

## حل تحلیلی اثر کوپلینگ الکترومکانیکی بر روی تنش‌های برون صفحه‌ای در لبه‌های آزاد چند لایه‌های

## پیزوالکتریک زاویه دار تحت بارگذاری مکانیکی\*

سید مهدی میرزابابائی<sup>(۲)</sup>مسعود طهانی<sup>(۱)</sup>

**چکیده** در این مقاله، یک حل تحلیلی برای بررسی اثر کوپلینگ الکترومکانیکی بر روی تنش‌های بین لایه‌ای در لبه آزاد ورق چند لایه پیزوالکتریک زاویه‌دار ارائه گردیده است. به همین منظور با استفاده از یک روش تغییراتی، به تحقیق در مورد اثر لبه آزاد در یک ورق چند لایه پیزوالکتریک با طول نامحدود و تحت کرنش طولی یکنواخت پرداخته شده است. با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی دوم، مقایسه‌ای بین تحلیل چند لایه پیزوالکتریک در دو حالت کوپل و غیر کوپل انجام شده است. همچنین حل‌های تحلیلی به‌دست آمده با نتایج عددی موجود، مورد مقایسه و بحث قرار گرفته است. نتایج به‌دست آمده حاکی از آن است که تأثیر کوپلینگ الکترومکانیکی بر تنش‌های بین لایه‌ای در لبه آزاد چند لایه‌ی متعامد، خیلی بیشتر از چند لایه‌ی زاویه‌دار است.

**واژه‌های کلیدی** اثر لبه آزاد، مواد پیزوالکتریک، تنش‌های بین لایه‌ای، حل تحلیلی

### Analytical Solution of Electromechanical Coupling Effect on Interlaminar Stresses at Free-Edges of Angle-Ply Piezoelectric Laminates under Mechanical Loading

M. Tahani

M. Mirzababae

**Abstract** In this paper, an analytical solution is presented to consider the effect of electromechanical coupling on the interlaminar stresses at the free-edge of an angle-ply piezoelectric laminated plate. To this end, a variational approach is used to investigate the free-edge effect in a long laminated piezoelectric plate under uniform axial strain. A comparison of coupled and uncoupled piezoelectric analysis is performed using the second-order shear deformation plate theory. The analytical solutions are discussed and compared with numerical results available in the literature. It is found that the interlaminar stresses at the free-edge are significantly higher in the coupled case for cross-ply laminates, whereas the coupling effect for the symmetric angle-ply laminate is of minor significance.

**Key Words** Free-edge Effect, Piezoelectric Materials, Interlaminar Stresses, Analytical Solution

\* نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۸۶/۹/۲۷ و نسخه‌ی نهایی آن در تاریخ ۸۷/۱۰/۲۸ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول، دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده‌ی مهندسی، گروه مکانیک

(۲) استادیار، پژوهشکده علوم و صنایع غذایی، گروه مکانیک

## مقدمه

اصولاً هر نوع ناپیوستگی اعم از هندسی و مادی، حل‌های تحلیلی را مشکل و گاهی غیرممکن می‌سازد. اگر چه ناپیوستگی هندسی در مواد همگن و غیرهمگن بر حسب نیاز ایجاد می‌شود، ولی ناپیوستگی مادی در مواد غیر همگن و کامپوزیت‌ها به صورت ذاتی می‌باشد؛ لذا همواره در تحلیل مواد کامپوزیت بایستی اثر ناپیوستگی مادی در نظر گرفته شود و تحلیل‌هایی که ناپیوستگی‌های مادی را به خصوص در نزدیکی لبه‌های آزاد و اطراف ناپیوستگی‌های هندسی در نظر نمی‌گیرند، دقیق نبوده و فاقد کارایی لازم می‌باشند. در این میان، تحلیل مواد مرکب هوشمند که نوعی ماده‌ی کامپوزیت با لایه‌های فعال می‌باشند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این اهمیت بدان جهت است که لایه‌ی فعال، سبب کوپلینگ الکترومکانیکی شده و بر پیچیدگی تحلیل می‌افزاید و انتظار می‌رود که سبب تشدید اثر ناپیوستگی مادی در بین لایه‌ها و به خصوص در لبه‌ی آزاد شود.

از سازه‌های هوشمندی که دارای قابلیت حسگری و عملگری است، در بسیاری از کاربردهای مهندسی از قبیل هواپیماها، ماهواره‌ها، صنایع اتومبیل، وسایل پزشکی، لوازم ورزشی و غیره استفاده می‌شود. دسته‌ی وسیعی از سازه‌های هوشمند با استفاده از کامپوزیت‌های تقویت شده توسط الیاف پیشرفته ساخته می‌شوند. یکی از انواع متداول سازه‌های هوشمند، چند لایه‌های کامپوزیتی هستند که در آن‌ها از لایه‌های پیزوالکتریک استفاده شده است. اضافه شدن لایه پیزوالکتریک به یک سازه کامپوزیتی آن را از حالت غیرفعال به حالت فعال در آورده و دو قابلیت حسگری و عملگری را به آن می‌افزاید. وجود این دو قابلیت مهم در سازه‌های هوشمند و کاربردهای جالب توجه آن سبب استفاده روز افزون این مواد شده و نظر محققین زیادی را برای کار در این حوزه به خود معطوف داشته است. همان‌گونه که گفته شد، وجود ناپیوستگی مادی در این نوع سازه‌ها از یک سو و

کوپلینگ الکترومکانیکی از سوی دیگر، سبب مشکل شدن تحلیل تنش به خصوص در لبه‌های آزاد می‌شود. به همین علت تحلیل‌هایی که تا کنون برای بررسی اثر لبه در این نوع مواد ارائه شده است، بر اساس روش‌های عددی بوده و عمدتاً از روش اجزاء محدود استفاده شده است [1-11].

ساختمان اغلب سازه‌های هوشمند بدین صورت است که دو لایه‌ی پیزوالکتریک در سطوح بالا و پایین یک هسته الاستیک و یا این که به صورت وصله در قسمت‌های مورد نظر سازه چسبانده شده و حتی در بعضی از موارد لایه‌های پیزوالکتریک در بین چند لایه‌های کامپوزیتی قرار می‌گیرد. چسباندن لایه‌ی پیزوالکتریک در قسمت‌های مختلف سازه و جدایش آن از سازه در اثر به وجود آمدن تنش‌های بین لایه‌ای و نیز سه بعدی بودن وضعیت تنش در نزدیکی لبه‌های آزاد منجر به یکی از مدهای مهم شکست این قبیل سازه‌ها می‌شود. این ناپیوستگی مادی منجر به تمرکز تنش در لایه‌ی چسب شده و مقدار این تنش‌ها به عواملی چون ناهمگنی خواص مکانیکی هر لایه، چگونگی تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت، ناپیوستگی‌های هندسی روی مرزها، کوپلینگ بین تغییر شکل‌های داخل صفحه و عرضی و مقدار تنش‌ها در لبه‌ی آزاد چند لایه‌ی کامپوزیت بستگی دارد. در طی چند دهه اخیر تنش‌های بین لایه‌ای و مکانیزم‌های شکست در سازه‌های هوشمند، توجه مهندسين و محققین را به خود جلب نموده است. اگر چه تئوری خطی پیزوالکتریک به خوبی گسترش یافته، ولی با در نظر گرفتن کوپلینگ الکترومکانیکی حل‌های تحلیلی محدود به مسائل با هندسه و شرایط مرزی ساده می‌باشد [10-12]. از آن جا که به دست آوردن حل‌های تحلیلی برای سازه‌های هوشمند با هندسه و شرایط مرزی مختلف مشکل می‌باشد، اغلب از روش اجزاء محدود برای تحلیل تنش در لبه‌ی آزاد استفاده می‌شود. Yang و هم‌کارانش [13]، رفتار مکانیکی یک تیر

محوری بود، ارائه نمودند. نتایج به دست آمده حاکی از رفتار منفرد تنش‌های بین لایه‌ای در لبه‌ی آزاد و در لایه‌ی مرزی است.

هدف از این پژوهش، ارائه‌ی یک حل تحلیلی دقیق با در نظر گرفتن کوپلینگ الکترومکانیکی برای بررسی وضعیت تنش‌های بین‌لایه‌ای در قسمت‌های داخلی و لبه‌ی آزاد می‌باشد. برای این منظور یک چند لایه با خواص پیزوالکتریک در نظر گرفته شده است. این چند لایه متقارن و زاویه دار بوده و تحت کرنش محوری یکنواخت در جهت طولی قرار گرفته است. برای آشکار شدن نتایج این پژوهش، دو چند لایه‌ی متعامد و یک چند لایه‌ی زاویه دار پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفته است. هم‌چنین تأثیر کوپلینگ الکترومکانیکی بر روی تنش‌های بین لایه‌ای در لبه‌ی آزاد برای چندین چیدمان زاویه‌ای نشان داده شده است. اگر چه حل تحلیلی ارائه شده قابلیت تعمیم به تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر را نیز دارد، در این جا از یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی دوم استفاده شده است. با به‌کارگیری اصل حداقل انرژی پتانسیل کل، معادلات تعادل بر حسب متجه‌های تنش، گشتاور و شار الکتریکی به دست آمده است، سپس با جای‌گذاری روابط تنش-کرنش و کرنش-جابه‌جایی در معادلات تعادل، معادلات تعادل بر حسب میدان جابه‌جایی به دست آمده است. در نهایت با حل دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل و اعمال شرایط مرزی میدان جابه‌جایی معلوم شده و بقیه‌ی کمیت‌های وابسته به آن محاسبه شده است.

### معادلات حاکم

در این قسمت، معادلات حاکم بر یک چند لایه با خواص پیزوالکتریک ارائه خواهد شد. این چند لایه‌ی متقارن، زاویه‌دار و بلند بوده و تحت بارگذاری الکترومکانیکی می‌باشد. هندسه‌ی چند لایه و سیستم مختصات انتخابی در شکل (۱) نمایش داده شده است. با در نظر گرفتن معادلات ساختاری خطی مواد

چند لایه شامل دو لایه‌ی پیزوالکتریک و یک هسته‌ی الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها برای تحلیل تنش در لبه‌های آزاد و تمرکز تنش ناشی از تنش‌های بین لایه‌ای از روابط اجزاء محدود کوپل سه بعدی استفاده نمودند. Artel و Becker [14]، تأثیر کوپلینگ الکترومکانیکی بر روی تنش‌های بین لایه‌ای در لبه‌ی آزاد یک چند لایه با خواص پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با به‌کارگیری روش اجزاء محدود به بررسی تأثیر کوپلینگ الکترومکانیکی بر روی تنش‌های بین لایه‌ای در لبه‌ی آزاد پرداختند. در این بررسی، نشان داده شد که با در نظر گرفتن اثر کوپلینگ الکترومکانیکی در یک چند لایه‌ی متعامد، علاوه بر منفرد بودن تنش‌ها در لبه‌ی آزاد، این تنش‌ها دارای مقدار بیشتری از حالت غیرکوپل آن می‌باشد. عکس‌العمل استاتیکی بین یک چند لایه با عمل کننده‌های پیزوالکتریک توسط Goudenzi و Manini [15]، مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور از روش اجزاء محدود چند لایه‌ی مرتبه‌ی بالا استفاده شده است. نتایج به دست آمده از این تحلیل با نتایج مشابه مقایسه شده که از تطابق خوبی برخوردار بوده است. Erturk و Tekinalp [16] به تحقیق در مورد تغییر شکل لایه چسب در یک ورق چند لایه با لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. آن‌ها با به‌کارگیری یک روش اجزاء محدود خاص، نشان دادند که اگر چه تغییر شکل‌های بین لایه چسب و لایه پیزوالکتریک شبیه به هم هستند، اما تنش‌های موضعی در لایه چسب متفاوت بوده و این تفاوت در لبه‌ی آزاد خیلی بیشتر شده و سبب جدایش می‌گردد. اگر چه روش اجزاء محدود در مسائل پیچیده کارگشا است، اما برای مشخص نمودن ارتباط بین پارامترهای مختلف در یک مسأله مناسب نیست. Tahani و Izadi Najafabadi [18]، یک حل تحلیلی برای محاسبه‌ی تنش‌های بین لایه‌ای در لبه‌ی آزاد یک ورق چند لایه‌ی پیزوالکتریک متعامد متقارن طویل که تحت کرنش یکنواخت

پیزوالکتریک، ضرائب الاستیک و پیزوالکتریک در یک میدان ثابت الکتریکی تعریف شده و تغییر شکل‌ها و کرنش‌ها کوچک فرض شده‌اند.

در تئوری‌های تغییر شکل برشی، بسط تیلور میدان جابه‌جایی حول سطح میانی ورق نوشته می‌شود [18]. به علت این که در این تئوری‌ها یک میدان جابه‌جایی برای کل ضخامت صفحه در نظر گرفته می‌شود، به آن‌ها تئوری‌های تک لایه‌ی معادل نیز می‌گویند. در این صورت می‌توان میدان جابه‌جایی را به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_i(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N z^j \varphi_i^j(x, y, t) \quad (1)$$

در معادله‌ی (1)، N؛ نشان‌دهنده‌ی مرتبه‌ی تئوری است. با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی دوم برای میدان جابه‌جایی u و نیز با فرض خطی بودن تابع پتانسیل الکتریکی F در راستای ضخامت تیر خواهیم داشت [2]:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= \varepsilon_0 x + z^2 \phi_x(y) \\ u_2(x, y, z) &= v(y) + z^2 \phi_y(y) \\ u_3(x, y, z) &= z \psi_z(y) \\ F(x, y, z) &= z f(y) \end{aligned} \quad (2)$$

$u_1, u_2, u_3$  و مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه‌ی میانی به ترتیب در جهت  $x, y, z$  می‌باشد. هم‌چنین به دلیل بلند بودن چند لایه‌ی  $u_2, u_3$  و F مستقل از  $x$  فرض می‌شود. لازم به ذکر است که به دلیل تقارن مسأله نسبت به صفحه‌ی  $x-y$  شکل (1) باید  $u_1$  و  $u_2$  توابع زوجی از  $z$  و  $u_3$  و F توابع فردی از  $z$  باشند. به همین دلیل، میدان جابه‌جایی و تابع پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه‌ی (2) در نظر گرفته شده‌اند.

با جای‌گذاری معادله‌ی (2) در روابط خطی کرنش - جابه‌جایی الاستیسیته [19]، نتایج ذیل به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_0, \quad \varepsilon_y = v' + z^2 \phi_y', \quad \varepsilon_z = \psi_z \\ \delta_{yz} &= z(2\phi_y + \psi_z') \\ \delta_{xz} &= 2z\phi_x, \quad \delta_{xy} = z^2 \phi_x' \end{aligned} \quad (3)$$

و نیز مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی  $\vec{E} = -\nabla F$  عبارتند

از:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ E_y &= -\frac{\partial F}{\partial y} = -zf'(y) \\ E_z &= -\frac{\partial F}{\partial z} = -f(y) \end{aligned} \quad (4)$$

$E_x, E_y, E_z$ ؛ مؤلفه‌های میدان الکتریکی با فرض خطی بودن میدان الکتریکی است. در ادامه به معادلات کوپل تنش-کرنش و میدان الکتریکی نیاز می‌باشد. معادلات ساختاری تمام کوپل و سه بعدی پیزو-الاستیک برای k امین لایه در یک چند لایه‌ی پیزوالکتریک برحسب مختصات انتخاب شده چنین است:

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{C}]^{(k)} \{\varepsilon\} - ([\bar{e}]^{(k)})^T \{E\} \quad (5)$$

$$\{D\}^{(k)} = [\bar{e}]^{(k)} \{\varepsilon\} + [\bar{\varepsilon}]^{(k)} \{E\}$$

که  $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, \{E\}$  و  $\{D\}$  به ترتیب؛ بردارهای تنش، کرنش، میدان الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی می‌باشند.  $[\bar{C}]$  و  $[\bar{e}]$  به ترتیب؛ تانسور سختی الاستیک تحت میدان الکتریکی ثابت و تانسور پیزوالکتریک تعریف می‌شود. هم‌چنین  $[\bar{\varepsilon}]$  ماتریس نفوذپذیری تحت کرنش مکانیکی ثابت است.

با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل، معادلات تعادل برحسب متجه‌های تنش، گشتاور و شار الکتریکی عبارت است از:

$$\delta \varphi_x : \frac{dP_{xy}}{dy} - 2R_x = 0 \quad (6-الف)$$

$$\delta v : \frac{dN_y}{dy} = 0 \quad (6-ب)$$

$$\delta \varphi_y : \frac{dP_y}{dy} = -2R_y = 0 \quad (6-ج)$$

$$\delta \psi_z : \frac{dR_y}{dy} - N_z = 0 \quad (6-د)$$

$$\delta f : \frac{dM_y^p}{dy} - N_z^p = 0 \quad (6-ه)$$

و شرایط مرزی عبارتند از: مشخص بودن

با توجه به این که چند لایه‌ی متقارن است، عبارات  $B_{ij}$  صفر می‌باشند.

می‌توان از معادله‌ی (۶-ب) انتگرال‌گیری نمود و به‌دست آورد:

$$N_y = N_y^0 \quad (12)$$

در رابطه‌ی فوق، یک مقدار ثابت می‌باشد. با توجه به شرایط مرزی لبه‌ی آزاد در  $y=b$  و  $y=-b$  مشخص است که باید در لبه‌ها  $N_y = 0$  باشد. به همین دلیل، در رابطه‌ی (۱۲) صفر می‌باشد. در نهایت با جای‌گذاری معادلات (۹)، (۱۰) و (۱۲) در معادلات (۶-الف)، و (۶-ه) معادلات تعادل برحسب جابه‌جایی‌ها به‌دست خواهد آمد. این معادلات عبارتند از:

$$H_{66}\phi_x'' - 4D_{55}\phi_x + D_{26}v'' + H_{26}\phi_y'' - 4D_{45}\phi_y + (D_{36} - 2D_{45})\psi_z' + (D_{36}^e - 2D_{25}^e)f' = 0$$

$$D_{26}\phi_x' + A_{22}v' + D_{22}\phi_y' + A_{23}\psi_z + A_{32}f = 0$$

$$H_{26}\phi_x'' - 4D_{45}\phi_x + D_{22}v'' + H_{22}\phi_y'' - 4D_{44}\phi_y + (D_{23} - 2D_{44})\psi_z' + (D_{32}^e - 2D_{24}^e)f' = 0$$

$$(2D_{45} - D_{36})\phi_x' - A_{23}v' + (2D_{44} - D_{23})\phi_y' + D_{44}\psi_z' - A_{33}\psi_z + D_{24}^e f'' - A_{33}^e f = A_{13}\epsilon_0 \quad (13)$$

$$(2D_{25}^e - D_{36}^e)\phi_x' - A_{32}^e v' + (2D_{24}^e + D_{32}^e)\phi_y' D_{24}^e \psi_z'' - A_{33}^e \psi_z - D_{22}^e f'' + A_{33}^e f = A_{31}^e \epsilon_0$$

این معادلات، یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل معمولی غیرهمگن با ضرایب ثابت است. با جمع کردن حل عمومی و حل خصوصی معادلات (۱۳)، حل کامل به‌دست خواهد آمد. حل عمومی یا حل همگن معادلات (۱۳)، مطابق با روش استاندارد حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با انتخاب توابع نمایی و جای‌گذاری در این دستگاه به‌دست خواهد آمد. با این

شرایط هندسی (شرایط مرزی ضروری) یا شرایط

نیرویی (شرایط مرزی طبیعی) زیر در لبه‌های  $y = \pm b$ :

شرایط مرزی طبیعی	شرایط مرزی ضروری
$\delta\phi_x = 0$	$P_{xy} = 0$
$\delta v = 0$	$N_y = 0$
$\delta\phi_y = 0$	$P_y = 0$
$\delta\psi_z = 0$	$R_y = 0$
$\delta f = 0$	$M_y^p = 0$

$$(7)$$

که متجه‌های تنش، گشتاور و شار الکتریکی چنین تعریف می‌شود:

$$(N_y, N_z, N_z^p) = \int_{-h}^h (\sigma_y, \sigma_z, D_z) dz$$

$$(R_x, R_y, M_y^p) = \int_{-h}^h (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, D_y) z dz \quad (8)$$

$$(P_x, P_y, P_{xy}) = \int_{-h}^h (\sigma_x, \sigma_y, D_{xy}) z^2 dz$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۳) در معادله‌ی (۵) و نتیجه‌ی به‌دست آمده در معادله‌ی (۸)، متجه‌های تعمیم یافته‌ی تنش به شرح ذیل به‌دست خواهند آمد:

$$(N_y, N_z, N_z^p, P_y, P_{xy}) = (A_{12}, A_{13}, A_{31}^e, D_{12}, D_{16})\epsilon_0 + (A_{22}, A_{23}, A_{32}^e, D_{22}, D_{26})v' + (D_{22}, D_{23}, D_{32}^e, H_{22}, H_{26})\phi_y' + (A_{23}, A_{33}, A_{33}^e, D_{23}, D_{36})\psi_z + (D_{26}, D_{36}, D_{36}^e, H_{26}, H_{66})\phi_x' + (A_{32}^e, A_{33}^e, A_{33}^e, D_{32}^e, D_{36}^e)f$$

$$(9)$$

$$(R_y, R_x, M_y^p) = 2(D_{44}, D_{45}, D_{24}^e)\phi_y + (D_{44}, D_{45}, D_{24}^e)\psi_z' + 2(D_{45}, D_{55}, D_{25}^e)\phi_x + (D_{24}^e, D_{25}^e, -D_{22}^e)f' \quad (10)$$

که عبارت‌های سفتی  $A_{ij}$ ،  $D_{ij}$  و  $H_{ij}$  عبارتند از:

$$(A_{ij}, D_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h}^h \bar{C}_{ij}(1, z^2, z^4) dz \quad (11)$$

فرضیات داریم:

$$\begin{aligned} \varphi_{xh} &= Ae^{\lambda y}, & v_h &= Be^{\lambda y}, \\ \varphi_{yh} &= Ce^{\lambda y}, & \psi_{zh} &= De^{\lambda y}, \\ f_h &= Ee^{\lambda y} \end{aligned} \quad (14)$$

با جای گذاری معادلات (14) در شکل همگن معادلات (13) دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل به یک دستگاه معادله جبری خواهد شد. این دستگاه معادلات عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

ضرایب  $a_{ij}$  در رابطه (15) در پیوست تعریف شده‌اند. برای وجود حل غیر صفر، باید دترمینان ضرائب برابر با صفر باشد. با صفر قرار دادن دترمینان ضرائب، معادله‌ی مشخصه‌ی مرتبه‌ی ۵، مطابق ذیل به دست خواهد آمد:

$$m_1 \lambda^9 + m_2 \lambda^7 + m_3 \lambda^5 + m_4 \lambda^3 + m_5 \lambda = 0 \quad (16)$$

با حل معادله‌ی (16)، ۵ ریشه به شکل ذیل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \bar{\lambda}_1, & \lambda_2 &= -\bar{\lambda}_1, & \lambda_3 &= \bar{\lambda}_2, & \lambda_4 &= -\bar{\lambda}_2, \\ \lambda_5 &= \bar{\lambda}_3, & \lambda_6 &= -\bar{\lambda}_3, & \lambda_7 &= \bar{\lambda}_4, & \lambda_8 &= -\bar{\lambda}_4, \\ \lambda_9 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

با به دست آمدن  $\lambda$ ها، جواب عمومی را می‌توان به شکل ذیل نوشت:

$$\begin{aligned} \varphi_{xh} &= \sum_{i=1}^8 A_i e^{\lambda_i y} + A_9, & v_h &= \sum_{i=1}^8 B_i e^{\lambda_i y} + B_9 \\ \varphi_{yh} &= \sum_{i=1}^8 C_i e^{\lambda_i y} + C_9, & \psi_{zh} &= \sum_{i=1}^8 D_i e^{\lambda_i y} + D_9 \\ f_h &= \sum_{i=1}^8 E_i e^{\lambda_i y} + E_9 \end{aligned} \quad (18)$$

با توجه به ارتباط بین توابع نمایی و توابع هایپربولیک، معادله‌ی (18) را به شکل ذیل نیز می‌توان

نوشت:

$$\begin{aligned} \varphi_{xh} &= \sum_{i=1}^4 A_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 A_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y + A_9 \\ v_h &= \sum_{i=1}^4 B_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 B_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y + B_9 \\ \varphi_{yh} &= \sum_{i=1}^4 C_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 C_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y + C_9 \\ \psi_{zh} &= \sum_{i=1}^4 D_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 D_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y + D_9 \\ f_h &= \sum_{i=1}^4 E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 E_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y + E_9 \end{aligned} \quad (19)$$

با جای گذاری معادلات (19) به ازای  $\lambda_9 = 0$  در شکل همگن دستگاه معادله‌ی (13) نتیجه می‌دهد که:

$$A_9 = -\frac{D_{45} + D_{44}}{D_{55} + D_{45}} C_9, \quad B_9 = D_9 = E_9 = 0 \quad (20)$$

و نیز به ازای بقیه  $\lambda$ ها و با استفاده از رابطه‌ی (15) می‌توان ضرایب مجهول را بر حسب یک سری ضرایب به صورت ذیل نوشت:

$$\begin{aligned} A_i &= \bar{A}_i E_i, & B_i &= \bar{B}_i E_i, & C_i &= \bar{C}_i E_i, & D_i &= \bar{D}_i E_i \\ i &= 1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \quad (21)$$

پس از این، حل خصوصی دستگاه معادله‌ی (13) چنین انتخاب می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi_{xp} &= 0, & v_p &= k_1 \varepsilon_0 y, & \varphi_{yp} &= 0, \\ \psi_{zp} &= k_2 \varepsilon_0, & f_p &= k_3 \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (22)$$

با جای گذاری این حل در شکل غیرهمگن دستگاه معادله‌ی (13) به دست خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{32}^e \\ -A_{23} & -A_{33} & A_{33}^e \\ -A_{32}^e & -A_{33}^e & A_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -A_{12} \\ A_{13} \\ A_{31}^e \end{Bmatrix} \quad (23)$$

با جای گذاری روابط (۲۵) در روابط (۳) و (۴) کرنش ها و بردار میدان الکتریکی به دست می آیند (این روابط در پیوست آورده شده اند). با معلوم شدن میدان جابه جایی و بردار میدان الکتریکی بر حسب  $E_i$  ها، کلیه کمیت های مورد نیاز بر حسب  $E_i$  ها قابل محاسبه خواهند بود. این کمیت ها در پیوست الف آورده شده است. برای به دست آوردن ثابت های انتگرال گیری  $E_i$ ، باید شرایط مرزی در لبه  $y = b$  یا لبه  $y = -b$  اعمال شود. این شرایط مرزی به صورت ذیل هستند:

$$P_{xy} = P_y = R_y = M_y^p = 0 \quad (۲۶)$$

از آن جا که این معادلات بر حسب متجه های تنش، گشتاور و شار الکتریکی است، لذا باید معادلات (پ۳) و (پ۴) در پیوست ابتدا در معادلات متجه (۸) جای گذاری و سپس این متجه ها در روابط شرایط مرزی (۲۶) جای گذاری شود. با این جای گذاری و حل دستگاه، معادله ی به دست آمده که غیر همگن نیز می باشد، کلیه ثابت های انتگرال گیری  $E_i$  معلوم خواهند شد. با به دست آمدن این ثابت ها پروسه ی حل، کامل گردیده و پس از این می توان به بررسی کمیت های مورد نظر و رفتار هر یک از آن ها پرداخت. اکنون میدان جابه جایی و مؤلفه های میدان الکتریکی محاسبه شده است. پس از این با استفاده از معادله ی (پ۳) و (پ۴) در پیوست مؤلفه های تنش مکانیکی و شار الکتریکی بر حسب توابعی از  $y$  و  $z$  محاسبه می گردند. در این جا باید به این نکته اشاره شود که اگرچه تنش های داخل صفحه ای که از روابط پیوست شامل (پ۱-۳)، (پ۲-۳) و (پ۳-۳) محاسبه می شوند؛ دقیق هستند، ولی تنش های برون صفحه ای که از معادلات پیوست شامل (پ۳-۳)، (پ۴-۳) و (پ۵-۳) محاسبه می شوند، دقیق نیستند؛ زیرا در تئوری های تغییر شکل برشی، میدان جابه جایی و کرنش ها در راستای ضخامت پیوسته می باشند. در نتیجه تنش های برون صفحه ای در سطح مشترک لایه ها ناپیوسته خواهند بود؛ اما به دلیل تعادل، باید این مؤلفه های تنش در راستای ضخامت پیوسته باشند. به همین علت

با حل دستگاه معادله (۲۳) بر حسب  $k_1$ ،  $k_2$  و  $k_3$  و جای گذاری آن در معادلات (۲۲) حل خصوصی دستگاه معادله (۱۳) بدست خواهد آمد در نهایت حل کامل دستگاه معادله (۱۳) از جمع حل عمومی و حل خصوصی چنین بدست می آید.

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 \bar{A}_{i+4} E_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y \\ &\quad - \frac{D_{45} + D_{44}}{D_{55} + D_{45}} C_9 \\ v &= \sum_{i=1}^4 \bar{B}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 \bar{B}_{i+4} E_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y + k_1 \varepsilon_0 y \\ \varphi_y &= \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 \bar{C}_{i+4} E_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y + C_9 \\ \psi_z &= \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 \bar{D}_{i+4} E_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y + k_2 \varepsilon_0 \\ f &= \sum_{i=1}^4 E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + \sum_{i=1}^4 E_{i+4} \cosh \bar{\lambda}_i y + k_3 \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (۲۴)$$

قبل از اعمال شرایط مرزی و به منظور کاهش حجم محاسبات از شرایط تقارن حاکم بر مسأله (تقارن نسبت به صفحه ی  $x-z$ ) استفاده خواهد شد. از آن جا که شرایط مرزی در  $y = b$  و  $y = -b$  یکسان هستند، لذا توابع  $\varphi_x$ ،  $v$  و  $\varphi_y$  باید توابع فردی از متغیر  $y$  باشند؛ لذا توابع زوجی که در این سه تابع وجود دارد از جمله مقادیر ثابت  $A_0$ ،  $B_0$  و  $C_0$  حذف می شود. هم چنین باید توابع  $\psi_z$  و  $f$  توابع زوجی از متغیر  $y$  باشند. در نتیجه توابع فردی که در این دو تابع وجود دارد، حذف می گردد. با لحاظ نمودن این شرایط به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y \\ v &= \sum_{i=1}^4 \bar{B}_i E_i \bar{\lambda}_i \sinh y + k_1 \varepsilon_0 y \\ \varphi_y &= \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y \\ \psi_z &= \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y + k_2 \varepsilon_0 \\ f &= \sum_{i=1}^4 E_i \cosh \bar{\lambda}_i y + k_3 \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (۲۵)$$

مراجعه مقایسه شده است. نتایج عددی برای چند لایه پیزوالکتریک متقارن در دو حالت متعامد و زاویه‌دار و تحت کرنش محوری یکنواخت  $\epsilon_0 = 0.1\%$  نمایش داده شده است.

مطابق شکل (۱)، عرض و ضخامت چند لایه به ترتیب  $2b$  و  $2h$  انتخاب شده است و نیز طول آن بزرگ بوده، به گونه‌ای که کرنش‌ها و کمیت‌های وابسته به آن همه مستقل از  $x$  هستند. عرض چند لایه، ده برابر ضخامت آن انتخاب شده است. چند لایه‌ی مورد نظر، دارای چهار لایه با ضخامت‌های مساوی یعنی  $t=h/2$  می‌باشد. خواص مکانیکی چند لایه پیزوالکتریک T300/Epoxy و خواص الکتریکی آن PZT/5A انتخاب گردیده و مقادیر عددی هر یک از آن‌ها در جدول (۱) نمایش داده شده است. بقیه، ضرائب که در جدول قید نشده، صفر می‌باشد. خواص داده شده، بیانگر قرارگیری الیاف پیزوالکتریک در ماتریسی از رزین اپکسی است.

این حل تحلیلی، قابلیت محاسبه‌ی نحوه‌ی تغییرات محلی متغیرهای الکترومکانیکی در راستای ضخامت و نیز تنش‌ها و پتانسیل الکتریکی در محل تماس هر لایه را دارد. هم‌چنین قادر است که تأثیر خواص مواد پیزوالکتریک را بر روی تنش‌ها و میدان الکتریکی و نیز تأثیر کوپلینگ الکترومکانیکی را بر روی تنش‌های بین لایه‌ای مورد مطالعه قرار دهد. معادلات حاکمه بر حسب خواص مکانیکی، خواص پیزوالکتریک و خواص الکتریکی ارائه شده است. چنانچه در معادلات حاکمه خواص الکتریکی برابر صفر انتخاب شود، این معادلات از حالت کوپلینگ الکترومکانیکی خارج می‌شود. با توجه به پیچیده بودن روابط و به منظور بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر تنش‌های بین لایه‌ای در لبه‌ی آزاد، یک کد کامپیوتری تهیه شده است. برای مطالعه‌ی رفتار الکترومکانیکی چند لایه‌ی پیزوالکتریک، چندین چیدمان زاویه‌ای متعامد و زاویه‌دار تحت شرایط بارگذاری ثابت در نظر گرفته شده است و به طور خاص این چیدمان‌ها به

تنش‌های برون صفحه‌ای به دست آمده از روابط ساختاری (۵) از دقت زیادی برخوردار نیستند. یک راهکار برای افزایش دقت این تنش‌ها انتگرال‌گیری از معادلات موضعی تعادل است. با انجام این کار مؤلفه‌های برون صفحه‌ای تنش در راستای ضخامت پیوسته خواهند بود. از آن جا که چند لایه مورد بررسی طویل است؛ لذا کرنش‌ها و تنش‌ها فقط توابعی از  $y$  و  $z$  می‌باشند. در این صورت، کلیه‌ی تغییرات نسبت به  $x$  حذف شده و معادلات موضعی تعادل به شکل ذیل کاهش خواهند یافت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

بدین ترتیب تنش‌های برون صفحه‌ای به صورت دقیق قابل محاسبه خواهند بود. برای این منظور، ابتدا یک چند لایه‌ی  $[0^\circ / 90^\circ]_s$  در نظر گرفته خواهد شد. در این جا بررسی تنش‌های  $\sigma_z$ ،  $\sigma_{yz}$  و  $\sigma_{xz}$  در سطح مشترک لایه‌ی  $0^\circ / 90^\circ$  در  $z = h/2$  مورد نظر است. با انتگرال‌گیری از معادلات تعادل (۲۷) تنش‌های برون صفحه‌ای در سطح مشترک دو لایه‌ی  $0^\circ / 90^\circ$  مستقیماً به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(y, z = h/2) &= \int_{h/2}^h \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz \\ \sigma_{yz}(y, z = h/2) &= \int_{h/2}^h \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dz \\ \sigma_z(y, z = h/2) &= \int_{h/2}^h \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz \end{aligned} \quad (28)$$

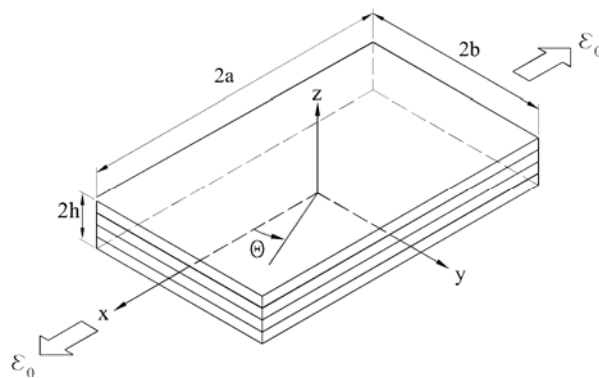
### نتایج عددی

در این، بخش نتایج عددی حاصل از حل تحلیلی برای چند لایه پیزوالکتریک نمایش داده خواهد شد. نتایج حل تحلیلی حاصل از این مقاله در دو حالت کوپل و غیر کوپل با نتایج اجزاء محدود و تئوری لایه‌ای سایر



استفاده از انتگرال گیری از معادلات تعادل الاستیسیته به دست آمده‌اند. نتایج عددی تنش عمودی  $\sigma_z$  برای دو حالت  $[0^\circ / 90^\circ]_s$  و  $[90^\circ / 0^\circ]_s$  بر حسب متغیر  $y/b$  و در موقعیت  $z = h/2$  در شکل‌های (۲) و (۳) نمایش داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود تطابق خوبی برای تنش عمودی  $\sigma_z$  بین حل تحلیلی ارائه شده و نتایج مراجع [14] و [20] برای دو حالت کوپل و غیر کوپل وجود دارد. هم‌چنین در تمامی حالت‌ها، تنش عمودی  $\sigma_z$  در نزدیکی لبه شدیداً شروع به افزایش نموده و در لبه آزاد به بیشترین مقدار خود رسیده است. از آن جا که این تنش در نزدیکی لبه آزاد کششی است، لذا نشان دهنده تمایل لایه‌ها به باز شدن از یکدیگر می‌باشد. با بررسی مقادیر عددی تنش  $\sigma_z$  در دو حالت کوپل و غیر کوپل مشاهده می‌گردد که در هر دو حالت رفتارها تقریباً شبیه هم بوده ولی از لحاظ مقدار تنش  $\sigma_z$  در حالت کوپل تقریباً دو برابر حالت غیر کوپل است.

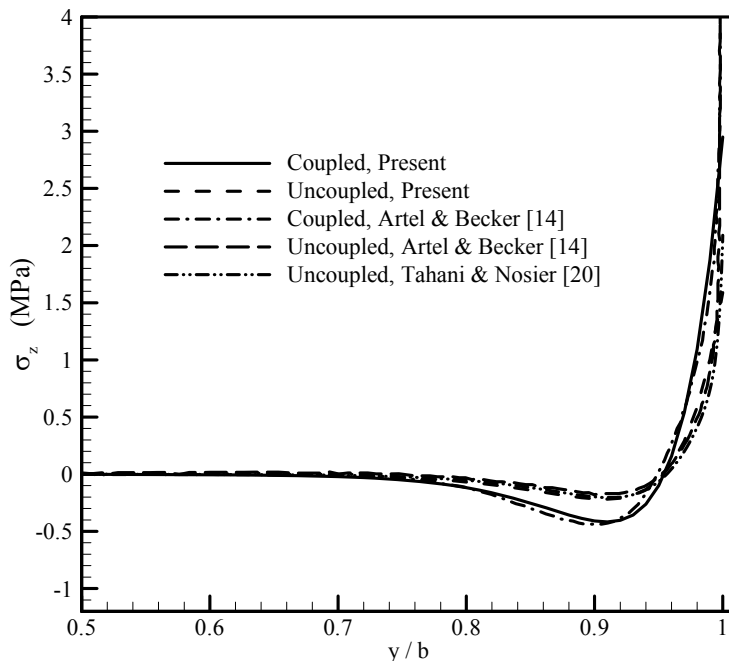
صورت  $[0^\circ / 90^\circ]_s$ ،  $[90^\circ / 0^\circ]_s$  و  $[45^\circ / -45^\circ]_s$  در دو حالت کوپل و غیر کوپل بررسی گردیده‌اند. نتایج تحلیل نشان می‌دهد که تنش‌های برون صفحه‌ای در دو حالت کوپل و غیر کوپل بر هم منطبق نبوده و برخی از مؤلفه‌های تنش در حالت کوپل بزرگتر از تنش‌ها در حالت غیر کوپل هستند و این یکی از قابلیت‌های مهم حل تحلیلی ارائه شده در بیان رفتار تنش‌های بین لایه‌ای در داخل لایه‌ی مرزی و به‌خصوص در لبه‌ی آزاد می‌باشد. به منظور بررسی صحت نتایج حل تحلیلی، این نتایج با نتایج روش اجزاء محدود که توسط Becker و Artel [۱۴]، در دو حالت کوپل و غیر کوپل ارائه شده، مقایسه گردیده است. هم‌چنین نتایج حالت غیر کوپل علاوه بر مقایسه با روش اجزاء محدود با روش دقیق تئوری لایه‌ای که توسط Tahani و Nosier [20] ارائه شده مقایسه گردیده و در همه حالات تطابق رفتاری خوبی بین آن‌ها وجود داشته است. در مثال‌های عددی ارائه شده تنش‌های برشی عرضی  $\sigma_{xz}$  و  $\sigma_{yz}$  و نیز تنش عمودی عرضی  $\sigma_z$  با



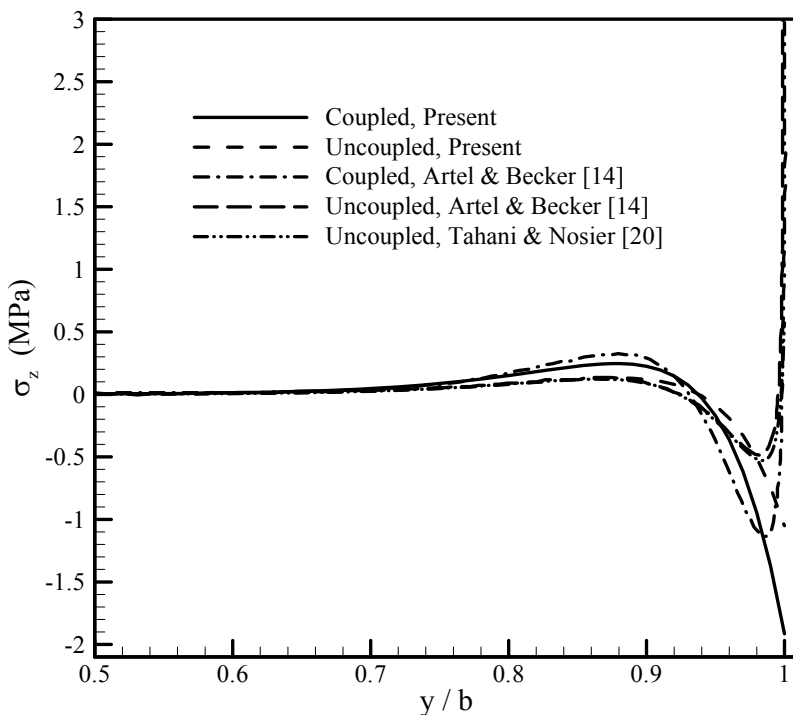
شکل ۱ هندسه و دستگاه مختصات چند لایه‌ی پیزوالکتریک

جدول ۱ خواص مکانیکی، ضرائب پیزوالکتریک و دی الکتریک ماده‌ی پیزوالکتریک

Elastic stiffnesses (GPa)	Piezoelectric coefficients (C/m <sup>2</sup> )	Dielectric properties
$C_{11} = 137$	$e_{31} = e_{32} = -5.4$	$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1730 \epsilon_0$
$C_{22} = C_{33} = 10.9$	$e_{33} = 15.8$	$\epsilon_{33} = 1700 \epsilon_0$
$C_{12} = C_{13} = 3.75$	$e_{24} = e_{15} = 12.3$	$\epsilon_0 = 8.859 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Jm}$
$C_{23} = 3$		
$C_{44} = 3.97$		
$C_{44} = 3.97$		



شکل ۲ تنش عمودی بین لایه‌های  $\sigma_z$  در چند لایه  $[0^\circ/90^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$



شکل ۳ تنش عمودی بین لایه‌های  $\sigma_z$  در چند لایه  $[90^\circ/0^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$

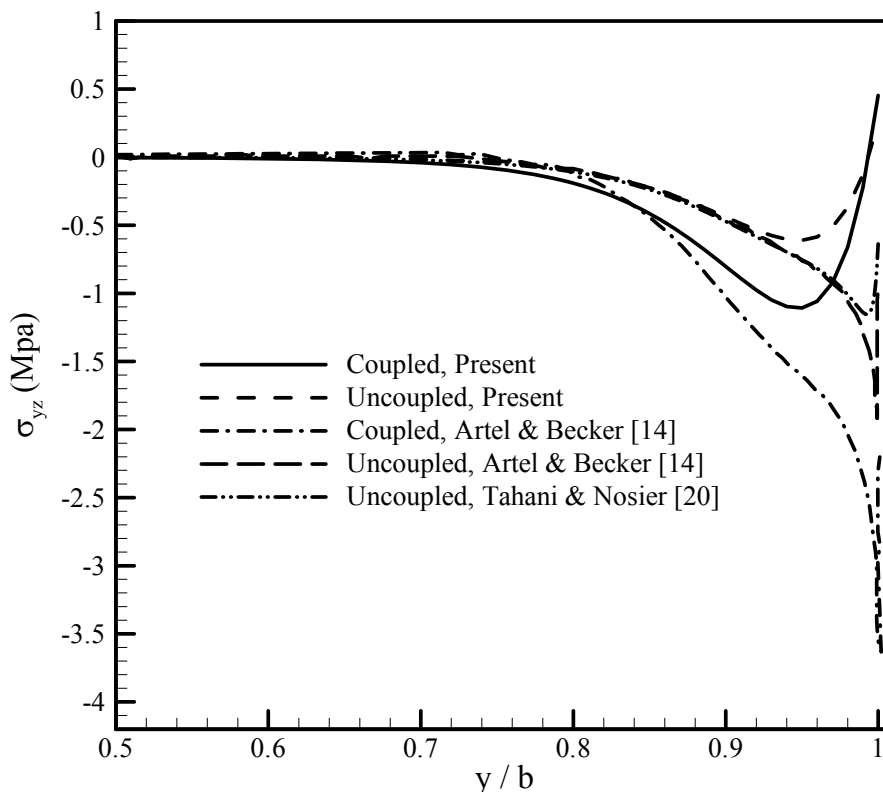
در شکل‌های (۴ و ۵) نمایش داده شده است. نتایج به دست آمده از حل تحلیلی در داخل لایه‌ی مرزی و نیز تا نزدیکی لبه‌ی آزاد با نتایج مراجع [14] و [20]

توزیع تنش برشی برون صفحه‌ای  $\sigma_{yz}$  در سطح مشترک دو لایه  $0^\circ/90^\circ$  برای دو نوع لایه‌گذاری  $[90^\circ/0^\circ]_s$  و  $[0^\circ/90^\circ]_s$  در جهت پهنا (y) به ترتیب

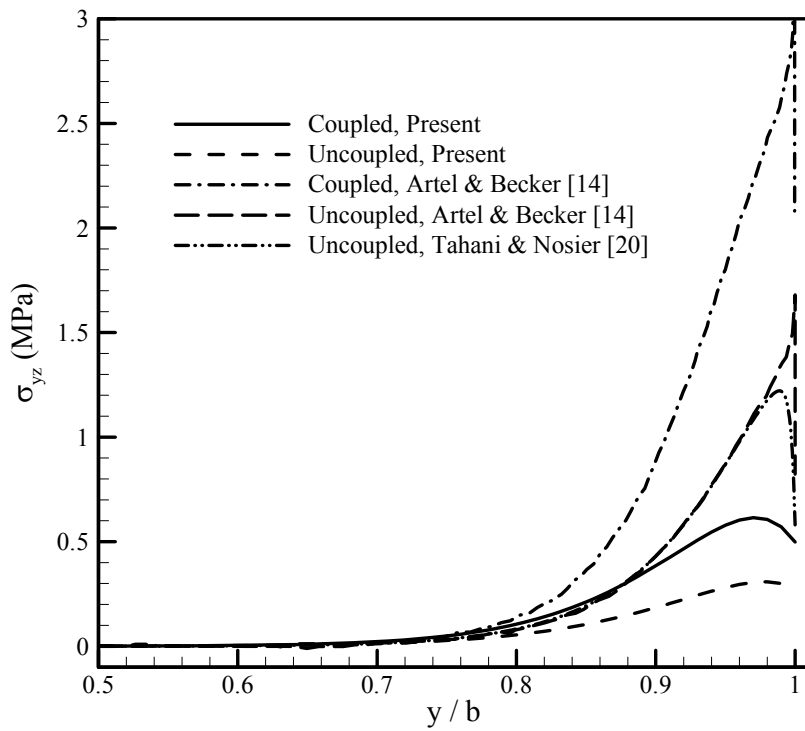
گرفته است. شکل های (۶)، (۷ و ۸) به ترتیب نحوه ی تغییرات تنش عمودی  $\sigma_z$  و تنش های برشی  $\sigma_{xz}$  و  $\sigma_{yz}$  را در راستای پهنا در موقعیت  $z = h/2$  نشان می دهد. در این حالت، اختلاف زیادی بین حل کوپل و غیر کوپل وجود ندارد. همان گونه که در شکل (۸) ملاحظه می شود، تنش برشی  $\sigma_{xz}$  در نزدیکی لبه ی آزاد، تغییرات شدیدی داشته و مقدارش به شدت افزایش می یابد. نتایج به دست آمده در فاصله ی  $y/b=0$  تا  $y/b=0.9$  با نتایج مراجع [14] و [20] برای دو حالت کوپل و غیر کوپل تطابق دارد. برای نواحی خیلی نزدیک به لبه ی آزاد، نتایج به دست آمده از حل تحلیلی با نتایج مرجع [14] از لحاظ مقدار تفاوت دارد. همان طور که گفته شد با افزایش مرتبه ی تئوری تغییر شکل برشی، این مقادیر بهبود خواهند یافت.

برای دو حالت کوپل و غیر کوپل از لحاظ رفتاری هم خوانی دارد. اختلاف در مقدار آن ها به انتخاب روش حل و مرتبه ی تئوری تغییر شکل برشی ارتباط داشته و با افزایش مرتبه ی تئوری تغییر شکل برشی این مقادیر بهبود خواهند یافت. مقدار تنش  $\sigma_{yz}$  در لبه ی آزاد در هیچ یک از حالت ها صفر نشده است. دلیل صفر نشدن آن، اعمال شرایط مرزی به صورت انتگرالی و نیز رفتار منفرد تنش در محل تماس دو لایه می باشد. همان طور که ملاحظه می شود، رفتار تنش ها در دو حالت کوپل و غیر کوپل شبیه به هم بوده، اما در حالت کوپل مقدار تنش ها حدوداً دو برابر حالت غیر کوپل است.

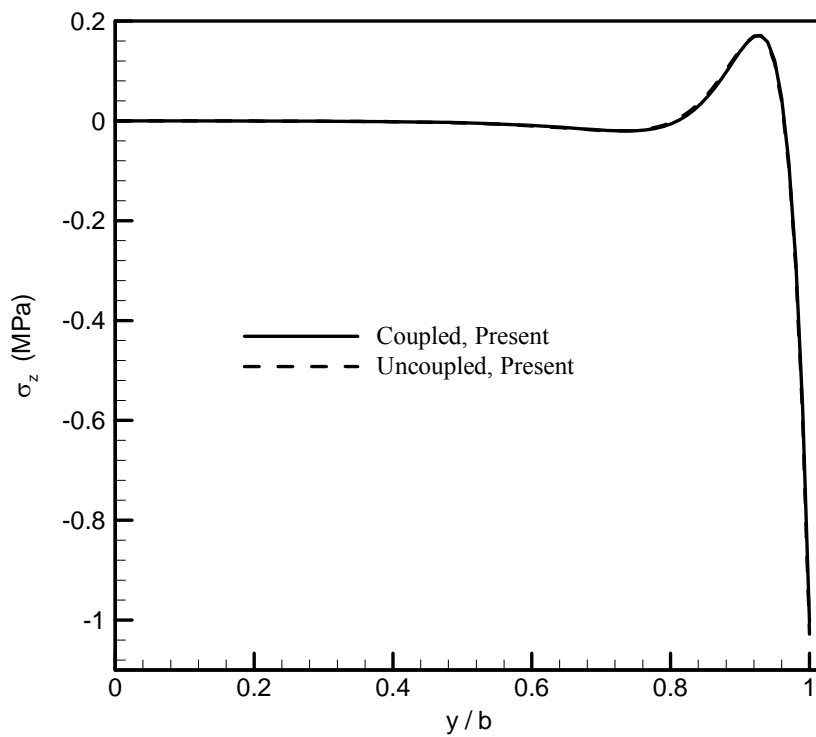
در ادامه، یک چند لایه بیزوالکتریک متقارن زاویه دار با چیدمان  $[45^\circ / -45^\circ]_s$  مورد بررسی قرار



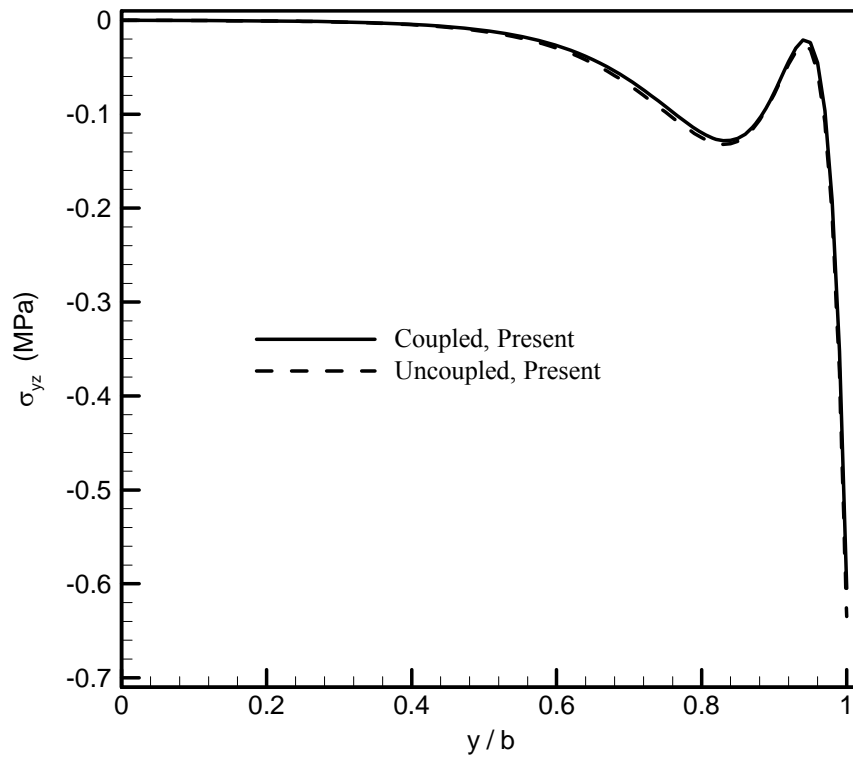
شکل ۴ تنش برشی بین لایه های  $\sigma_{yz}$  در چند لایه  $[0^\circ / 90^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$



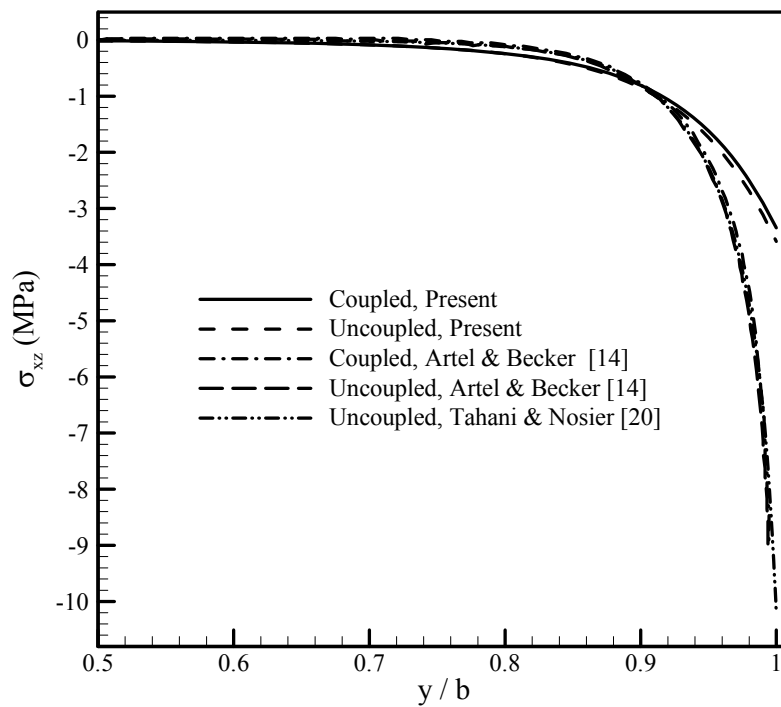
شکل ۵ تنش برشی بین لایه‌ای  $\sigma_{yz}$  در چند لایه  $[90^\circ / 0^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$



شکل ۶ تنش عمودی بین لایه‌ای  $\sigma_z$  در چند لایه  $[45^\circ / -45^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$



شکل ۷ تنش برشی بین لایه‌ای  $\sigma_{yz}$  در چند لایه  $[45^\circ / -45^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$

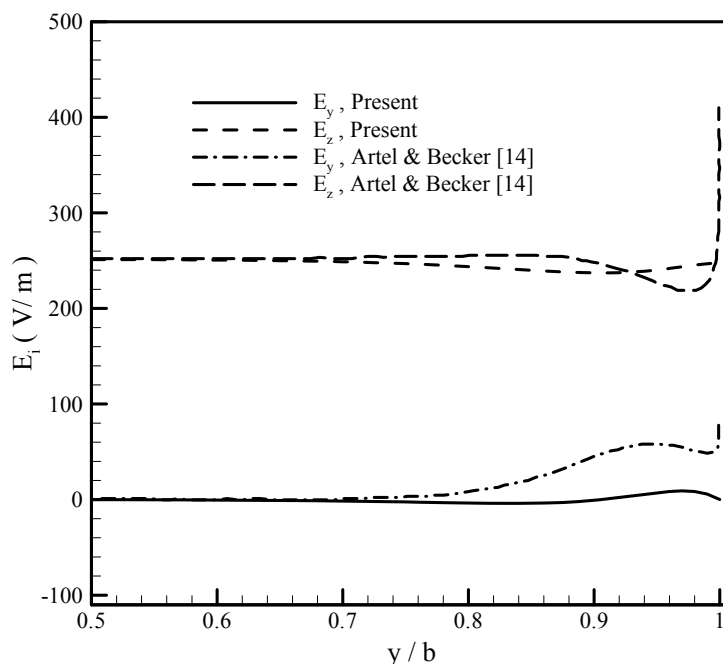


شکل ۸ تنش برشی بین لایه‌ای  $\sigma_{xz}$  در چند لایه  $[45^\circ / -45^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$

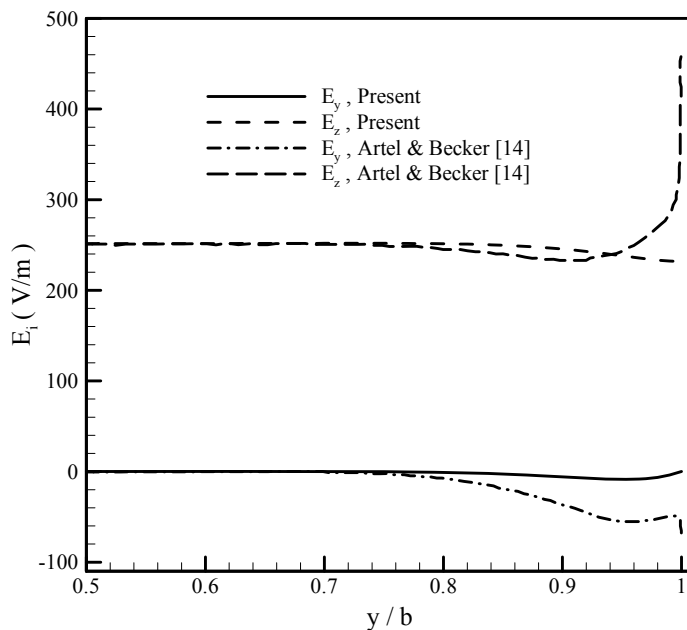
سطوح مشترک  $0^\circ / 90^\circ$  و  $90^\circ / 0^\circ$  برای چند لایه‌های  $[90^\circ / 0^\circ]_s$  و  $[0^\circ / 90^\circ]_s$  نمایش می‌دهند. در نواحی نزدیک لبه‌ی آزاد، نتایج حل تحلیلی با نتایج مرجع [14] تطابق خوبی دارد. همانگونه که مشاهده می‌شود،  $E_z$  در لبه‌ی آزاد، سریعاً افزایش می‌یابد؛ در حالی که  $E_y$  دارای مقدار محدودتری نسبت به  $E_z$  است.

مؤلفه‌های میدان الکتریکی  $E_y$  و  $E_z$  برای چند لایه‌ی پیزوالکتریک زاویه‌دار با چیدمان  $[45^\circ / -45^\circ]_s$  در شکل (۱۱) نمایش داده شده است. مانند حالت قبل، نتایج حل تحلیلی در نواحی نزدیک به لبه‌ی آزاد، تطابق خوبی با نتایج به‌دست آمده از روش اجزاء محدود [14] دارد. علاوه بر این، مشاهده می‌شود که  $E_z$  در لبه‌ی آزاد به شدت افزایش یافته؛ در حالی که  $E_y$  صفر شده است.

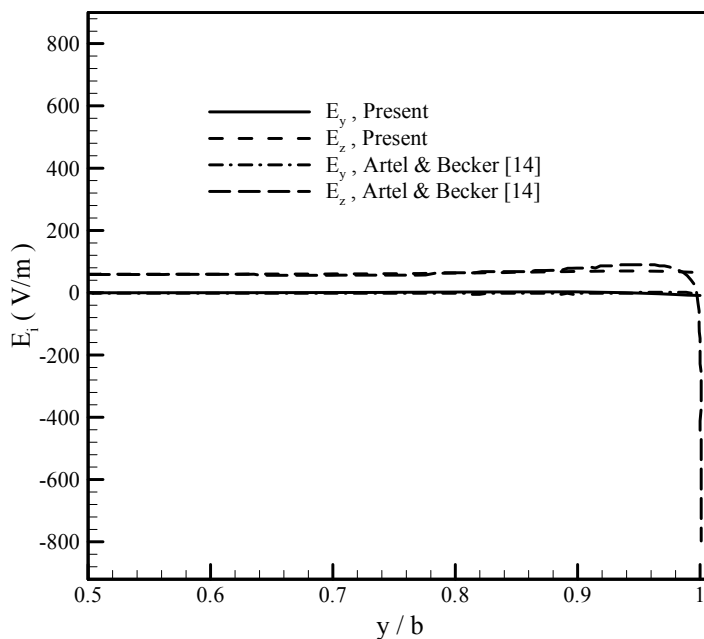
هنگامی که یک چند لایه‌ی پیزوالکتریک تحت کرنش یکنواخت محوری قرار گیرد، این کرنش یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. متقابلاً میدان الکتریکی تولید شده سبب ایجاد کرنش خواهد شد. هنگامی که میدان الکتریکی ایجاد شده عمود بر جهت قطبیت باشد، سبب بروز تغییر شکل برشی می‌شود. در اثر این تغییر شکل برشی، تنش‌های برشی به وجود آمده، و سبب جدایش لایه‌ها در نزدیکی لبه‌ی آزاد می‌شود. همچنین کمیت‌های الکتریکی نیز در نزدیکی لبه‌ی آزاد به شدت افزایش یافته و می‌تواند عاملی برای جدایش لایه‌ها از یکدیگر شود. بر همین اساس، لازم است تا مؤلفه‌های میدان الکتریکی در جهت پهنا برحسب متغیر  $y/b$  رسم شود. برای یک چند لایه‌ی پیزوالکتریک طویل، مؤلفه‌ی میدان الکتریکی  $E_x$  صفر می‌باشد. شکل‌های (۹ و ۱۰) مؤلفه‌های میدان الکتریکی  $E_y$  و  $E_z$  را در



شکل ۹ مؤلفه‌های میدان الکتریکی  $E_y$  و  $E_z$  در چند لایه  $[0^\circ / 90^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$



شکل ۱۰ مؤلفه‌های میدان الکتریکی  $E_y$  و  $E_z$  در چند لایه  $[90^\circ / 0^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$



شکل ۱۱ مؤلفه‌های میدان الکتریکی  $E_y$  و  $E_z$  در چند لایه  $[45^\circ / -45^\circ]_s$  تحت کرنش یکنواخت محوری در موقعیت  $z = h/2$

### نتیجه‌گیری

پیزوالکتریک طویل متعامد زاویه‌دار ارائه شده است. در این تحلیل اثر کوپلینگ الکترومکانیکی در نظر گرفته شده و فرض گردیده که پتانسیل الکتریکی دارای

در این مقاله یک حل تحلیلی برای بررسی تنش‌های برون صفحه‌ای در لبه‌ی آزاد چند لایه‌های

حدود دو برابر مقدار تنش در حالت غیر کوپل بوده که این خود بیانگر اهمیت اثر کوپلینگ الکترومکانیکی است.

در چند لایه‌های پیزوالکتریک تحت هر نوع بارگذاری تنش‌های بین لایه‌های عمودی و برشی به وجود خواهد آمد و این تنش‌ها سبب تمرکز تنش در لبه‌ی آزاد چند لایه می‌گردد. هم‌چنین تاثیر کوپلینگ الکترومکانیکی بر روی تنش‌های بین لایه‌ای به خصوص در نزدیکی لبه‌ی آزاد قابل ملاحظه بوده و بایستی در تحلیل ورق‌های پیزوالکتریک این اثرات در نظر گرفته شود. نتایج، نشان داد که حل تحلیلی ارائه شده قابلیت تحلیل تنش‌ها در لایه‌ی مرزی را داشته و تا نزدیکی لبه‌ی آزاد از دقت قابل قبولی برخوردار است. برای بهبود نتایج حل تحلیلی ارائه شده، می‌توان از تئوری‌های مرتبه‌ی بالای تغییر شکل برشی و یا تئوری لایه‌ای استفاده نمود.

تغییرات خطی در راستای ضخامت باشد. این تحلیل بر اساس اصل تغییراتی حداقل انرژی پتانسیل کل و فرض پیزوالکتریسته خطی آن جام شده است. هم‌چنین از تئوری تک لایه‌ی معادل به همراه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی دوم، برای مدل‌سازی استفاده شده است. صحت نتایج حل تحلیلی به دست آمده برای دو نوع چند لایه متعامد و یک نوع چند لایه‌ی زاویه‌دار با نتایج روش اجزاء محدود و تئوری دقیق لایه‌ای مقایسه گردیده است. بررسی نتایج به دست آمده از حل تحلیلی نشان می‌دهد که کوپلینگ الکترومکانیکی بر روی برخی از مؤلفه‌های تنش تأثیر زیادی دارد. هم‌چنین این بررسی نشان داد که اثر کوپلینگ الکترومکانیکی بر روی چند لایه‌ی متعامد، بیشتر از چند لایه‌ی زاویه‌دار است و نیز در تمامی حالات بررسی شده، مقادیر تنش در حالت کوپل بیشتر و یا حداقل نزدیک به مقدار این تنش‌ها در حالت غیر کوپل است. در برخی از موارد، مقدار تنش در حالت کوپل

## مراجع

1. Brooks, S.T., Hejliger, P., "Static behavior of piezoelectric laminates with distributed and patched actuators", *J. Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 5, pp. 635-646, (1994).
2. Reddy, J.N., "On laminated composite plates with integrated sensors and actuators", *Engineering Structures*, Vol. 21, pp. 568-593, (1999).
3. Hung, H.J., Lee, "Analysis of composite plates with piezoelectric actuators for vibration control using layerwise displacement theory", *Composite Part B*, pp. 621-632, (1998).
4. Chee, C., Tong, L., Steven, G.P., "Piezoelectric actuator optimization for static shape control of composite plates", *Composite Structures*, Vol. 55, pp. 169-184, (2002).
5. Fernandes, A., Pouget, J., "An accurate modelling of piezoelectric multi-layer plates", *European J. Mechanics A/Solids*, Vol. 21, pp. 629-651, (2002).
6. Ossadzow, C., Touratier, M., "Multi layered piezoelectric Refined plate theory", *J. AIAA*, Vol. 41, pp. 90-99, (2003).
7. Liv, G.R., Dai, K.Y., Lim, K.M., "Static and vibration control of composite laminates integrated with piezoelectric sensors and actuators using the radial point interpolation method", *Smart Materials and Structures*, Vol. 13, pp. 1438-1447, (2004).



8. Raja, S., Dwarakanathan, D., Sinha, P.k., Prathap, G., "Bending behavior of Piezo - Hydrothermo - Elastic smart laminated composite flat and curved plates with active control", *J. Reinforced Plastic and Composite*, Vol. 23, pp. 265-290, (2004).
9. Roj, M.C., Mallik, N., "Performance of smart damping treatment using piezoelectric fiber-reinforced composites", *J. AIAA*, Vol. 43, pp. 184- 193, (2005).
10. Ruan, X., Danforth, S.C., Safari, A., Chou, T.W., "A theoretical study of the coupling effects in piezoelectric ceramics", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 36, pp. 465-487, (1999).
11. Davi, G., Milazzo, A., "Stress and electric field in piezoelectric composite laminate", *Electronic J. Boundary Elements*, Vol. 43, pp. 43-50, (2001).
12. Suvorov, A.P., Dvorak, G.J., "Optimized fiber prestress of reduction of free edge stresses in composite laminates", *Int. J. Solid and Structures*, Vol. 38, pp. 6751-6786, (2001).
13. Yang, Q.S., Qin, Q.H., Liu, T., "Interlayer stress in laminate beam of piezoelectric and elastic materials", *Composite Structures*, Vol. 75, pp. 587-592, (2006).
14. Artel, J., Becker, W., "Coupled and uncoupled analyses of piezoelectric free-edge effect in laminated plates", *Composite Structures*, Vol. 69, pp. 329-335, (2005).
15. Mannini, A., Goudenzi, P., "Multi-layer higher-order finite elements for the analysis of free-edge stresses in piezoelectric actuated laminates", *Composite Structures*, Vol. 63, pp. 263-270, (2004).
16. Erturk, C.L., Tekinalp, O., "A layerwise approach to piezo-electric plates accounting for adhesive flexibility and delaminated regions", *Computers and Structures*, Vol. 83, pp. 279-296, (2005).
17. Izadi Najafabadi, M., Tahani, M., "Analytical determination of free edge stresses in composite laminates with piezoelectric material properties", *8<sup>th</sup> HSTAM Int. Congress on Mechanics, Greece*, (2007).
18. Fung, YC., "*Foundation of solid mechanics*", Englewood cliffs, NJ: prentice-Hall., (1965).
19. Reddy, J.N., "*Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*", CRC Press, (2004).
20. Tahani, M., Nosier, A., "Accurate determination of interlaminor stresses in general cross-ply laminates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 11, pp. 1-26, (2004).

پیوست

ضرایب  $a_{ij}$  در رابطه (۱۵) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} a_{11} &= H_{66}\lambda^2 - 4D_{55}, & a_{12} &= D_{26}\lambda^2, & a_{13} &= H_{26}\lambda^2 - 4D_{45}, & a_{14} &= (D_{36} - 2D_{45})\lambda \\ a_{15} &= (D_{36}^e - 2D_{25}^e)\lambda, & a_{21} &= D_{26}\lambda^2, & a_{22} &= A_{22}\lambda^2, & a_{23} &= D_{22}\lambda^2, & a_{24} &= A_{23}\lambda, & a_{25} &= A_{32}^e \\ a_{31} &= H_{26}\lambda^2 - 4D_{45}, & a_{32} &= D_{22}\lambda^2, & a_{33} &= H_{22}\lambda^2 - 4D_{44}, & a_{34} &= (D_{23} - 2D_{44})\lambda \\ a_{35} &= (D_{32}^e - 2D_{24}^e)\lambda, & a_{41} &= (2D_{45} - D_{36})\lambda, & a_{42} &= -A_{23}\lambda, & a_{43} &= (2D_{44} - D_{23})\lambda \\ a_{44} &= (D_{44}\lambda^2 - A_{33}), & a_{45} &= (-D_{24}^e\lambda^2 - A_{33}^e), & a_{51} &= (2D_{25}^e - D_{36}^e)\lambda, & a_{52} &= -A_{32}^e\lambda \\ a_{53} &= (2D_{24}^e + D_{32}^e)\lambda, & a_{54} &= (D_{24}^e\lambda^2 - A_{33}^e), & a_{55} &= (-D_{22}^e\lambda^2 + A_{33}^e) \end{aligned} \quad (پ۱)$$

با جایگذاری میدان جابه‌جایی به دست آمده از روابط (۲۵) در روابط کرنش - جابه‌جایی (۳)، می‌توان کرنش‌ها را به صورت ذیل نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_0 \\ \varepsilon_y &= \sum_{i=1}^4 \bar{B}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y + z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y + k_1 \varepsilon_0 \\ \varepsilon_z &= \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y + k_2 \varepsilon_0 \\ \gamma_{yz} &= 2z \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + z \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y \\ \gamma_{xz} &= 2z \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y \\ \gamma_{xy} &= z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \bar{\lambda}_i E_i \cos \bar{\lambda}_i y \text{ و } E_x = 0, \quad E_y = -z \sum_{i=1}^4 \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y, \quad E_z = -\sum_{i=1}^4 E_i \cosh \bar{\lambda}_i y - k_3 \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (پ۲)$$

هم‌چنین با جای‌گذاری معادلات (پ۲) در قانون هوک (۵) تنش‌ها در لایه‌ی  $k$  ام به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= \bar{C}_{11}^{(k)} \varepsilon_0 + \bar{C}_{12}^{(k)} (k_1 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{B}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y + \\ & z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{C}_{13}^{(k)} (k_2 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) \\ & + \bar{C}_{16}^{(k)} (z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{e}_{31} (k_3 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) \end{aligned} \quad (پ۳-۱)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(k)} = & \bar{C}_{12}^{(k)} \varepsilon_0 + \bar{C}_{22}^{(k)} (k_1 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{B}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y + \\ & z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{C}_{23}^{(k)} (k_2 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) \\ & + \bar{C}_{26}^{(k)} (z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{e}_{32} (k_3 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) \end{aligned} \quad (پ-۳-۲)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k)} = & \bar{C}_{13}^{(k)} \varepsilon_0 + \bar{C}_{23}^{(k)} (k_1 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{B}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y + \\ & z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{C}_{33}^{(k)} (k_2 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) \\ & + \bar{C}_{36}^{(k)} (z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{e}_{33} (k_3 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) \end{aligned} \quad (پ-۳-۳)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(k)} = & C_{44}^{(k)} (2z \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + z \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y) + C_{45}^{(k)} (2z \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y) \\ & + \bar{e}_{24} z \sum_{i=1}^4 \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y \end{aligned} \quad (پ-۳-۴)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(k)} = & C_{45}^{(k)} (2z \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + z \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y) + C_{55}^{(k)} (2z \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y) \\ & + \bar{e}_{25} z \sum_{i=1}^4 \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y \end{aligned} \quad (پ-۳-۵)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(k)} = & \bar{C}_{16}^{(k)} \varepsilon_0 + \bar{C}_{26}^{(k)} (k_1 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{B}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y + \\ & z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{C}_{36}^{(k)} (k_2 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) \\ & + \bar{C}_{66}^{(k)} (z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{e}_{36} (k_3 \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^4 E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) \end{aligned} \quad (پ-۳-۶)$$

در نهایت، با جای گذاری روابط (پ-۲) در روابط میدان الکتریکی (۵) به دست می آید:

$$\begin{aligned} D_x^{(k)} = & e_{14}^{(k)} (2z \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + z \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y) + \\ & + e_{15}^{(k)} (2z \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y) - \bar{e}_{12}^{(k)} z \sum_{i=1}^4 \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y \end{aligned} \quad (پ-۴-۱)$$

$$D_y^{(k)} = e_{24}^{(k)} (2z \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y + z \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y) + e_{25}^{(k)} (2z \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y) - \bar{\epsilon}_{25}^{(k)} z \sum_{i=1}^4 \bar{\lambda}_i E_i \sinh \bar{\lambda}_i y \quad (پ-۴)$$

$$D_z^{(k)} = \bar{\epsilon}_{13}^{(k)} \epsilon_0 + \bar{\epsilon}_{32}^{(k)} (k_1 \epsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{B}_i \bar{\lambda}_i y + z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{C}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{\epsilon}_{33}^{(k)} (k_2 \epsilon_0 + \sum_{i=1}^4 \bar{D}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) + \bar{\epsilon}_{36}^{(k)} z^2 \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \bar{\lambda}_i E_i \cosh \bar{\lambda}_i y - \bar{\epsilon}_{33}^{(k)} (k_3 \epsilon_0 + \sum_{i=1}^4 E_i \cosh \bar{\lambda}_i y) \quad (پ-۴)$$