

مدل‌سازی و تحلیل هم‌زمان مسایل تنش مسطح با مصالح FG به روش ایزوژئومتریک*

(یادداشت پژوهشی)

بهروز حسینی^(۱)ناصرظریف مقدم^(۲)

چکیده در دهه‌های اخیر، نوع جدیدی از مواد کامپوزیت که در واقع پیشرفته‌ترین نوع آن‌ها نیز می‌باشد، در دنیا معرفی شده است که با عنوان مصالح FG شناخته می‌شوند. در این مصالح، مدول الاستیسیته به صورت یک تابع پیوسته در سراسر دامنه‌ی مسأله تغییر می‌کند. با توجه به این‌که روش اجزای محدود در حل این دسته از مسایل دارای نقاط ضعف مشخصی می‌باشد، لذا در این پژوهش به روش مدل‌سازی و تحلیل سازه‌های ساخته شده با این مصالح با روش ایزوژئومتریک پرداخته و برخی از نقاط ضعف روش اجزای محدود نیز بدین وسیله برطرف شده است. از مزایای روش ایزوژئومتریک نسبت به روش اجزای محدود، می‌توان به حذف مرحله‌ی شبکه‌بندی مسأله و کاهش چشم‌گیر تعداد مجهولات و ابعاد دستگاه معادلات حاصله نام برد. در انتها نیز با حل مثال، دقت و توانمندی این روش، نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی روش ایزوژئومتریک، مصالح FG، مسایل تنش مسطح، تکنیک نریز

An Isogeometrical Approach to the Simultaneous Modeling and Analysis of FGM Plane Stress Problems

B. Hassani

N. Z. Moghaddam

Abstract The Functionally Graded Materials (FGM) have been introduced in the last few decades. In these materials the modulus of elasticity can vary as a continuous function throughout the domain of the problem. Due to some weaknesses of the Finite Element Method (FEM) in dealing with these problems, a slightly different version of the recently developed Isogeometric Analysis (IA) method is employed to overcome some of the deficiencies of the FEM. Amongst the benefits of the proposed method, elimination of the burden of mesh generation and a considerable reduction in the size of unknowns and consequently the number of the resulted equations can be named. Finally, the accuracy and robustness of the method is illustrated by a couple of examples.

Key Words Isogeometric Analysis, Functionally Graded Materials, Plane Elasticity, NURBS.

*نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۱۳۸۸/۱۰/۲ و نسخه‌ی نهایی آماده چاپ آن در تاریخ ۱۳۸۹/۸/۲۹ می‌باشد.

(۱) دانشیار گروه عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

(۲) عهده‌دار مکاتبات: دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه صنعتی شاهرود

مقدمه

اما روش اجزای محدود دارای معایبی نیز می‌باشد. مثلاً با این که این روش، توانایی مدلسازی اشکال پیچیده را دارا می‌باشد، ولی برای بالا رفتن دقت لازم است که تعداد و یا مرتبه‌ی المان‌ها افزایش یابد که خود سبب بزرگ شدن دستگاه معادلات حاکم و گاه حل مسایل ناممکن و یا بسیار سخت و زمان‌بر می‌شود. تولید شبکه‌ی اجزای محدود نیز از اشکالات دیگر روش مذکور است که تاکنون وقت زیادی را از محققین برای تولید روش‌های پایدار و کارآمد تولید شبکه گرفته است. هم‌چنین به طور میانگین برای حل یک مسأله‌ی اجزای محدود، حدود هشتاد درصد، زمان حل مسأله صرف تولید شبکه اجزای محدود می‌شود [1]. اشکالات دیگری نیز در روش اجزای محدود وجود دارد که در ادامه بیان می‌شود.

روش عددی حل مسایل با استفاده از اسپلاین‌ها، روشی جدید است که مفاهیم آن در سال ۲۰۰۵ برای اولین بار توسط هیوز (Hughes) و هم‌کارانش با نام روش ایزوژئومتریکی معرفی گردید [1]. این روش مبتنی بر درک هندسی از مسأله و تولید جواب‌های مسأله با استفاده از اسپلاین‌ها و نوع توانمندتر آن، یعنی نربز ((NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline)) می‌باشد. روش ایزوژئومتریکی علاوه بر داشتن مزایای روش اجزای محدود، برخی از معایب آن را نیز مرتفع نموده است. در واقع مدلسازی دقیق شکل مسأله در مقایسه با روش اجزای محدود، مدلسازی دقیق شرایط تکیه‌گاهی در مقایسه با روش اجزای محدود که شرایط تکیه‌گاهی فقط در محل گره‌ها قابل اعمال است، عدم نیاز به تولید شبکه و کاهش چشم‌گیر ابعاد دستگاه معادلات از مزایای روش ایزوژئومتریکی می‌باشد [1,2].

مصالح FG (Functionally Graded Materials)

نیز امروزه به عنوان یکی از پیشرفته‌ترین انواع مواد کامپوزیت شناخته می‌شود. این مصالح به گونه‌ای ساخته می‌شوند که در آن‌ها تغییرات در جنس مصالح به نسبت توزیع مصالح در حجم ماده وابسته است و مانند

امروزه برای حل مسایلی که پیش روی مهندسين و محققين قرار دارد، ناگزير به حل معادلاتی می‌شوند که اغلب دارای شکل دیفرانسیلی بوده و در واقع با حل این معادلات دیفرانسیل، مسأله تحلیل شده و به جواب مورد نظر دست می‌یابیم. اما چون تعداد محدودی از این معادلات را می‌توان به صورت تحلیلی حل نمود، لذا روش‌های حل دیگری که آن‌ها را با عنوان روش‌های عددی می‌شناسیم، توسعه یافته‌اند. البته روش‌های عددی با ظهور کامپیوترها رشد چشم‌گیری داشته‌اند و امروزه به کمک کامپیوترها و روش‌های عددی موجود، قادر به حل معادلات بسیار پیچیده در حوزه‌های متنوع علوم می‌باشیم. برخی از روش‌های عددی معروف، عبارتند از: روش تفاضلات محدود (Finite Difference Method) (FDM)، روش اجزای محدود (Finite Element Method) (FEM)، روش نقاط محدود (Finite Point Method or Meshless Method) (FPM) و روش‌های جدیدتری مانند: روش تحلیل ایزوژئومتریکی (Isogeometric Analysis) (IA). این روش‌ها هر یک در پی دیگری آمده و دو هدف اصلی را دنبال کرده‌اند. این اهداف عبارتند از: اولاً ایجاد کارایی، دقت و سرعت بالاتر و ثانیاً ایجاد امکاناتی جدیدتر برای حل مسایل و رفع مشکلات روش‌های قبلی. استفاده از روش اجزای محدود در تحلیل سازه‌های پیچیده و مکانیک محاسباتی به امری معمول تبدیل شده است. شاید بتوان گفت که توسعه‌ی این روش در سال‌های گذشته و وجود نرم افزارهای متعدد تجاری، سبب کاربرد وسیع این روش در علوم مختلف از جمله علوم سازه و مکانیک شده است؛ اما باید دانست مزایای مهمی مانند سیستماتیک بودن روش اجزای محدود در یافتن توابع تقریب زننده، مدلسازی شکل‌های پیچیده، قابلیت تبدیل به الگوریتم‌ها و کدهای کامپیوتری و پیشرفت سریع کامپیوترها، از علل فراگیر شدن استفاده از این روش می‌باشد.

مصالح برخوردارند. در واقع در این مصالح، مدول الاستیسیته از یک طرف جسم تا طرف دیگر آن، به صورت پیوسته و با هر نوع تابع دلخواهی می‌تواند تغییر کند. علت تغییرات در مشخصات مکانیکی این مصالح، وجود تغییرات در توزیع مصالح در حجم جسم است. از مزایای این مصالح نسبت به کامپوزیت‌ها می‌توان به حذف مشکل چسبندگی مصالح مختلف و هم‌چنین لایه لایه شدن (delamination) و ایجاد تمرکز تنش در محل اتصال مصالح مختلف نام برد [9].

دو مشکل اساسی پس از معرفی تئوری مصالح FG در مقابل محققین قرار دارد: اول این‌که این مصالح در عمل چگونه تولید شوند که مورد بحث این مقاله نمی‌باشد. مشکل دوم این است که پس از ساخت این مصالح، چگونه می‌توان آن‌ها را تحلیل نمود؟ در مورد اخیر می‌توان از روش اجزای محدود کمک گرفت؛ ولی مشکلات زیادی به علت محدودیت‌های روش اجزای محدود ایجاد می‌شود. مثلاً عدم وجود یک المان مناسب برای تحلیل این مسایل که بتواند تغییرات مدول الاستیسیته را در خود جای دهد، اولین مشکل است. در غیر این صورت باید از المان‌هایی استفاده کرد که مشخصات مکانیکی آن المان میانگینی از مشخصات مکانیکی توزیع شده در سطح المان باشد؛ لذا در عمل برای بالا بردن دقت حل مسأله بایستی تعداد المان‌ها را به شکل چشم‌گیری زیاد کرد که خود سبب بزرگ شدن دستگاه معادلات و ازدیاد زمان حل مسأله می‌شود. هم‌چنین بایستی به تعداد المان‌ها اقدام به تعریف مصالح جدید نمود. به علت وجود همین مشکلات است که مسایل مربوط به مصالح FG فقط برای برخی حالات ساده و مشخص (به عنوان مثال مسایل تقارن محوری با توزیع توانی یا لگاریتمی مصالح) و به صورت تحلیلی حل شده است؛ البته کارهایی با روش اجزای محدود نیز انجام شده که به علت کامل نبودن آن‌ها هنوز هیچ یک از نرم افزارهای معروف اجزای محدود در دنیا قادر به حل کلی مسایل با مصالح FG نمی‌باشند. در این پژوهش

کامپوزیت‌های مرسوم این تغییرات مصالح ناگهانی نمی‌باشد؛ لذا تغییرات توزیع مصالح در حجم ماده سبب می‌شود تا مدول الاستیسیته نیز در کل دامنه تغییر نماید [3]. این تغییرات می‌تواند به صورت خطی، نمایی، لگاریتمی و غیره باشد که به چگونگی فرایند تولید این مصالح وابسته است [4,5]. در ادامه به جزئیات بیشتری در خصوص مصالح FG اشاره خواهد شد.

در این مقاله در بخش دوم به معرفی مصالح FG و در بخش سوم به معرفی اسپالین‌ها و تکنیک نربز و شرح مختصر پارامترهای آن‌ها پرداخته‌ایم. در بخش سوم روش ایزوژئومتریک را در مقایسه با روش اجزای محدود معرفی کرده و در بخش چهارم، روش فرمولبندی مسایل تنش/کرنش مسطح ایزوتروپیک با استفاده از روش ایزوژئومتریک بیان شده است. در بخش پنجم نیز با حل مسایلی، توانایی روش مذکور را نشان داده‌ایم. در انتها نیز به بیان نتایج و پیشنهادهای در این خصوص پرداخته شده است.

معرفی مصالح FG

تئوری مصالح FG برای اولین بار در دهه‌ی هشتاد میلادی، توسط گروهی از محققان علم مواد در ژاپن به دنیا معرفی شدند [3]. این مصالح، گونه‌ی جدیدی از مصالح کامپوزیت هستند که در ابتدا برای تحمل گرادیان‌های حرارتی در المان‌های مکانیکی به کار گرفته شدند؛ اما بعداً کاربردهای بسیار متنوع‌تری برای آن‌ها معرفی گردید از جمله‌ی این کاربردها این است که می‌توان از آن‌ها در کلیه‌ی قطعات مکانیکی و سازه‌ای که تحت گرادیان‌های شدید حرارتی، محیط‌های خورنده و غیره قرار دارند، استفاده نمود [4-8]. امروزه نیز از این مصالح به عنوان توصیه شده‌ترین گزینه برای تولید کامپوزیت‌های هوشمند، یاد می‌شود.

مصالح FG که گاه از آن‌ها با عنوان مصالح ناهمگن نیز یاد می‌شود، معمولاً دارای خواص مکانیکی، حرارتی، الکتریکی، خوردگی و ... بهتری نسبت به

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (1)$$

با توجه به روابط فوق، برخی از خواص پارامترهای موجود عبارتند از:

۱. $N_{i,0}(u)$ یک تابع پله‌ای (Step Function) بوده و به جز در بازه $u \in [u_i, u_{i+1})$ مقدار آن در سایر نقاط صفر است.

۲. برای $p > 0$ ، آنگاه $N_{i,p}(u)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه با درجه $p-1$ می‌باشد.

۳. برای محاسبه‌ی کلیه‌ی توابع پایه به بردار گره U و درجه‌ی p نیاز داریم.

۴. در صورتی که در رابطه (۲-۱) به تقسیم $0/n$ برسیم، آن را برابر با صفر لحاظ می‌کنیم.

۵. $N_{i,p}(u)$ ها، چند جمله‌ای‌های تکه‌ای (Piecewise Polynomial) هستند که بر روی یک خط حقیقی تعریف شده و فقط بازه $[u_0, u_m]$ را تحت تأثیر قرار می‌دهند. در ادامه، برای سادگی به جای $N_{i,p}(u)$ از $N_{i,p}$ استفاده می‌کنیم. هم‌چنین به عنوان یک مثال اگر درجه تابع پایه به ترتیب برابر با $p = 0, 1, 2$ و بردار گره برابر با $U = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$ باشد، می‌توان توابع پایه را در شکل (۱) ملاحظه نمود. سایر توابعی که نشان داده نشده‌اند، دارای مقدار صفر می‌باشند.

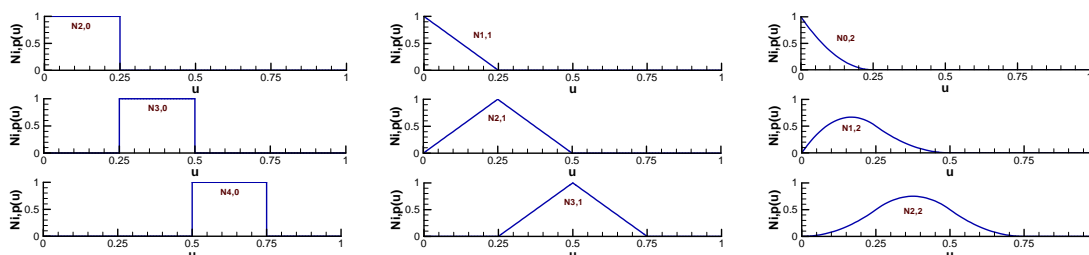
از روش ایزوژئومتری که یکی از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد، برای حل مسایل استفاده شده است و مشکل اجزای محدود در خصوص مدلسازی مصالح نیز در این روش رفع شده است.

معرفی اسپلاین‌ها و تکنیک نریز

اسپلاین‌ها در واقع ابزاری ریاضی هستند که می‌توان با استفاده از اطلاعات اندکی، منحنی‌ها و سطوح پیچیده را به صورت عددی مدل نمود [11]. برای تولید یک منحنی اسپلاین در حالت کلی بایستی با برخی از تعاریف و مفاهیم آن آشنا بود که به اختصار در ادامه آمده است.

بردار گره. بردار $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m\}$ را در نظر بگیرید. این بردار، شامل مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است به طوری که رابطه‌ی: $u_i \leq u_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ در آن برقرار است. بردار U بردار گره (Knot Vector) و u_i ها مقادیر گرهی (Knots) نامیده می‌شوند. بازه $[u_i, u_{i+1})$ را یک دهانه گرهی (Knot Span) می‌نامیم که می‌تواند طول آن صفر باشد؛ زیرا گره‌ها لزوماً دارای مقادیر متمایز نمی‌باشند. اگر فاصله‌ی بین گره‌ها مساوی باشد، در این حالت بردار گره را یکنواخت (Uniform) می‌نامیم؛ در غیر این صورت، این بردار، غیر یکنواخت (Non-Uniform) خواهد بود.

توابع پایه اسپلاین. i امین تابع پایه اسپلاین با درجه p (یا مرتبه $p+1$) را با $N_{i,p}(u)$ نشان داده و به صورت رابطه‌ی (۱) تعریف می‌کنیم:



شکل ۱ شکل توابع پایه به ترتیب از چپ به راست برای درجات صفر و یک و دو

ایزوژئومتریکی، برای حل مسایل از این فرمول ها برای مدل سازی جواب ها استفاده می کنیم. اطلاعات تکمیلی در این خصوص از مراجع [11,12] قابل دست یابی می باشد.

روش ایزوژئومتریکی در مقایسه با روش اجزای محدود

روش ایزوژئومتریکی در اصل از ترکیب تکنیک های طراحی توسط کامپیوتر (Computer Aided Design) (CAD) و روش اجزای محدود حاصل شده است [13-17]. چهارچوب کلی تحلیل ایزوژئومتریکی با استفاده از تکنیک نربز در مقایسه با روش اجزای محدود، مبتنی بر اصولی می باشد (۱) که عبارتند از:

۱. در این روش به جای المان ها، شبه المان هایی را داریم که با ضرب بردارهای گره حاصل می شوند و باید توجه کرد که به هیچ عنوان مفهوم آن مانند المان ها در روش اجزای محدود نمی باشد. به عنوان مثال در مسایل دوبعدی مانند مسایل تنش/کرنش مسطح این شبکه المان به صورت $U \times V$ خواهد بود که قبلاً به آن اشاره گردید.

۲. المان ها از تقسیم دامنه توسط دهانه های گرهی (Knot spans) به دست می آیند.

۳. هندسه مسأله با مشارکت شبکه ی نقاط کنترلی و توابع پایه تولید می شود.

۴. با استفاده از مفهوم ایزوپارامتریکی (Isoparametric) مجهولات مانند تغییر مکان ها، تنش ها، سرعت، حرارت و غیره را با همان توابع پایه ای که برای تعریف هندسه استفاده کرده ایم، بیان می نماییم.

۵. درجات آزادی عبارتند از متغیرهای کنترلی (Control variables) که همان ضرایب توابع پایه می باشند.

۶. روند بهبود شبکه (Mesh refinement) نیز با استفاده از اضافه کردن گره، ارتقای درجه توابع پایه و یا ترکیبی از آنها انجام می شود. این عمل، مشابه با روش های بهبود h ، p ، hp در اجزای محدود است. البته روش جدیدی با نام روش بهبود k نیز در

تولید سطوح اسپلاین و نربز. می توان یک سطح نربز را که دارای درجه p در جهت u و درجه q در جهت v می باشد را با رابطه ی (۲) به شکل ذیل محاسبه نمود:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}, \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{matrix} \quad (2)$$

که $\{P_{i,j}\}$ شبکه ی نقاط کنترلی و $\{w_{i,j}\}$ وزن مربوط به آن ها می باشد. توجه شود که اگر وزن کلیه ی نقاط مساوی یک لحاظ شود، آنگاه منحنی ها و سطوح تولیدی را با عنوان اسپلاین می شناسیم؛ در غیر این صورت، منحنی ها و سطوح نربز تولید می شوند. همچنین $\{N_{i,p}(u)\}$ و $\{N_{j,q}(v)\}$ توابع پایه غیرگویا (Non-rational B-spline basis function) اسپلاین می باشند که بر روی بردارهای (۳) و (۴) تعریف می شوند:

$$U = \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, 1, \dots, 1\} \quad (3)$$

$$V = \{0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, 1, \dots, 1\} \quad (4)$$

توجه شود که روابط $r = n + p + 1$ و $s = m + q + 1$ نیز برقرار می باشند و اگر $R_{i,j}^{p,q}(u, v)$ را به شکل رابطه ی (۵) تعریف کنیم:

$$R_{i,j}^{p,q}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}} \quad (5)$$

اکنون می توانیم رابطه ی (۵) را به شکل (۶) باز نویسی نماییم:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(u, v) P_{i,j} \quad (6)$$

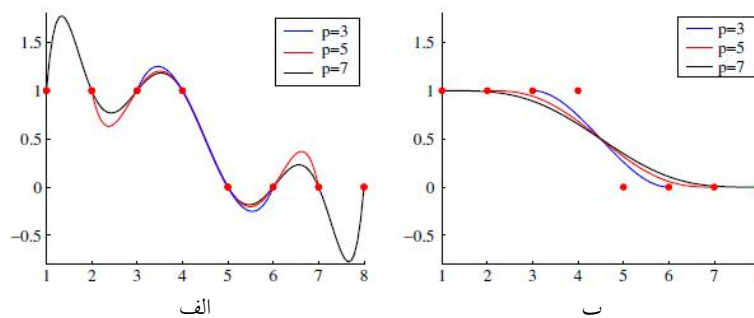
با استفاده از رابطه ی (۶) می توان هر گونه سطح و رویه ی پیچیده ای را مدل نمود که در این جا در روش

پدیده‌ی گیبز در جدول فوق، در واقع ناپایداری ناشی از تقریب زدن داده‌های ناپیوسته با چند جمله‌ای‌های جبری لاگرانژ می‌باشد که در شکل (۲-الف) نشان داده شده است. هم‌چنین ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد نقاط و در نتیجه درجه‌ی چندجمله‌ای، این نوسان شدیدتر می‌شود. ولی اگر داده‌ها به عنوان نقاط کنترلی در نظر گرفته شوند، استفاده از تکنیک نربز همانند شکل (۲-ب) سبب مشاهده‌ی رفتاری متفاوت در منحنی‌های تولیدی خواهد شد و در واقع میرایی در تغییرات را شاهد خواهیم بود. این خصوصیت سبب می‌شود تا بتوانیم محل‌هایی را که دارای تغییرات زیادی در هندسه یا جواب‌ها رخ می‌دهد، مدل نماییم [1].

تحلیل ایزوژئومتریکی امکان‌پذیر است؛ اما چون مبحث این مقاله نمی‌باشد، توضیح داده نشده که می‌توان برای اطلاع بیشتر به مرجع [1] رجوع نمود. ۷. در مرحله‌ی روی هم‌گذاری (Assemble)، همانند روش اجزای محدود، آرایه‌های محاسبه شده برای وصله‌ها (Patches) در تحلیل ایزوژئومتریکی در یک آرایه‌ی کلی قرار داده می‌شوند. برای ایجاد سازگاری (Compatibility) بین وصله‌ها، می‌توان از پارامترهای مشابه برای ساخت لبه‌ها یا سطوح دو طرف وصله (Patch Interfaces) استفاده نمود. در جدول (۱) می‌توان مقایسه‌ای بین روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریکی از دیدگاه مشابهت برخی مشخصه‌های کلیدی در هریک از دو روش را ملاحظه نمود.

جدول ۱ مقایسه‌ی روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریکی

روش اجزای محدود	روش ایزوژئومتریکی
نقاط گرهی	نقاط کنترلی
متغیرهای گرهی	متغیرهای کنترلی
شبکه‌ی اجزای محدود	مقادیر گره‌ها در بردار گره
انجام درونیابی نقاط و متغیرهای گرهی با توابع پایه	عدم انجام درونیابی نقاط و متغیرهای کنترلی با توابع پایه
هندسه تقریبی	هندسه‌ی دقیق
توابع پایه از نوع چندجمله‌ای‌های جبری	توابع پایه نربز
پدیده‌ی گیبز (Gibbs phenomena)	میرایی تغییرات (Variation diminishing)
زیر دامنه‌ها	وصله‌ها



شکل ۲ الف) درونیابی لاگرانژ برای داده‌های ناپیوسته، ب) میرایی تغییرات برای داده‌های ناپیوسته با تکنیک نربز

$$c_{11} = \frac{(1-\mu)E(x,y)}{1-\mu-2\mu^2}, c_{22} = \frac{(1-\mu)E(x,y)}{(1+\mu)(1-\mu-2\mu^2)},$$

$$c_{12} = \frac{\mu E(x,y)}{1-\mu-2\mu^2}, c_{66} = \frac{E(x,y)}{2(1+\mu)} \quad (10)$$

در ادامه، جواب مسأله را به صورت روابط (۱۱) برای تغییر مکان $u(r,s)$ و (۱۲) برای تغییر مکان $v(r,s)$ در دامنه‌ی مسأله در نظر می‌گیریم که در واقع از تعریف تولید رویه اسپلین حاصل شده است و تغییر مکان در دامنه‌ی مسأله در هر نقطه (r,s) متناظر با (x,y) در دامنه مسأله از روی ارتفاع رویه حل استخراج شده که r و s همان پارامترهایی هستند که مقادیرشان از بردار گره حاصل می‌شود:

$$u(r,s) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) w_{i,j} U_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) w_{i,j}}$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r,s) U_{i,j} \quad (11)$$

$$v(r,s) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) w_{i,j} V_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) w_{i,j}}$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(r,s) V_{i,j} \quad (12)$$

برای مدل‌سازی تغییرات مدول الاستیسیته در دامنه‌ی مسأله نیز از روابطی مانند رابطه‌ی فوق استفاده نموده و ضرایب ماتریس الاستیسیته را با $\bar{c}_{11}(r,s)$ ، $\bar{c}_{22}(r,s)$ ، $\bar{c}_{12}(r,s)$ و $\bar{c}_{66}(r,s)$ نشان می‌دهیم. همچنین در کلیه‌ی روابط بایستی به جای x و y نیز از روابط پارامتری مشابه استفاده نموده و آن‌ها را با پارامترهای r و s جایگزین نماییم [2]. اکنون می‌توان تابع‌نمای (Functional) مربوطه را به شکل رابطه‌ی (۱۳) نوشت:

$$\Pi = \frac{1}{2} B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - I(\mathbf{u}) \quad (13)$$

که در این رابطه، \mathbf{u} بردار تغییر مکان و

به دست آوردن فرمولبندی ایزوژئومتریکی

در این بخش پس از دست‌یابی به تجربیاتی در خصوص روش ایزوژئومتریکی در کارهای پژوهشی گذشته [18,19]، ابتدا به معرفی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسایل تنش/کرنش مسطح نموده و سپس مراحل دست‌یابی به فرمولبندی روش ایزوژئومتریکی برای حل این مسایل بیان می‌شود [2]. همان‌گونه که از تئوری الاستیسیته می‌دانیم، معادلات دیفرانسیل (۷) به طور هم‌زمان بر مسایل تنش/کرنش مسطح حاکم می‌باشند:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + f_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + f_y = 0 \quad (7)$$

در این معادلات، شرایط مرزی طبیعی به صورت روابط (۸) بیان می‌شوند:

$$t_x = \left(c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y$$

$$t_y = c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y \quad (8)$$

در این روابط، c_{ij} ها ضرایب الاستیسیته می‌باشند که با فرض ثابت بودن ضریب پواسون در سراسر دامنه‌ی حل مسأله و تغییرات پیوسته در مقدار مدول الاستیسیته به صورت $E(x,y)$ ، در حالت کلی برای مسایل تنش مسطح با مصالح ایزوتروپیک FG از روابط (۹) به شکل ذیل:

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E(x,y)}{1-\mu^2}, c_{12} = \frac{\mu E(x,y)}{1-\mu^2}, c_{66} = \frac{E(x,y)}{2(1+\mu)} \quad (9)$$

و در مسایل کرنش مسطح با مصالح ارتوتروپیک از روابط (۱۰) به دست می‌آیند:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (16)$$

که در این رابطه، $[\mathbf{K}]$ ؛ ماتریس ضرایب، $\{\mathbf{F}\}$ ؛ بردار نیروها و $\{\mathbf{U}\}$ ؛ بردار تغییر مکان‌ها می‌باشند. در ادامه با حل مثال، کیفیت و توانمندی و دقت جواب‌ها در روش مذکور نشان داده شده است.

حل مثال‌ها

در این بخش دو مثال حل شده است که در مثال اول برای نشان دادن توانمندی و صحت نتایج تحلیل با روش ایزوژئومتریکی و مقایسه‌ی نتایج با روش اجزای محدود، مسأله به صورت ایزوتروپیک و بدون تغییرات در مدول الاستیسیته حل شده است. در مثال دوم، مسأله در حالت مرکب و مصالح FG حل و در مورد نتایج بحث شده است.

مثال ۱: در این مثال، فرض شده است که صفحه‌ی مستطیلی با اتصال گیردار در یک انتها و در حالت تنش مسطح تحت اثر بار متمرکز 1000 در انتهای آزاد خود در گره مشخص شده در شکل (۳) قرار دارد. مقدار مدول الاستیسیته در کل دامنه برابر با مقدار ثابت 15000 و مقدار ضریب پواسون برابر با 0.15 فرض شده است. همان‌طور که در شکل (۳) دیده می‌شود، ابعاد تیر 10 در 2 با ضخامت واحد فرض شده است که ابتدا با روش اجزای محدود و با تقسیم دامنه به 960 المان چهار گره‌ی حل شده است. ملاحظه می‌شود که در روش اجزای محدود، حل مسأله منجر به حل دستگاه معادلاتی با حدود 1000 معادله و مجهول خواهد شد. سپس با استفاده از نرم افزار تهیه شده با روش ایزوژئومتریکی نیز مسأله مجدداً حل و نتایج با روش اجزای محدود مقایسه شده است.

$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ و $\mathbf{l}(\mathbf{u})$ به ترتیب بخش‌های دوخطی (Bilinear) و خطی (Linear) تابع‌نما طبق روابط (۱۴) و (۱۵) می‌باشند.

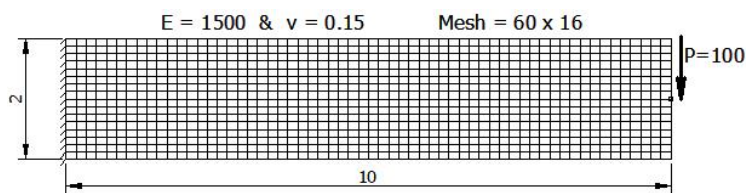
$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = & h_{\text{patch}} \iint_{\Omega_{\text{patch}}} [\bar{c}_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\bar{c}_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ & \bar{c}_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \bar{c}_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \right. \\ & \left. 2\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)] J drds \end{aligned} \quad (14)$$

و

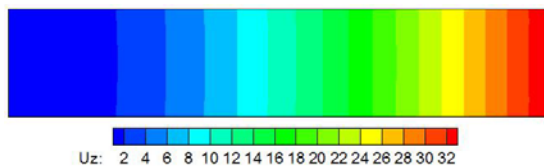
$$\begin{aligned} \mathbf{l}(\mathbf{u}) = & -h_{\text{patch}} \iint_{\Omega_{\text{patch}}} (uf_x + vf_y) dx dy - \\ & h_{\text{patch}} \int_{\Gamma_{\text{patch}}} (ut_x + vt_y) d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

زیرنویس patch در این‌جا مشابه روش اجزای محدود که برای المان‌ها استفاده می‌شود، برای وصله‌های تشکیل دهنده‌ی هندسه‌ی مسأله استفاده شده است. همچنین از پارامتر Γ برای انتگرال‌گیری روی مرزها و از پارامتر Ω برای انتگرال‌گیری روی سطح استفاده شده است. t_x و t_y نیروهای خارجی (Traction forces) و پارامتر h نیز ضخامت هر وصله می‌باشد.

پس از نوشتن شکل ضعیف معادلات و محاسبه‌ی ژاکوبین‌های مورد نیاز (۲) به دستگاه معادلاتی به شکل رابطه‌ی (۱۶) می‌رسیم که با حل آن می‌توان مختصات ارتفاع نقاط کنترلی را برای تولید رویه جواب محاسبه نمود. سپس با استفاده از فرمول تولید رویه و تکنیک معکوس نریز می‌توان مقدار تغییر مکان برای هر نقطه‌ی دلخواه از مسأله و یا کانتورهای تنش و تغییر مکان را برای مسأله به دست آورد:



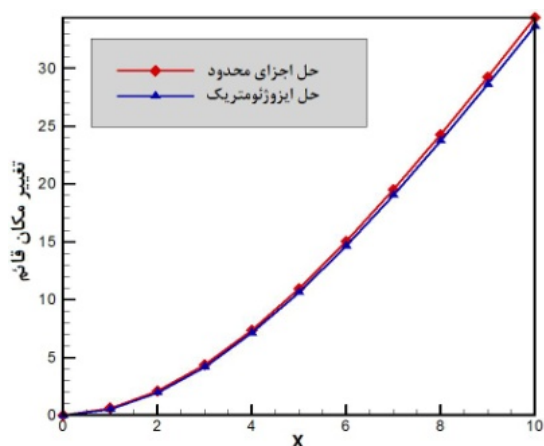
شکل ۳ شبکه بندی اجزای محدود و سایر مشخصات مثال ۱



شکل ۶ تحلیل ایزوژئومتریکی مثال ۱

همان گونه که از روی کانتورهای شکل های (۴)

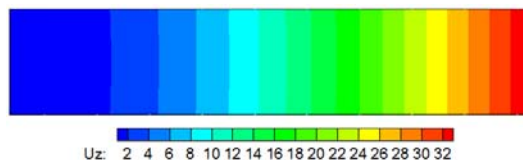
و (۶) ملاحظه می شود، نتایج تحلیل، بسیار به یکدیگر شبیه است که این مسأله برای تغییر شکل قائم محور میانمی صفحه مستطیلی فوق در شکل (۷) نشان داده شده است:



شکل ۷ مقایسه نتایج روش اجزای محدود با روش ایزوژئومتریکی

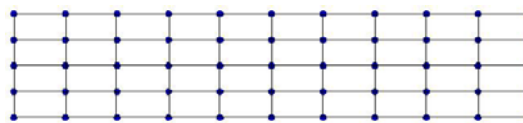
توجه شود که در واقع در تحلیل ایزوژئومتریکی فقط از ۱۲ المان که در واقع از حاصل ضرب تعداد دهانه های گرهی حاصل می شود، استفاده شده است؛ در حالی که در روش اجزای محدود از ۹۶۰ المان چهار گرهی استفاده شده است که حدود ۸۰ برابر بیشتر است. هم چنین در روش تحلیل ایزوژئومتریکی، تعداد مجهولات گرهی در حدود ۱۰۰ و در اجزای محدود در حدود ۱۰۰۰ است که باز ملاحظه می شود تغییرات قابل ملاحظه ای در ابعاد دستگاه معادلات نهایی ایجاد شده است که سبب افزایش سرعت و دقت حل مسأله در

نتیجه تحلیل مسأله برای تغییر مکان قائم u_z صفحه مستطیلی با روش اجزای محدود در شکل (۴) نشان داده شده است.



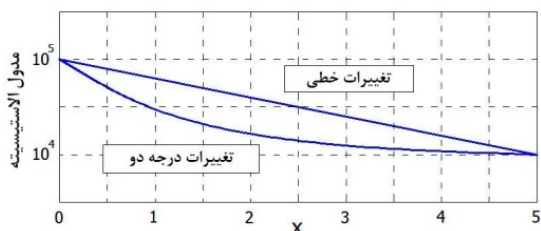
شکل ۴ تحلیل اجزای محدود مثال ۱

البته مسأله مذکور با تعداد المان های بیشتر نیز حل شده که اساساً تغییر معناداری در جواب ها حاصل نشده است. اکنون مسأله ی فوق را با روش ایزوژئومتریکی و با تعداد ۵۵ نقطه ی کنترلی مطابق شکل (۵) حل می کنیم. با دقت در شکل (۵) نتیجه می گیریم که هر مستطیل یک المان نیست و اصلاً در این خصوص شباهتی بین اجزای محدود و روش ایزوژئومتریکی وجود ندارد. در واقع، المان های روش ایزوژئومتریکی از حاصل ضرب بردارهای گرهی به دست می آید. در حالت کلی گره ها در اجزای محدود بر روی دامنه قرار می گیرند؛ در حالی که در روش ایزوژئومتریکی نقاط کنترلی می توانند بر روی دامنه نباشند.



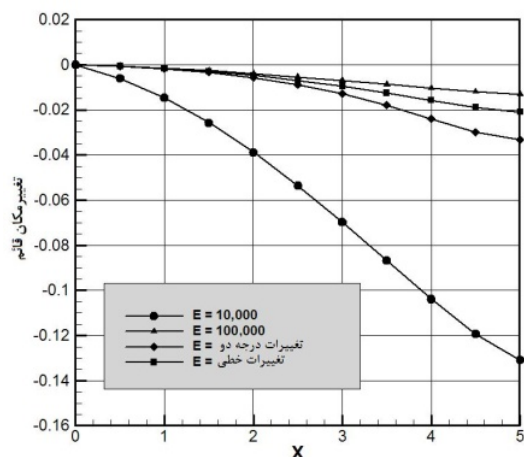
شکل ۵ شبکه ی نقاط کنترلی در صفحه ی مستطیلی

بردار گره برای جهت طولی برابر با $\{1, 0, 0, 0, 0\}$ و $\{0, 0, 0, 0, 0\}$ و برای جهت عرضی برابر با $\{0, 0, 0, 0, 0\}$ و $\{0, 0, 0, 0, 0\}$ گرفته شده است. هم چنین درجه توابع پایه اسپلاین در این مسأله مساوی دو لحاظ گردیده است. نتیجه ی تحلیل ایزوژئومتریکی با شرایط ذکر شده، در شکل (۶) نشان داده شده است.



شکل ۹ تغییرات خطی و درجه دو مدول الاستیسیته

همان‌گونه که به طور منطقی انتظار می‌رود، بایستی جواب‌های مراحل سه (با تغییرات خطی) و چهار (با تغییرات درجه دو) بین دو حالت حدی یک و دو قرار داشته باشد. با ترسیم نتایج تغییر مکان خط مرکزی این صفحه مستطیلی مطابق شکل (۱۰) نتایج قابل ملاحظه می‌باشد.

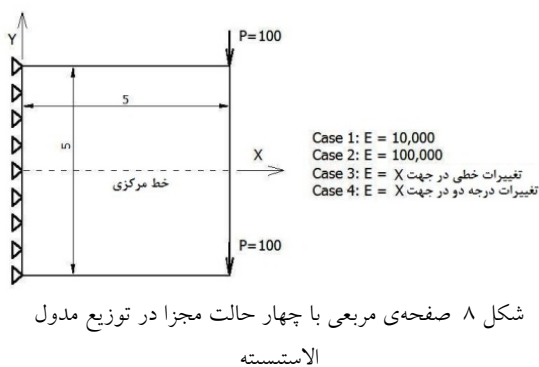


شکل ۱۰ نتایج تغییر مکان قائم محور صفحه مربعی برای چهار حالت متفاوت

هم‌چنین ملاحظه می‌شود که با توجه به سختی بالاتر مسأله در حالت سوم با توزیع خطی مدول الاستیسیته، انتظار می‌رود که نتایج آن بین حالت دوم و چهارم قرار بگیرد که این مسأله نیز در شکل، قابل ملاحظه است. در انتها می‌توان گفت که روش ایزوژئومتریکی، توانمندی بالایی در حل مسایل الاستیسیته؛ به خصوص مسایل FG دارد که برای

روش ایزوژئومتریکی شده است. هم‌چنین در روش اجزای محدود برای مدلسازی تکیه‌گاه فقط نقاط تکیه‌گاهی گیردار می‌شوند که از معایب و ضعف‌های روش اجزای محدود محسوب می‌شود، در حالی که در روش ایزوژئومتریکی کل وجه سمت چپ صفحه مستطیلی به صورت سراسری و پیوسته به صورت گیردار مدل می‌شود که باز تفاوت در دقت مدلسازی نسبت به روش اجزای محدود، روشن خواهد بود.

مثال ۲: در این مثال، مطابق شکل (۸) یک صفحه‌ی مربعی به ابعاد پنج در پنج با ضخامت واحد تحت اثر دو بار متمرکز در انتهای آزادش قرار دارد. به دلیل این‌که حل مسایل با مصالح FG در روش اجزای محدود مشکل است و برای این‌که از صحت جواب‌ها مطمئن باشیم، این مسأله با یک روند منطقی و در چهار حالت مجزا حل شده است.



شکل ۸ صفحه‌ی مربعی با چهار حالت مجزا در توزیع مدول الاستیسیته

در حالت اول و دوم فرض شده است که مدول الاستیسیته در کل دامنه ثابت بوده و مقادیر آن به ترتیب؛ ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ لحاظ شده است. در واقع، علت این فرض به دلیل داشتن نتایج تحلیل مسأله برای دو حالت حدی می‌باشد. سپس در حالت سوم، فرض شده است که مدول الاستیسیته از ۱۰۰۰۰۰ به ۱۰۰۰۰۰۰ به صورت خطی تغییر می‌کند؛ به طوری‌که مقدار ماکزیمم در سمت تکیه‌گاه قرار دارد. در حالت چهارم نیز فرض شده است که این تغییرات به صورت درجه دو می‌باشد. شکل (۹) ملاحظه شود.

کوتاهی خواهد شد. از مزایای این روش که در حل مسایل مشاهده شد، می‌توان به راحتی، سرعت و دقت بالای مدل‌سازی هندسه و مصالح، نسبت به روش اجزای محدود، عدم نیاز به شبکه بندی دامنه‌ی مسأله، کاهش ابعاد دستگاه معادلات و برآورده شدن دقیق شرایط مرزی در مدل‌سازی مسأله اشاره نمود. به عنوان پیشنهاد می‌توان از این روش در بهینه سازی توپولوژی و شکل سازها (Structural Shape and Topology Optimization) با توجه به کاهش چشم‌گیر متغیرهای طراحی و تولید شکل‌های بسیار عملی‌تر با مرزهای یکنواخت (Smooth boundaries) و یا حل مسایل با مصالح FG (Functionally Graded Materials) که انجام هر کدام با روش اجزای محدود دارای ضعف‌های مشهودی می‌باشد، استفاده نمود.

آشنایی بیشتر با برخی از توانمندی‌های این روش، می‌توان به مراجع [18,19] رجوع نمود.

نتیجه‌گیری

روش اجزای محدود، روشی شناخته شده و توانمند در تحلیل مسایل سازه و مکانیک می‌باشد؛ ولی با توجه به برخی از محدودیت‌های این روش، روش‌های دیگری مانند روش‌های بدون شبکه و روش ایزوژئومتریک برای پوشش ضعف‌های آن در سال‌های اخیر ارائه شده‌است. با توجه به این‌که روش ایزوژئومتریک در ابتدای راه تکامل خود قرار دارد و هنوز در هیچ‌یک از نرم افزارهای تجاری در جهان مورد استفاده قرار نگرفته است، ولی پتانسیل بالای این روش در حل مسایل پیچیده‌ی مکانیک و سازه، سبب ارتقا و عمومی شدن این روش در زمان

مراجع

1. Hughes, T. J. R., and Cottrell, J.A., "Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Computers Method in Applied Mechanics and Engineering*, 194 pp. 4135–4195, (2005).
2. Hassani, B., and Moghaddam, N.Z., "Development of a new numerical method for solution of ordinary differential equations by using spline basis functions", *Shahrood University of Technology, Technical Report No. 1015, Shahrood, Iran*, (2009).
3. Shiota, I., and Miyamoto, Y., "Functionally graded materials 1996", 1st Ed., ELSEVIER SCIENCE B.V., *Proceedings of the 4th international symposium on Functionally Graded Materials, AIST Tsukuba Research center, Tsukuba, Japan*, (1996).
4. Niino, M., and Maeda, S., "Recent development status of functionally gradient materials", *ISIJ International* 30 pp. 699–703, (1990),
5. Huang, Z. Y., and Lu, C. F., and Chen, W. Q., "Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations", *Composite Structures* 85 pp.95–104, (2008).
6. Wu, T. L., and Shukla, K. K., and Huang, J. H., "Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates", *Composite Structures* 81 pp. 1–10, (2007).

7. Matsunaga, H., "Free vibration and stability of functionally graded circular cylindrical shells according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures* 88 pp.519–531, (2009).
8. Dag, S., and Yildirim, B., and Sarikaya, D., "Mixed-mode fracture analysis of orthotropic functionally graded materials under mechanical and thermal loads", *Int. Journal of Solids and Structures* 44 pp. 7816–7840, (2007).
9. Lipton, R., "Design of functionally graded composite structures in the presence of stress constraints", *Int. Journal of Solids and Structures* 39 pp. 2575–2586, (2002).
10. Ootao, Y., and Tanigawa, Y., and Ishimaru, O., "Optimization of material composition of functionally graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm", *J. Therm. Stresses* 23 pp. 257–271, (2000).
11. Piegl, L., and Tiller, W., "The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)", 2nd ed., Springer-Verlag, New York, pp. 81-227, (1997).
12. Rogers, D. F., "An Introduction to NURBS: With Historical Perspective", 2nd ed., Morgan Kaufmann Publishers, pp. 12-87, (2001).
13. Cottrell, J. A., and Hughes, T. J. R., and Reali, A., "Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196, pp. 4160–4183, (2007).
14. Bazilevs, Y., and BeiraoDaVeiga, L., and Cottrell, J., and Hughes, T.J.R., and Sangalli, G., "Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes", *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 16, pp. 1031–1090, (2006).
15. Bazilevs, Y., and Calo, V., and Cottrell, J., and Hughes, T. J. R., and Reali, A., and Scovazzi, G., "Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 197 (1–4), pp. 173–201, (2007).
16. Bazilevs, Y., and Calo, V., and Zhang, Y., and Hughes, T.J.R., "Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow", *Comput. Mech.* 38 (4) pp. 310–322, (2006).
17. Cottrell, J. A., and Reali, A., and Bazilevs, Y., and Hughes, T. J. R., "Isogeometric analysis of structural vibrations", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 195 (41–43), pp. 5257–5296, (2006).
18. Hassani, B., and Khanzadi, M., and Tavakkoli, S. M., and Moghaddam, N. Z., "Isogeometric shape optimization of three dimensional problems", 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Lisbon, Portugal, (2009).
19. Hassani, B., and Moghaddam, N. Z., and Tavakkoli, S. M., "Isogeometrical solution of Laplace equation", *Asian journal of civil engineering (building and housing)*, 10(6), pp. 579-592, (2009).