

رابطه‌سازی نوین برای جرم ساختگی در روش رهایی پویای لزج*

ایمان زردی^(۱)جواد علامتیان^(۲)

چکیده در این مقاله رابطه‌سازی نوینی برای جرم ساختگی در روش رهایی پویای لزج پیشنهاد می‌گردد. نخست معادله‌های خطا برای تکرارهای رهایی پویا ارائه می‌شود. سپس، با استفاده از نگره گرشگورین بهبود یافته، کران‌های جدیدی برای کمیت جرم ساختگی به دست می‌آید. رابطه‌سازی پیشنهادی به الگوریتم جدیدی برای روش رهایی پویای لزج منجر می‌گردد. برای سنجش کارایی عددی فرایند پیشنهادی، سازه‌های مختلفی مانند خریا و قاب‌های دو بعدی و سه بعدی، با رفتارهای خطی و غیرخطی هندسی تحلیل می‌شوند. نتایج این تحلیل‌ها نشان می‌دهد که استفاده از الگوریتم ارائه‌شده و رابطه نوین پیشنهادی برای جرم ساختگی، نرخ همگرایی روش رهایی پویای لزج را بهبود می‌دهد، به گونه‌ای که همگرایی با تعداد کمتری تکرار انجام می‌پذیرد.

واژه‌های کلیدی روش رهایی پویا، میرایی لزج، جرم ساختگی، رفتار غیرخطی، نیروی نامیزان، نرخ همگرایی.

A New Formulation for Fictitious Mass in the Viscous Dynamic Relaxation Method

I. Zardi

J. Alamatian

Abstract In this paper, new algorithm is proposed for fictitious mass of Dynamic Relaxation (DR) method with viscous damping. First, the incremental equations are derived for DR procedure. By using the transformed Gershgörin theory, new boundaries are achieved for fictitious mass. This formulation leads to a new algorithm for viscous DR method. For evaluating the efficiency of the proposed method, some 2D and 3D truss and frame structures are analyzed by elastic linear and geometrically nonlinear behaviors. Results show that the proposed scheme for fictitious mass improves the convergence rate of DR method so that the suggested algorithm presents the structural response with less iteration in comparison with other common DR techniques.

Key Words Dynamic Relaxation Method, Viscous Damping, Fictitious Mass, Nonlinear Behavior, Residual Energy, Convergence Rate.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۴/۱۱/۱۹ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۹/۲۱ می‌باشد.

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد.

(۲) نویسنده مسئول: دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد. Email: alamatian@mshdiau.ac.ir

مقدمه

نیروی داخلی و بار خارجی سازه می‌باشند. برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها، دو رویکرد وجود دارد؛ روش‌های صریح و ضمنی. فرایند تکراری رهایی پویا که در دسته روش‌های صریح قرار دارد، از عملیات برداری برای تحلیل سازه و یافتن پاسخ دستگاه معادله‌های (۱) بهره می‌برد. این ویژگی سبب افزایش کارایی، کاهش حافظه موردنیاز و سادگی محاسبه‌ها می‌گردد. روش‌های پویا، براساس وجود یا عدم وجود میرایی، به ترتیب، در دو دسته روش‌های پویای لزج و جنبشی جا می‌گیرد. در روش‌های پویای جنبشی، سازه به یک محیط دینامیکی مجازی (ساختگی)، که فاقد میرایی است، منتقل می‌شود. به دلیل نبودن نیروهای میرایی در این محیط دینامیکی مجازی، فرض پایستار بودن انرژی مکانیکی سازه برقرار است؛ زیرا همه نیروهای موجود در این فضای دینامیکی مجازی (شامل نیروهای داخلی اعضا و نیروهای اینرسی)، پایستار می‌باشند. در روش‌های پویای جنبشی از ویژگی پایستاری این سامانه دینامیکی مجازی استفاده می‌گردد؛ به گونه‌ای که نقاط با بیشینه کارمایه جنبشی در نزدیکی تعادل ایستا قرار می‌گیرند [1]. در فن‌های پویای لزج، با فرض میرایی ساختگی برای سازه، سامانه از فضای ایستا به فضای پویای ساختگی منتقل می‌شود. به دلیل وجود میرایی ساختگی و عدم وجود بار پویا، پاسخ گذرا پس از مدتی از بین می‌رود و در نهایت پاسخ حالت پایدار دستگاه باقی می‌ماند. بنابراین، با انتقال سامانه از فضایی ایستا به پویا، رابطه (۱)، به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$M^n \ddot{D}^n + C^n \dot{D}^n + S^n D^n = F^n = P^n \quad (2)$$

در این رابطه $M^n = [m_{ij}^n]$ و $C^n = [c_{ij}^n]$ ، به ترتیب، ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی، قطری و به ابعاد $q \times q$ می‌باشند. بالانویس n نشان‌دهنده شماره تکرار است. همچنین \dot{D} و \ddot{D} ، به ترتیب، بردارهای سرعت و شتاب سازه می‌باشند.

از سال ۱۹۶۵ که روش‌های پویا توسط اتر [2] یا دی [3] معرفی گردید، تاکنون از این روش در حل مسائل

هدف از تحلیل یک سازه، محاسبه تغییر مکان‌ها و تنش‌های پدید آمده در عضوهای آن، تحت اثر بارهای اعمالی می‌باشد. در این میان، می‌توان تنش‌ها را برحسب تغییر مکان‌های گرهی نوشت. در نتیجه، تغییر مکان‌های گرهی به عنوان مجهول اصلی از تحلیل سازه به دست می‌آیند. برای رسیدن به این هدف، دو نوع تحلیل خطی و غیرخطی (غیرخطی مواد، هندسی و تکیه‌گاهی) وجود دارد. اگر ماتریس سختی مستقل از تغییر مکان‌های گرهی باشد، تحلیل خطی است. در غیر این صورت، تحلیل غیرخطی می‌باشد. باید دانست، چنانچه، ماتریس سختی سازه در هنگام تحلیل تغییر کند، رفتار آن سازه غیرخطی خواهد بود. منشأ ایجاد رفتارهای غیرخطی را می‌توان به سه دسته غیرخطی مواد، هندسی و تکیه‌گاهی تقسیم کرد. عامل غیرخطی مواد ناشی از ویژگی‌های ذاتی مصالح سازه و تغییر شکل‌های مومسان آن است. رابطه غیرخطی تنش - کرنش، جاری شدن مواد و تغییر شکل‌های ماندگار ناشی از باربرداری سبب ایجاد این رفتار می‌گردند. از سوی دیگر، در حالت غیرخطی هندسی تغییر شکل‌های سازه بزرگ در نظر گرفته می‌شود. در این نوع تحلیل، شکل هندسی سازه در هر مرحله تغییر می‌کند. این رفتار هنگامی پدید می‌آید که تغییر مکان‌ها، دوران‌ها و یا کرنش‌های سازه بزرگ باشند. چنانچه شرایط تکیه‌گاهی سازه در هنگام بارگذاری تغییر کنند، رفتار غیرخطی تکیه‌گاهی پدید می‌آید. در این پژوهش، نمونه‌های عددی با رفتار غیرخطی هندسی تحلیل می‌شوند. دستگاه معادله‌های حاکم بر رفتار سازه‌های ایستا که با استفاده از رابطه - سازی اجزای محدود یا تفاوت‌های محدود به دست می‌آید، به صورت زیر است:

$$SD = F = P \quad (1)$$

در این رابطه، $S = [S_{ij}]$ ماتریس سختی سازه است که متقارن و به ابعاد $q \times q$ می‌باشد. کمیت q ، تعداد درجه‌های آزادی سازه است. همچنین، $D = \{d_i\}$ ، $F = \{f_i\}$ و $P = \{p_i\}$ ، به ترتیب، بردارهای تغییر مکان،

جدیدی برای تحلیل پس‌کمانشی ارتجاعی و غیرارتجاعی سازه‌های خرابی پیشنهاد کردند [12]. برای تخمین باربحرانی در صفحات ارتجاعی که تحت اثر نیروهای درون‌صفحه‌ای می‌باشند، زانگ و کدخدایان رابطه‌هایی تقریبی ارائه کردند [13]. پارک و همکارانش براساس روش طول قوس و استفاده از فن‌رهای پویای جنبشی، تعادل پس‌کمانشی سازه‌ها را بررسی نمودند [14].

الگوریتم‌های گوناگونی برای روش‌های پویا ارائه شده است. همچنین، رابطه‌های مختلفی برای تخمین عامل‌های تکراری موجود در آن پیشنهاد گردیده است. بنس با استفاده از ایده خود که استفاده از اصل ریلی و بردار نیروی تابع جرم بود، توانست تخمین مناسبی برای عامل میرایی بحرانی ارائه دهد [15]. کسل و هابز از تئوری گرشگورین برای تخمین عامل‌های متغیر در روش‌های پویا بهره بردند [16]. با استفاده از تحلیل خطا و نگره گرشگورین، پاپادراکاکیس فرایندی خودکار برای تخمین عامل‌های متغیر و تکراری روش‌های پویا ارائه نمود [17]. برپایه گسترش دنباله تیلور، پژند و حکاک رابطه‌هایی ارائه کردند که سبب کاهش تکرارها در روش‌های پویا گردید [18]. توری و همکارانش با کمینه‌سازی نیروی باقی‌مانده پس از هر تکرار، گام زمانی اصلاح‌شده‌ای ارائه نمودند [19]. رضایی پژند و علامتیان الگوریتم تصحیح‌شده‌ای براساس کمینه‌سازی خطای تغییرمکان بین دو تکرار پیاپی، پیشنهاد کردند [20]. رضایی پژند و سرافرازی الگوریتم جدیدی برای روش‌های پویا پیشنهاد نمودند به گونه‌ای که نیازی به ماتریس میرایی و عامل‌های سرعت نداشت [21]. با استفاده از فرایند تکراری استودولا و کمینه‌سازی خطا بین دو تکرار پیاپی، رضایی پژند و همکارانش روشی برای به دست آوردن جرم و میرایی ساختگی بهینه معرفی نمودند [22]. همچنین، رضایی پژند و همکارانش با کمینه‌کردن نیروی باقی‌مانده، توانستند گام زمانی جدیدی ارائه کنند [23]. علامتیان براساس اجرای تحلیل نموی، رابطه جدیدی برای جرم ساختگی در الگوریتم روش‌های

گوناگونی استفاده شده است. پژوهشگران بسیاری این روش را گسترش داده‌اند. این پژوهش‌ها را می‌توان در چند دسته جا داد.

در راستای استفاده از روش‌های پویا در تحلیل سازه‌های مختلف، اثر این روش را برای محاسبه تنش‌ها و تغییرمکان‌ها در یک مخزن تحت فشار به کار برد [4]. همچنین، وی توانست یک مسئله سه‌بعدی ارتجاعی-پلاستیک سد قوسی را با استفاده از روش‌های پویا حل کند [2]. برو و برتوتون فن‌رهای پویا را برای تحلیل خطی و غیرخطی قاب‌ها استفاده کردند [5]. آنها با مقایسه راهکار‌های پویا با روش‌های دیگر، برتری این روش را در تحلیل خطی و غیرخطی قاب‌ها اثبات نمودند. لويس و جونز با کمک روش‌های پویا، به بررسی برهم‌کنش بین پوشش و شبکه در سقف‌های کابلی پیش‌تینده پرداختند [6]. در سال‌های اخیر، کمت و همکارانش براساس تئوری خزش، روش‌های پویای اصلاح‌شده‌ای برای تحلیل ایستا و غیرخطی گنبد‌های کابلی، ارائه نمودند [7].

از فن‌های پویا در تحلیل صفحات و پوسته‌ها بهره برده شده است. رشتن از آن، در تحلیل صفحات ارتجاعی که تحت بارگذاری جانبی هستند، بهره برد [8]. بر این اساس، تغییرشکل‌ها و لنگرهای ایجاد شده در صفحه، به دست می‌آیند. آلوار و رامانچاندرا فن‌های پویا را در مسئله تغییرشکل‌های بزرگ صفحات ایزوتروپیک به کار بردند [9]. رامش و کریشنامورتی با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های بزرگ، دوران‌ها و کرنش‌های کوچک به تحلیل صفحات و پوسته‌ها با بهره‌گیری از روش‌های پویا پرداختند [10]. بارنس توانست با استفاده از روش‌های پویا، فرایندی عددی برای پیش‌بینی رفتار کابل‌های با دهانه زیاد و همچنین پوسته‌های شبکه‌ای و غشاهای پیش‌تینده پیشنهاد دهد [11].

فن‌های پویا در مسائل مربوط به کمانش و پس‌کمانش سازه‌ها به کار رفته است. رامش و کریشنامورتی با استفاده از روش‌های پویا، الگوریتم

در اینجا، $R^n = \{r_i^n\}$ ، P^n و F^n ، به ترتیب، بردارهای نیروی نامیزان، بار خارجی و نیروی داخلی وارد به سازه و به ابعاد $q \times 1$ می‌باشند. با جایگزینی رابطه (۳) در (۴) و به دست آوردن $d_i^{n+\frac{1}{2}}$ ، می‌توان نوشت:

$$d_i^{n+\frac{1}{2}} = d_i^{n-\frac{1}{2}} + \left(\frac{\tau^n + \tau^{n+1}}{2m_{ii}^n}\right)r_i^n - c_{ii}^n d_i^n \left(\frac{\tau^n + \tau^{n+1}}{2m_{ii}^n}\right) \quad (5)$$

$$i=1,2,\dots,q$$

با استفاده از فرایند میانگین‌گیری سرعت‌ها و رابطه

(۵)، می‌توان نوشت:

$$d_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2m_{ii}^n - \tau^n c_{ii}^n}{2m_{ii}^n + \tau^n c_{ii}^n} d_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2\tau^n}{2m_{ii}^n + \tau^n c_{ii}^n} r_i^n \quad (6)$$

$$i=1,2,\dots,q$$

شایان توجه است، ماتریس جرم در روش رهایی پویا قطری فرض شده است. در نتیجه، نیازی به محاسبه وارون آن نیست. این نکته، سبب کاهش محاسبات می‌شود. در رابطه‌سازی روش رهایی پویا از فن تفاوت‌های محدود مرکزی استفاده می‌شود. براین اساس می‌توان نوشت:

$$d_i^{n+1} = d_i^n + \tau^{n+1} \dot{d}_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad i=1,2,\dots,q \quad (7)$$

رابطه (۷) را می‌توان به صورت برداری برای کل سازه نوشت:

$$D^{n+1} = D^n + \tau^{n+1} \dot{D}^{n+\frac{1}{2}} \quad (8)$$

با بهره‌گیری از رابطه‌های (۵) و (۷)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$d_i^{n+1} \left(1 + \frac{c_{ii}^n \tau^{n+1}}{2m_{ii}^n}\right) = d_i^n \left(1 + \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}\right) + d_i^{n-1} \left(\frac{c_{ii}^n \tau^{n+1}}{2m_{ii}^n} - \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}\right) + \frac{\tau^{n+1}(\tau^n + \tau^{n+1})}{2m_{ii}^n} r_i^n, \quad i=1,2,\dots,q \quad (9)$$

با دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۹) می‌توان نوشت:

$$dd_i^{n+1} \left(1 + \frac{c_{ii}^n \tau^{n+1}}{2m_{ii}^n}\right) = dd_i^n \left(1 + \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}\right) + dd_i^{n-1} \left(\frac{c_{ii}^n \tau^{n+1}}{2m_{ii}^n} - \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n}\right) + \frac{\tau^{n+1}(\tau^n + \tau^{n+1})}{2m_{ii}^n} \dot{d}_i^n, \quad i=1,2,\dots,q \quad (10)$$

پویای جنبشی ارائه نمود که نرخ همگرایی را افزایش می‌داد [1].

در این مقاله، نخست رابطه‌سازی تکراری برای دست‌یابی به معادله‌های خطا در روش رهایی پویای لزج ارائه می‌گردند. سپس، با ترکیب نگره دایره‌های گرشگورین بهبودیافته، رابطه نوینی برای جرم ساختگی در روش رهایی پویای لزج ارائه می‌گردد [1]. بر این اساس، الگوریتم جدیدی برای روش رهایی پویای لزج معرفی می‌گردد. در پایان، کارایی رابطه‌سازی و الگوریتم پیشنهادی، با تحلیل خطی و غیرخطی سازه‌های مختلف بررسی می‌شود.

رابطه‌های روش رهایی پویای لزج

روش رهایی پویا یک فرایند تابع اولیه‌گیری عددی است که برای یافتن پاسخ‌های دستگاه معادله (۱) به کار می‌رود. در این روش با داشتن داده‌ها در یک گام، کمیت‌های مجهول در گام بعدی به دست می‌آید. تابع اولیه‌گیری عددی با استفاده از روش تفاوت‌های محدود مرکزی انجام می‌پذیرد. بر این اساس، شتاب درجه آزادی i ام عبارت است از تغییر سرعت آن درجه آزادی در بازه زمانی بین دو نمو. کمیت تغییر سرعت درجه آزادی i ام بین دو نمو زمانی به صورت $\dot{d}_i^{n+\frac{1}{2}} - \dot{d}_i^{n-\frac{1}{2}}$ می‌باشد. بازه زمانی تغییر سرعت نیز میانگین دو گام زمانی پیاپی یعنی $\frac{\tau^n + \tau^{n+1}}{2}$ است. با تقسیم این دو کمیت بر یکدیگر، می‌توان نوشت:

$$\ddot{d}_i^n = \frac{2}{\tau^n + \tau^{n+1}} (\dot{d}_i^{n+\frac{1}{2}} - \dot{d}_i^{n-\frac{1}{2}}), \quad i=1,2,\dots,q \quad (3)$$

در اینجا، τ^n و τ^{n+1} ، به ترتیب، گام‌های زمانی n ام و $(n+1)$ ام می‌باشند. از سوی دیگر، می‌توان بردار نیروی نامیزان را که برابر تفاوت نیروی خارجی و داخلی است، با بهره‌گیری از رابطه‌های (۱) و (۲) به دست آورد:

$$M^n \ddot{D}^n + C^n \dot{D}^n = P^n - F^n = R^n \quad (4)$$

تغییر مکان از یک کوچک تر باشد تا نمو تغییر مکان به صفر میل کند و سیستم به وضعیت ایستا برسد. با تعریف نسبت گام زمانی α ، به صورت:

$$\alpha = \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n} \quad (13)$$

و با فرض قطری بودن ماتریس جرم ساختگی و انجام رابطه سازی بر اساس مقدار ویژه، می توان نوشت:

$$\frac{(\tau^n)^2 \sum_{j=1}^q S_{ij}^n dd_j^n}{m_{ii}^n} = \lambda_i dd_i^n \quad i=1,2,\dots,q \quad (14)$$

که در آن، λ مقدار ویژه ماتریس $M^1 S (\tau^n)^2$ یا همان مجذور فرکانس طبیعی سیستم پویای ساختگی می باشد [1]. با بهره گیری از رابطه های (۱۴) و (۱۲) در رابطه (۱۰)، معادله درجه دو زیر برای خطای تغییر مکان به دست می آید:

$$k_i^2 (1 + \frac{c_{ii}^n}{2m_{ii}^n} \tau^{n+1}) - k_i (1 + \alpha - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \lambda_i) - \frac{c_{ii}^n}{2m_{ii}^n} \tau^{n+1} + \alpha = 0, \quad (15)$$

$i=1,2,\dots,q$

بر اساس تعریف آندروود، رابطه بین ماتریس میرایی و جرم ساختگی در گام n ام، می تواند به صورت زیر بیان شود [24]:

$$c_{ii}^n = c^n m_{ii}^n, \quad C^n = c^n M^n \quad i=1,2,\dots,q \quad (16)$$

برای ساده سازی رابطه ها، از تغییر متغیر β استفاده می شود:

$$\beta = \frac{c_{ii}^n}{2m_{ii}^n} \tau^{n+1} = \frac{c^n}{2} \tau^{n+1}, \quad i=1,2,\dots,q \quad (17)$$

در این رابطه ها، c^n عامل میرایی در گام n ام می باشد. برای بررسی شرایط تضمین پایداری، نیاز به ریشه معادله (۱۵) که همان خطای تغییر مکان است، می باشد. با ساده سازی به کمک رابطه های (۱۶) و (۱۷) و فرض $\tau^{n+1} = 1$ ، ریشه معادله (۱۵) برابر است با:

$$k_i = \frac{(1 + \alpha - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \lambda_i) \pm \sqrt{\Delta_i}}{2(1 + \frac{c^n}{2} \tau^{n+1})}, \quad i=1,2,\dots,q \quad (18)$$

همان طور که مشخص است، k_i تابعی است از α ، c^n و λ_i . برای رسم نمودار تغییرات k_i ، می توان یکی از دو مقدار c^n و λ_i را ثابت و دیگری را متغیر در نظر

در اینجا، $d()$ به معنای دیفرانسیل می باشد. باید دانست، در رابطه سازی روش رهایی پویا، دیفرانسیل گیری در بازه کلی همگرایی انجام نمی شود؛ بلکه، این فرایند در هر نمو زمانی انجام می پذیرد. در این راستا، کمیت های روش رهایی پویا شامل، جرم، میرایی و گام زمانی در هر نمو ثابت فرض می شوند و تنها پاسخ سازه تغییر می کند. این شیوه رابطه سازی به این دلیل انجام می شود که محیط دینامیکی در روش رهایی پویا ساختگی می باشد. بنابراین، برای سادگی هرچه بیشتر محاسبات و صریح شدن آنها، می توان انواع فرض ها را در این محیط دینامیکی مجازی اعمال کرد. این گونه است که فرض هایی مانند قطری بودن ماتریس های جرم و میرایی و نیز ثابت بودن کمیت ها در هر نمو زمانی معنی می یابند. به عبارت دیگر، در هر نمو از روش رهایی پویا، با ثابت پنداشتن کمیت های جرم، میرایی و گام زمانی، شرایطی را فراهم می آورند تا تغییر مکان سازه، در کوتاه ترین زمان ممکن، به پاسخ حالت پایدار (استاتیکی) همگرا شود. از آنجا که تغییرات بار خارجی در تکرارهای رهایی پویا صفر است، بنابراین $dp_i = 0$ و تغییرات نیروی نامیزان برابر است با:

$$dr_i^n = -df_i^n = -\sum_{j=1}^q \frac{\partial f_i^n}{\partial d_j^n} \times dd_j^n = -\sum_{j=1}^q S_{ij}^n dd_j^n, \quad (11)$$

$i=1,2,\dots,q$

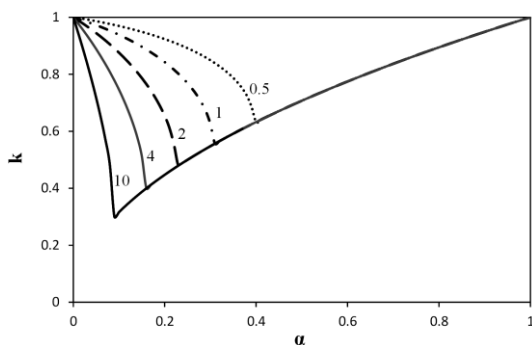
که در آن، $\frac{\partial f_i^n}{\partial d_j^n} = S_{ij}$ ، برابر i ژا امین درایه ماتریس سختی مماسی سازه s می باشد. با خطی پنداشتن تغییرات نمودی تغییر مکان بین دو تکرار پیاپی می توان نوشت:

$$dd_i^{n-1} = \frac{1}{k_i} dd_i^n, \quad dd_i^{n+1} = k_i dd_i^n, \quad i=1,2,\dots,q \quad (12)$$

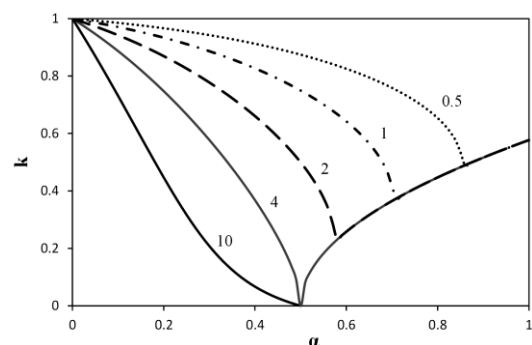
کمیت k_i ، نسبت نمو تغییر مکان درجه آزادی i ام و یا همان نمو خطای تغییر مکان است. باید دانست، خطا در گام n ام به صورت $d_i^n - d_i^{Exact}$ تعریف می شود که در آن d_i^{Exact} پاسخ درجه آزادی i ام است. با دیفرانسیل گیری از این خطا، نمو خطای تغییر مکان و نمو تغییر مکان با یکدیگر برابر خواهند شد؛ زیرا پاسخ دستگاه یگانه است و دیفرانسیل آن صفر می شود. برای تضمین پایداری روش، باید قدر مطلق نمو خطای

پویای لزوج، دامنه c^n یا عامل میرایی به صورت زیر است:

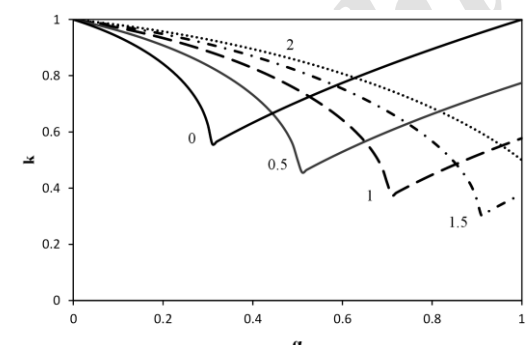
$$-2 \leq c^n \leq 2 \quad (19)$$



شکل ۱ تغییرات خطای تغییر مکان برای $c^n = 0$ و $0 \leq \lambda_i \leq 10$



شکل ۲ تغییرات خطای تغییر مکان برای $c^n = 1$ و $0 \leq \lambda_i \leq 10$



شکل ۳ تغییرات خطای تغییر مکان برای $0 \leq c^n \leq 2$ و $\lambda_i = 1$

شکل (۳) برای مقادیر مثبت عامل میرایی رسم شده است. براساس شکل (۳)، با افزایش عامل میرایی ساختمانی، نسبت گام زمانی بهینه افزایش و کمترین خطای تغییر مکان، کوچک‌تر می‌شود.

گرفت. اگر دلتای معادله (۱۵) مثبت باشد، دو ریشه حقیقی وجود دارد. برای رسم نمودارها از مقدار بزرگ‌تر استفاده شده است. دلیل این موضوع این است که کاهش خطا در روش رهایی پویا نمودی می‌باشد؛ در نتیجه، نمودارهای تغییر مکان به تدریج کاهش می‌یابد. از این رو، هنگامی که دو عامل برای نمودارهای تغییر مکان وجود داشته باشد، کمیت بزرگ‌تر حاکم خواهد بود به گونه‌ای که موقعیت جدید درجه آزادی مورد نظر، به مکان قبلی - اش، نزدیک‌تر باشد. اگر دلتا مساوی صفر و یا کوچکتر از صفر باشد، به ترتیب یک ریشه مضاعف و دو ریشه مختلط وجود دارد.

شکل (۱)، تغییرات خطای تغییر مکان (k_i) را در برابر نسبت گام زمانی α ، برای $c^n = 0$ نشان می‌دهد. بر این اساس، خطای تغییر مکان k_i زمانی کمینه می‌شود که دلتا برابر با صفر شود. در شکل (۱)، با کاهش مقدار ویژه، هر دو کمیت گام زمانی بهینه و خطای تغییر مکان افزایش می‌یابند. به عنوان نمونه، با افزایش مقدار ویژه از ۴ به ۱۰، مقدار نمودارهای تغییر مکان از حدود ۰/۴ به ۰/۳ کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، براساس تعریف مقدار ویژه که با رابطه (۱۴) انجام شده است، مقدار ویژه و جرم با یکدیگر رابطه وارون دارند؛ یعنی با افزایش مقدار ویژه، کمیت جرم کاهش می‌یابد. بنابراین، در هر درجه آزادی، هرچه مقدار ویژه بزرگ‌تر شود، جرم ساختمانی آن کمتر می‌گردد. در نتیجه، خطای تغییر مکان کوچک‌تر می‌شود. این نکته اهمیت در نظر گرفتن جرم ساختمانی کمینه را برای درجه‌های آزادی نشان می‌دهد.

اگر مقدار ویژه برای درجه آزادی i ام متغیر و عامل میرایی ساختمانی برابر با یک در نظر گرفته شود، شکل (۲) به دست می‌آید. همانند شکل (۱)، با کاهش مقدار ویژه، گام زمانی بهینه افزایش و خطای تغییر مکان بیشتر شده است.

چنانچه مقدار ویژه برای درجه آزادی i ام ثابت و برابر با یک، و عامل میرایی ساختمانی متغیر در نظر گرفته شود، شکل (۳) در دسترس قرار می‌گیرد. در روش رهایی

ریاضی قوی است و سبب کاهش زمان محاسبات می-شود. این نگره، مقدارهای ویژه ماتریس را به صورت زیر ارائه می دهد:

$$\left| \lambda_i - \frac{(\tau^n)^2 S_{ii}}{m_{ii}^n} \right| \leq \frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (24)$$

نگره دایره های گرشگورین یکی از برترین روش های تخمین مقدارهای ویژه ماتریس ها است. اما این نگره دارای نقاط ضعفی نیز می باشد. در این راستا می توان به ارائه مقدارهای منفی و یا صفر برای مقدارهای ویژه ماتریس، اشاره کرد. علامتین توانست با تقسیم نگره دایره های گرشگورین به سه محدوده زیر، نقطه ضعف نگره گرشگورین را برطرف کند [1]:

$$S_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}| \quad \text{محدوده I} \quad (25)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}| \leq S_{ii} < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}| \quad \text{محدوده II} \quad (26)$$

$$S_{ii} \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}|, \quad S_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}| \quad \text{محدوده III} \quad (27)$$

بر اساس نگره دایره های گرشگورین بهبود یافته، می-توان مقدار ویژه ماتریس را به صورت زیر تخمین زد:

$$\frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n} \left[S_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}| \right] \leq \lambda_i \leq \frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}| \quad \text{محدوده I} \quad (28)$$

$i = 1, 2, \dots, q$

$$\frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}| - S_{ii} \right] \leq \lambda_i \leq \frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}| \quad \text{محدوده II} \quad (29)$$

$i = 1, 2, \dots, q$

$$\frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n} S_{ii} \leq \lambda_i \leq \frac{(\tau^n)^2}{m_{ii}^n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |S_{ij}| \quad \text{محدوده III} \quad (30)$$

$i = 1, 2, \dots, q$

از آنجا که لازم است رابطه های (28)، (29) و (30)، شرط مرزی (23) را برقرار کنند، محدوده زیر برای جرم

اکنون می توان شرط پایداری را به دست آورد. تکرارها هنگامی پایدار می باشند که دلتای رابطه (15) مساوی با صفر شود. با به دست آوردن مقدار ویژه (λ_i) از شرط پایداری ($\Delta_i = 0$)، می توان نوشت:

$$\lambda_i = \frac{2[(1+\alpha) \pm 2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}]}{(\alpha)(1+\alpha)}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (20)$$

با جای گذاری λ_i از رابطه (20) در (18)، نسبت نمودی تغییر مکان ها به دست می آید:

$$k_i = \pm \frac{\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}}{(1+\beta)}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (21)$$

شرط لازم برای پایداری تکرارها این است که قدر مطلق خطای تغییر مکان همواره از یک کوچک تر باشد. بر این اساس، محدوده زیر که در آن پایداری روش رهایی پویای لزج تضمین شود، به دست می آید:

$$\alpha < 1 + 2\beta \quad (22)$$

برای به دست آوردن مرزهای λ_i ، از رابطه (20) استفاده می شود. بنابراین، محدوده قابل قبول برای مقدارهای ویژه سیستم پویای ساختگی که در آن پایداری روش تضمین می شود، به صورت زیر است:

$$\frac{2[(1+\alpha) - 2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}]}{(1+\alpha)} \leq \frac{\tau^{n+1}}{\tau^n} \lambda_i \leq \frac{2[(1+\alpha) + 2\sqrt{(1+\beta)(\alpha-\beta)}]}{(1+\alpha)}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (23)$$

نگره دایره های گرشگورین بهبود یافته

یکی از راه های تخمین مقدارهای ویژه ماتریس ها، استفاده از نگره دایره های گرشگورین می باشد. در روش رهایی پویا مقدارهای ویژه، همان دوره های تناوب طبیعی دستگاه دینامیکی ساختگی می باشند [1]. با استفاده از این نگره و در نظر گرفتن شرایط پایداری، می توان ماتریس جرم ساختگی را به دست آورد. این روش دارای پایه های

$$\sum_{i=1}^q |S_{ij}| \quad (38)$$

$$\gamma_i = \frac{z^{i+1}}{S_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, q$$

با حل سه معادله (۳۵)، (۳۶) و (۳۷)، محدوده نسبت گام زمانی (a)، به دست می‌آید. این نابرابری‌ها، محدوده پذیرفتنی برای نسبت گام زمانی را که در آن پایداری روش تضمین می‌شود، ارائه می‌دهند:

$$\frac{2 + 2\beta - \gamma_i^2 - 2(1 + \beta)\sqrt{1 - \gamma_i^2}}{\gamma_i^2} \leq \alpha \quad (39)$$

$$\leq \frac{2 + 2\beta - \gamma_i^2 + 2(1 + \beta)\sqrt{1 - \gamma_i^2}}{\gamma_i^2}$$

$i = 1, 2, \dots, q$

I برای محدوده

$$-1 + 2\gamma_i^2 + 2\beta\gamma_i^2 - 2(1 + \beta)\gamma_i\sqrt{1 - \gamma_i^2} \leq \alpha \leq -1 + 2\gamma_i^2 + 2\beta\gamma_i^2 + 2(1 + \beta)\gamma_i\sqrt{1 - \gamma_i^2} \quad (40)$$

$i = 1, 2, \dots, q$

II برای محدوده

$$\frac{8 + 8\beta + 8\gamma_i + 8\beta\gamma_i + \gamma_i^2 + 2\beta\gamma_i^2 - 4(1 + \beta)\sqrt{\gamma_i^3 + 5\gamma_i^2 + 8\gamma_i + 4}}{\gamma_i^2} \leq \alpha \leq \frac{8 + 8\beta + 8\gamma_i + 8\beta\gamma_i + \gamma_i^2 + 2\beta\gamma_i^2 + 4(1 + \beta)\sqrt{\gamma_i^3 + 5\gamma_i^2 + 8\gamma_i + 4}}{\gamma_i^2} \quad (41)$$

$i = 1, 2, \dots, q$

III برای محدوده

برای افزایش نرخ همگرایی، از کمترین مقدار به دست آمده از رابطه‌های (۳۹)، (۴۰) و (۴۱)، استفاده می‌شود:

$$\alpha = \min_i \begin{cases} \frac{2 + 2\beta - \gamma_i^2 - 2(1 + \beta)\sqrt{1 - \gamma_i^2}}{\gamma_i^2} & \text{I} \\ -1 + 2\gamma_i^2 + 2\beta\gamma_i^2 - 2(1 + \beta)\gamma_i\sqrt{1 - \gamma_i^2} & \text{II} \\ \frac{8 + 8\beta + 8\gamma_i + 8\beta\gamma_i + \gamma_i^2 + 2\beta\gamma_i^2 - 4(1 + \beta)\sqrt{\gamma_i^3 + 5\gamma_i^2 + 8\gamma_i + 4}}{\gamma_i^2} & \text{III} \end{cases} \quad (42)$$

$i = 1, 2, \dots, q$

نسبت گام زمانی در روش رهایی پویا از اهمیت بالایی برخوردار است؛ زیرا، این نسبت برای همه درجه‌های آزادی سازه یکسان است و اثر مستقیمی بر نرخ همگرایی روش رهایی پویا دارد. براساس رابطه (۴۲)، نسبت گام زمانی تابعی از عامل میرایی ساختگی (c^n) است. بنابراین، در هر تکرار رهایی پویا، این نسبت متغیر می‌باشد. با به دست آوردن نسبت گام زمانی (α) از رابطه

ساختگی به دست می‌آید:

I محدوده

$$\frac{(1 + \alpha)\tau^{n+1}\tau^n}{2[(1 + \alpha) + 2\sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)}]} \sum_{j=1}^q |S_{ij}| \leq m_i^n \leq \frac{(1 + \alpha)\tau^{n+1}\tau^n}{2[(1 + \alpha) - 2\sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)}]} \left[S_i - \sum_{j=1}^q |S_{ij}| \right] \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (31)$$

II محدوده

$$\frac{(1 + \alpha)\tau^{n+1}\tau^n}{2[(1 + \alpha) + 2\sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)}]} \sum_{j=1}^q |S_{ij}| \leq m_i^n \leq \frac{(1 + \alpha)\tau^{n+1}\tau^n}{2[(1 + \alpha) - 2\sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)}]} \left[\sum_{j=1}^q |S_{ij}| - S_i \right] \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (32)$$

III محدوده

$$\frac{(1 + \alpha)\tau^{n+1}\tau^n}{2[(1 + \alpha) + 2\sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)}]} \sum_{j=1}^q |S_{ij}| \leq m_i^n \leq \frac{(1 + \alpha)\tau^{n+1}\tau^n}{2[(1 + \alpha) - 2\sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)}]} S_i \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (33)$$

استفاده از کمترین مقدار جرم ساختگی، سبب ایجاد کمینه نیروی نامیزان می‌شود. بنابراین، مرزهای پایینی رابطه‌های (۳۱)، (۳۲) و (۳۳)، برای تعیین جرم ساختگی به کار می‌روند. باتوجه به برابری مرزهای پایینی این سه رابطه، مقدار جرم ساختگی پیشنهادی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$m_{ii}^n = \frac{(1 + \alpha)\tau^{n+1}\tau^n}{2[(1 + \alpha) + 2\sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)}]} \sum_{j=1}^q |S_{ij}| \quad (34)$$

$i = 1, 2, \dots, q$

برای سنجش پایداری روش رهایی پویا، باید مرزهای بالایی رابطه‌های (۳۱)، (۳۲) و (۳۳)، از مرزهای پایینی آنها بزرگ‌تر باشند. براین اساس، نابرابری‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\gamma_i \alpha - 2\sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)} + \gamma_i \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, q \quad \text{I} \quad (35)$$

$$\alpha - 2\gamma_i \sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)} + 1 \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, q \quad \text{II} \quad (36)$$

$$\gamma_i \alpha - 2(2 + \gamma_i)\sqrt{(1 + \beta)(\alpha - \beta)} + \gamma_i \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, q \quad \text{III} \quad (37)$$

در رابطه‌ها، کمیت γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

- و $(e_k = 1.0E-12)$.
۲. اگر $c^n \neq 0$ ، در این صورت α برابر است با کمترین نسبت گام زمانی (α) به دست آمده از رابطه (۴۲). در غیر این صورت $\alpha = 1$ می باشد.
 ۳. ساخت ماتریس سختی مماسی و بردار نیروی داخلی.
 ۴. اعمال شرایط مرزی.
 ۵. محاسبه نیروی نامیزان با استفاده از رابطه (۴).
 ۶. اگر $\sqrt{\sum_{i=1}^q (f_i^n)^2} \leq e_R$ تحلیل به گام (۱۴) می رود، در غیر این صورت ادامه داده می شود.
 ۷. ساخت ماتریس جرم ساختگی از رابطه پیشنهادی (۳۴).
 ۸. ایجاد ماتریس میرایی ساختگی با استفاده از رابطه (۴۴).
 ۹. به هنگام سازی بردار سرعت ساختگی با استفاده از رابطه (۶).
 ۱۰. $\tau^{n+1} = \alpha \tau^n$.
 ۱۱. اگر $\sum_{i=1}^q (D_i^{n+1/2})^2 \leq e_K$ تحلیل به گام (۱۴) می رود، در غیر این صورت ادامه داده می شود.
 ۱۲. به هنگام سازی بردار تغییر مکان با استفاده از رابطه (۸).
 ۱۳. افزایش شمارنده تکرار $n = n + 1$.
 ۱۴. نتایج همین نمو چاپ می شود.
 ۱۵. اگر تعداد تکرارها کافی نبود، تحلیل به گام (۱) باز می گردد، در غیر این صورت تحلیل پایان می یابد.
- همان طور که مشخص است، در الگوریتم پیشنهادی، نسبت گام زمانی بهینه در هر گام به صورت خودکار انتخاب می گردد؛ به گونه ای که در آغاز هر نمو، نسبت گام زمانی برابر با یک فرض می شود. با این مقدار و فرض گام زمانی برابر با یک، نسبت گام زمانی بهینه از رابطه (۴۲) به دست می آید. بنابراین، نسبت گام زمانی در الگوریتم پیشنهادی به صورت نسبی تغییر می کند.

نمونه های عددی

برای بررسی کارایی راهکار پیشنهادی، نویسندگان برنامه رایانه ای در نرم افزار متلب (MATLAB) نوشته اند. این برنامه براساس الگوریتم پیشنهادی کار می کند و از آن برای تحلیل خطی و غیرخطی هندسی سازه های مختلف مانند خرپا و قاب های دو و سه بعدی در محدوده رفتار

(۴۲)، می توان جرم ساختگی پیشنهادی را برای همه درجه های آزادی سازه از رابطه (۳۴) به دست آورد. در حالت خاص، اگر میرایی ساختگی صفر در نظر گرفته شود، آنگاه $\beta = 0$ می گردد. در نتیجه، رابطه (۳۴) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$m_{ii}^n = \frac{(1+\alpha)\tau^{n+1}\tau^n}{2(1+\sqrt{\alpha})^2} \sum_{j=1}^q |S_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (43)$$

رابطه بالا با عبارت ارائه شده در مرجع [1] برای جرم ساختگی روش رهایی پویای جنبشی مطابقت دارد. بنابراین، رابطه سازی های انجام شده صحیح می باشند. شایان توجه است، نابرابری (۳۴)، رابطه نوینی را برای محاسبه جرم ساختگی روش رهایی پویای لزج ارائه می دهد. در اینجا، برای میرایی ساختگی از رابطه زیر استفاده می شود [20]:

$$c_{ii} = \frac{\left(\frac{\{D\}^n \{f\}^n}{\{D\}^n \{M\}^n \{D\}^n} \right) \left[\frac{\{D\}^n \{f\}^n}{\{D\}^n \{M\}^n \{D\}^n} \right] m_{ii}}{4 - (\tau^n)^2} \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (44)$$

الگوریتم رهایی پویای لزج

در بخش قبلی، با بهره گیری از نگره دایره های گرشگورین بهبود یافته و بررسی پایداری عددی، رابطه نوینی برای جرم ساختگی روش رهایی پویای لزج به دست آمد (رابطه ۳۴). اکنون، الگوریتم روش رهایی پویا براساس رابطه سازی پیشنهادی ارائه می گردد. باید دانست، سنجش همگرایی در تکرارهای رهایی پویا با دو معیار نیروی نامیزان و کارمایه جنبشی انجام می پذیرد. به سخن دیگر، تکرارها تا آنجایی انجام می شوند که یکی از خطاهای نیروی نامیزان و یا کارمایه جنبشی، از معیار همگرایی کوچک تر شود. الگوریتم پیشنهادی برای روش رهایی پویای لزج به صورت زیر است:

۱. فرض مقادیر اولیه برای سرعت (بردار صفر)، تغییر مکان (بردار صفر یا در صورت موجود بودن، تغییر مکان همگرا شده در نمو قبلی)، گام زمانی ساختگی و نسبت آن ($\alpha = \tau = 1$) و معیار همگرایی برای نیروی نامیزان و کارمایه جنبشی ($e_R = 1.0E-6$)

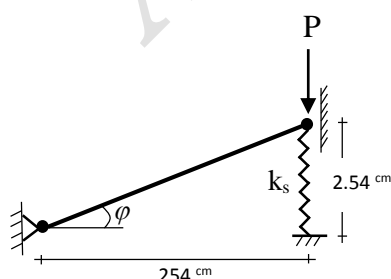
شکل (۴) نشان داده شده است [20]. سختی فنر و صلبیت محوری عضو فولادی به ترتیب برابرند با؛ 10.51 نیوتن بر سانتی متر و 44483985.77 نیوتن. از آنجاکه رفتار این سازه غیرخطی است، از رابطه‌های زیر برای به دست آوردن نیروی داخلی و سختی مماسی سازه مزبور استفاده می‌شود [24]:

$$f(D) = 0.5 AE(\cos^2 \varphi) \left(\frac{D}{L_0}\right)^2 \left[\frac{D}{L_0} \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi\right] + k_s D + \left(AE \frac{D}{L_0}\right) \sin^2 \varphi \quad (۴۷)$$

$$S_T = 1.5 AE(\cos^2 \varphi) \left[\frac{D}{L_0} \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi\right] \left(\frac{D}{L_0}\right) + k_s + \frac{AE \sin^2 \varphi}{L_0} \quad (۴۸)$$

بار وارد شده به این سازه در 12 گام به آن اعمال می‌شود؛ به گونه‌ای که افزایش بار در هر نمو برابر با 4.4484 نیوتن می‌باشد. شکل (۵) نمودار بار- تغییر مکان این سازه را نشان می‌دهد. تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی در جدول (۱) درج شده‌اند.

جدول (۱) نشان می‌دهد رابطه‌سازی پیشنهادی سبب افزایش نرخ همگرایی روش رهایی پویا شده است؛ به گونه‌ای که تعداد تکرارهای همگرایی روش پیشنهادی mgDR کمتر از دیگر الگوریتم‌های متداول (mdDR و oDR) می‌باشد. در نتیجه، رابطه‌سازی پیشنهادی سبب افزایش نرخ همگرایی روش رهایی پویا و کاهش زمان محاسبه‌ها شده است.



شکل ۴ خریای فنری

ارتجاعی استفاده می‌گردد. تحلیل غیرخطی با استفاده از رابطه‌های اجزای محدود و براساس مختصات هم-چرخشی انجام می‌گردد [25]. هر یک از نمونه‌ها به سه روش تحلیل شده‌اند. تفاوت این روش‌ها در رابطه استفاده شده برای جرم ساختگی می‌باشد. با این فرایند، کارایی رابطه پیشنهادی برای جرم ساختگی مشخص می‌شود. در هر سه روش، از رابطه (۴۴) برای محاسبه عامل میرایی ساختگی در تکرارهای رهایی پویای لزوج، بهره گرفته شده است.

در روش نخست که همان راهکار پیشنهادی است، از رابطه پیشنهادی (۳۴)، برای جرم ساختگی استفاده شده است. روش پیشنهادی به اختصار، (mgDR Modified) دومین روش که (Gerschgorin Dynamic Relaxation mass and Modified) mdDR نامیده می‌شود. در دومین روش که (damping Dynamic Relaxation) نام دارد، جرم ساختگی براساس رابطه رضایی پزند و علامت‌ها محاسبه می‌گردد [20]:

$$m_{ii}^n = \text{MAX} \left[\frac{(\tau^n)^2}{2} S_{ii}, \frac{(\tau^n)^2}{4} \sum_{j=1}^q |S_{ij}| \right] \quad (۴۵)$$

$$i = 1, 2, \dots, q$$

در سومین شیوه، از رابطه جرم ساختگی آندروود استفاده شده است [24]. راهکار آندروود به‌عنوان متداول‌ترین روش رهایی پویا (Ordinary Dynamic Relaxation) شناخته می‌شود. رابطه جرم ساختگی در روش oDR به صورت زیر است:

$$m_{ii}^n = 1.1 \times \frac{(\tau^n)^2}{4} \sum_{j=1}^q |S_{ij}| \quad (۴۶)$$

$$i = 1, 2, \dots, q$$

کارایی و نرخ همگرایی فرایند پیشنهادی (mgDR)، از مقایسه تکرارهای همگرایی این روش با دو شیوه oDR و mdDR، بررسی می‌گردد.

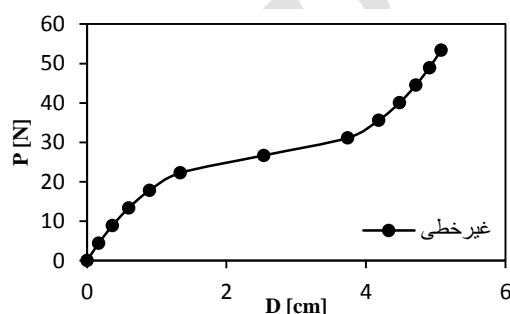
نمونه ۱: خریای فنری. این سازه، سازه‌ای تک درجه آزادی و ترکیبی از فنر و یک عضو خریایی است که در

جدول ۱. تعداد تکرارهای همگرایی خرابی فنری

تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری											مجموع تکرارها	بهبود همگرایی (%)		
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱		۱۲	$\frac{oDR - mgDR}{oDR}$	$\frac{oDR - mdDR}{oDR}$
غیر خطی	oDR	۷۴	۷۸	۸۴	۹۳	۱۱۱	۱۷۹	۷۵	۵۸	۵۱	۴۶	۴۳	۴۱	۹۳۳	۸۷٫۶۷	۹۳٫۸۹
	mdDR	۶	۷	۷	۱۳	۶	۴	۹	۱۰	۱۲	۱۴	۱۴	۱۱۵			
	mgDR	۶	۴	۴	۴	۵	۷	۷	۵	۴	۴	۴	۵۷			

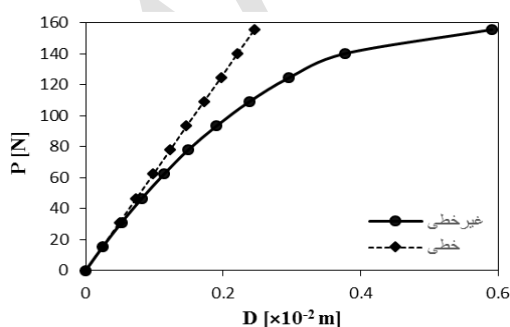
ساخته شده است [22]. بار کلی وارد به این سازه برابر با 155.605 نیوتن است که در ده مرحله به سازه اعمال می‌گردد. برای مدل‌سازی اجزای محدود، هر عضو این قاب به پنج جزء تقسیم شده است. شکل (۷)، مسیر ایستایی این سازه را برای تغییر مکان عمودی گره میانی و در دو حالت تحلیل خطی و غیرخطی نشان می‌دهد. در جدول (۲)، تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی سه روش آورده شده است.

داده‌های جدول (۲) نشان می‌دهد روش پیشنهادی با mgDR با تعداد تکرارهای کمتری نسبت به شیوه‌های mdDR و oDR به پاسخ همگرا شده است. این بهبود، سبب کاهش زمان محاسبات و هزینه تحلیل می‌شود.

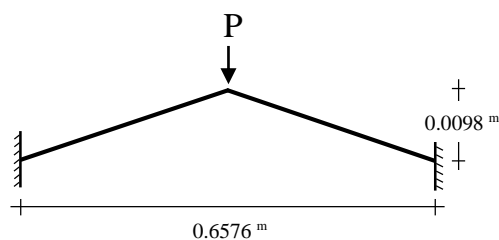


شکل ۵. مسیر ایستایی خرابی فنری

نمونه ۲: قاب توگل. مطابق شکل (۶)، این قاب از دو عضو (چوبی) با مدول الاستیسیته، سطح مقطع و ممان اینرسی، به ترتیب برابر با 0.71×10^{11} نیوتن بر مترمربع، 1.181×10^{-4} مترمربع و 0.0375×10^{-8} متر به توان چهار،



شکل ۷. مسیر ایستایی قاب توگل



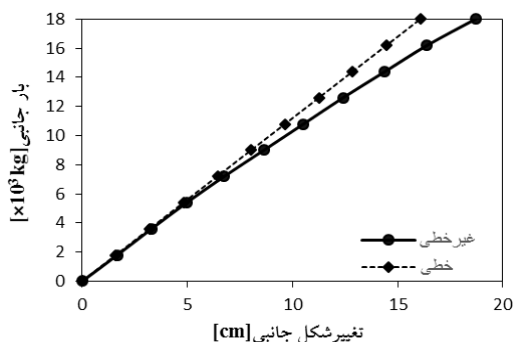
شکل ۶. قاب توگل

جدول ۲ تعداد تکرارهای همگرایی قاب توگل

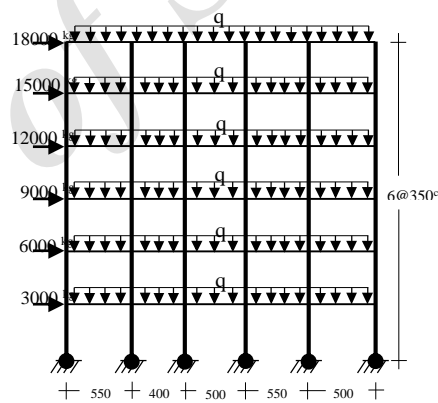
تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری										مجموع تکراره	بهبود همگرایی (%)	
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰		$\frac{oDR - mgDR}{oDR}$	$\frac{oDR - mdDR}{oDR}$
خطی	oDR	۱۹۶۲	۱۸۱۷	۱۸۰۴	۱۷۹۹	۱۷۹۶	۱۷۹۴	۱۷۹۳	۱۷۹۲	۱۷۹۱	۱۸۱۴۰	۳,۹۱	۶۱,۴۰	
	mdDR	۱۸۸۱	۱۷۴۶	۱۷۳۴	۱۷۲۹	۱۷۲۶	۱۷۲۵	۱۷۲۳	۱۷۲۲	۱۷۲۲	۱۷۴۳۱			
	mgDR	۷۴۷	۷۰۱	۶۹۷	۶۹۵	۶۹۵	۶۹۴	۶۹۳	۶۹۳	۶۹۳	۷۰۰۲			
غیر خطی	oDR	۲۰۲۹	۱۹۸۶	۲۰۹۵	۲۲۴۲	۲۴۳۴	۲۶۹۸	۳۰۸۳	۳۷۲۴	۵۱۱۴	۲۸۰۱۸	۲,۹۰	۴۵,۸۳	
	mdDR	۱۹۴۶	۱۹۰۸	۲۰۱۳	۲۱۵۴	۲۳۳۹	۲۵۹۲	۲۹۶۳	۳۵۷۸	۴۹۱۶	۵۱۸۷۲			
	mgDR	۷۷۳	۷۶۳	۸۰۴	۸۵۸	۹۲۹	۱۰۲۵	۱۱۶۷	۱۴۰۳	۱۹۲۳	۲۸۹۳۷			

جدول ۳ تعداد تکرارهای همگرایی قاب ساختمانی

تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری										مجموع تکرارها	بهبود همگرایی (%)	
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰		$\frac{oDR - mgDR}{oDR}$	$\frac{oDR - mdDR}{oDR}$
خطی	oDR	۵۰۶۳۱۹	۴۸۰۶۶۵	۴۸۰۳۹۷	۴۸۰۳۹۹	۴۸۰۲۴۶	۴۸۰۳۱۵	۴۸۰۱۹۳	۴۸۰۱۶۷	۴۸۰۱۶۰	۴۸۲۸۸۴۰	۴,۳۶	۶۸,۰۲	
	mdDR	۴۸۴۰۲۶	۴۵۹۷۳۵	۴۵۹۴۸۰	۴۵۹۳۸۶	۴۵۹۳۳۸	۴۵۹۳۰۷	۴۵۹۲۸۶	۴۵۹۲۷۲	۴۵۹۲۵۱	۴۶۱۸۳۴۳			
	mgDR	۱۶۱۲۹۹	۱۵۳۷۷۷	۱۵۳۶۹۶	۱۵۳۶۶۹	۱۵۳۶۵۲	۱۵۳۶۴۵	۱۵۳۶۳۶	۱۵۳۶۳۲	۱۵۳۶۲۴	۱۵۴۴۲۶۲			
غیر خطی	oDR	۴۱۵۵۵	۳۵۹۸۶	۳۵۳۰۰	۳۵۰۲۶	۳۴۷۸۴	۳۴۶۳۵	۳۴۵۱۸	۳۴۴۱۷	۳۴۳۲۸	۳۴۲۸۸	۴,۳۰	۶۷,۵۹	
	mdDR	۳۹۷۱۸	۳۴۴۴۱	۳۳۸۴۴	۳۳۵۲۵	۳۳۲۹۴	۳۳۱۵۲	۳۳۰۴۰	۳۲۹۴۴	۳۲۸۵۹	۳۲۷۸۳			
	mgDR	۱۳۳۷۴	۱۱۷۱۵	۱۱۵۱۸	۱۱۴۰۴	۱۱۳۱۸	۱۱۲۵۴	۱۱۱۹۹	۱۱۱۴۹	۱۱۱۰۳	۱۱۰۶۰			



شکل ۹ مسیر ایستایی قاب ساختمانی



شکل ۸ قاب ساختمانی

هر طبقه از ساختمان وارد می‌شود. نمودار نیرو- تغییرمکان در شکل (۹)، برای تغییرمکان طبقه آخر این ساختمان و در دو حالت تحلیل خطی و غیرخطی رسم شده است. جدول (۳)، تعداد تکرارهای تحلیل خطی و غیرخطی این سازه را نشان می‌دهد.

نمونه ۴: **خرپای دوبعدی**. برای سنجش بهتر راهکار پیشنهادی، یک خرپای دوبعدی که ۲۹ عضو و ۲۰ درجه آزادی دارد و در شکل (۱۰) نشان داده شده است، تحلیل می‌گردد [26]. برای این سازه، $EA=6.3 \times 10^7$ نیوتن،

نمونه ۳: **قاب ساختمانی**. در این نمونه، یک قاب ساختمانی که در شکل (۸) نشان داده شده است، تحلیل می‌گردد [20]. این قاب ساختمانی دارای ۶ طبقه است. ستون‌های سه طبقه نخست و دوم این ساختمان از مقاطع $W18 \times 35$ و $W18 \times 40$ ، و کلیه تیرهای این ساختمان از مقطع $W16 \times 31$ ساخته شده‌اند. به‌عنوان تقریبی از بار مرده و زنده، نیروی گسترده یک‌نواخت ۵۰ کیلوگرم بر سانتی‌متر، به کف هر طبقه از ساختمان اعمال می‌گردد. همان‌طور که در شکل (۸) نشان داده شده است، نیروی جانبی معادل با نیروی برش پایه زلزله، به‌صورت افقی به

سانتی متر مربع و 6.895×10^4 مگاپاسکال می باشد. دو نوع بار به این سازه وارد می شود؛ یکی بار ثقلی 20 کیلونیوتن به همه گره های بالاترین طبقه و دیگری بار جانبی باد که با رابطه زیر به گره های هر طبقه از سازه اثر می کند:

$$p_i^x = -900 \left(\frac{Z_i}{5340} \right)^2 + 1900 \frac{Z_i}{5340} \quad (49)$$

$i = 1, 2, \dots, 30N$

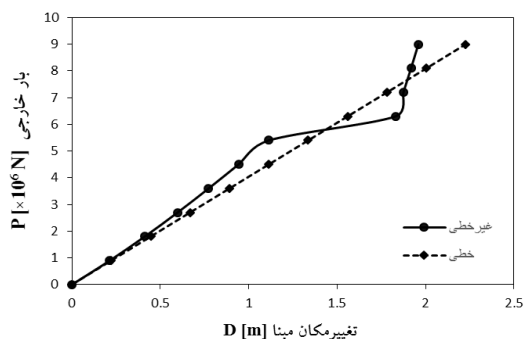
در این رابطه، Z_i ، ارتفاع طبقه مورد نظر نسبت به تراز تکیه گاه می باشد. این سازه در دو حالت کشسان خطی و غیرخطی هندسی تحلیل می گردد. شکل (۱۳) مسیر ایستایی تغییر مکان افقی بالای این سازه را نشان می دهد. همچنین، تعداد تکرارهای همگرایی این سازه با الگوریتم های مختلف روش رهایی پویا در جدول (۵) درج شده اند.

$h=0.9144$ متر و نیروی P برابر 3×10^6 نیوتن می باشد. بار کلی در ده مرحله به سازه اعمال شده است. جدول (۴)، تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی هر یک از روش ها را در دو حالت تحلیل خطی و غیرخطی مشخص می کند. نتایج جدول (۴) نشان می دهد همگرایی روش پیشنهادی mgDR بیشتر از دیگر شیوه ها (mdDR و oDR) می باشد به گونه ای که با تعداد تکرار کمتر پاسخ به دست می آید.

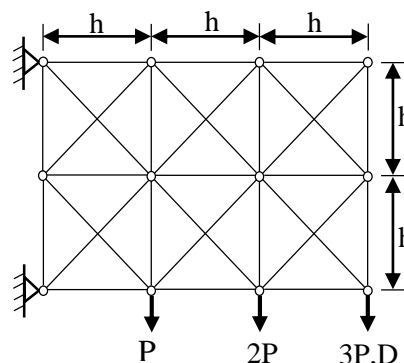
نمونه ۵: برج خرابایی. شکل (۱۲) برج خرابایی ۳۰ طبقه را نشان می دهد. با استفاده از الگوریتم های مختلف روش رهایی پویای لزج، این سازه در حالت های خطی و غیرخطی هندسی تحلیل می گردد [1]. این سازه دارای ۳۶۰ درجه آزادی و ۵۴۰ عضو است. سطح مقطع و مدول الاستیسیته هر عضو، به ترتیب، برابر با 64.516

جدول ۴: تعداد تکرارهای همگرایی خرابی دو بعدی

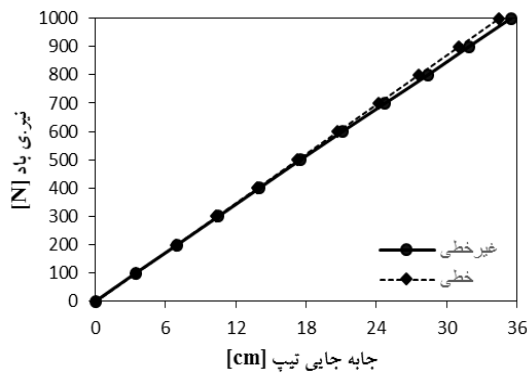
تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری										بهبود همگرایی (%)		
		۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱			
خطی	oDR	۳۶۲۵	۳۶۱۰	۳۶۰۴	۳۶۰۲	۳۶۰۱	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۵۹۹	۳۶۰۴۰	۸۲,۸۱	۵,۲۲
	mdDR	۳۴۲۹	۳۴۲۲	۳۴۱۷	۳۴۱۵	۳۴۱۴	۳۴۱۳	۳۴۱۳	۳۴۱۳	۳۴۱۲	۳۴۱۲	۳۴۱۵۹		
	mgDR	۶۲۴	۶۲۰	۶۱۹	۶۱۹	۶۱۹	۶۱۹	۶۱۹	۶۱۹	۶۱۹	۶۱۹	۶۱۹۶		
غیر خطی	oDR	۱۱۴۶	۱۲۲۹	۱۵۱۱	۱۶۸۴	۱۹۲۸	۲۴۷۴	۲۴۷۴	۲۴۷۴	۲۴۷۴	۲۴۷۴	۱۷۳۱۳	۷۰,۶۳	۵,۱۵
	mdDR	۱۰۸۳	۱۱۶۵	۱۴۳۲	۱۵۹۷	۱۸۲۹	۲۳۴۷	۲۳۴۷	۲۳۴۷	۲۳۴۷	۱۶۴۲۱			
	mgDR	۳۷۳	۳۹۲	۴۴۷	۴۹۱	۵۶۱	۷۲۵	۷۲۵	۷۲۵	۷۲۵	۲۴۰			



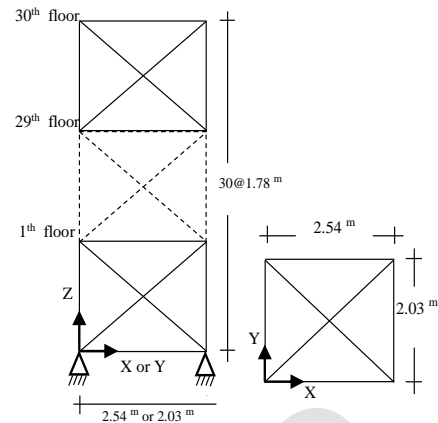
شکل ۱۱: مسیر ایستایی خرابی دو بعدی



شکل ۱۰: خرابی دو بعدی



شکل ۱۳ مسیر ایستایی برج خرپایی

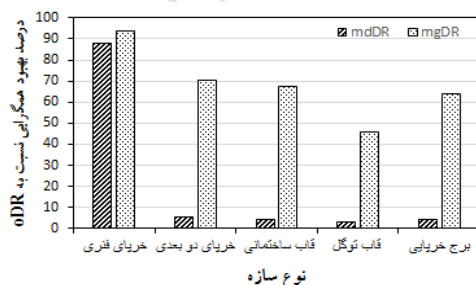


شکل ۱۲ برج خرپایی

جدول ۵ تعداد تکرارهای همگرایی برج خرپایی

تحلیل	روش	شماره نمو بارگذاری										مجموع تکرارها	بهبود همگرایی (%)	
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰		$\frac{oDR - mgDR}{oDR}$	$\frac{oDR - mdDR}{oDR}$
خطی	oDR	۸۹۹۲۸	۸۵۵۱۸	۸۵۴۳۹	۸۵۴۱۰	۸۵۳۹۵	۸۵۳۸۵	۸۵۳۷۹	۸۵۳۷۵	۸۵۳۷۱	۸۵۳۶۱	۸۵۸۵۶۱	۴,۲۲	۶۳,۹۰
	mdDR	۸۶۱۰۵	۸۱۹۱۱	۸۱۸۳۵	۸۱۸۰۸	۸۱۷۹۳	۸۱۷۸۴	۸۱۷۷۹	۸۱۷۷۴	۸۱۷۶۸	۸۱۷۶۸	۸۲۳۳۲۸		
	mgDR	۳۲۳۰۴	۳۰۸۸۷	۳۰۸۶۱	۳۰۸۵۲	۳۰۸۴۷	۳۰۸۴۴	۳۰۸۴۲	۳۰۸۴۰	۳۰۸۳۹	۳۰۸۳۸	۳۰۹۹۵۴		
غیر خطی	oDR	۹۰۱۶۸	۸۶۰۲۹	۸۶۲۲۲	۸۶۵۸۰	۸۶۹۷۰	۸۷۳۶۹	۸۷۷۷۵	۸۸۱۸۷	۸۸۶۰۳	۸۹۰۲۴	۸۷۶۹۲۷	۴,۲۲	۶۳,۹۹
	mdDR	۸۶۱۳۵	۸۲۴۰۰	۸۲۵۸۶	۸۲۹۲۸	۸۳۳۰۲	۸۳۶۸۴	۸۴۰۷۳	۸۴۴۶۷	۸۴۸۶۶	۸۵۲۶۹	۸۳۹۹۱۰		
	mgDR	۳۲۳۸۶	۳۱۰۶۰	۳۱۱۲۶	۳۱۲۳۵	۳۱۳۵۱	۳۱۴۷۱	۳۱۵۹۳	۳۱۷۱۶	۳۱۸۴۰	۳۱۹۶۶	۳۱۵۷۴۴		

گرفته شده است. در نمونه‌های دیگر، نسبت گام زمانی هر تکرار از رابطه پیشنهادی (۴۲) به دست آمده است. استفاده از این رابطه برای نسبت گام زمانی، سبب تضمین همگرایی و همچنین افزایش چشم‌گیر نرخ همگرایی می‌گردد.



شکل ۱۴ درصد بهبود همگرایی در نمونه‌های مختلف در تحلیل غیرخطی

باتوجه به شمار تکرارهای جدول (۵) می‌توان دریافت در هر دو تحلیل خطی و غیرخطی، نرخ همگرایی روش پیشنهادی mgDR بیشتر از دیگر راهکارها (mdDR و oDR) می‌باشد. به سخن دیگر، راهکار پیشنهادی دارای کارایی بسیار مناسب در تحلیل سازه‌های بزرگ با تعداد زیاد درجه آزادی می‌باشد.

از سوی دیگر، درصد بهبود همگرایی روش‌های پویای پیشنهادی (mgDR) و شیوه mdDR در مقایسه با فرایند oDR، برای همه نمونه‌های عددی در شکل (۱۴) رسم شده است. شکل (۱۴) برتری نرخ همگرایی شیوه پیشنهادی را برای تحلیل انواع سازه‌ها شامل خرپا و قاب‌های دو و سه‌بعدی نشان می‌دهد. شایان توجه است، در نمونه ۱ (خرپای فزری) که سازه یک درجه آزادی دارد، نسبت گام زمانی تکرارهای پویا برابر با یک در نظر

شیوه پیشنهادی mgDR که در آن از رابطه جرم ساختگی بهبودیافته استفاده شده است، بیشتر از روش‌های متداول oDR و mdDR می‌باشد. به سخن دیگر، الگوریتم پیشنهادی با تعداد تکرار کمتری نسبت به دیگر روش‌ها همگرا می‌شود. در نتیجه، زمان محاسبه‌ها و حجم عملیات کامپیوتری در فرایند پیشنهادی کمتر از دیگر الگوریتم‌های رهایی پویای لزج می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله رابطه‌سازی نوینی برای جرم ساختگی در روش رهایی پویای لزج پیشنهاد گردید. براین اساس، الگوریتم پیشنهادی با استفاده از نگره دایره‌های گرشگورین بهبود یافته به دست آمد [1]. برای سنجش عددی، سازه‌های مختلف مانند خرپا و قاب‌های دو و سه‌بعدی با رفتارهای کشسان خطی و غیرخطی هندسی، تحلیل شدند. نتایج عددی نشان داد نرخ همگرایی

مراجع

1. Alamatian, J., "A New Formulation for Fictitious Mass of the Dynamic Relaxation Method with Kinetic Damping", *Computers & Structures*, Vol. 90-91, pp. 42-54, (2012).
2. Otter, J.R.H., "Dynamic Relaxation", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 35, pp. 633-656, (1966).
3. Day, A.S., "An Introduction to Dynamic Relaxation", *The Engineer*, Vol. 219, pp. 218-221, (1965).
4. Otter, J.R.H., "Computation for Prestressed Concrete Reactor Pressure Vessels Using Dynamic Relaxation", *Nuclear Structural Engineering*, Vol. 1, pp. 61-75, (1965).
5. Brew, J.S. and Brotton, M., "Non-linear Structural Analysis by Dynamic Relaxation Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 463-483, (1971).
6. Lewis, W.J., Jones, M.S. and Lewis, G., "Cladding-network Interaction in Pretensioned Cable Roofs, Studied by Dynamic Relaxation", *Computers & Structures*, Vol. 19, pp. 885-897, (1984).
7. Kmet, S. and Mojdis, M., "Time-dependent Analysis of Cable Domes Using a Modified Dynamic Relaxation Method and Creep Theory", *Computers & Structures*, Vol. 125, pp. 11-22, (11-22).
8. Rushton, K.R., "Dynamic Relaxation Solutions of Elastic Plate Problems", *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 3, pp. 23-32, (1968).
9. Alwar, R.S. and Ramachandra-Rao, N., "Large Elastic Deformations of Clamped Skewed Plates by Dynamic Relaxation", *Computers & Structures*, Vol. 4, pp. 381-398, (1974).
10. Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S., "Geometrically Non-linear Analysis of Plates and Shallow Shells by Dynamic Relaxation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 123, pp. 15-32, (1995).
11. Barnes, M.R., "Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation", *International Journal of Space Structures*, Vol. 14, pp. 89-104, (1999).
12. Ramesh, G. and Krishnamoorthy, C.S., "Inelastic Post-buckling Analysis of Truss Structures by Dynamic Relaxation Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3633-3657, (1994).

13. Kadkhodayan, M., Zhang, L.C. and Sowerby, R., "Analysis of Wrinkling and Buckling of Elastic Plates by DXDR Method", *Computers & Structures*, Vol. 65, pp. 561–574, (1997).
14. Lee, K.S., Han, S.E. and Park, T., "A Simple Explicit Arc-length Method Using the Dynamic Relaxation Method with Kinetic dDamping", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 216–233, (2011).
15. Bunce, J.W., "A Note on Estimation of Critical Damping in Dynamic Relaxation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, pp. 301–304, (1972).
16. Cassell, A.C. and Hobbs, R.E., "Numerical Stability of Dynamic Relaxation Analysis of Non-linear Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 1407–1410, (1976).
17. Papadrakakis, M., "A Method for the Automatic Evaluation of the Dynamic Relaxation Parameters", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 25, pp. 35–48, (1981).
18. Rezaiee-Pajand, M. and Taghavian-Hakkak, M., "Nonlinear Analysis of Truss Structures Using Dynamic Relaxation", *International Journal of Engineering*, Vol. 19, pp. 11–22, (2006).
19. Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Turvey, G.J., "A New Fictitious Time for the Dynamic Relaxation (DXDR) mMethod", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 996–1018, (2008).
20. Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J., "The dDynamic Relaxation Method Using New Formulation for Fictitious Mass and Damping", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 34, pp. 109–133, (2010).
21. Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S.R., "Nonlinear Dynamic Structural Analysis Using Dynamic Relaxation with Zero Damping", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 1274–1285, (2011).
22. Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M., Alamatian, J. and Zhang, L.C., "A New Method of Fictitious Viscous Damping Determination for the Dynamic Relaxation", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 783–794, (2011).
23. Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M. and Alamatian, J., "Timestep Selection for Dynamic Relaxation Method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 40, pp. 42–72, (2012).
24. Felippa, C.A., "Nonlinear Finite Element Methods (ASEN 5017)", Chapter 11, Course Material, (1999).
25. Underwood, P., "Dynamic Relaxation", *Computational Method for Transient Analysis*, Chapter 5, Vol. 1, pp. 245–265, (1983).
26. Guo, X., Bai, W. and Zhang, W., "Confidence Extremal Structural Response Analysis of Truss Structures under Static Load Uncertainty Via SDP Relaxation", *Computers & Structures*, Vol. 87, pp. 246–253, (2009).