

بهبود روش اجزای محدود بسط یافته در آنالیز مسائل ترک با تولید مجدد شبکه*کامران مدبر^(۱)حمید مسلمی^(۲)

چکیده روش اجزای محدود بسط یافته یکی از تکنیک‌های بسیار مؤثر برای مدل‌سازی مسائل دارای ترک می‌باشد. در این روش با توجه به استفاده از توابع غنی‌سازی برای مدل‌کردن ناپیوستگی میدان جابه‌جایی، دیگر ترک به صورت یک ماهیت هندسی مدل نمی‌شود و نیازی نمی‌باشد که شبکه اجزای محدود در هر مرحله مسیر ترک را دنبال کند. ولی مشکل اساسی در این روش عدم کنترل بر روی میزان خطای حل عددی می‌باشد. به این منظور به کمک روش تولید مجدد شبکه تطابقی، در مواردی که خطای حل بیش از حد قابل قبول است، شبکه اجزای محدود مجدداً تولید می‌شود و مسئله با شبکه جدید حل می‌شود تا بتوان به دقت مطلوب دست یافت. این تولید مجدد شبکه کاملاً مستقل از دنبال کردن مسیر ترک می‌باشد و ممکن است در چند مرحله از رشد ترک، مسئله با یک شبکه یکسان حل شود. الگوریتم ذکر شده باعث می‌شود که بدون مشکلات دنبال کردن مسیر ترک، دقت حل نیز در حد مطلوبی باقی بماند. پارامتر ضریب شدت تنش که نقش کلیدی در تعیین مسیر رشد ترک دارد، با کمک روش ترکیبی محاسبه شده است و بهبود قابل توجهی در دقت محاسبه عددی این پارامتر مشاهده شده است.

واژه‌های کلیدی اجزای محدود بسط یافته، آنالیز مسائل ترک، اجزای محدود تطابقی، توابع غنی‌سازی، اصلاح مش.

Improving the Extended Finite Element Method in the Crack Problems via the Remeshing Process

K. Modabber

H. Moslemi

Abstract Challenging and complex nature of the numerical analysis of crack problems have attracted the interest of many researchers in past decades and several techniques have been proposed for these problems. One of these techniques is the extended finite element method in which the crack tip field modeling is improved by enrichment of shape functions and the crack can intersect the elements. On the other hand, we have adaptive finite element method which aims to improve the accuracy of displacement and stress fields near the crack tip by remeshing process. Researchers have reported the drawbacks of each of these two techniques. In this paper the drawbacks of the previous techniques are covered with proper combination of these two techniques. By this combination the crack can pass through the elements and there is no need for crack tracking by mesh. In addition the estimated error is limited to desirable bands and stress intensity factor can be computed numerically with acceptable accuracy.

Keywords Extended Finite Element Method; Crack Problems; Adaptive Finite Element Method; Enrichment functions, Remeshing.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۹/۵ تاریخ پذیرش آن ۹۶/۴/۱۷ می‌باشد.

(۱) کارشناس ارشد سازه، مهندسی عمران، دانشگاه شاهد، تهران.

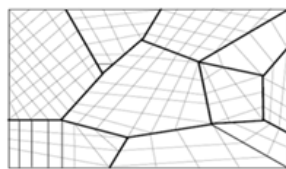
Email: h.moslemi@shahed.ac.ir

(۲) نویسنده مسئول: استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران.

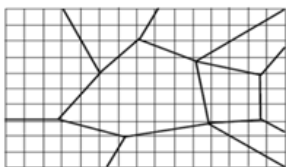
مقدمه

مش بندی در دو روش اجزای محدود معمولی و بسط یافته را به تصویر می کشد [3].

برای مدل سازی ناپیوستگی در میدان جابه جایی ترک از افزودن جملاتی به تابع جابه جایی در روش اجزای محدود کلاسیک استفاده می شود. این جملات توابع غنی سازی نام دارند. توابع غنی سازی مورد استفاده در روش اجزای محدود بسط یافته به دو دسته تقسیم می شوند. دسته اول توابع برای مدل سازی المان هایی می باشد که ترک از آنها عبور کرده است و دسته دوم برای المان هایی می باشد که ترک در آنها واقع شده است.



FEM



XFEM

شکل ۱ تطبیق و عدم تطبیق مش بندی در دو روش اجزای محدود کلاسیک و بسط یافته

بلیچکو [4] برای ترک الاستیک و برای مسائل ایزوتروپ رابطه (۱) را به عنوان رابطه نهایی برای غنی سازی معرفی کرده است.

$$U = \sum_{i \in N} N_i(x) U_i + \sum_{i \in N_{cut}} N_i(x) H(x) a_i + \sum_{i \in N_{front}} \sum_{\alpha} N_i(x) B_{\alpha}(x) b_{i,\alpha} \quad (1)$$

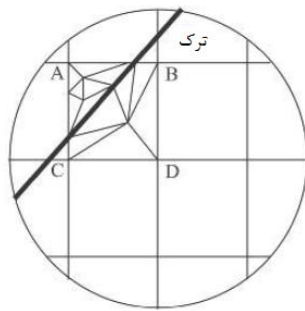
در روابط فوق N مجموعه نقاط موجود در روش اجزای محدود استاندارد می باشد. N_{cut} مجموعه نقاطی هستند که ترک از المان های آنها عبور کرده است و در اصطلاح آنها را بریده است. این نقاط در شکل (۲) با دایره مشخص شده است. N_{front} مجموعه نقاطی است که

حل مسائل ترک به دلیل وجود ناپیوستگی در میدان جابه جایی و تکین بودن میدان تنش در نوک ترک همواره جزو مسائل چالش برانگیز در رشته های مختلف مهندسی بوده است. به خصوص در استفاده از روش های عددی، روش هایی که در مسائل بدون ترک به خوبی جواب مسئله را مدل می کنند، در مسائل دارای ترک جواب های واگرا و کاملاً دور از جواب تحلیلی مسئله را می دهند. بنابراین برای بهبود روش های عددی در تحلیل مسائل ترک تکنیک های مختلفی توسط محققان مختلف پیشنهاد گشته است. یکی از این تکنیک ها روش اجزای محدود بسط یافته می باشد که ایده اصلی این روش بر مبنای اصل تقسیم بندی جزء واحد است که توسط بابوشکا و ملنک ارائه گردید [1].

به موازات این روش، تکنیک اجزای محدود تطابقی یا همان روش اصلاح مش برای مدل سازی دقیق رفتار مسائل دارای ترک مورد استفاده قرار گرفته است. این روش نیز سعی دارد با ارائه اصلاح شبکه، خطاهای ایجاد شده را که تحت تأثیر نحوه شبکه بندی می باشند کاهش دهد.

روش اجزای محدود بسط یافته یکی از تکنیک های موفق در زمینه آنالیز مسائل ترک می باشد. مهم ترین مزیتی که این روش نسبت به روش اجزای محدود معمولی دارد این است که دیگر نیازی به مش بندی مجدد در مسئله به هنگام رشد ترک نیست. در مسائلی که با استفاده از روش اجزای محدود معمولی آنالیز می شوند در هر مرحله از رشد ترک هندسه مسئله کاملاً تغییر می یابد چرا که بایستی خود ترک در این مسائل مستقیماً مدل گردد و همین موضوع باعث برهم خوردن هندسه مسئله در زمانی می شود که ترک رشد می کند [2].

اما در روش اجزای محدود بسط یافته با تغییر توابع شکل و افزودن جملاتی به معادله جابه جایی، ترک یا ناپیوستگی مدل می شود و نیازی به مش بندی مجدد در هر مرحله از رشد ترک وجود ندارد. شکل (۱) تفاوت



شکل ۳ زیرالمان مثلثی منطقه ترک

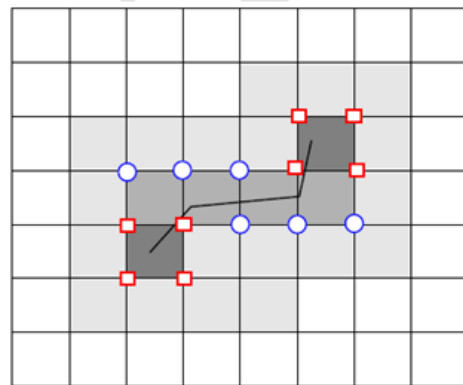
البته در المان‌هایی که منطقه المان‌های معمول را به المان‌های غنی شده مرتبط می‌سازند و به آنها المان‌های مخلوط (Blending Elements) گفته می‌شود، مشکلاتی در همگرایی جواب‌ها مشاهده می‌شود که این مشکلات را می‌توان با اصلاح توابع غنی‌سازی کاهش داد. به این صورت که توابع غنی‌سازی در المان‌های استاندارد صفر می‌شوند، در المان‌هایی که همه گره‌های آنها غنی‌سازی می‌شوند، بدون تغییر می‌مانند و در المان‌های مخلوط به صورت پیوسته تغییر می‌کنند.

روش اجزای محدود تطابقی

روش اجزای محدود تطابقی به‌عنوان یک تکنیک موفق در آنالیز مسائل ترک به کار می‌رود. اساس کار این روش اصلاح مش و معرفی مش‌بندی مناسب براساس شرایط و نوع مسئله می‌باشد. اصولاً در مسائلی که ترک وجود دارد به دلیل تمرکز بالای تنش در اطراف نوک ترک خطا در آن محدوده زیاد می‌باشد و لذا پاسخ مسئله به خصوص فاکتور شدت تنش خطای نسبتاً بالایی خواهد داشت و با مقدار تحلیلی خود فاصله دارد. بر همین اساس روش اجزای محدود تطابقی با اصلاح مش و یافتن نقاط حساس مسئله که نیاز به ریزسازی بیشتر دارند، مقدار خطای مسئله را کاهش می‌دهد و در نتیجه جواب‌ها به مقدار تحلیلی آن نزدیک‌تر می‌گردد. معمولاً از دو نوع رویکرد برای اصلاح مش در روش اجزای محدود تطابقی استفاده می‌شود: ۱- روش‌های مبتنی بر باقی‌مانده‌ها

نوک ترک در المان‌های آنها قرار گرفته است این نقاط نیز در شکل (۲) با علامت مربع مشخص گردیده است [3]. همچنین در رابطه (۱) توابع شکل استاندارد در روش اجزای معمولی استاندارد می‌باشد. H نیز تابع پرش هویساید می‌باشد. تابع هویساید در نقاط بالای ترک مقدار +۱ و در نقاط پایین ترک مقدار -۱ را به خود می‌گیرد. تابع B_α نیز از حل تحلیلی الاستیک نوک ترک نشئت گرفته است و به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$[B_\alpha] = [\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta] \quad (2)$$



شکل ۲ نقاط تحت تأثیر توابع عادی غنی‌سازی و توابع نوک ترک

به دلیل وجود ناپیوستگی توابع هویساید که در ماتریس شکل ایجاد می‌گردند، انتگرال‌گیری به روش‌های عادی، نظیر استفاده از روش گاوس کارساز نیست و دقت لازم در انتگرال‌گیری وجود ندارد. در این خصوص روش‌های متعددی پیشنهاد شده است که یکی از آنها روش پیشنهادی دالبو می‌باشد. در این روش المانی که از آن ترک عبور کرده است به زیر المان‌های مثلثی تقسیم می‌شود و انتگرال‌گیری براساس این زیرالمان‌ها محاسبه می‌گردد. شکل (۳) نمونه‌ای از تقسیم‌بندی این زیرالمان‌ها را به تصویر می‌کشد [5].

جواب قابل قبول باشد. از این رو به جای خطای نقطه به نقطه نرم خطا تعریف می شود که به صورت انتگرال عددی از تابع خطا روی دامنه است. یکی از معروف ترین نرم های خطا، نرم L_2 می باشد که به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} e^T e d\Omega \right)^{1/2} \quad (5)$$

به این ترتیب نرم تابع خطای تنش برابر خواهد بود با:

$$\|e_{\sigma}\| = \left\| \sigma^* - \hat{\sigma} \right\| = \left(\int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma})^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \right)^{1/2} \quad (6)$$

پس از تخمین خطای مسئله می توان یک شبکه بهینه برمبنای خطای برآورد شده ایجاد نمود. بدین ترتیب که در نقاط با خطای بالاتر المان های ریزتر و در مناطق با خطای پایین از المان های درشت تر استفاده نمود. با تعریف یک خطای هدف مطلوب $(\|e_{\sigma}\|_i)_{aim}$ می توان تراکم المان های متصل به گره های مختلف را تعیین نمود و شبکه جدید را تعیین نمود.

$$(h_i)_{new} = \left[\frac{(\|e_{\sigma}\|_i)_{aim}}{\|e_{\sigma}\|_i} \right] (h_i)_{old} \quad (7)$$

برآورد فاکتور شدت تنش با ترکیب روش اجزای

محدود بسط یافته و تطابق

پارامتر فاکتور شدت تنش برای بیان میزان تمرکز تنش در اطراف نوک ترک به کار می رود و نقش تعیین کننده ای در مسیر رشد ترک دارد. مفهوم فاکتور شدت تنش برای اولین بار توسط اروین در سال ۱۹۵۷ برای سنجش مقدار تکینگی استفاده شد [9]. برای محاسبه فاکتور شدت تنش به صورت تحلیلی بایستی از روابط الاستیک موجود استفاده نمود که تنها برای الگوها و مسائل خاص حل شده است و در سایر مسائل عموماً از روش های عددی برای برآورد ضریب شدت تنش استفاده می شود. از روش های متداول عددی برای برآورد این ضریب می توان به روش همبستگی تغییر مکان ها (Displacement

(Residual Based Methods) و ۲- روش های مبتنی بر بهبود جواب ها (Recovery Based Methods). در روش های مبتنی بر باقی مانده ها که در ابتدا توسط بابوشکا و رینبولت ارائه گردید [6]، نتایج حل به روش اجزای محدود در معادلات حاکم بر سیستم قرار داده می شود و خطا به صورت نرم انرژی و با محاسبه باقی مانده های محلی این معادلات بر روی مجموعه ای از المان ها (patch) محاسبه می شود. از سوی دیگر در روش های مبتنی بر بهبود جواب که نخستین بار توسط زینکوویچ و ژو ارائه گردید، از یک فرایند بازیابی اطلاعات استفاده می شود تا مقادیر دقیق تری برای متغیرها به دست آید [7]. در این مقاله از این نوع رویکرد برای اصلاح مش استفاده شده است.

در این روش برای ارزیابی خطا، بایستی از میزان اختلافی که بین جواب های بهبود یافته و جواب های قبلی وجود دارد استفاده می گردد. برای این کار ابتدا مسئله را با همان مش بندی اولیه آنالیز می کنیم. برای بهبود جواب ها کفایت با استفاده از روابط توابع شکلی جواب بهبود یافته را محاسبه نماییم. این رابطه به صورت زیر بیان خواهد شد [8].

$$\sigma^* = N \bar{\sigma}^* \quad (3)$$

که $\bar{\sigma}^*$ تنش بهبود یافته، تابع N شکل و σ^* مقادیر تنش در گره ها می باشد.

از آنجایی که جواب های بهبود یافته دارای تقریب مناسبتری نسبت به جواب های واقعی مسئله می باشد، لذا می توان از اختلاف دو جواب به عنوان خطای تقریب مسئله استفاده نمود.

$$e_{\sigma} \approx \sigma^* - \hat{\sigma} \quad (4)$$

$\hat{\sigma}$ جواب روش اجزای محدود در گره ها می باشد. تعریف فوق مقدار خطای برآورد شده را در تک تک نقاط دامنه می دهد، ولی برای ریزسازی شبکه معیار مناسبی نمی باشد، چرا که ممکن است در یک نقطه خاص مثل نوک ترک تنش به سمت بی نهایت برود که خطا در این نقطه بسیار بالا خواهد بود، ولی در مجموع خطای کل

$$M = \frac{2}{E'} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (10)$$

برای مد I، $K_I^{aux} = 1$ و $K_{II}^{aux} = 0$ قرار می‌گیرد و برای مد II، $K_I^{aux} = 0$ و $K_{II}^{aux} = 1$ قرار می‌گیرد؛ بنابراین:

$$K = \frac{E'}{2} M \quad (11)$$

به جای E' برای حالت کرنش مسطح از $\frac{E'}{(1-\nu^2)}$ و برای تنش مسطح نیز از E استفاده می‌شود.

در این برآورد مدل‌سازی ترک با روش اجزای محدود بسط‌یافته صورت می‌گیرد و هندسه ترک از میان المان‌ها عبور می‌کند. پس از برآورد تنش‌ها و پیش از محاسبه ضریب شدت تنش، خطای دامنه به روش اجزای محدود تطابقی تخمین زده می‌شود و در صورتی که خطای دامنه بیش از محدوده قابل قبول باشد، شبکه با روش ارائه‌شده در بند (۲) مجدد تولید می‌شود و آنالیز شبکه مجدد انجام می‌گیرد. در تمامی این مراحل مسیر ترک می‌تواند از بین المان‌ها عبور نماید. زمانی که خطای تخمین زده‌شده در حد قابل قبول رسید، می‌توان با استفاده از روش انتگرال متقابل، ضریب شدت تنش را محاسبه نمود. با این ترکیب دیگر نیازی به دنبال کردن مسیر ترک توسط المان‌ها نیست و همچنین برآورد ضریب شدت تنش بر مبنای تنش‌های با دقت قابل قبول انجام می‌گیرد. در تمامی مراحل آنالیز، شبکه اجزای محدود بدون توجه به مسیر ترک بدون تغییر باقی می‌ماند تا بتوان از مزایای روش اجزای محدود بسط‌یافته استفاده نمود. تا زمانی که خطای شبکه از حد قابل قبول بیشتر شود و تولید مجدد شبکه انجام گیرد. به این ترتیب ممکن است در ده مرحله رشد ترک نیاز به دو مرحله تولید مجدد شبکه گردد. شبکه تولیدی جدید بدون نیاز به تطابق با مسیر ترک تولید می‌شود.

مدل‌سازی عددی

در این بخش برای بیان صحت و کارایی تکنیک

روش گسترش ترک مجازی (Correlation Method)، روش انتگرال مجازی (Virtual crack extension method)، روش انتگرال بسته ترک اصلاح‌شده (Modified crack closure)، روش انتگرال متقابل (integral)، روش J-انتگرال، روش انتگرال متقابل (Interaction integral method) اشاره داشت [2]. در این مقاله از روش انتگرال متقابل برای برآورد ضریب شدت تنش استفاده شده است.

روش انتگرال متقابل یکی از دقیق‌ترین روش‌ها برای محاسبه فاکتور شدت تنش می‌باشد. این روش به نوعی روش J-انتگرال را ارتقا می‌دهد و با استفاده از یک میدان کمکی می‌تواند پارامتر J را به دقت و به سادگی محاسبه نماید.

انتگرال اندرکنش متقابل M برای اجسام الاستیک توسط پائولینو در سال ۲۰۰۴ ارائه گردید [10]. مزیتی که این روش نسبت به سایر روش‌ها دارد این است که هم‌زمان و با یک انتگرال‌گیری پارامتر فاکتور شدت تنش در هر دو مود محاسبه می‌گردد. در این روش بایستی یک فضای کمکی متأثر از تنش و کرنش در مسئله تعریف نمود. این فضای کمکی به نحوی در مسئله تعیین می‌گردد که معادلات تعادل و شرایط مرزی بدون نیرو بر روی سطح ترک در منطقه A^* را ارضا نماید. A^* مساحت معادلی است که در آن انتگرال گرفته می‌شود. در این روش انتگرال J از ترکیب انتگرال مسئله اصلی و مسئله کمکی و انتگرال اندرکنش به دست می‌آید:

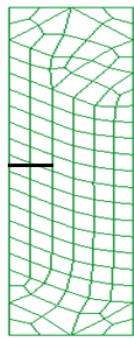
$$J = J^{act} + J^{aux} + M \quad (8)$$

جملات J^{act} و J^{aux} مربوط به وضعیت واقعی و کمکی است و M نیز انتگرال متقابل می‌باشد که مقدار آن برابر است با:

$$M = \int_{A^*} [\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - W M \delta_{ij}] \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Gamma \quad (9)$$

برای ارتباط انتگرال اندرکنش و ضریب شدت تنش از تعریف ضریب زیر استفاده می‌شود [10].

برای نشان دادن کارایی تکنیک ارائه شده مسئله یک مرتبه تنها با روش اجزای محدود بسط یافته و بدون ترکیب با روش تطابقی انجام شده است و بار دوم در ترکیب دو روش صورت پذیرفته است. شبکه اولیه ای که برای آنالیز اجزای محدود بسط یافته استفاده شده است، در شکل (۵) نشان داده شده است. در این شکل مشخص است که ترک از بین المان ها عبور کرده است.



شکل ۵ شبکه اجزای محدود بسط یافته اولیه

معیاری که برای رشد ترک در هر دو فاز در نظر گرفته شده است براساس معیار حداکثر تنش محیطی می باشد که در آن زاویه انحراف ترک بر مبنای ضریب شدت تنش دو مود شکست به صورت زیر محاسبه می شود [11].

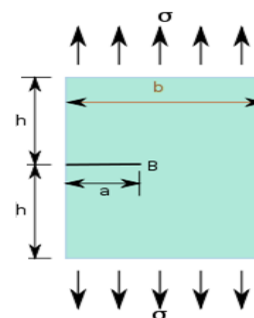
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \quad (12)$$

تخمین خطا در هر مرحله از رشد ترک صورت گرفته است ولی اصلاح شبکه ای انجام نشده است و در نتیجه با رشد ترک میزان خطا افزایش یافته و از مقدار خطای هدف ۱۵ درصد نیز فراتر رفته است که نمودار تغییرات آن در شکل (۶) آورده شده است. علت این امر حرکت نقاط حساس مسئله (منطقه اطراف ترک) با رشد ترک می باشد. چون منطقه ریزشده قبلی دیگر با نقاط حساس جدید مسئله منطبق نیستند خطای حل شروع به افزایش می نماید که با اصلاح مجدد شبکه این مسئله

معرفی شده دو مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته اند. این دو مثال از مسائل کلاسیک مکانیک شکست هستند و ضرایب شدت تنش آن به صورت تحلیلی نیز موجود می باشد. برای آنالیز اجزای محدود از المان چهارگوش چهارگوشی استفاده شده است و انتگرال گیری اصلاح شده با چهار نقطه گاوس صورت گرفته است. فرایند اصلاح مش نیز براساس معیار ارائه شده در بند ۲ صورت گرفته است. همچنین خطای هدف در هر دو مسئله برابر ۱۵ درصد در نظر گرفته شده است. مثال نخست، مسئله ترک لبه ای تحت کشش و مثال دوم، ترک میانی ۴۵ درجه تحت کشش در نظر گرفته شده است. در مثال اول تنها مود اول فعال شده است اما مثال دوم مسئله ترکیب مودها می باشد و کارایی این تکنیک را در زمان فعال شدن هر دو مود شکست نشان می دهد.

ورق مستطیلی با ترک لبه ای

در این مثال یک ورق مستطیلی به طول $b = 25\text{cm}$ و ارتفاع $2h = 100\text{cm}$ مدل سازی شده است که دارای یک ترک لبه ای به طول اولیه $a = 8\text{cm}$ می باشد (شکل ۴). نمونه مورد نظر از دو طرف با تنش یکنواخت $\sigma = 1\text{kg/cm}^2$ کشیده می شود. برای رشد ترک نیز در هر مرحله یک گام رشد ترک به طول 2cm در نظر گرفته شده است. پارامترهای مکانیکی نظیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون، به ترتیب برابر $E = 1000\text{kg/cm}^2$ و $\nu = 0.3$ می باشند.



شکل ۴ ورق مستطیلی با ترک لبه ای

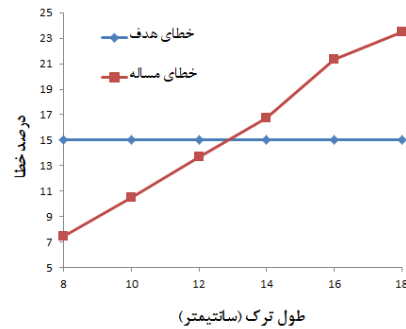
در هر مرحله از رشد ترک مقدار ضریب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال متقابل محاسبه شده و در جدول (۱) آورده شده است. همچنین این مقدار با مقدار تحلیلی این مود که از رابطه زیر به دست می آید [11] مقایسه شده است.

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$\alpha = \left[1.12 - 0.23 \left(\frac{a}{b} \right) + 10.6 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 21.7 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 30.4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right] \quad (13)$$

بدیهی است که در این مسئله مود دوم فعال نشده است و ضریب شدت تنش آن صفر است.

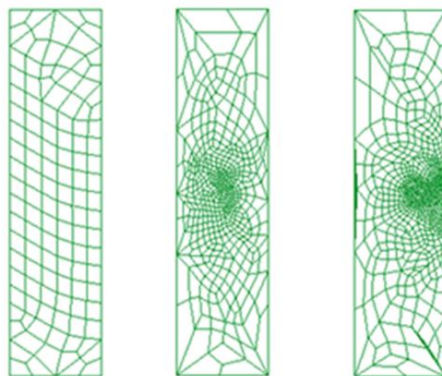
بر طرف می شود.



شکل ۶ تغییرات خطا با رشد ترک بدون اصلاح شبکه

جدول ۱ مقادیر ضرایب شدت تنش بدون ترکیب روش‌ها

مرحله	درصد خطا	KI تحلیلی	KI عددی	KI عددی	مختصات نوک ترک
اول	۷,۴۷۲	۸,۶۹۱۳	۷,۵۵	۰,۳۶۵۶	(۹,۹۹ و ۹,۹۰)
دوم	۱۰,۵۱	۱۱,۷۷۸	۹,۷۳	-۰,۵۴۸۰	(۱۱,۹۹ و ۹,۹۳)
سوم	۱۳,۶۹	۱۶,۲۵۷	۱۳,۲۸	-۰,۲۴۲۵	(۱۳,۹۸ و ۰,۰۴)
چهارم	۱۶,۷۴	۲۲,۹۸۹	۱۸,۲۰	۱,۰۶۴۹	(۱۵,۹۸ و ۹,۹۱)
پنجم	۲۱,۳۷	۳۳,۲۱۹	۳۰,۲۰	۴,۶۶۸۳	(۱۷,۸۵ و ۹,۲۱)
ششم	۲۳,۵۲	۴۷,۶۳۹	۳۲,۶۶	-۳,۱۹۱۵	(۱۹,۸۲ و ۸,۸۸)



گام ۶ اصلاح یافته گام ۴ اصلاح یافته تا ۶ گام ۱ الی ۴

شکل ۷ شبکه اصلاح شده در طول رشد ترک

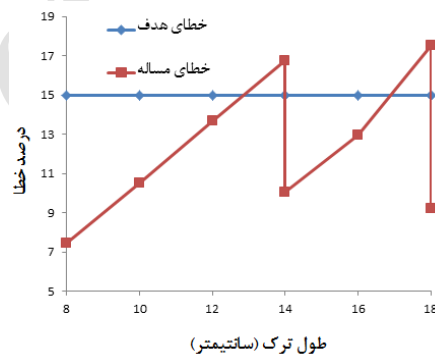
با مقایسه مقادیر جداول (۱ و ۲) واضح است که استفاده از روش ترکیبی به مقدار قابل توجهی خطای محاسبه ضرایب شدت تنش را کاهش می‌دهد و مسیر رشد ترک را با دقت بالاتری پیدا می‌کند. لازم به ذکر است با توجه به آنالیز خطی مسئله، آنالیز مجدد روی تمامی شبکه‌ها انجام گرفته است و نیازی به فرایند انتقال اطلاعات نمی‌باشد.

ورق مربعی با ترک مورب

مدل سازی دوم عددی مورد بررسی ترک مورب ۴۵ درجه در داخل یک ورق مربعی می‌باشد که تحت کشش قرار دارد. این مسئله به این لحاظ اهمیت دارد که یک مسئله مود ترکیبی است که هر دو مود در آن فعال می‌شوند و کارایی تکنیک ارائه شده در این گونه مسائل را نشان می‌دهد. در این مثال عرض صفحه $b = 50\text{cm}$ و ارتفاع $2h = 50\text{cm}$ در نظر گرفته می‌شود. طول اولیه ترک نیز $a = 10\sqrt{2}\text{cm}$ می‌باشد. نمونه مورد نظر از دو طرف با تنش یکنواخت برابر $\sigma = 1\text{kg/cm}^2$ کشیده می‌شود. برای رشد ترک نیز در هر مرحله یک گام با طول 2cm در نظر گرفته شده است. سایر پارامترهای مکانیکی نظیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب برابر $E = 1000\text{Kg/cm}^2$ و $\nu = 0.3$ می‌باشند (شکل ۹).

حال در مرحله دوم ترکیب روش‌های اجزای محدود بسط یافته و تطابقی انجام گرفت و ملاحظه گردید که در دو مرحله از رشد ترک، خطا از حد مجاز ۱۵ درصد فراتر رفت و نیاز به اصلاح شبکه وجود دارد. شبکه اصلاح شده در این دو مرحله در شکل (۷) نشان داده شده است که تراکم المان‌ها در نوک ترک هر مرحله، نشان می‌دهد روش تطابقی به خوبی نقاط حساس مسئله را یافته و شبکه مناسبی تولید کرده است.

میزان تغییرات خطا در مراحل مختلف رشد ترک در شکل (۸) آورده شده است که ملاحظه می‌شود در مرحله‌ای که خطا بالای خطای هدف است، اصلاح شبکه منجر به افت خطا شده است. حال با روش ترکیبی مجدداً برآورد ضریب شدت تنش انجام شده است که نتایج و مقایسه آن با مقادیر تحلیلی در جدول (۲) نشان داده شده است.



شکل ۸ تغییرات خطا با رشد ترک با روش ترکیبی

جدول ۲ مقادیر ضرایب شدت تنش با ترکیب روش‌ها

مرحله	درصد خطا	KI تحلیلی	KI عددی	KII عددی	مختصات نوک ترک
اول	۷,۴۷	۸,۶۹۱	۷,۵۵۴	۰,۳۶۵	(۹,۹۹ و ۴۹,۹۰)
دوم	۱۰,۵۱	۱۱,۷۷۸	۹,۷۳۶	-۰,۵۴۸	(۱۱,۹۹ و ۴۹,۹۳)
سوم	۱۳,۶۹	۱۶,۲۵۷	۱۳,۲۸۶	-۰,۲۴۲	(۱۳,۹۸ و ۵۰,۰۴)
چهارم	۱۶,۷۴	۲۲,۹۸۹	۱۸,۲۰۸	۱,۰۶۴	-
چهارم اصلاح شده	۱۰,۰۲	۲۲,۹۸۹	۲۰,۳۶۳	۰,۵۱۷	(۱۵,۹۸ و ۵۰,۰۴)
پنجم	۱۲,۹۵	۳۳,۲۳۸	۳۰,۷۳۴	۱,۱۶۸	(۱۷,۹۸ و ۴۹,۸۹)
ششم	۱۷,۵۵	۴۸,۶۰۰	۳۲,۵۸۵	۶,۱۱۹	-
ششم اصلاح شده	۹,۲۰	۴۸,۶۰۰	۴۷,۹۰۱	-۱,۶۲۳	(۱۹,۹۸ و ۴۹,۸۸)

به دست می‌آید [11] مقایسه شده است و در جداول ۳ و ۴ آورده شده است. باتوجه به وجود دو نوک ترک در مسئله این برآورد برای هر دو نوک ابتدایی و انتهایی انجام شده است.

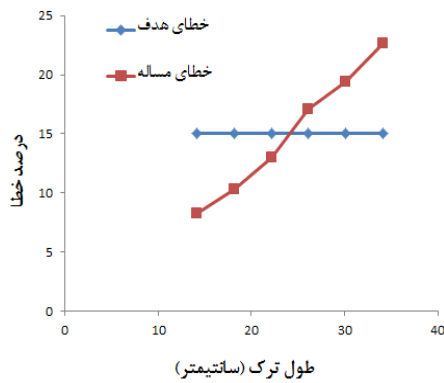
$$K_I = K_{II} = 0.5\sigma\sqrt{\pi a} \quad (14)$$

جدول ۳ مقادیر ضرایب شدت تنش با شبکه اولیه

نوک ابتدای ترک		نوک انتهای ترک		تحلیلی	
KII	KI	KII	KI	KII	KI
۲.۶۸	۲.۷۱	۲.۵۶	۲.۶۲	۲.۳۵	۲.۳۵

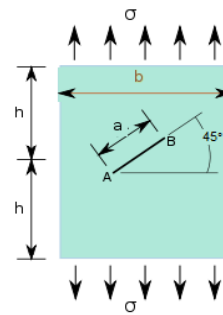
جدول ۴ مقادیر ضرایب شدت تنش با شبکه اصلاح شده

نوک ابتدای ترک		نوک انتهای ترک		تحلیلی	
KII	KI	KII	KI	KII	KI
۲.۵۶	۲.۴۸	۲.۳۸	۲.۵۴	۲.۳۵	۲.۳۵



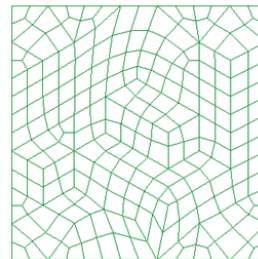
شکل ۱۲ تغییرات خطا با رشد ترک بدون اصلاح شبکه

نتایج دو جدول حاکی از افزایش دقت پس از اعمال اصلاح شبکه می‌باشد. پس از محاسبه ضرایب شدت تنش فرایند رشد ترک انجام گردید که مشاهده شد ترک از حالت مورب شروع به چرخش به صورت مستقیم کرد. فرایند رشد ترک با روش اجزای محدود بسط یافته تنها نشان دهنده افزایش خطا در مراحل مختلف رشد ترک می‌باشد که در شکل (۱۲) نشان داده شده است.

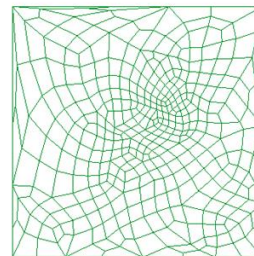


شکل ۹ ورق مربعی با ترک مورب

مطابق مثال قبل این مسئله نیز به دو صورت آنالیز می‌شود؛ بار نخست با اعمال روش اجزای محدود بسط یافته تنها و مرحله دوم با اعمال روش ترکیبی. از آنجایی که مقدار تحلیلی ضریب شدت تنش فقط در مرحله اول و قبل از رشد ترک موجود می‌باشد لذا برای بیان هم‌گرایی ضریب شدت تنش، گام اول یک بار با مش اولیه و بار دوم با مش اصلاح شده حل می‌شود که این دو شبکه در شکل‌های (۱۰ و ۱۱) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰ شبکه اجزای محدود بسط یافته اولیه

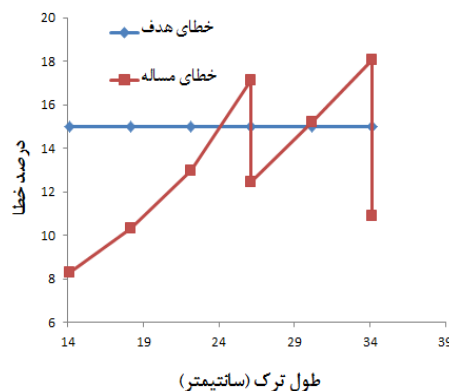


شکل ۱۱ شبکه اجزای محدود بسط یافته اصلاح شده

مقادیر ضرایب شدت تنش با استفاده از هر دو شبکه محاسبه شده است و با مقدار تحلیلی آن که از رابطه (۱۴)

در روش اجزای محدود بسط یافته کنترلی بر روی میزان خطای مسئله وجود ندارد، و در روش اجزای محدود تطابقی با هر گام از رشد ترک شبکه متناسب با مسیر ترک باید دوباره از ابتدا تشکیل شود. با ترکیب این دو روش می توان به شدت این مشکلات را کاهش داد. به این صورت که مدل سازی هندسه ترک با روش بسط یافته انجام شود و ترک از داخل المان ها عبور کند و دیگر با رشد ترک شبکه تغییر نکند. ولی در هر گام از مسئله که خطای حل بیش از حد قابل قبول گردد، فرایند اصلاح مش صورت پذیرد. این تولید مجدد شبکه کاملاً مستقل از دنبال کردن مسیر ترک است و ممکن است در چند مرحله از رشد ترک، مسئله با یک شبکه یکسان حل شود. نتایج مدل سازی های عددی نشان دادند که در صورت ترکیب این روش ها، خطای حل به میزان قابل توجهی کاهش می یابد و برآورد ضرایب شدت تنش با دقت بیشتری انجام خواهد شد. این تکنیک هم در ترک های تک مود و هم در مودهای ترکیبی قابلیت برآورد دقیق را نشان داده است.

درحالی که با ترکیب روش با اجزای محدود تطابقی در دو مرحله (گام های ۴ و ۶ رشد ترک) مقدار خطای مسئله در محدوده مجاز نگه داشته شده است که در شکل (۱۳) نمایش داده شده است.



شکل ۱۳ تغییرات خطا با رشد ترک با روش ترکیبی

نتیجه گیری

روش اجزای محدود بسط یافته و روش اجزای محدود تطابقی هر کدام قابلیت های بالایی برای حل مسائل آنالیز ترک دارند، ولی در مقابل دارای نقاط ضعفی نیز می باشند.

مراجع

1. Melenk, JM., Babuška, I, "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications", *Comp Methods Appl Mech Eng.* Vol. 139, No. 1, pp. 289-314, (1996).
2. Mohammadi, S., "Extended Finite Element, Method for Fracture Analysis of Structures", 1st edn. Blackwell Publishing Ltd. (2008).
3. Sundararajan, N., "Enriched Finite Element Methods: Advances & Applications", Cardiff University. (2011).
4. Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T., "A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing", *Int. J. Numer. Methods Eng.* Vol. 46, No. 1, pp. 133-150, (1999).
5. Dolbow, J., "An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics", Northwestern university, (1999).
6. Babuška, I., Rheinboldt, W.C., "A-posteriori Error estimates for the Finite Element Method", *Int. J. Numer. Methods Eng.* Vol. 12, No. 10, pp. 1597-1615, (1978).

7. Zienkiewicz, O.C., Boroomand, B., Zhu, J.Z., Recovery Procedures in Error Estimation and Adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems. *Comp Methods Appl Mech Eng.* Vol. 176, No. 1, pp. 111-125, (1999).
8. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., "The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics", Butterworth-heinemann, (2005).
9. Sih, G., Paris, C.P., Irwin, G.R., "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies", *Int. J. of Fract Mech.* Vol. 1, No. 3, pp. 189-203, (1965).
10. Paulino., GH., Kim, J.H., A New Approach to Compute T-stress in Functionally Graded Materials by means of the Interaction Integral Method on Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies, *Eng. Fract Mech*, Vol. 71, No. 1, pp. 1907-1950, (2004).
11. Unger, J.F., Eckardt, S., Könke, C., Modelling of Cohesive Crack Growth in Concrete Structures with the Extended Finite Element, *Comp Methods Appl Mech Eng.* Vol. 196, No. 4, pp. 4087-4100, (2007).

Archive of SID