انرژی برای به دست آوردن توزیع شتاب افقی و نیروهای مسلح کننده‌ها در ارتفاع شیب‌های خاکی مسلح تحت شتاب زلزله انجام داده‌اند و در آن فرکانس پایه شیب مسلح نیز بررسی شده است.

حاجی عزیزی و همکاران [۴] در پژوهشی با استفاده از روش تعادل حدی و با فرض سطح گسیختگی دایره‌ای و غیردایره‌ای و نیز قطعاتی در امتداد شعاع سطح لغزش و یا امتدادی که به یک نقطه همگرا می‌شوند، معادلات تعادل نیروها و گشتاور را بدون هیچ گونه فرض ساده کننده‌ای به کار گرفته‌اند. در نظر گرفتن شکل قطعات به صورت قطاع، نوآوری تحقیق یاد شده است که موجب حذف شدن فرضیات متداول در روش تعادل حدی می‌شود، در نتیجه مقدار ضریب اطمینان با دقت بیشتری محاسبه شده است که مقدار آن نسبت به روش‌های دیگر

بیشتر است. زیرین به‌طور فراوانی با لایه‌ی رویی تفاوت داشته باشد رخ می‌دهند، همچنین لغزش‌های انتقالی در شرایطی که لایه‌ی زیرین در عمق کمی از سطح شیب‌دار قرار گرفته باشد محتمل می‌باشند.

برای حل مسائل عملی، استفاده از روش‌های مبتنی بر تعادل حدی متداول است. در این حالت با فرض این‌که ناپایداری خاک در آستانه‌ی وقوع است، از نسبت لنگر مقاوم به لنگر محرک، نیروی مقاوم به نیروی محرک و یا تنش مقاوم به تنش محرک (بسته به شرایط مسئله) برای محاسبه‌ی ضریب اطمینان در برابر ناپایداری سطوح گسیختگی فرضی استفاده می‌شود. از بین سطوح گسیختگی فرضی سطحی که ضریب اطمینان کمتری در مقابل لغزش داشته باشد، سطح گسیختگی احتمالی خواهد بود.

روش‌های محاسبه‌ی پایداری شیروانی خاکی

روش‌های متعددی برای محاسبه‌ی پایداری شیروانی‌های خاکی وجود دارد که باتوجه به شرایط مسئله و محدودیت‌های هر روش می‌توان مناسب‌ترین روش را انتخاب کرد. ازجمله این روش‌ها می‌توان به روش ساده برای خاک‌های چسبنده، روش قطعات قائم، روش قطعات افقی و غیره اشاره کرد که در ادامه به تشریح آنها پرداخته شده‌است.

روش ساده برای خاک‌های چسبنده. در این روش حل مسئله براساس تنش کل است؛ یعنی فرض بر این است که خاک صددرصد اشباع است و زهکشی نمی‌شود. این حالت به‌خصوص در کانال‌های خاکی آبیاری و یا سدهای خاکی که سطح آب به‌طور ناگهانی فروکش نماید اتفاق می‌افتد؛ زیرا با فروکش کردن ناگهانی سطح آب، آب فرصت زهکشی ندارد و می‌توان از روش ساده برای خاک‌های چسبنده ($\phi=0$)، ضریب اطمینان در مقابل لغزش را محاسبه نمود.

در این حالت ضریب اطمینان سطح لغزش برابر است با [۵ و ۶]:

در گذشته، درزمینه‌ی توسعه‌ی فرمول‌بندی روش قطعات افقی و نیز کاربرد آن در تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی پژوهش‌هایی صورت گرفته‌است. لیکن درزمینه‌ی مقایسه و دقت‌سنجی این روش با سایر روش‌ها ازجمله روش قطعات قائم پژوهش‌های کافی انجام نشده‌است. هدف اصلی پژوهش حاضر مقایسه‌ی نتایج تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی با استفاده از روش قطعات افقی و قائم و دقت‌سنجی هریک از این روش‌ها است. بر این اساس پژوهش در گام‌های زیر دنبال شده‌است:

گام اول: در این مرحله از روش قطعات افقی دو فرمول‌بندی $2N$ و $2N+1$ و از روش قطعات قائم، دو روش فلنیوس و بیشاپ به نمایندگی انتخاب شده‌اند و برنامه‌ای با استفاده از نرم‌افزار اکسل برای محاسبه‌ی ضریب اطمینان این روش‌ها نوشته می‌شود.

گام دوم: در این مرحله با انجام مطالعه‌ی موردی بر روی چند شیروانی با مشخصات هندسی و ژئوتکنیکی مشخص، ضرایب اطمینان پایداری حاصل از دو روش در حالت‌های مختلف بررسی می‌گردد.

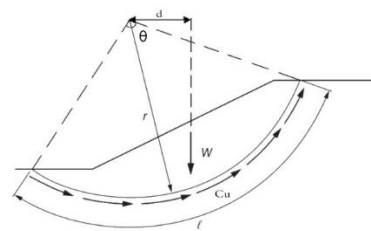
گام سوم: در این مرحله باتوجه به مقادیر دقیق ضرایب اطمینان، نتایج قطعات افقی و قائم با یکدیگر و نیز با مقادیر دقیق مقایسه می‌شوند.

مبانی محاسبات پایداری شیروانی‌های خاکی

به‌طور کلی در طراحی شیروانی‌های خاکی باید ضریب اطمینان کافی برای پایداری شیروانی و نیز اقتصادی بودن طرح مدنظر قرار گیرد. نیروهای ثقیلی و تراوش مهم‌ترین عامل اصلی برهم‌زننده‌ی پایداری شیب‌های طبیعی و غیرطبیعی می‌باشند. متداول‌ترین گسیختگی خاک در شیب‌ها عبارت‌اند از: ۱- لغزش چرخشی، ۲- لغزش انتقالی و ۳- لغزش مرکب. در لغزش‌های چرخشی سطح گسیختگی ممکن است دایره‌ای یا غیردایره‌ای باشد (لغزش‌های دایره‌ای در خاک‌های همگن و لغزش‌های غیردایره‌ای در خاک‌های غیرهمگن رخ می‌دهد). لغزش‌های انتقالی و مرکب در صورتی که مقاومت لایه‌ی

شده است.

$$F = \frac{M_r}{M_d} = \frac{C_u \times l \times r}{W \times d} = \frac{C_u \times r^2 \times \theta}{W \times d} \quad (1)$$



شکل ۱ روش ساده برای خاک رسی همگن ($\phi=0$)

راه حل فلنیوس. در این روش سطح گسیختگی فرضی به تعدادی قطعه تقسیم می شود و برای حل دستگاه معادلات از نیروهای مماسی و قائم بین قطعات صرف نظر می شود. در روش مذکور پس از محاسبه نیروی مقاوم برشی برای هر قطعه و گشتاور آن نسبت به مرکز چرخش، گشتاور نیروی محرک قطعه نیز نسبت به مرکز چرخش محاسبه می شود. در نهایت ضریب اطمینان برای هر قطعه برابر خواهد بود با [۵ و ۶]:

$$F = \frac{M_r}{M_d} = \frac{c \times \Delta l + N \times \tan \phi}{T} \quad (2)$$

برحسب تنش مؤثر نیز مقدار ضریب اطمینان برابر است با [۵ و ۶]:

$$F = \frac{C' L + \tan \phi' \sum (N - u \Delta l)}{\sum T} \quad (3)$$

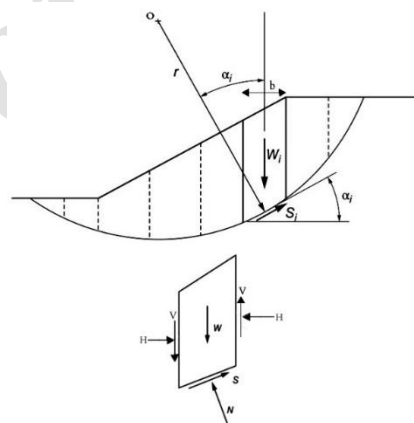
که در رابطه (۳)، u فشار آب حفره ای است.

روش بیشاپ. بیشاپ برای حل دستگاه معادلات پایداری، فرض را بر این گرفته است که نیروهایی که بین قطعات عمل می کنند صرفاً افقی اند یا به عبارت دیگر نیروهای عمودی بین قطعه ای برابر صفرند. در این روش با استفاده از رابطه (۴) و در نظر گرفتن فرض اولیه برای ضریب اطمینان، مقدار دقیق ضریب اطمینان پس از انجام چند مرحله سعی و خطا به دست خواهد آمد [۵ و ۶]:

$$F = \frac{1}{\sum W \cdot \sin \alpha} \sum \left[\left\{ c' \cdot b + (w - u \cdot b) \tan \phi' \right\} \frac{\sec \alpha}{1 + \frac{\tan \alpha \cdot \tan \phi'}{F}} \right] \quad (4)$$

روش قطعات افقی. از دیگر روش های تحلیل پایداری شیروانی های خاکی، روش تحلیل با استفاده از قطعات افقی (HSM) است که در این روش سطح لغزش به تعدادی قطعه افقی تقسیم می شود و نیروهای اعمالی بر هرکدام از قطعات مطابق شکل (۳) مورد بررسی قرار می گیرد.

روش قطعات قائم. در این روش برای محاسبه ضریب اطمینان پایداری ابتدا یک سطح لغزش فرضی انتخاب می شود و به قطعاتی قائم به عرض b تقسیم می گردد (شکل ۲). نیروهایی که به هر قطعه وارد می شوند عبارتند از نیروی وزن هر قطعه که به دو مؤلفه N و T تقسیم می شوند.

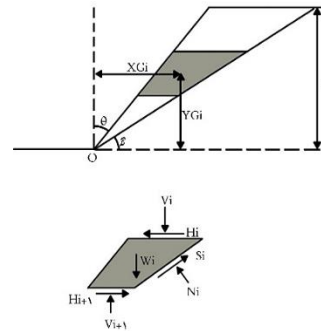


شکل ۲ روش قطعات قائم

با فرض این که W وزن قطعه مورد نظر باشد، نیروی N برابر است با $W \cdot \cos \alpha$ و عمود بر سطح قطعه است که از مرکز O می گذرد. نیروی S نیز برابر است با $W \cdot \sin \alpha$ و مماس بر سطح قطعه است. نیروهای بین قطعه ای با V و H نشان داده شده اند.

برای حل معادلات تعادل و محاسبه ضریب اطمینان از روش قطعات قائم راه حل های مختلفی موجود است، از جمله راه حل فلنیوس، بیشاپ، بیشاپ اصلاح شده، تیلور و غیره که در اینجا به دو روش از آنها اشاره

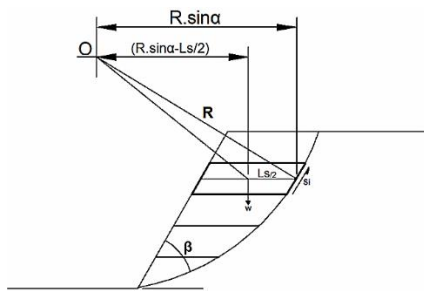
در شکل (۳)، β زاویه شیب، H ارتفاع شیب، X_{Gi} و Y_{Gi} مختصات مرکز سطح قطعه موردنظر، N و S به ترتیب نیروهای عمودی و مماسی در سطح لغزش، V و H نیروهای عمودی و مماسی در سطح تماس بین دو قطعه، w_i وزن قطعه و k_y نیز ضریب شتاب زلزله است. معادلات تعادل برای روش مقاطع افقی به صورت کامل به شرح جدول (۱) است.



شکل ۳ روش مقاطع افقی و نیروهای وارد بر هر قطعه

جدول ۱ معادلات تعادل برای هر قطعه و پارامترهای به کار گرفته شده در معادلات [V]

معادلات	شرح
$\sum F_x = 0 \rightarrow$ $S_i \cos \beta - N_i \sin \beta - H_i + H_{i+1} - k_y W_i = 0$	معادله تعادل نیرو در جهت افق برای هر قطعه
$\sum F_y = 0 \rightarrow$ $V_{i+1} - W_i - V_i + S_i + N_i \cos \beta = 0$	معادله تعادل نیرو در جهت قائم برای هر قطعه
$\sum M_O = 0 \rightarrow$ $H_i \sum_{j=1}^n (h_j) - H_{(i+1)} \sum_{j=1}^n (h_j) - V_i X_{(V_i)}$ $+ V_{(i+1)} X_{(V_{i+1})} - W_i (\bar{X}_i) + k_y W_i (\bar{Y}_i)$ $+ \frac{N_i}{\sin \beta} \left(\sum_{j=1}^n h_j + \frac{h_i}{2} \right) = 0$	معادله تعادل لنگر حول نقطه O (نقطه اثر پای شیب) برای هر قطعه
$(S_i) - N_i \tan(\varphi) = 0$	معادله موهر کلمب برای هر قطعه
$h_i = \frac{H}{n}$	h_i ارتفاع هر قطعه
$X_{V_i} = \frac{\sum_{j=1}^n h_j \tan \theta}{2} + \frac{\sum_{j=1}^n h_j}{2 \tan \beta}$	X_{V_i} معادل بازوی لنگر نیروی عمودی V_i نسبت به نقطه O
$\frac{h_i}{4 \tan \beta} - \frac{h_i \tan \theta}{4} \quad \bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^n h_j}{2 \tan \beta} + \frac{\sum_{j=1}^n h_j \tan \theta}{2}$	\bar{X}_i فاصله افقی مرکز ثقل قطعه از نقطه O
$\bar{Y}_i = \left[\left(\frac{\sum_{j=1}^n h_j}{\tan \beta} - \sum_{i=1}^n h_i \tan \theta \right) + h_i \tan \theta \right] h_i$ $\times \left(\sum_{j=1}^n h_j + \frac{h_i}{2} \right) - \frac{h_i^2 \tan \theta}{2} \left(\sum_{j=1}^n h_j + \frac{2h_i}{3} \right)$ $- \frac{h_i^2}{2 \tan \beta} \left(\sum_{j=1}^n h_j + \frac{h_i}{3} \right)$	\bar{Y}_i فاصله عمودی مرکز ثقل قطعه از نقطه O



شکل ۵ نیرو و بازوی لنگرهای مقاوم و محرک در روش 2N+1

سطح لغزش شیروانی خاکی. یافتن سطح لغزش واقعی، یکی از مشکلات اساسی در محاسبه پایداری سطوح شیب‌دار است. برای محاسبه ضریب اطمینان پایداری شیروانی‌ها، به‌عنوان اولین آزمون یک سطح لغزش فرضی، در نظر گرفته می‌شود و با تکرار آزمون و اصلاح، سطح لغزش بحرانی (سطحی که کمترین مقدار برای ضریب اطمینان را داشته باشد) تعیین می‌گردد. شکل این سطح لغزش عمدتاً بستگی به نوع و شرایط خاک دارد.

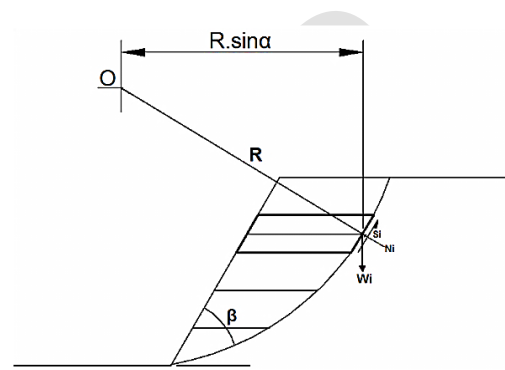
در مورد روش قطعات، محققان روش‌های مختلفی را برای تعیین سطوح لغزش به‌کار برده‌اند که از آن جمله می‌توان به سطح لغزش اسپیرال لگاریتمی [8]، روش‌های مدرن بهینه‌سازی نظیر حرکت گروهی ذرات [9] و حرکت گروه ماهی [10]، روش الگوریتم ژنتیک [11]، سطح لغزش دایره‌ای [۴] و سطح لغزش مسطح [12] اشاره کرد.

روش تحقیق

کلیات انجام محاسبات. در تحقیق حاضر، ابتدا مقادیر ضریب اطمینان در برابر لغزش، با استفاده از دو روش قطعات قائم (روش فلنیوس و روش بیشاپ اصلاح‌شده) و روش قطعات افقی (فرمول‌بندی 2N و فرمول‌بندی 2N+1) برای چند شیروانی خاکی با مشخصات هندسی و ژئوتکنیکی مشخص، تعیین شده‌است. تحلیل پایداری شیب‌ها در حالت تعادل حدی، با فرض وجود خاک همگن، بدون در نظر گرفتن اثرات نیروی زلزله و فشار آب حفره‌ای انجام شده‌است.

فرمول‌بندی 2N در فرمول‌بندی 2N با نوشتن معادلات تعادل نیرو در دو جهت X و Y مقادیر نیروهای عمودی (N_i) و مماسی (S_i) در سطح لغزش محاسبه می‌شوند. در این حالت با فرض ساده‌کننده اعمال نیروی محرک حاصل از وزن قطعه در سطح لغزش می‌توان با استفاده از رابطه (۵) مقدار ضریب اطمینان را محاسبه کرد.

$$FS = \frac{\sum M_r}{\sum M_d} = \frac{\sum (Fr).R_r}{\sum (Fd).R_d} = \frac{CL_i + \sum N_i \cdot (\tan \phi)}{\sum T_i} \quad (5)$$



شکل ۴ نیروها و بازوهای محرک و مقاوم در روش 2N

فرمول‌بندی 2N+1 در روش 2N+1 ابتدا با نوشتن معادلات تعادل نیرو در دو جهت X و Y مقادیر نیروهای عمودی (N_i) و مماسی (S_i) در سطح لغزش محاسبه می‌شوند، سپس نیروی مقاوم در سطح لغزش و نیروی محرک W_i در مرکز هر قطعه اعمال می‌شود. در این حالت برای محاسبه ضریب اطمینان از نسبت بین لنگرهای مقاوم و محرک با مرکز نقطه O استفاده می‌شود. در این روش بازوی لنگرهای مقاوم و محرک متفاوت است به طوری که بازوی لنگر مقاوم برابر شعاع دایره لغزش و بازوی لنگر محرک مقداری کمتر ($-R \sin \alpha$) می‌باشد. در نهایت مقدار ضریب اطمینان از رابطه (۶) محاسبه می‌گردد.

$$FS = \frac{\sum M_r}{\sum M_d} = \frac{\sum (Fr).R_r}{\sum (Fd).R_d} = \frac{(CL_i + \sum N_i \cdot (\tan \phi)).R_r}{\sum (W_i).R_d} \quad (6)$$

حالت فرض می‌شود که سطح گوه لغزنده، مسطح است. مقدار ارتفاع بحرانی برای یک شیب با زاویه β و پارامترهای ژئوتکنیکی (c, ϕ, γ) مشخص، از رابطه (۸) قابل محاسبه است. پس از مشخص شدن ارتفاع بحرانی شیب و محاسبه زاویه سطح لغزش بحرانی، از دو روش قطعات افقی و قائم، مقادیر ضریب اطمینان پایداری شیب محاسبه شده است.

$$H_{cr} = \frac{4C}{\gamma} \left[\frac{\sin \beta \cdot \cos \phi}{1 - \cos(\beta - \phi)} \right] \quad (۸)$$

حالت لغزش دایره‌ای در خاک چسبنده همگن. برای خاک چسبنده ($\phi=0$) و همگن، می‌توان سطح لغزش را قسمتی از یک دایره فرض کرد و مقدار دقیق ضریب اطمینان شیب، با زاویه β و پارامترهای ژئوتکنیکی (c, ϕ, γ) مشخص را، محاسبه نمود. سپس به‌طور مجزا از روش‌های قطعات افقی و قائم نیز مقادیر ضریب اطمینان برای هر حالت قابل محاسبه است.

محاسبات فوق برای شیب با زاویه‌های مختلف ۴۰، ۶۰ و ۸۰ درجه انجام شده است.

حالت لغزش دایره‌ای در خاک با چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی. در این حالت، خاکی با مشخصات ژئوتکنیکی (c, ϕ, γ) مشخص در نظر گرفته شده و مقادیر ضریب اطمینان از دو روش کلی قطعات قائم و افقی محاسبه شده است.

تفسیر داده‌ها و مقایسه نتایج

شیب در حالت لغزش انتقالی با سطح لغزش مسطح نامحدود. همان‌طور که در جدول (۲) مشخص شده است، مقدار ضریب اطمینان با استفاده از روش دقیق برای حالت بحرانی (آستانه لغزش) برابر با یک است. در این حالت ارتفاع بحرانی شیب (H_{cr}) با استفاده از روابط بخش قبل محاسبه شده است و مقدار ضریب اطمینان

در مرحله بعد مسئله مهمی به نام دقت‌سنجی روش‌های مذکور مورد بررسی قرار گرفته است. در این قسمت، از روش‌های تحلیلی دقیقی برای محاسبه ضریب اطمینان در برابر پایداری شیروانی‌های خاکی استفاده شده است. سپس با استفاده از نتایج این بخش، داده‌های چهار روش مذکور از لحاظ دقت بررسی شده‌اند. همچنین در ادامه برای آن‌که بتوان تفاوت روش‌های مختلف در تعیین مقدار ضریب اطمینان را بهتر مشاهده نمود، نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری بر حسب مقادیر چسبندگی ترسیم شده است. برای این منظور در نرم‌افزار، برای شیروانی مذکور با در نظر گرفتن مقادیر مشخص برای γ و همچنین ϕ ، اثر تغییر مقدار چسبندگی بر ضریب اطمینان شیب در روش‌های مختلف، محاسبه شده است. همچنین به‌طور مشابه این کار برای پارامترهای دیگر نظیر وزن مخصوص و زاویه اصطکاک داخلی خاک نیز انجام شده است.

روش انجام محاسبات

مسئله در چهار حالت بررسی شده است:

حالت لغزش انتقالی با سطح لغزش مسطح نامحدود. لغزش انتقالی معمولاً در حالتی رخ می‌دهد که سنگ‌بستر در عمق کمی از سطح شیروانی، قرار داشته باشد. در این حالت مقدار ارتفاع بحرانی (ارتفاعی که شیب در آستانه لغزش قرار دارد ($F_s=1$)) برای یک شیب نامحدود با زاویه β و پارامترهای ژئوتکنیکی (c, ϕ, γ) مشخص، با استفاده از رابطه (۷) قابل محاسبه است. پس از محاسبه H_{cr} نیز مقدار ضریب اطمینان از روش قطعات با تقسیم سطح لغزنده به قطعات افقی و قائم، برای شیب مورد بررسی محاسبه شده است.

$$H_{cr} = \frac{C}{\gamma \cdot \cos^2 \beta \cdot (\tan \beta - \tan \phi)} \quad (۷)$$

حالت لغزش محدود با سطح لغزش مسطح. در این

مسطح بودن سطح لغزش و محاسبه دقیق نیروی وزن قطعه، نتایج روش‌ها نزدیک به هم است.

شیب در حالت لغزش دایره‌ای و خاک چسبنده همگن (بدون زاویه اصطکاک داخلی). در این حالت با فرض شیب ۴۰، ۶۰ و ۸۰ درجه، مقادیر ضریب اطمینان برای شیروانی‌های خاکی موردنظر به دست آورده شده‌است. این مقادیر در حالت‌های مختلف با تغییر پارامترهای چسبندگی (c) و وزن مخصوص (γ) محاسبه شده‌اند. برای شیب ۶۰ مقادیر ضریب اطمینان در جداول شماره (۴ و ۵) آمده‌است.

جدول ۴ مقادیر ضریب برای شیب ۶۰ درجه با وزن مخصوص ۱٫۸ تن بر مترمکعب، بدون زاویه اصطکاک داخلی و چسبندگی

متغیر

روش	مقادیر چسبندگی بر حسب تن بر مترمربع					
	C=۲	C=۲٫۵	C=۳	C=۳٫۵	C=۴	
دقیق	۰٫۳۰۱۹	۰٫۳۷۷۴	۰٫۴۵۲۹	۰٫۵۲۸۴	۰٫۶۰۳۹	
قطعات قائم	فلنیوس	۰٫۳۱۱۴	۰٫۳۸۹۲	۰٫۴۶۷۱	۰٫۵۴۴۹	۰٫۶۲۲۸
	بیشاپ	۰٫۳۱۰۹	۰٫۳۸۸۶	۰٫۴۶۶۳	۰٫۵۴۴۱	۰٫۶۲۱۸
قطعات افقی	2N	۰٫۲۳۶۴	۰٫۲۹۵۵	۰٫۳۵۴۶	۰٫۴۱۳۷	۰٫۴۷۲۸
	2N+1	۰٫۳۱۰۱	۰٫۳۸۷۷	۰٫۴۶۵۲	۰٫۵۴۲۸	۰٫۶۲۰۳

جدول ۵ مقادیر ضریب برای شیب ۶۰ درجه با چسبندگی ۳ تن بر مترمربع، بدون زاویه اصطکاک داخلی و وزن مخصوص متغیر

روش	مقادیر وزن مخصوص بر حسب تن بر مترمکعب					
	γ=۱٫۵	γ=۱٫۸	γ=۲	γ=۲٫۲	γ=۲٫۵	
دقیق	۰٫۵۴۳۵	۰٫۴۵۲۹	۰٫۴۰۷۶	۰٫۳۷۰۶	۰٫۳۲۶۱	
قطعات قائم	فلنیوس	۰٫۵۶۰۵	۰٫۴۶۷۱	۰٫۴۲۰۴	۰٫۳۸۲۲	۰٫۳۳۶۳
	بیشاپ	۰٫۵۵۹۶	۰٫۴۶۶۳	۰٫۴۱۹۷	۰٫۳۸۱۵	۰٫۳۳۵۸
قطعات افقی	2N	۰٫۴۲۵۵	۰٫۳۵۴۶	۰٫۳۱۹۱	۰٫۲۹۰۱	۰٫۲۵۵۳
	2N+1	۰٫۵۵۸۳	۰٫۴۶۵۲	۰٫۴۱۸۷	۰٫۳۸۰۶	۰٫۳۳۵۰

برای مقایسه روش‌های مختلف در تعیین ضریب اطمینان پایداری، نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری بر حسب مقادیر چسبندگی در شکل (۶) ترسیم شده‌است.

با استفاده از دو روش قطعات قائم (روش فلنیوس) و روش قطعات افقی (روش ساده شده 2N) برای این شیب با پارامترهای هندسی و ژئوتکنیکی مشخص محاسبه شده‌است که نتایج حاصل به صورت زیر است.

جدول ۲ مقادیر ضریب اطمینان در شیب ۴۵ درجه نامحدود با وزن مخصوص ۱٫۸ تن بر مترمکعب، چسبندگی ۳ تن بر مترمربع و زاویه اصطکاک داخلی ۲۵ درجه

روش	ضریب اطمینان	اختلاف با روش دقیق بر حسب درصد
مقادیر دقیق	۱	۰٫۰
روش قطعات قائم	۱٫۰۰۴	+ ۰٫۴
روش قطعات افقی	۱٫۰۰۴	+ ۰٫۴

علت اصلی دقت روش‌ها در این حالت این است که به علت مسطح بودن سطح لغزش، مقادیر سطوح گوه لغزنده به طور دقیق محاسبه می‌شود و تقریبی به خاطر وجود انحنا در سطح گوه لغزنده وجود ندارد و در نتیجه مقدار وزن قطعات یا به عبارت دیگر مقدار نیروی محرک در روش قطعات به طور دقیق محاسبه می‌شود.

شیب در حالت لغزش محدود با سطح لغزش مسطح

در این حالت همانند شیب مستوی نامحدود محاسبات انجام شده و نتایج در جدول (۳) آمده‌است.

جدول ۳ مقادیر ضریب اطمینان در شیب ۴۵ درجه محدود با وزن مخصوص ۱٫۸ تن بر مترمکعب، چسبندگی ۳ تن بر مترمربع و زاویه اصطکاک داخلی ۳۰ درجه

روش	ضریب اطمینان	اختلاف با روش دقیق بر حسب درصد
مقادیر دقیق	۱	۰٫۰
روش قطعات قائم	۱٫۰۰۰۳	+ ۰٫۰۳
روش قطعات افقی	۱٫۰۰۰۷	+ ۰٫۰۷

در این حالت نیز همانند شیب مسطح نامحدود، به دلیل

برابری می کند.

نکته حائز اهمیت دیگر این که، در این حالت با تغییر مقدار چسبندگی و وزن مخصوص خاک تغییری در میزان دقت روش های مورداستفاده ایجاد نمی شود و در حالات مختلف درصد اختلاف با مقادیر دقیق ثابت است.

در ادامه در جدول (۶) مقادیر اختلاف ضریب اطمینان از روش های مختلف برحسب درصد بیان شده است. این مقادیر در حالت های مختلف با تغییر پارامترهای چسبندگی (c) و وزن مخصوص (X) یکسان به دست آمده اند.

جدول ۶ مقادیر اختلاف نتایج شیب ۶۰ درجه

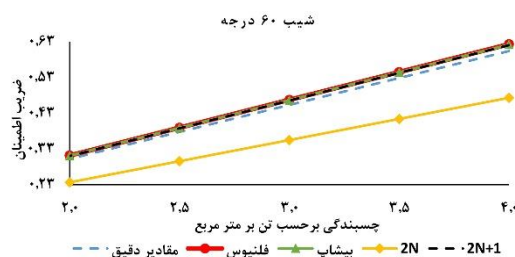
روش	اختلاف با مقادیر دقیق (برحسب درصد)
فلنیوس	۳,۱
بیشاپ اصلاح شده	۳
افقی (2N)	-۲۱
افقی (2N+1)	۲,۷

باتوجه به نتایج جدول (۶)، همان گونه که مشاهده شد در روش قطعات قائم، روش فلنیوس و بیشاپ اصلاح شده، دقت تقریباً یکسانی دارند و روش قطعات افقی روش 2N+1 دقتی نزدیک به روش قطعات قائم دارد.

به صورت مشابه مقادیر اختلاف روش های مختلف در تعیین ضریب اطمینان پایداری برای شیب های ۴۰ درجه و ۸۰ درجه در جداول (۷ و ۸) آمده است.

جدول ۷ مقادیر اختلاف نتایج شیب ۴۰ درجه

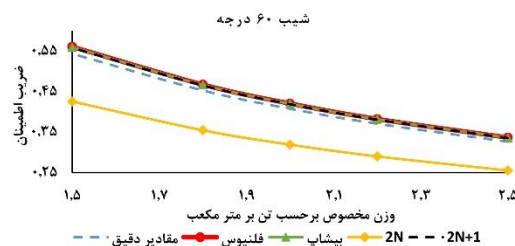
روش	اختلاف با مقادیر دقیق (برحسب درصد)
فلنیوس	۱
بیشاپ اصلاح شده	۱,۳
افقی (2N)	-۱۸
افقی (2N+1)	۲,۴



شکل ۶ نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر چسبندگی در خاک با شیب ۶۰ درجه و وزن مخصوص ۱,۸ تن بر مترمکعب

باتوجه به شکل (۶)، با افزایش خطی مقدار چسبندگی، ضریب اطمینان به صورت خطی افزایش می یابد.

به صورت مشابه نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر وزن مخصوص خاک در شکل (۷) ترسیم شده است.



شکل ۷ نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری برحسب مقادیر وزن مخصوص در خاک با شیب ۶۰ درجه و چسبندگی ۳ تن بر مترمکعب

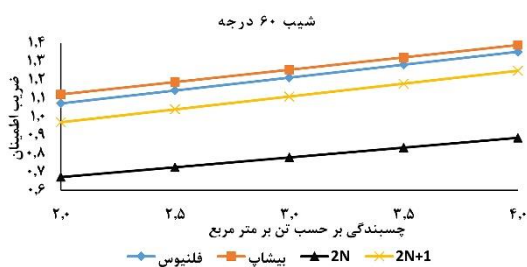
باتوجه به شکل (۷)، با افزایش خطی مقدار وزن مخصوص خاک، ضریب اطمینان به صورت غیرخطی کاهش می یابد.

باتوجه به نتایج به دست آمده در این بخش، در صورت تحلیل پایداری شیروانی خاکی به روش قطعات افقی و استفاده از فرمول بندی 2N، به دلیل تقریب در نقطه اثر نیروی محرک در این روش، نتایج حدود ۲۰ درصد نسبت به مقادیر واقعی کمتر هستند. فرمول بندی 2N+1 هم با این که از نظر فرمول بندی در بین روش های قطعات افقی روشی کامل به شمار نمی آید ولی از نظر دقت نتایج، با روش فلنیوس و در برخی از موارد با روش بیشاپ

جدول ۱۱ مقادیر ضریب برای شیب ۶۰ درجه با چسبندگی ۳ تن بر مترمربع، وزن مخصوص ۲ تن بر مترمکعب و زاویه اصطکاک داخلی متغیر

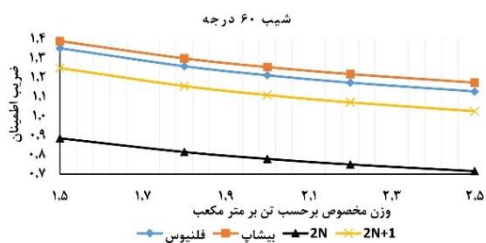
روش		مقادیر زاویه اصطکاک داخلی بر حسب درجه				
		$\Phi=20$	$\Phi=30$	$\Phi=40$	$\Phi=50$	$\Phi=60$
قطعات قائم	فلنیوس	۰,۹۱۹۶	۱,۲۱۲۳	۱,۵۷۱۴	۲,۰۵۵۱	۲,۷۹۶۱
	بیشاپ	۰,۹۴۰۴	۱,۲۵۵۰	۱,۶۴۲۰	۲,۱۶۴۱	۲,۹۶۴۴
قطعات افقی	2N	۰,۶۱۹۰	۰,۷۷۹۰	۰,۹۸۷۵	۱,۲۳۸۳	۱,۶۹۸۷
	2N+1	۰,۸۵۴۲	۱,۱۰۹۶	۱,۴۲۲۸	۱,۸۴۴۷	۲,۴۹۱۲

برای آن که بتوان تفاوت روش های مختلف در تعیین مقدار ضریب اطمینان را بهتر مشاهده نمود، نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری بر حسب مقادیر چسبندگی، وزن مخصوص و زاویه اصطکاک داخلی در شکل های (۸، ۹ و ۱۰) ترسیم شده است.



شکل ۸ نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری بر حسب مقادیر چسبندگی در خاک با شیب ۶۰ درجه و وزن مخصوص ۲ تن بر مترمکعب و زاویه اصطکاک داخلی ۳۰ درجه

باتوجه به شکل (۸)، با افزایش خطی مقدار چسبندگی، ضریب اطمینان به صورت خطی افزایش می یابد.



شکل ۹ نمودار تغییرات ضریب اطمینان پایداری بر حسب مقادیر وزن مخصوص در خاک با شیب ۶۰ درجه و چسبندگی ۳ تن بر مترمربع و زاویه اصطکاک داخلی ۳۰ درجه

جدول ۸ مقادیر اختلاف نتایج شیب ۸۰ درجه

روش	اختلاف با مقادیر دقیق (بر حسب درصد)
فلنیوس	۰,۳
بیشاپ اصلاح شده	۰,۵
افقی (2N)	-۱۱
افقی (2N+1)	۰,۳

شیب در حالت لغزش دایره ای در خاک با چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی. در این حالت مقادیر ضرایب اطمینان از روش های قطعات قائم (فلنیوس و بیشاپ) و قطعات افقی (فرمول بندی 2N و فرمول بندی 2N+1) محاسبه و در جدول های (۹، ۱۰ و ۱۱) آورده شده است. شیب مفروض در این حالت شیب ۶۰ درجه با تقسیم گوه لغزنده به ۵ قطعه می باشد. مقادیر ضریب اطمینان در این حالت با تغییر پارامترهای چسبندگی، وزن مخصوص و زاویه اصطکاک داخلی خاک حاصل گردیده است.

جدول ۹ مقادیر ضریب برای شیب ۶۰ درجه با وزن مخصوص ۲ تن بر مترمکعب، زاویه اصطکاک داخلی ۳۰ درجه و چسبندگی متغیر

روش		مقادیر چسبندگی بر حسب تن بر مترمربع				
		C=۲	C=۲,۵	C=۳	C=۳,۵	C=۴
قطعات قائم	فلنیوس	۱,۰۷۲۲	۱,۱۴۲۳	۱,۲۱۲۳	۱,۲۸۲۴	۱,۳۵۲۵
	بیشاپ	۱,۱۲۱۲	۱,۱۸۸۰	۱,۲۵۵۰	۱,۳۲۲۱	۱,۳۸۹۴
قطعات افقی	2N	۰,۶۷۲۶	۰,۷۲۵۸	۰,۷۷۹۰	۰,۸۳۲۲	۰,۸۸۵۴
	2N+1	۰,۹۷۰۰	۱,۰۳۹۸	۱,۱۰۹۶	۱,۱۷۹۴	۱,۲۴۹۲

جدول ۱۰ مقادیر ضریب برای شیب ۶۰ درجه با چسبندگی ۳ تن بر مترمربع، زاویه اصطکاک داخلی ۳۰ درجه و وزن مخصوص متغیر

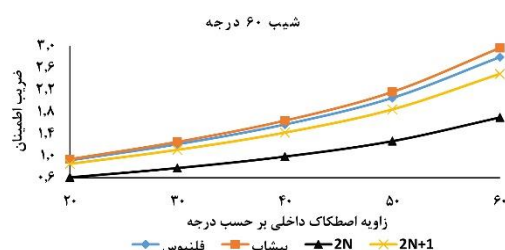
روش		وزن مخصوص بر حسب تن بر مترمکعب				
		$\gamma=1,5$	$\gamma=1,8$	$\gamma=2$	$\gamma=2,2$	$\gamma=2,5$
قطعات قائم	فلنیوس	۱,۳۵۲۵	۱,۲۵۰۰	۱,۲۱۲۳	۱,۱۷۴۱	۱,۱۳۸۳
	بیشاپ	۱,۳۸۹۴	۱,۲۹۹۸	۱,۲۵۵۰	۱,۲۱۸۴	۱,۱۷۴۶
قطعات افقی	2N	۰,۸۸۵۴	۰,۸۱۴۴	۰,۷۷۹۰	۰,۷۵۰۰	۰,۷۱۵۲
	2N+1	۱,۲۴۹۱	۱,۱۵۶۱	۱,۱۰۹۶	۱,۰۷۱۵	۱,۰۲۵۸

ک‌م‌تر از م‌قادیر واق‌عی ه‌ست‌ند و فرمول‌بندی $2N+1$ از نظر د‌قت نت‌ای‌ج، با روش فل‌نیوس و در بر‌خی از م‌وارد با روش ب‌یش‌اپ براب‌ری می‌ک‌ند. ه‌م‌چ‌نین در این ح‌الت با افز‌ایش خط‌ی م‌قدار چ‌س‌ب‌ند‌گی، م‌قدار ض‌ریب اطم‌ینان به‌ص‌ورت خط‌ی افز‌ایش ی‌افته و با افز‌ایش خط‌ی م‌قدار وزن م‌خصوص خ‌اک، ض‌ریب اطم‌ینان به‌ص‌ورت غیرخط‌ی ک‌اهش ی‌افته‌است.

در ح‌الت لغ‌زش د‌ایره‌ای در خ‌اک دار‌ی چ‌س‌ب‌ند‌گی و زاوی‌ه اصط‌کاک دا‌خلی، ض‌ریب اطم‌ینان روش ب‌یش‌اپ اص‌لاح‌ش‌ده ب‌یش‌ترین م‌قدار را دار‌د، بع‌داز آن ض‌ریب اطم‌ینان ح‌اصل از روش فل‌نیوس و پس‌از آن م‌قدار ض‌ریب اطم‌ینان به‌د‌ست‌آم‌ده از روش ق‌ط‌عات اف‌قی $2N+1$ ق‌رار دار‌د. ک‌م‌ترین م‌قدار ض‌ریب اطم‌ینان نیز م‌رب‌وط به روش س‌اده‌ش‌ده ق‌ط‌عات اف‌قی $2N$ است. در این ح‌الت با افز‌ایش خط‌ی م‌قدار چ‌س‌ب‌ند‌گی، م‌قدار ض‌ریب اطم‌ینان به‌ص‌ورت خط‌ی افز‌ایش ی‌افته و با افز‌ایش خط‌ی م‌قدار وزن م‌خصوص خ‌اک، م‌قدار ض‌ریب اطم‌ینان به‌ص‌ورت غیرخط‌ی ک‌اهش ی‌افته‌است. ه‌م‌چ‌نین با افز‌ایش خط‌ی م‌قدار زاوی‌ه اصط‌کاک دا‌خلی خ‌اک، م‌قدار ض‌ریب اطم‌ینان به‌طور غیرخط‌ی افز‌ایش ی‌افته‌است.

به‌ط‌ور کلی روش ق‌ط‌عات قائ‌م، نت‌ای‌جی د‌قی‌ق‌تر و با اند‌کی ح‌اشیه اطم‌ینان را برای شیروانی خ‌اکی ارائه می‌ده‌د، این در ح‌الی است که نت‌ای‌ج ح‌اصل از روش ق‌ط‌عات اف‌قی واب‌ست‌گی زی‌ادی به نوع فرمول‌بندی دار‌د. در روش ق‌ط‌عات اف‌قی روش فرمول‌بندی $2N$ م‌قادیر ک‌م‌تری را برای ض‌ریب اطم‌ینان پای‌داری شیروانی نشان می‌ده‌د، در ح‌الی‌که روش $2N+1$ که از لحاظ فرمول‌بندی جزو روش‌های پ‌یش‌رفته ق‌ط‌عات اف‌قی ه‌م نیست، نت‌ای‌ج قابل ق‌ب‌ولی (ن‌زدیک به نت‌ای‌ج روش ق‌ط‌عات قائ‌م) ارائه می‌ده‌د. با انت‌خاب فرمول‌بندی م‌ناسب، روش ق‌ط‌عات اف‌قی می‌ت‌وان‌د د‌قت بال‌ایی داشته باش‌د و باید ت‌وجه داشت در م‌واردی که خ‌اک دار‌ی لایه‌بندی اف‌قی است و یا در مس‌ئله نیروهای اف‌قی (مان‌ند وجود س‌خت‌کننده اف‌قی یا مؤلف‌ه اف‌قی نیروی زلزله و...) وجود دار‌د، روش ق‌ط‌عات اف‌قی سه‌ولت ب‌سیار بال‌اتری برای استفاده فراهم می‌ک‌ند.

ه‌مان‌ط‌ور که در ش‌کل (۹) م‌ش‌خص است، با افز‌ایش خط‌ی م‌قدار وزن م‌خصوص خ‌اک، ض‌ریب اطم‌ینان به‌ص‌ورت غیرخط‌ی ک‌اهش می‌ی‌ابد.



ش‌کل ۱۰ نمودار تغییرات ض‌ریب اطم‌ینان پای‌داری برح‌سب م‌قادیر زاوی‌ه اصط‌کاک دا‌خلی در خ‌اک با شیب ۶۰ درجه و چ‌س‌ب‌ند‌گی ۳ تن بر مترم‌ربع و وزن م‌خصوص ۲ تن بر مترم‌کعب

ه‌م‌چ‌نین با ت‌وجه به ش‌کل (۱۰)، با افز‌ایش خط‌ی م‌قدار زاوی‌ه اصط‌کاک دا‌خلی خ‌اک، م‌قدار ض‌ریب اطم‌ینان به‌طور غیرخط‌ی افز‌ایش می‌ی‌ابد. از سوی دیگر با ت‌وجه به ش‌کل‌های (۸، ۹ و ۱۰) م‌ش‌ابه ق‌بل، از روش ق‌ط‌عات اف‌قی $2N$ ض‌ریب اطم‌ینان ک‌م‌تری به‌د‌ست‌آم‌ده‌است.

نت‌ی‌جه‌گیری

در پ‌ژوهش ح‌اضر، به‌منظور بر‌رسی تح‌لیل پای‌داری شیروانی‌های خ‌اکی به روش ق‌ط‌عات اف‌قی و قائ‌م، دو فرمول‌بندی از هر روش انت‌خاب شد، سپس ض‌ریب اطم‌ینان پای‌داری شیروانی با استفاده از روش‌های م‌ذکور برای تعدادی شیروانی مح‌اسبه گردید.

بر‌رسی‌ها نشان داد، در ح‌التی‌که سطح لغ‌زش مس‌طح باش‌د، بین نت‌ای‌ج روش د‌قی‌ق، روش ق‌ط‌عات قائ‌م و اف‌قی اخت‌لاف اند‌کی (حدود ۰٫۴ درصد) وجود دار‌د.

در ح‌الت لغ‌زش د‌ایره‌ای در خ‌اک چ‌س‌ب‌نده هم‌گن (بدون زاوی‌ه اصط‌کاک دا‌خلی)، درص‌ورت استفاده از روش ق‌ط‌عات قائ‌م، روش فل‌نیوس و ب‌یش‌اپ اص‌لاح‌ش‌ده، د‌قت تقریباً یک‌سانی م‌ش‌اهده شد و اخت‌لاف نت‌ای‌ج آن‌ها با م‌قدار د‌قی‌ق اند‌ک است و در ص‌ورت استفاده از روش ق‌ط‌عات اف‌قی، در فرمول‌بندی $2N$ م‌قادیر ض‌ریب اطم‌ینان

مراجع

1. Shahgholi, M., Fakher, A. and Jones, C.J.F.P., "Horizontal Slice Method of Analysis", *Geotechnique*, Vol. 51 (10), Pp. 881–885, (2001).
2. Nouri, H.R., Fakher, A. and Jones, C.J.F.P., "Development of Horizontal Slice Method in Stability Analysis of Reinforced Slopes", *Geotextiles and Geomembranes*, Vol. 24, No. 3, pp. 175–18, (2006).
3. Sarbi shei S. and Fakher A., "Energy-based Horizontal Slice Method for Pseudo-static Analysis of Reinforced Walls", *Geosynthetics International*, Vol. 19, (2012).
۴. حاجی عزیزی، م.، کیلانتهئی، ف.، کیلانتهئی، پ.، «ارائه روشی جدید در تحلیل پایداری شیب‌های خاکی با استفاده از روش تعادل حدی»، مجله عمران شریف، پذیرفته‌شده برای چاپ، تهران، (۱۳۹۵).
۵. خرقانی، س.، «مهندسی سدهای خاکی»، چاپ اول، انتشارات دانشگاه صنعت آب و برق شهید عباسپور، (۱۳۸۳).
۶. وفاپیان، م.، «سدهای خاکی و سنگریز»، چاپ اول، انتشارات ارکان دانش، (۱۳۹۱).
۷. عباسی، ع.، حسنلو، م.، حسنلو، م.، «تحلیل حدی شیروانی‌های خاکی مسلح به روش قطعات افقی»، اولین کنفرانس ملی مهندسی ژئوتکنیک ایران، اردبیل، (۱۳۹۲).
8. Morgenstern, N.R. and Price, V.R., "The Analysis Stability of General Slip Surfaces", *Geotechnique*, Vol. 15, No. 1, pp. 79–93, (1965).
9. Cheng, Y.M., Liang, L., Chi, S. and Wei, W.B., "Particle Swarm Optimization Algorithm for the Location of the Critical Non-circular Failure Surface in Two-dimensional Slope Stability Analysis", *Computers and Geotechnics*, Vol. 34, pp. 92–103, (2007).
10. Cheng, Y. M., Liang, L., Chi, S.C. and Wei, W. B., "Determination of the Critical Slip Surface, Using Artificial Fish Swarms Algorithm", *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental, Engineering*, Vol. 134, No. 2, pp. 244-251, (2008).
11. Zheng, H., Sun, G. and Liu, D., "A Practical Procedure for Searching Critical Slip Surfaces of Slopes Based on the Strength Reduction Technique", *Computers and Geotechnics*, Vol. 36, pp. 1–5, (2009).
۱۲. کشاورز، ا.، شیدفر، ن.، «بررسی پایداری شبه‌استاتیکی شیب‌های خاکی مسلح با استفاده از روش قطعات افقی با فرض لغزش صفحه‌ای»، هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران، زاهدان، (۱۳۹۲).