

ارائه مدل غیرخطی جدید برای بررسی رفتار ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار با ترک خستگی*

موسی رضائی^(۱)وحید عرب‌ملکی^(۲)

چکیده در این پژوهش، مدل پیوسته ارائه شده توسط شن و پی‌یر برای بررسی رفتار غیرخطی ارتعاش عرضی تیر اویلر-برنولی با ترک خستگی مورد بازنگری قرار گرفته و با اعمال فرضیات واقع بینانه‌تری، برای میدان‌های جابجایی و کرنش توابع جدیدی پیشنهاد شده است. سپس با استفاده از اصل هو واشیزو معادله دیفرانسیل حرکت استخراج شده است. این معادله برخلاف معادله شن و پی‌یر، خود الحاق می‌باشد. شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده با اعمال روش گالرکین به دست آمده و سپس به منظور به دست آوردن قسمت زمانی پاسخ تیر با ترک خستگی، مدل جدید سفتی دوخطی برای هر شکل مود ارتعاشی ارائه گردیده است. به کمک این مدل، معادله دیفرانسیل حاکم به شکل قابل حل به روش لیندست-پوانکاره نوشته شده است. حل تحلیلی بیان می‌کند که پاسخ روش اغتشاشات از دو قسمت تشکیل شده است که بخش اول سیستم خطی متناظر با سفتی برابر سفتی میانگین تیر در حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک بوده و بخش دیگر، جملات تصحیحی هستند که اثرات غیر خطی ناشی از تغییر در سفتی معادل را در پاسخ سیستم منظور می‌کنند. با استفاده از تئوری ارائه شده می‌توان به بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار در تمامی شکل مودهای ارتعاشی پرداخت. نتایج نشان می‌دهد که تغییرات فرکانس‌های طبیعی برای ترک باز و بسته شونده کمتر از ترک باز می‌باشد. صحت نتایج به دست آمده با استفاده از نتایج تجربی موجود در ادبیات فن به اثبات رسیده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که مدل جدید ارائه شده با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای ترک پیش‌بینی می‌کند.

واژه‌های کلیدی آنالیز ارتعاشی، تیر ترک‌دار، مدل پیوسته، ترک باز و بسته شونده، روش لیندست-پوانکاره

A New Nonlinear Model for Flexural Vibration Analysis of a Cracked Beam with a Fatigue Crack

M. Rezaee

V. A. Maleki

Abstract In this paper, the continuous model for vibration analysis of a cracked beam developed by Shen and Pierre is modified. For this end, by some realistic assumptions, new functions for displacement and stress fields are proposed. Then, the equation of motion of the cracked beam with breathing crack is obtained via the Hu-Washizu variational principle. The new obtained equation of motion is self-adjoint. Moreover, by employing the Galerkin method, the modes shape of beam with a breathing crack are obtained. Then, in order to obtain the time response of the cracked beam, a new bilinear model is introduced for the stiffness corresponding to each mode. Using this model, the governing equation of motion is converted into the standard form which can be analyzed by Lindstedt-Poincaré method. The results show that response obtained through the perturbation method (Lindstedt-Poincaré method) is composed of two parts. The main part is the response of a system with the equivalent stiffness, which is equal to the main value of the stiffness corresponding to the fully open and fully close crack cases. The remaining part of the response consistence of the correction terms, which reflects the effect of opening and closing the crack during vibration. The results show that for a given crack parameters, reduction in natural frequencies for a fatigue-breathing crack are smaller than the ones caused by open cracks. Also, the results have been validated by the experimental and theoretical data reported in the literature. There is a good agreement between the results obtained through the proposed method and those obtained from the reported experimental data.

Key Words Vibration analysis, Cracked beam, Breathing crack, continuous model, Lindstedt-Poincaré

* نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۸۹/۶/۹ نسخه پذیرش آن در تاریخ ۹۰/۲/۲۱ و نسخه آماده چاپ آن در تاریخ ۹۰/۳/۱۷ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

مقدمه

بنابراین، فرکانس‌های طبیعی موهومی توجیه فیزیکی نخواهند داشت. همچنین در مدل آن‌ها میدان جابجایی محوری و مشتق آن به صورت مستقل از یکدیگر فرض شده است که باعث بروز خطا و کاهش دقت مدل می‌گردد.

مطالعات اشاره شده با فرض ترک باز صورت پذیرفته است که باعث به دست آمدن معادلات خطی می‌گردد. [25] Elber در تحقیقات خود دریافته است که ترک خستگی در هنگام ارتعاش باز و بسته می‌شود. Gudmunson [26] با بررسی این پدیده، به این نتیجه رسید که استفاده از مدل ترک باز، برای بررسی رفتار ترک خستگی می‌تواند منجر به نتایج نادرستی شود که مهمترین آن پیش‌بینی عمق ترک خستگی کمتر از مقدار واقعی آن است. چنین تخمین نادرستی می‌تواند خطراتی را در پی داشته باشد، بنابراین اخیراً توجه محققین به مدل‌های باز و بسته شونده ترک معطوف شده است.

محققین مختلفی به بررسی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار با مدل باز و بسته شونده ترک پرداخته‌اند. Friswell و Penny [27] رفتار غیرخطی تیر یکسرگردار با ترک باز و بسته شونده در مود اول ارتعاشی را توسط یک نوسانگر یک درجه آزادی ساده، با سفتی دو خطی، مدل‌سازی کرده‌اند. در این مدل وضعیت باز و یا بسته بودن ترک در هر لحظه، به علامت انحنای منحنی خیز در محل ترک بستگی دارد. Ostachowicz و Krawczuk [28] با در نظر گرفتن تغییرات سفتی به صورت یک تابع موج مربعی و با استفاده از روش هارمونیک بالانس، رفتار تیر دارای ترک خستگی را بررسی کرده‌اند. Douka و Hadjileontiadis [29] رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده را به صورت تئوری و تجربی مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها تیر ترک‌دار را با استفاده از سیستم جرم و فنر یک درجه آزادی با سفتی متغیر با زمان که به صورت تابع هارمونیک فرض شده

ترک‌های خستگی اغلب در سازه‌های تحت بارهای تکراری به وجود می‌آیند و اگر به موقع تشخیص داده نشوند، می‌توانند منجر به خرابی شوند. بدین منظور، مطالعه و بررسی روش‌هایی که بتواند به راحتی و با دقت مناسبی پارامترهای ترک را پیش‌بینی کند مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. مطالعات نشان می‌دهد که تحلیل ارتعاشی، یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین روش‌ها در این زمینه می‌باشد. Dimarogonas [1] خلاصه‌ای از اقدامات و تحقیقات انجام شده توسط سایر محققین در زمینه ارتعاش سازه‌های ترک‌دار را ارائه کرده است. بر اساس تحقیق مزبور روش‌های مختلف مدل‌سازی سازه‌های ترک‌دار را می‌توان به مدل‌های مبتنی بر روش‌های المان محدود [6-2]، مدل‌های انعطاف‌پذیری موضعی [7-12] و مدل‌های پیوسته ترک که در آن‌ها اثر ترک به صورت پیوسته در نظر گرفته می‌شود [13-23]، تقسیم‌بندی نمود. اولین بار Christides و Barr [14] تئوری پیوسته برای ارتعاش تیر اوپلر-برنولی یکنواخت را که دارای یک یا چند جفت ترک متقارن بود ارائه کردند. آن‌ها اثر ترک را به صورت یک تابع اغتشاش نمایی که در میدان تنش عمودی اعمال می‌شود مدل کرده و برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل حرکت از اصل هوایشیزو [24] استفاده کردند. در سال‌های اخیر مدل ارائه شده Christides و Barr توسط شن و پی‌یر [15] مورد بازنگری قرار گرفته است، آن‌ها با در نظر گرفتن ترک لبه باز و با اعمال تابع اغتشاش ترک در میدان مشتق جابجایی محوری، معادلات دیفرانسیل جدیدی را برای مطالعه رفتار ارتعاش عرضی تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار ارائه کردند. اما معادله حرکت استخراج شده توسط مدل آن‌ها خود الحاق نمی‌باشد که این امر سبب به دست آمدن فرکانس‌های طبیعی موهومی پس از اعمال روش گالرکین به منظور حل معادله می‌شود. از آنجا که مطالعه در غیاب میرایی صورت پذیرفته است

استخراج شده توسط مدل آن‌ها خود الحاق نمی‌باشد و این امر سبب به دست آمدن فرکانس‌های طبیعی موهومی می‌شود و از آنجا که مطالعه آنان در غیاب میرایی صورت پذیرفته است؛ بنابراین فرکانس‌های طبیعی موهومی توجیه فیزیکی نخواهند داشت. در این مقاله، با در نظر گرفتن فرضیات واقع بینانه‌تر و با اصلاح فرضیات شن، فرضیات سینماتیکی جدیدی برای تیر ترک‌دار با ترک خستگی پیشنهاد می‌شود و در ادامه نشان داده می‌شود که این فرضیات باعث افزایش دقت مدل و همچنین به دست آمدن معادلات دیفرانسیل خود الحاق جدیدی می‌شود که امکان بررسی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را با دقت بهتری فراهم می‌آورد. برای اعمال اثرات حاصل از باز و بسته شدن ترک در معادلات، پارامتر کنترلی جدید γ را که به علامت انحنا منحنی خیز در محل ترک بستگی دارد، تعریف می‌کنیم. این پارامتر، معرف وضعیت باز و بسته بودن ترک در هنگام ارتعاش می‌باشد. پس از استخراج معادله حرکت با استفاده از اصل هو و واشیزو [24]، معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاش عرضی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار دو سر مفصل، با ارائه یک مدل جدید برای سفتی دو خطی و با استفاده از عملیات ریاضی به شکل استاندارد که قابل تحلیل با روش اغتشاشات باشد نوشته می‌شود. سپس پاسخ سیستم با استفاده از روش لیندست-پوانکاره برای هر شکل مود ارتعاشی به دست می‌آید. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد جملات تصحیحی که توسط روش لیندست-پوانکاره به پاسخ سیستم خطی متناظر اضافه می‌شود، در برگیرنده اجزای ناشی از رفتار غیر خطی سیستم می‌باشد. بنابراین در تحلیل حاضر برخلاف مدل‌های موجود، رابطه تحلیلی میان خصوصیات سیستم و پارامترهای ترک استخراج شده است که با استفاده از آن می‌توان به بررسی اثرات پارامترهای ترک بر جملات تصحیح و پاسخ کل سازه پرداخت. صحت نتایج به دست آمده توسط روش‌های عددی و نتایج

است، مدل نموده و سپس با استفاده از آنالیز فوریه به حل معادله دیفرانسیل حرکت پرداخته‌اند. Chu و Shen [30] با استفاده از روش گالرکین هر یک از موده‌های ارتعاشی تیر دو سر مفصل را به صورت یک معادله حرکت دو خطی مدل‌سازی کرده‌اند. بررسی‌های انجام شده توسط این محققین بر روی پاسخ سیستم به تحریک هارمونیک، به وضوح نشان دهنده رفتار غیر خطی برای هر یک از موده‌های ارتعاشی است. نتایج مطالعات اخیر نشان می‌دهد که مطالعه مدل ترک باز و بسته شونده اطلاعات بسیار مفید و با دقت بهتری را در مورد رفتار ارتعاشی سازه‌های ترک‌دار در اختیار می‌گذارد.

با وجود این که در بسیاری از تحقیقات انجام شده به بررسی اثرات پارامترهای ترک و رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار با مدل باز و بسته شونده ترک پرداخته شده است، اما تغییر پارامترهای سیستم در طول زمان، استفاده از روش‌های تحلیلی برای ریشه‌یابی این رفتارها و بررسی پارامترهای تأثیرگذار بر آن را بسیار دشوار می‌نماید، به طوری که عمده تحقیقات انجام شده در این زمینه بر اساس روش‌های عددی و یا المان محدود و با مدل کردن سازه با استفاده از سیستم‌های ساده معادل می‌باشد که سبب بروز خطای زیادی در محاسبات می‌گردد. از طرف دیگر ماهیت عددی و محاسبات طولانی به کار رفته در بیشتر این روش‌ها استفاده از آن‌ها را برای تعریف شاخص‌های دینامیکی عیب، به منظور استفاده در روش‌های عیب‌یابی مبتنی بر ارتعاشات، با مشکل مواجه می‌کند.

هدف اصلی از تحقیق حاضر ارائه مدل پیوسته جدیدی برای مطالعه رفتار ارتعاشی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده است که بتواند با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای ترک پیش‌بینی کند. بدین منظور، مدل پیوسته شن و پی‌یر [15] مورد بازنگری قرار گرفته است. با توجه به این که معادله دیفرانسیل

Barr [13] و سپس با استفاده از روش المان محدود توسط شن و پی‌یر [17] محاسبه شده است. همچنین شن و پی‌یر فرض نمودند که مشتق اول جابجایی محوری نیز تحت تأثیر ترک قرار می‌گیرد. آن‌ها اثر ترک بر روی میدان مشتق جابجایی محوری را به صورت زیر مدل کردند:

$$u_x = u_x(x, z, t), u'_x(x, z, t) = (-z + \phi(x, z)) w'(x, t) \quad (3)$$

در رابطه اخیر، $w(x, t)$ بیانگر خیز عرضی تیر می‌باشد و $\phi(x, z)$ تابع اثر ترک بر مشتق اول میدان جابجایی است و به صورت زیر تعریف شده است [16]:

$$\phi(x, z) = \left[z - \left(z + \frac{a}{2} \right) H(d - a - z) \right] e^{-2\beta \frac{|x-x_c|}{d}} \quad (4)$$

که در آن β پارامتر ثابتی است و در مرجع [15] مقدار آن محاسبه شده است. همان طوری که از فرضیات فوق مشاهده می‌شود، آن‌ها از تأثیر ترک بر روی میدان جابجایی محوری صرف نظر کرده‌اند و دو فرض مستقل را برای میدان جابجایی و مشتق میدان جابجایی به کار گرفته‌اند که این فرضیات باعث به وجود آمدن خطا و کاهش دقت مدل شده است. معادله دیفرانسیل استخراج شده توسط شن و پی‌یر برای تیر اویلر-برنولی ترک‌دار که جزئیات آن در مرجع [15] بیان شده است به صورت زیر می‌باشد:

$$(I+L_1-K_1) Q_1 w^{(iv)} + [2(I+L_1-K-K_1) Q_1 + (2L_3-K_2+L_2) Q_1] w'' + [(I+L_1-K_1) Q_1 + (2L_3-K_2+L_2) Q_1 + (L_3-K') Q_1] w' + \frac{\rho A}{E} \ddot{w} = 0. \quad (5)$$

می‌توان اثبات کرد که معادله اخیر خود الحاق نمی‌باشد و در نتیجه ماتریس سفی به دست آمده حاصل از اعمال روش گالرکین به منظور حل معادله دیفرانسیل، یک ماتریس غیر متقارن خواهد بود که مقادیر ویژه (فرکانس‌های طبیعی) موهومی را در اختیار

تجربی موجود در ادبیات فن به اثبات رسیده است. همچنین مقایسه مدل ارائه شده در این مقاله و مدل شن و پی‌یر با نتایج تجربی نشان می‌دهد که مدل جدید ارائه شده به طور قابل توجهی نسبت به مدل شن بهبود یافته است و رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار را با دقت بهتری به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای ترک پیش‌بینی می‌نماید.

فرضیات سینماتیکی برای ترک باز و بسته

شونده

در مدل پیوسته ترک، اثر ترک به صورت یک تابع پیوسته بیان می‌شود که توزیع تنش و کرنش ناشی از ترک در سازه را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در مدل شن و پی‌یر [15] میدان تنش و کرنش در حضور ترک به صورت زیر فرض شده است:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (-z + f(x, z)) T(x, t) \\ \varepsilon_x &= (-z + f(x, t)) S(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $T(x, t)$ و $S(x, t)$ به ترتیب توابع تنش و کرنش مجهولی هستند که باید محاسبه شوند. همچنین تابع $f(x, z)$ تابع اغتشاش ترک می‌باشد که برای تیر با سطح مقطع مستطیلی به صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$f(x, z) = \left[z - m \left(z + \frac{a}{2} \right) H(d - a - z) \right] e^{-\alpha \frac{|x-x_c|}{d}} \quad (2)$$

که در آن α ، a و d به ترتیب موقعیت ترک، عمق ترک و نصف ارتفاع تیر می‌باشند. ثابت m شیب توزیع تنش خطی در جهت عرضی تیر و در مقطع ترک را نشان می‌دهد و تابع $H(\cdot)$ معرف تابع پله واحد می‌باشد. پارامتر α که میزان کاهش توزیع تنش در تیر و در جهت دور شدن از موقعیت ترک را نشان می‌دهد، برای اولین بار به صورت تجربی توسط Christids و

بوده و در این صورت اثر توابع اغتشاش در معادلات از بین رفته و معادلات حاکم به معادله تیر اوپلر-برنولی استاندارد تبدیل می‌شوند. مقدار γ را با استفاده از علامت انحناء منحنی خیز در موقعیت ترک ($x = x_0$) تعیین می‌کنیم. برای تیر نشان داده شده در شکل (۱) و با توجه به مختصات نشان داده شده، پارامتر γ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} < 0 \\ 0 & \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} > 0 \end{cases} \quad (۸)$$

با توجه به تعریف فوق، $\gamma = 1$ معرف باز بودن ترک تحت کشش بوده و $\gamma = 0$ بسته بودن ترک در حالت فشار را نشان می‌دهد.

برای اعمال اثرات باز و بسته شدن ترک، فرضیات سینماتیکی به کار گرفته شده توسط شن و پی‌یر برای حالت ترک باز [15] به همراه میدان جابجایی جدید پیشنهادی در رابطه (۶) را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u_x &= (-z + \gamma \phi(x, z)) w'(x, t), & u_y &= 0, & u_z &= w(x, t), \\ p_x &= 0, & p_y &= 0, & p_z &= P(x, t), \\ \varepsilon_x &= (-z + \gamma f(x, z)) S(x, t), \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0, \\ \sigma_x &= (-z + \gamma f(x, z)) T(x, t), \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx}(x, z, t), \\ \sigma_y &= \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (۹)$$

در رابطه اخیر، ν نسبت پواسون و علامت پریم نشان دهنده مشتق نسبت به مکان می‌باشد. توجه می‌کنیم که در فرضیات فوق اثر تنش برشی صرف نظر شده و مؤلفه تنش σ_{xz} به منظور در نظر گرفتن اثرات بارگذاری عرضی اعمالی بر تیر در نظر

می‌گردد. با توجه به این که در مدل مزبور اثر میرایی در نظر گرفته نشده است، بنابراین فرکانس‌های طبیعی موهومی توجیه فیزیکی نخواهند داشت. به منظور رفع نقایص مدل اخیر، با توجه به تئوری تیر اوپلر-برنولی میدان اصلاح شده جدیدی را برای میدان جابجایی، با فرض ترک باز، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

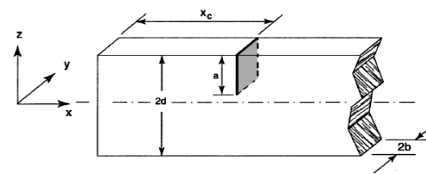
$$u_x(x, z, t) = (-z + \phi(x, z)) w'(x, t) \quad (۶)$$

با مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به x خواهیم

داشت:

$$u'_x(x, z, t) = (-z + \phi(x, z)) w''(x, t) + \phi'(x, z) w'(x, t) \quad (۷)$$

با مقایسه روابط (۳) و (۷) مشاهده می‌شود که در فرض اخیر اثر ترک در میدان جابجایی منظور شده است. این فرض باعث ظاهر شدن شیب تابع خیز در میدان مشتق جابجایی طولی می‌شود که چنین جمله‌ای در مدل شن و پی‌یر موجود نیست. در ادامه نشان داده می‌شود که این تصحیح باعث به دست آمدن معادله دیفرانسیل جدیدی برای ارتعاش عرضی تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار می‌شود که با دقت مناسب‌تری رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را نسبت به مدل شن و پی‌یر پیش‌بینی می‌نماید.



شکل ۱ هندسه تیر ترک‌دار

به منظور اعمال اثرات حاصل از باز و بسته شدن ترک در معادله حرکت، از پارامتر کنترلی γ استفاده می‌کنیم. زمانی که ترک باز باشد، $\gamma = 1$ بوده و توابع اغتشاش (Perturbatin) در میدان‌های جابجایی، تنش و کرنش اثر می‌کنند و زمانی که ترک بسته شود $\gamma = 0$

با جایگذاری فرضیات سینماتیکی ذکر شده در رابطه (۹) در معادله (۱۰) می‌توان معادلات حرکت به همراه شرایط مرزی متناظر را استخراج نمود. با توجه به این که متغیرهای S, T, P و w مستقل از یکدیگر می‌باشند، بنابراین با جایگذاری فرضیات سینماتیکی در رابطه (۱۰) و با اعمال تغییرات (Variational) نسبت به متغیرهای مزبور و پس از اعمال برخی عملیات ریاضی و انتگرال‌گیری جزء به جزء، معادله (۱۰) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_x \gamma(I-2K+L)(T-ES)\delta S + \rho A(\dot{w}-P)\delta P \\ \{ (I+\gamma[-2K+L])S - (I+\gamma[-K_1-K+L_1])w'' \\ -\gamma(L_2-K_2)w' \} \delta T dx dt + B.C = 0. \quad (11)$$

در رابطه (۱۱) عبارت B.C معرف جملات حاصل از شرایط مرزی است که از اعمال انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آید و انتگرال‌های روی سطح مقطع تیر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$I = \int_A z^2 dA, \quad K = \int_A z f dA, \quad K_1 = \int_A z \phi dA \\ L = \int_A f^2 dA, \quad L_1 = \int_A \phi f dA \quad (12)$$

با توجه به اینکه متغیرهای $\delta S, \delta T, \delta P$ و δw مستقل از یکدیگر بوده و اختیاری می‌باشند، در نتیجه، برای برقراری معادله (۱۰) باید ضرایب هر یک از این متغیرها به صورت مجزا برابر صفر باشد. به ازای δT اختیاری از رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$S = Q_1 w'' + Q_2 w' \quad (13)$$

که در آن:

$$Q_1 = \frac{I+\gamma[L_1-K-K_1]}{I+\gamma[L-2K]}, \quad Q_2 = \frac{\gamma(L_2-K_2)}{I+\gamma[L-2K]} \quad (14)$$

گرفته شده است. توابع $\phi(x, z)$ و $f(x, z)$ توابع اغتشاش ترک مشابه با تابع پیشنهادی شن در مرجع [16] هستند که میدان جابجایی، تنش و کرنش را در اطراف ترک تحت تأثیر قرار می‌دهند.

معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر

ترک‌دار با مدل ترک باز و بسته شونده

با توجه به این که در فرضیات سینماتیکی میدان‌های جابجایی، تنش و کرنش به صورت مستقل از هم اختیار شده‌اند، بنابراین توابع تنش و کرنش مجهول $T(x, t)$ و $S(x, t)$ باید به نحوی تعیین شوند تا روابط ساختاری (Constitutive relation) بین این میدان‌ها برقرار باشد. بدین منظور، برای استخراج معادله دیفرانسیل حرکت از اصل هو واشیزو استفاده می‌کنیم. برای مسایل دینامیکی اصل هو واشیزو به صورت زیر بیان می‌شود [24]:

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V \{ \sigma_{ij,j} + f_i - \rho \dot{p}_i \} \delta u_i dV \right. \\ \left. + \int_V \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial U_0(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \left(\rho \dot{u}_i - \frac{\partial T}{\partial p_i} \right) \delta p_i dV \right. \\ \left. + \int_V \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \right] \delta \sigma_{ij} dV \right. \\ \left. + \int_{S_0} [t_i - \bar{t}_i] \delta u_i ds + \int_{S_1} (\bar{u}_i - u_i) \delta t_i ds \right\} dt = 0. \quad (10)$$

که در آن $U_0(\epsilon_{ij})$ تابع چگالی انرژی کرنشی، $p_i = \dot{u}_i$ معرف مومنتوم خطی، $T = \frac{1}{2} \rho p_i p_i$ چگالی انرژی جنبشی، δ_{ki} تابع دلتای کرونگر و \bar{t}_i و \bar{u}_i به ترتیب معرف بردار تنش معلوم روی سطح S_0 و جابجایی معین سطح S_{II} می‌باشد. رابطه (۱۰) نقطه شروع برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت تیر ترک‌دار با مدل پیوسته ترک باز و بسته شونده می‌باشد.

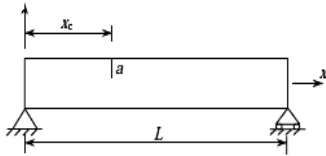
می توان ثابت کرد که معادله حرکت استخراج شده مطابق رابطه (۱۷) برای تیر با تکیه گاه های ساده در دو انتها، معادله دیفرانسیل خود الحاق می باشد که در این مقاله نیز به بررسی رفتار ارتعاشی تیر ترک دار با تکیه گاه های ساده در دو انتها می پردازیم.

استخراج فرکانس های طبیعی و شکل مودهای

ارتعاشی تیر ترک دار با تکیه گاه های ساده در دو

انتها

تئوری تیر با مدل پیوسته ترک ارائه شده، برای یک تیر با سطح مقطع مستطیلی و با تکیه گاه های ساده در دو انتها مورد بررسی قرار می گیرد. در شکل (۲) هندسه یک تیر ترک دار با ترک لبه باز به عمق a و واقع در موقعیت x_c و با تکیه گاه ساده در دو انتها نشان داده شده است.



شکل ۲ هندسه تیر ترک دار با تکیه گاه های ساده در دو انتها

برای تیر با سطح مقطع مستطیلی توابع داده شده در معادلات

(۱۲) به صورت زیر به دست می آیند:

$$K = 0, \quad K_1 = \left(1 - \frac{1}{m}\right) I e^{-\alpha \frac{|x-x_c|}{d}} e^{-2\beta \frac{|x-x_c|}{d}}$$

$$L = (m-1) I e^{-2\alpha \frac{|x-x_c|}{d}}, \quad L_1 = \left(1 - \frac{1}{m}\right) I e^{-2\beta \frac{|x-x_c|}{d}}$$

$$m = \frac{I}{\left(I_r + \frac{a}{2} I_c\right)}, \quad I = \frac{4bd^3}{3}$$

$$I_r = \frac{2b[(d-a)^3 + d^3]}{3}, \quad I_c = ab(a-2d) \quad (19)$$

رفتار ارتعاشی تیر ترک دار را می توان با فرض

و همچنین به ازای δS و δP اختیاری خواهیم داشت:

$$P = \dot{w} \quad \text{و} \quad T = ES \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۱۳) و (۱۵) در معادله (۱۱) و با توجه به اینکه مقدار δw اختیاری است، می توان معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش عرضی تیر ترک دار را به صورت زیر به دست آورد:

$$(I + \gamma[L_1 - K - K_1]) Q_1 w^{(iv)} + [(I + \gamma[L_1 - K - K_1]) (2Q_1 + Q_2) + \gamma(2L_3 - 2K' - K_2 + L_2) Q_1] w'' + [(I + \gamma[L_1 - K - K_1]) (Q_1' + 2Q_2) + \gamma(2L_3 - 2K' - K_2 + L_2) (Q_1 + Q_2) + \gamma(L_3 - K')] Q_1 w' + [(I + \gamma[L_1 - K - K_1]) Q_2' + \gamma(2L_3 - 2K' - K_2 + L_2) Q_2 + \gamma(L_3 - K')] Q_2 w + \frac{\rho A}{E} \ddot{w} = 0 \quad (16)$$

با توجه به روابط (۲) و (۴) واضح است که برای تیر سالم $f(x, z) = \varphi(x, z) = 0$ بوده و بنابراین، مقدار Q_1 برابر واحد و $L_2, L_1, K_2, K_1, K, Q_2$ همگی صفر می شوند و در حالت بسته بودن ترک $\gamma = 0$ معادله (۱۶) به معادله ارتعاش عرضی تیر اولر- برنولی استاندارد $EIw^{(iv)} + \rho A \ddot{w} = 0$ تبدیل می شود.

با اعمال برخی عملیات ریاضی می توان نشان داد که معادله دیفرانسیل (۱۶) را می توان به شکل زیر ساده نمود:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[q_2(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[q_1(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] + \frac{\rho A}{E} \ddot{w}(x, t) = 0 \quad (17)$$

در رابطه اخیر، توابع $q_1(x)$ و $q_2(x)$ عبارتند از:

$$q_1(x) = (I + L_1 - K_1 - K) Q_2'(x) + (L_3 - K') Q_2(x)$$

$$q_2(x) = (I + L_1 - K_1 - K) Q_1(x) \quad (18)$$

مرزی هندسی و طبیعی را ارضاء می‌کنند. برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها توابع مقایسه‌ای را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\eta_j^c(x) = \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \quad (22)$$

با توجه به این که شکل مودهای تیر ترک‌دار دارای مشتقات ناپیوسته است بنابراین، برای همگرا شدن پاسخ روش گالرکین نیاز به تعداد جملات بیشتری خواهد بود. با جایگذاری معادله (22) در معادله حرکت (21) و با اعمال روش گالرکین، مسأله مقدار ویژه جداسازی شده برای N ثابت

$$a_{ji}, j=1,2,\dots,N \text{ به صورت زیر به دست می‌آید:}$$

$$[K_c]a - \omega_c^2 [M_c]a = 0 \quad (23)$$

که در آن بردار a برای شکل مود ارتعاشی i ام عبارت است از: $a_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}]^T$ و ماتریس‌های $[M_c]$ و $[K_c]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی هستند که به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[M_c] = \frac{\rho A}{E} [I] \quad (24)$$

$$[K_c] = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2} q_2(x) \frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2} \\ -\frac{d\phi_i(x)}{dx} q_1(x) \frac{d\phi_j(x)}{dx} \end{bmatrix} dx$$

$[I]$ معرف ماتریس واحد می‌باشد. با توجه به رابطه اخیر، ماتریس سفتی به دست آمده یک ماتریس متقارن است که این امر باعث می‌شود تا مسأله مقدار ویژه متناظر دارای مقادیر ویژه حقیقی باشد. این ویژگی یکی از مزیت‌های تئوری ارائه شده است و در مدل‌های پیشین وجود ندارد.

ارائه مدل جدید دو خطی

برای استخراج پاسخ زمانی متناظر با هر شکل مود ارتعاشی از معادله حرکت (17)، روش گالرکین را به

حرکت هارمونیک و با فرکانس ω_c بررسی کرد. با در نظر گرفتن پاسخ سیستم به صورت $w(x,t) = W(x)e^{i\omega_c t}$ ، معادله دیفرانسیل (17) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[q_2(x) \frac{d^2 W(x,t)}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[q_1(x) \frac{dW(x,t)}{dx} \right] - \frac{\rho A}{E} \omega_c^2 W(x,t) = 0 \quad (20)$$

با توجه به معادله فوق مشاهده می‌شود که ضرایب معادله تابعی از پارامتر کنترلی γ می‌باشند. نتایج تحلیل نشان می‌دهد که مشخصه‌های ارتعاشی تیر ترک‌دار به مقدار پارامتر γ بستگی خواهد داشت. برای $\gamma = 0$ ، از بخش قبل مشاهده می‌شود که شکل مودهای ارتعاشی W_i^{nc} ، و فرکانس‌های طبیعی ω_i^{nc} ، متناظر با پاسخ تیر اویلر-برنولی سالم می‌باشند. اندیس i ، معرف شکل مود ارتعاشی i ام و بالا نویس nc ، معرف تیر بدون ترک می‌باشد.

با اختیار کردن $\gamma = 1$ در معادله دیفرانسیل (20) معادله ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک باز حاصل می‌شود و با استفاده از آن می‌توان شکل مودهای ارتعاشی W_i^c ، و فرکانس‌های طبیعی ω_i^c تیر ترک‌دار با ترک باز را به دست آورد. بالا نویس c مربوط به تیر ترک‌دار می‌باشد. با توجه به اینکه معادله مذکور به صورت تحلیلی قابل حل نمی‌باشد، بنابراین در مقاله حاضر برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک باز، مسأله مقدار ویژه معادله (20) با استفاده از روش گالرکین حل شده است. بدین منظور، حل فرضی معادله اخیر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$W_i^c(x) = \sum_{j=1}^N a_{ji} \eta_j^c(x) \quad (21)$$

که در آن $\eta_j^c(x)$ توابع مقایسه‌ای هستند که شرایط

دست می‌آیند:

$$k_i^c = \int_0^L \frac{d^2 W_i^c}{dx^2} q_2 \frac{d^2 W_i^c}{dx^2} - \frac{dW_i^c}{dx} q_1 \frac{dW_i^c}{dx} dx$$

$$k_i^{nc} = \int_0^L \frac{d^2 W_i^{nc}}{dx^2} q_2 \frac{d^2 W_i^{nc}}{dx^2} - \frac{dW_i^{nc}}{dx} q_1 \frac{dW_i^{nc}}{dx} dx \quad (29)$$

در روابط اخیر پارامتر کنترلی γ با توجه به رابطه (۸) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \left. \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \right|_{x=x_c} u_i < 0 \\ 0 & \left. \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \right|_{x=x_c} u_i > 0 \end{cases} \quad (30)$$

با در نظر گرفتن هر شکل مود ارتعاشی، معادله دیفرانسیل (۲۷) را می‌توان به فرم یک معادله دیفرانسیل دوخطی به صورت زیر بیان نمود:

$$\ddot{u}_i + \omega_i^{c2} u_i = 0 \quad \gamma = 1$$

$$\ddot{u}_i + \omega_i^{nc2} u_i = 0 \quad \gamma = 0 \quad (31)$$

که در آن فرکانس‌های طبیعی ω_i^c و ω_i^{nc} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\omega_i^{nc2} = \frac{k_i^{nc}}{m_i}, \quad \omega_i^{c2} = \frac{k_i^c}{m_i} \quad (32)$$

اگر بتوان معادله دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم دینامیکی غیرخطی را به صورت رابطه (۳۳) بیان کرد، می‌توان با استفاده از روش لیندست - پوانکاره که یکی از روش‌های اغتشاشات است، پاسخ آن را به دست آورد [33]:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, t) \quad (33)$$

که در رابطه فوق ω_0 فرکانس طبیعی سیستم خطی متناظر می‌باشد و ε یک پارامتر بی‌بعد کوچک است.

با توجه به رابطه (۲۸) مشاهده می‌شود که سفتی معادل تیر، تابعی از دامنه نوسان است. با در نظر گرفتن تابع دو ضابطه‌ای ارائه شده برای $k_i(u_i)$ ، می‌توان سفتی دو خطی تیر ترک‌دار را به صورت زیر بیان کرد:

$$k_i(u_i) u_i = \bar{k}_i u_i + \varepsilon_i \bar{k}_i |u_i| \operatorname{sgn} \left(\left. \frac{d^2 W_i}{dx^2} \right|_{x=x_c} \right) \quad (34)$$

کار می‌بریم. توابع مقایسه‌ای را طوری انتخاب می‌کنیم که پس از اعمال روش گالرکین به معادله حرکت، معادلات دیفرانسیل معمولی غیر کوپل برای بخش زمانی پاسخ حاصل شود. بدین منظور، تابع خیز عرضی را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$w_i(x, t) = \gamma W_i^c(x) u_i(t) + (1-\gamma) W_i^{nc}(x) u_i(t) \quad (25)$$

در رابطه فوق، $W_i^c(x)$ و $W_i^{nc}(x)$ به ترتیب معرف شکل مود ارتعاشی آم تیر ترک‌دار و تیر سالم و $u_i(t)$ معرف بخش زمانی متناظر با شکل مود ارتعاشی آم می‌باشد. با جایگذاری $w_i(x, t)$ از رابطه (۲۵) در معادله (۱۷) به دست می‌آوریم:

$$\left\{ \left(\frac{d^2}{dx^2} \left[q_2 \frac{d^2 W_i^c}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[q_1 \frac{dW_i^c}{dx} \right] \right) u \right\} + \left\{ \frac{\rho A}{E} W_i^c \ddot{u} \right\}$$

$$+ (1-\gamma) \left\{ \left(\frac{d^2}{dx^2} \left[q_2 \frac{d^2 W_i^{nc}}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[q_1 \frac{dW_i^{nc}}{dx} \right] \right) u \right\} + \left\{ \frac{\rho A}{E} W_i^{nc} \ddot{u} \right\} = 0 \quad (26)$$

با ضرب طرفین رابطه (۲۶) در عبارت $\gamma W_i^c + (1-\gamma) W_i^{nc}$ و انتگرال‌گیری از رابطه حاصله در بازه $[0, L]$ ، معادله زیر به دست می‌آید:

$$m_i \ddot{u}_i(t) + k_i(u_i) u_i(t) = 0 \quad (27)$$

در رابطه اخیر، جرم m_i و سفتی $k_i(u_i)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_i = \rho A \int_0^L W_i W_i dx$$

$$k_i(u_i) = \begin{cases} k_i^c & \gamma = 1 \\ k_i^{nc} & \gamma = 0 \end{cases} \quad (28)$$

که در آن k_i^c و k_i^{nc} به ترتیب سفتی متناظر با تیر ترک‌دار و تیر سالم است که به صورت رابطه (۲۹) به

استخراج پاسخ زمانی سیستم با استفاده از روش لیندست- پوانکاره

روش لیندست- پوانکاره یکی از پرکاربردترین روش‌های اغتشاشات است که در مطالعه سیستم‌های غیرخطی جایگاه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده است [33,34]. بر اساس این روش و با انجام تغییر متغیر $\tau = \omega t$ ، پاسخ سیستم را به صورت $\sum_{j=0}^n \varepsilon^j u_j$ در نظر می‌گیریم. به علاوه، فرکانس پاسخ را نیز به صورت $\sum_{i=1}^n \varepsilon^i \omega_i$ بسط می‌دهیم که در آن ω_i ضرایب مجهولی هستند که از حذف جملات سکولار (جملاتی که باعث رشد سریع پاسخ با گذشت زمان می‌شود) به دست می‌آیند. در تحقیق حاضر $n = 2$ در نظر گرفته شده است که به معنای در نظر گرفتن پاسخ خطی متناظر و دو جمله تصحیح مربوط به رفتار غیرخطی سیستم می‌باشد. بر این اساس پاسخ سیستم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_i(t) = u_{0i}(t) + \varepsilon u_{1i}(t) + \varepsilon^2 u_{2i}(t) + O(\varepsilon^3) \quad (39)$$

که در آن اندیس i شماره شکل مود ارتعاشی را بیان می‌کند. با توجه به اینکه پارامتر ε کوچکتر از واحد می‌باشد، بنابراین جملات شامل توان‌های بالاتر ε نقش تصحیح را در پاسخ دارند. همچنین فرکانس طبیعی سیستم را مطابق رابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\omega_i = \omega_{0i} + \varepsilon_i \omega_{1i} + \varepsilon_i^2 \omega_{2i} \quad (40)$$

با جایگذاری روابط $\tau = \omega t$ ، $\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}$ و روابط (39) و (40) در معادله دیفرانسیل (37) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & (\omega_{0i} + \varepsilon \omega_{1i} + \varepsilon^2 \omega_{2i})^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (u_{0i} + \varepsilon u_{1i} + \varepsilon^2 u_{2i}) \\ & + \omega_{0i}^2 (u_{0i} + \varepsilon u_{1i} + \varepsilon^2 u_{2i}) \\ & + \varepsilon \omega_{0i}^2 |u_{0i} + \varepsilon u_{1i} + \varepsilon^2 u_{2i}| \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2 W_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

که در رابطه فوق تابع $\text{sgn}(\cdot)$ ، تابع علامت می‌باشد. \bar{k}_i را به صورت میانگین سفتی معادل تیر ترک‌دار در حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک تعریف می‌کنیم:

$$\bar{k}_i = \frac{k_i^c + k_i^{nc}}{2} \quad (35)$$

ε_i پارامتر بی‌بعد و کوچکی است که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_i = \frac{k_i^{nc} - k_i^c}{k_i^{nc} + k_i^c} \quad (36)$$

با قرار دادن رابطه (34) در رابطه (27) و تقسیم طرفین بر m ، معادله دیفرانسیل حاکم به شکل نهایی زیر بیان می‌شود:

$$\ddot{u}_i + \omega_{0i}^2 u_i = -\varepsilon \omega_{0i}^2 |u_i| \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2 W_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) \quad (37)$$

که در این رابطه ω_{0i} فرکانس طبیعی سیستم خطی متناظر با شکل مود ارتعاشی i ام بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\omega_{0i}^2 = \frac{\bar{k}_i}{m_i} \quad (38)$$

با مقایسه روابط (37) و (33) مشاهده می‌شود که با ارائه مدل جدید برای سفتی دو خطی مدل تیر ترک‌دار، معادله دیفرانسیل حاکم بر آن را می‌توان به شکل قابل تحلیل توسط روش اغتشاشات نوشت. علاوه بر این، در این مدل برخلاف مدل‌های سفتی متغیر با زمان، سفتی معادل، تابعی از دامنه نوسان است که این امر منجر به تشکیل معادله دیفرانسیل غیرخطی شده است. مسلماً چنین مدلی در مقایسه با مدل‌های سفتی متغیر با زمان، به درک بهتری از رفتار غیرخطی ترک خستگی منجر می‌شود. با استفاده از تئوری ارائه شده می‌توان برخلاف مدل‌های موجود به بررسی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار در شکل مودهای بالاتر ارتعاشی نیز پرداخت.

صفر قرار داد. با جایگذاری رابطه (۴۵) در معادله (۴۳) برای حذف تنها جمله سکولار خواهیم داشت:

$$-2\omega_{0i}\omega_{1i} \frac{d^2 u_{0i}}{dt^2} = 0 \quad (46)$$

بنابراین $\omega_{1i} = 0$ به دست می آید. با حذف جمله سکولار از معادله (۴۳) و جایگذاری u_{0i} به دست آمده در آن، این معادله به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{d^2 u_{1i}}{dt^2} + u_{1i} = -A \cdot \text{sgn} \left(\left. \frac{d^2 W_i}{dx^2} \right|_{x=x_c} \right) \cdot |\cos \tau| \quad (47)$$

$|\cos \tau|$ یک تابع پریودیک زوج با دوره تناوب π است که می توان به صورت زیر بسط داد:

$$f(\tau) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^m}{1-4m^2} \right\} \cos 2m\tau \quad (48)$$

همان گونه که ملاحظه می شود سمت راست رابطه (۴۸) از یک مقدار ثابت و مجموعه ای از جملات هارمونیک تشکیل شده است. با حل معادله دیفرانسیل (۴۷) و با در نظر گرفتن شرایط اولیه به صورت $u_{1i}(0) = 0$ و $\dot{u}_{1i}(0) = 0$ ، جمله تصحیح مرتبه اول به صورت زیر به دست می آید:

$$u_{1i}(\tau) = A \left\{ \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(-1)^m}{\pi(1-4m^2)} \right) \cos \tau - \frac{2}{\pi} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(-1)^m}{\pi(1-4m^2)} \cos 2m\tau \right\} \cdot \text{sgn} \left(\left. \frac{d^2 \eta_i}{dx^2} \right|_{x=x_c} \right) \quad (49)$$

در رابطه (۴۹)، عبارت $\frac{u_{0i} + \epsilon u_{1i}}{u_{0i} + \epsilon u_{1i}}$ را می توان با استفاده از بسط فوریه به صورت زیر نوشت:

$$g(\tau) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos m\tau \quad (50)$$

که در آن ضرایب فوریه به این صورت به دست می آیند:

با مرتب کردن رابطه فوق برحسب توان های افزایشی ϵ ، معادلات دیفرانسیل برای u_i به صورت زیر حاصل می شود:

$$\epsilon^0: \omega_0^2 \left(\frac{d^2 u_{0i}}{dt^2} + u_{0i} \right) = 0 \quad (42)$$

$$\epsilon^1: \omega_0^2 \left(\frac{d^2 u_{1i}}{dt^2} + u_{1i} \right) = -2\omega_{0i}\omega_{1i} \frac{d^2 u_{0i}}{dt^2} - \omega_{0i}^2 |u_{0i}| \cdot \text{sgn} \left(\left. \frac{d^2 W_i}{dx^2} \right|_{x=x_c} \right) \quad (43)$$

$$\epsilon^2: \omega_0^2 \left(\frac{d^2 u_{2i}}{dt^2} + u_{2i} \right) = -(\omega_{1i}^2 + 2\omega_{0i}\omega_{2i}) \frac{d^2 u_{0i}}{dt^2} - 2\omega_{0i}\omega_{1i} \frac{d^2 u_{1i}}{dt^2} - \omega_{0i}^2 \frac{|u_{0i} + \epsilon u_{1i}|}{u_{0i} + \epsilon u_{1i}} \cdot \text{sgn} \left(\left. \frac{d^2 W_i}{dx^2} \right|_{x=x_c} \right) \quad (44)$$

در روش لیندست - پوانکاره شرایط اولیه در اولین معادله اعمال شده و شرایط اولیه معادلات تصحیح صفر در نظر گرفته می شود. رابطه (۴۲) نشان دهنده یک معادله دیفرانسیل همگن است که از حل آن پاسخ سیستمی با میانگین سفتی های معادل در حالت های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک به دست می آید. این سیستم که در اصطلاح سیستم خطی متناظر نامیده می شود، در برگرنده بخش اصلی پاسخ است. اثرات تغییر سفتی معادل در پاسخ سیستم که ناشی از باز و بسته شدن ترک است، از حل معادلات (۴۳ و ۴۴) به دست می آیند. بدین ترتیب با فرض شرایط اولیه جابجایی خالص، بخش اصلی پاسخ ناشی از حل معادله (۴۲) به صورت زیر به دست می آید:

$$u_{0i} = A \cos \tau \quad (45)$$

که در آن A دامنه اولیه می باشد. وجود جملات سکولار، باعث رشد سریع پاسخ با گذشت زمان می شود که برای حذف این جملات باید ضرایب جملاتی که منجر به عبارات سکولار می شوند برابر

رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega_i = \omega_{0i} + \varepsilon_i^2 \omega_{2i} \quad (56)$$

همانطور که از رابطه فوق مشاهده می‌شود تئوری جدید، فرکانس‌های طبیعی را به صورت تابعی از دامنه ارتعاش بیان می‌کند. این امر برخلاف مدل‌های دیگر [18] باعث شده است تا فرکانس‌های طبیعی به شرایط اولیه نیز وابسته باشند.

نتایج تحلیلی

به منظور مقایسه نتایج حاصل از مدل ارائه شده با نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود در ادبیات فن، نمونه تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها را مورد بررسی قرار می‌دهیم [31] ابعاد هندسی و مشخصات مکانیکی تیر ترک‌دار مورد بررسی بدین صورت است: طول تیر $L = 400 \text{ mm}$ ، مساحت سطح مقطع تیر $A = 10 \times 10 \text{ mm}^2$ ، جرم واحد حجم $\rho = 7650 \text{ Kg/m}^3$ و مدول یانگ $E = 2.16 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. علاوه بر این، پارامترهای بی‌بعد ترک عبارتند از: $\alpha = \frac{a}{2d}$ که نشان دهنده عمق نسبی ترک (نسبت عمق ترک به ضخامت تیر) و $\xi_c = \frac{x_c}{L}$ نشان دهنده موقعیت نسبی ترک (نسبت فاصله ترک از ابتدای تیر به طول تیر) می‌باشد. قبل از بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار، ابتدا صحت مدل ارائه شده را با استفاده از نتایج حاصل از تست‌های تجربی [31] برای تیر اویلر-برنولی ترک‌دار با ترک باز و تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها بررسی می‌کنیم. همچنین به منظور نشان دادن اثر فرضیات سینماتیکی جدید پیشنهاد شده، نتایج حاصل از مدل ارائه شده و نتایج مدل شن و پی [15] (معادله (5)) را با نتایج تجربی [31] مورد مقایسه قرار می‌دهیم. در شکل (3) منحنی تغییرات نسبت فرکانسی

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{z_1} u_{1i} d\tau - \int_{z_1}^{z_2} u_{1i} d\tau + \int_{z_2}^{2\pi} u_{1i} d\tau \right\}$$

$$b_m = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{z_1} u_{1i} \cos(m\tau) d\tau - \int_{z_1}^{z_2} u_{1i} \cos(m\tau) d\tau + \int_{z_2}^{2\pi} u_{1i} \cos(m\tau) d\tau \right\}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (51)$$

در روابط اخیر z_1 و z_2 محل تغییر علامت تابع $u_{0i} + \varepsilon u_{1i}$ در بازه $[0, 2\pi]$ می‌باشد. با قرار دادن بسط فوریه ارائه شده برای عبارت $\frac{u_{0i} + \varepsilon u_{1i}}{u_{0i} + \varepsilon u_{1i}}$ در معادله (44) مشاهده می‌شود که اولین جمله از این بسط، یک جمله سکولار است که برای حذف آن برقراری رابطه زیر لازم است:

$$-2\omega_{0i}\omega_{2i}(-A \cos \tau) - \omega_{0i}^2 (b_1 \cos \tau) = 0 \quad (52)$$

بنابراین:

$$\omega_{2i} = \frac{\omega_{0i} b_1}{2A} \quad (53)$$

مشاهده می‌شود که فرکانس تصحیح مرتبه دوم ω_{2i} تابعی از دامنه نوسان است که از غیرخطی بودن سیستم ناشی می‌شود. با حذف جمله سکولار از معادله (44) و حل این معادله دیفرانسیل به ازای شرایط اولیه $u_{2i}(0) = 0$ و $\dot{u}_{2i}(0) = 0$ ، پاسخ تصحیح مرتبه دوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_{2i}(\tau) = A \left\{ \left(b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{1-m^2} \right) \cos \tau - b_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{1-4m^2} \cos m\tau \right\} \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2 \eta_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) \quad (54)$$

در رابطه اخیر b_0 و b_m از روابط (51) به دست می‌آیند. در نهایت پاسخ سیستم از رابطه زیر به دست می‌آید:

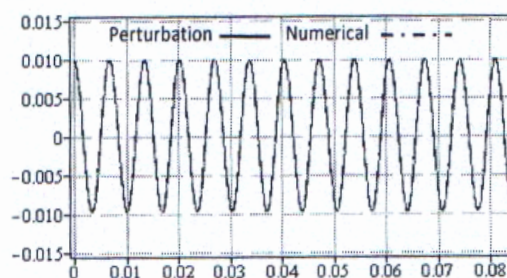
$$u_i(\tau) = u_{0i}(\tau) + \varepsilon_i u_{1i}(\tau) + \varepsilon_i^2 u_{2i}(\tau) \quad (55)$$

که در آن $\tau = \omega_i t$ بوده و فرکانس طبیعی سیستم از

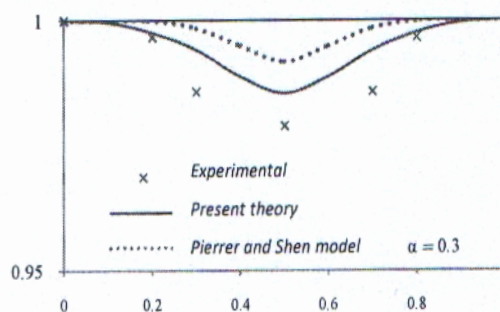
در شکل (۴) پاسخ نامیرای ارتعاشات آزاد تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به ازای ترکی با عمق نسبی $\alpha = 0.5$ و در موقعیت نسبی $\xi_0 = 0.3$ که از روش پیشنهادی در تحقیق حاضر، معادله (۵۵)، به دست آمده به همراه پاسخ حاصل از روش عددی رسم شده است. تطابق بسیار خوب این دو نمودار نشان دهنده دقت بالای حل حاصل از روش لیندست- پوانکاره است.

پیک‌های بالایی و پایینی پاسخ سیستم خطی متناظر و پاسخ نهایی به دست آمده از روش عددی، برای ترکی با عمق نسبی $\alpha = 0.5$ و موقعیت نسبی $\xi_0 = 0.3$ ، به ترتیب در شکل‌های (الف-۵) و (د-۵) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در پیک‌های بالایی این دو نمودار بر هم منطبق هستند؛ ولی در پیک‌های پایینی از یکدیگر متمایز می‌شوند. علت این امر ناشی از باز شدن ترک در پیک‌های پایینی و کاهش سفتی معادل سیستم می‌باشد. البته در پیک‌های بالایی نیز اختلاف بسیار جزئی بین این دو پاسخ به چشم می‌خورد که این اختلاف ناشی از یکسان در نظر گرفتن سفتی معادل تیر در حالت بسته بودن ترک با سفتی معادل تیر سالم می‌باشد. در مرجع [32] نشان داده شده است که سفتی معادل در حالت ترک بسته با سفتی معادل تیر سالم یکسان نمی‌باشد. البته همانطور که از پیک‌های بالایی شکل (الف-۵) مشاهده می‌شود، این اختلاف بسیار ناچیز است. با اضافه شدن جملات تصحیح به پاسخ سیستم خطی متناظر، این اختلاف جبران می‌شود. جمله تصحیح مرتبه اول و مرتبه دوم به ترتیب، در شکل‌های (ب-۵) و (ج-۵)، نشان داده شده است. در پیک‌های بالایی با توجه به این که دو نمودار بر هم منطبق هستند، بنابراین جملات تصحیح به صفر میل می‌کنند. همچنین مشاهده می‌شود که جمله تصحیح مرتبه اول، اثر غالبی در نمایش رفتار غیرخطی سیستم برعهده دارد؛ در حالی که از اثر جمله تصحیح مرتبه دوم

اول برحسب موقعیت نسبی ترک (برای ترک با عمق نسبی $\alpha = 0.3$)، محاسبه شده با استفاده از تئوری ارائه شده و مدل شن و پی‌یر [15] به همراه نتایج حاصل از آزمون‌های تجربی [31] ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که در شکل مود اول ارتعاشی هر چه موقعیت ترک به تکیه‌گاه‌ها نزدیکتر باشد، نتایج تقریباً یکسانی از هر دو تئوری حاصل می‌شود؛ اما با دور شدن ترک از تکیه‌گاه‌ها به علت تأثیر بیشتر ترک بر فرکانس‌های طبیعی، نتایج دو تئوری از هم دور می‌شوند و نتایج تئوری ارائه شده بر اساس مطالعه کنونی به نتایج تجربی نزدیکتر می‌شود. این نتایج نشان می‌دهد که مدل جدید پیشنهاد شده براساس بهبود مدل شن و پی‌یر، با دقت بهتری رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار را پیش‌بینی می‌کند.



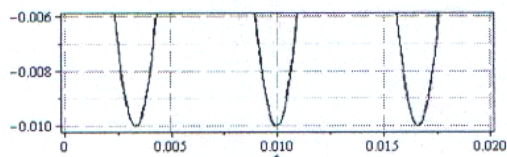
شکل ۳ نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول برحسب عمق نسبی ترک برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، (×) نتایج تجربی [31]، (—) مدل ارائه شده، (.....) مدل شن و پی‌یر [15]



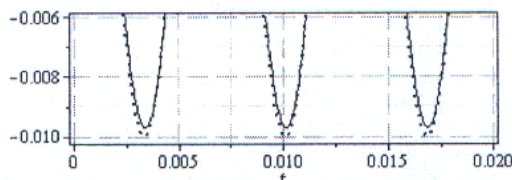
شکل ۴ پاسخ نامیرای ارتعاشات آزاد به دست آمده به روش اغتشاشات (—) و پاسخ به دست آمده به روش عددی (.....) برای $\alpha = 0.5$ و $\xi_0 = 0.3$ در شکل مود اول ارتعاشی تیر ترک‌دار

می توان صرف نظر کرد.

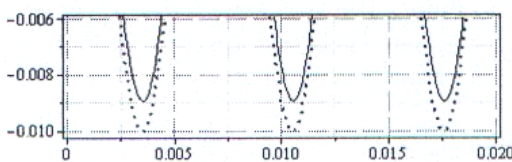
نسبی ترک، اختلاف پاسخ سیستم خطی متناظر و پاسخ نهایی حاصل از مدل پیشنهادی افزایش می یابد. بنابراین، با هدف جبران این اختلاف، دامنه نوسانات جملات تصحیح در روش لیندست- پوانکاره نیز افزایش می یابد که این پدیده در شکل (۷) به ازای ترک واقع در موقعیت نسبی ثابت $\xi_c = 0.5$ و با عمق های نسبی متغیر ترک نشان داده شده است.



الف



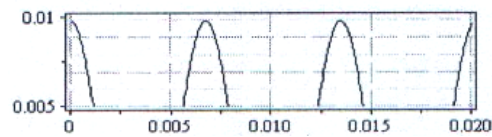
ب



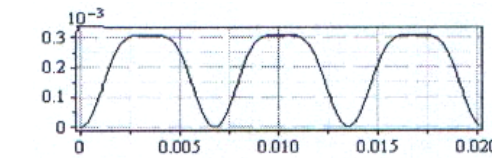
ج

شکل ۶ مقایسه پاسخ سیستم خطی متناظر (.....) و پاسخ نهایی به دست آمده به روش لیندست- پوانکاره (—) برای موقعیت نسبی $\xi_c = 0.5$ و عمق های نسبی (الف) $\alpha = 0.1$ ، (ب) $\alpha = 0.5$ و (ج) $\alpha = 0.7$

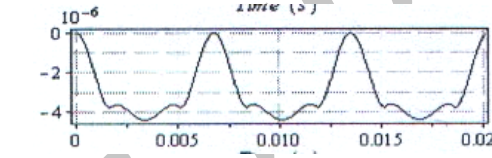
یکی از مشخصه های اصلی رفتار غیرخطی پاسخ ارتعاشی سازه های ترک دار با مدل ترک باز و بسته شونده، تغییر در فرکانس های طبیعی سیستم می باشد. مطالعات نشان می دهد که وجود ترک باعث کاهش در فرکانس های طبیعی سازه های ترک دار می شود و با توجه به این که سفتی معادل متناظر با مدل ترک باز



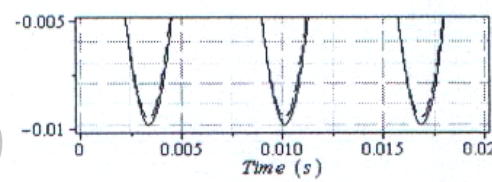
الف



ب



ج

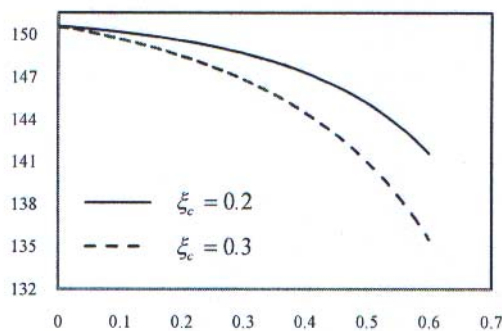


د

شکل ۵ الف) پیک های بالایی، ب) جمله تصحیح مرتبه اول معادله (۴۹)، ج) جمله تصحیح مرتبه دوم معادله (۵۴) و د) پیک های پایینی پاسخ سیستم خطی متناظر (.....) و پاسخ به دست آمده از روش لیندست- پوانکاره (—) برای $\alpha = 0.5$ و $\xi_c = 0.3$

در شکل (۶) اثر افزایش عمق نسبی ترک در موقعیت نسبی ثابت، بر پاسخ سیستم بررسی شده است. مشاهده می شود با افزایش عمق نسبی ترک رفتار غیرخطی سیستم تشدید می شود و در نتیجه اختلاف پاسخ سیستم خطی متناظر و پاسخ به دست آمده از روش لیندست- پوانکاره بیشتر می شود. با توجه به این که رفتار غیرخطی در نیم سیکل های پایینی به دلیل باز شدن ترک بیشتر است، بنابراین در شکل (۶) پیک های پایینی دو نمودار نمایش داده شده است. در یک موقعیت نسبی ثابت ترک، با افزایش عمق

در شکل (۹) منحنی تغییرات فرکانس طبیعی اول به ازای عمق نسبی ترک برای تیر اویلر-برنولی ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها نشان داده شده است. با توجه به شکل (۹) مشاهده می‌شود که در یک موقعیت نسبی مشخص، فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار با عمق نسبی ترک، رابطه معکوس دارد و با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی تیر کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که در مود اول با دور شدن موقعیت ترک از تکیه‌گاه ساده، اثر ترک بر کاهش فرکانسی بیشتر می‌شود.



شکل ۹ فرکانس طبیعی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار برحسب عمق نسبی ترک برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به ازای عمق نسبی $\xi_c = 0.2$ (—) و عمق نسبی $\xi_c = 0.3$ (---)

با توجه به روابط (۵۶) و (۵۳) فرکانس‌های طبیعی مدل ترک باز و بسته شونده از رابطه زیر به دست می‌آید:

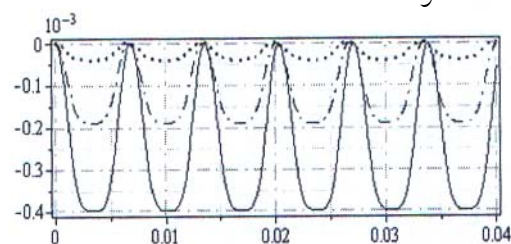
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \frac{\omega_0 b_1}{2A} \quad (57)$$

که در آن A دامنه اولیه اعمالی به سیستم می‌باشد. از رابطه فوق نتیجه می‌شود که فرکانس‌های طبیعی به شرایط اولیه اعمالی بر سیستم نیز بستگی دارند. در مدل‌های دیگر این وابستگی دیده نمی‌شود.

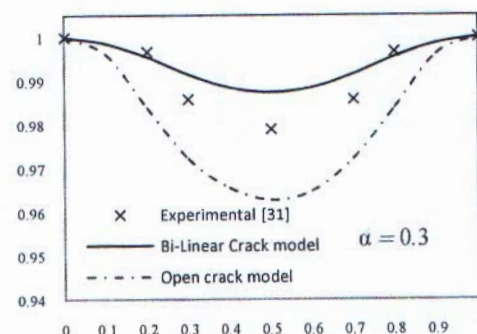
نتیجه‌گیری

اغلب محققان در تحقیقات خود در مورد ارتعاش تیرهای ترک‌دار، برای اجتناب از پیچیدگی‌های ناشی از

کمتر از سفتی معادل مدل ترک باز و بسته شونده می‌باشد؛ بنابراین، اثر ترک باز بر روی کاهش فرکانس‌های طبیعی بیشتر از مدل ترک باز و بسته شونده می‌باشد. با توجه به شکل (۸) که منحنی تغییرات نسبت فرکانس طبیعی اول (نسبت فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار به تیر سالم) برحسب موقعیت نسبی ترک با مدل ترک باز و نیز مدل ترک باز و بسته شونده ارائه گردیده، می‌توان کمتر بودن فرکانس‌های طبیعی مدل ترک باز را نسبت به مدل ترک باز و بسته شونده مشاهده نمود. همچنین از شکل مشاهده می‌شود که مدل پیشنهادی با دقت بسیار مناسبی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را پیش‌بینی می‌کند و می‌توان از این مدل با دقت مناسبی در غیب‌یابی بر اساس آنالیز ارتعاشی استفاده نمود.



شکل ۷ جملات تصحیح پاسخ حاصل از روش لیندست-پوانکاره برای ترک با موقعیت نسبی $\xi_c = 0.5$ و عمق‌های نسبی $\alpha = 0.3$ (---) ، $\alpha = 0.1$ (.....) و $\alpha = 0.5$ (—)



شکل ۸ نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول برحسب عمق نسبی ترک برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، نتایج تجربی (x) [31]، مدل پیوسته ارائه شده با فرض ترک باز (---) و مدل ترک باز و بسته شونده براساس رابطه (۲۰)، (—)

تصحیح تشکیل شده است. در حقیقت جملات تصحیح اثرات تغییر در سفتی معادل سیستم در هنگام ارتعاش تیر را که ناشی از باز و بسته شدن ترک است، در پاسخ نهایی منظور می‌کند. در این بین، جمله تصحیح مرتبه اول نسبت به جملات مراتب بالاتر تأثیر بیشتری در پاسخ دارد. نتایج نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده با فرض ترک باز و بسته شونده، به شرایط اولیه بستگی دارد.

مقایسه رفتار حاصل از مدل جدید ارائه شده و مدل شن و پی‌یر [15] با نتایج تجربی [31]، نشان می‌دهد که مدل جدید ارائه شده در این مقاله، نسبت به مدل شن و پی‌یر از دقت بالایی برخوردار است. علاوه بر این، نمودارهای مقایسه تغییرات فرکانس پارامترهای ترک در مدل باز و بسته شونده ترک، به کار رفته در این تحقیق، و مدل ترک باز، نشان می‌دهد که کاهش فرکانس‌های طبیعی ناشی از ترک خستگی واقعی که رفتاری باز و بسته شونده دارد کمتر از فرض ترک باز می‌باشد. بنابراین استفاده از مدل ترک باز برای بررسی رفتار ترک خستگی می‌تواند منجر به نتایج نادرستی شود که مهمترین آن پیش‌بینی عمق ترک خستگی کمتر از مقدار واقعی آن است. چنین تخمین نادرستی می‌تواند خطراتی را در پی داشته باشد که در عیب‌یابی ترک، باید این عوامل در نظر گرفته شوند.

مقایسه نتایج حل تحلیلی ارائه شده با نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود تطابق بسیار خوب دو پاسخ را به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای ترک، نشان می‌دهد.

رفتار غیرخطی ترک در نتیجه باز و بسته شدن آن، ترک را به صورت باز مدل کرده و معادلات خطی حاکم را مورد بررسی قرار داده‌اند. در تحقیق حاضر رفتار غیرخطی ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی دارای ترک خستگی با مدل پیوسته ترک مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور، فرضیات مدل شن و پی‌یر [15] اصلاح شد و با در نظر گرفتن اثر ترک به صورت یک اغتشاش پیوسته، فرضیات سینماتیکی جدیدی برای میدان جابجایی و کرنش با فرض رفتار باز و بسته شونده ترک پیشنهاد گردید. برای اعمال اثرات حاصل از باز و بسته شدن ترک در معادلات، از پارامتر کنترلی γ ، که به علامت انحنای منحنی خیز در محل ترک بستگی دارد و معرف وضعیت باز و یا بسته بودن ترک در هنگام ارتعاش می‌باشد استفاده گردید. نتایج نشان می‌دهد که با اعمال مدل جدید ارائه شده در تحقیق حاضر، برخلاف مدل شن و پی‌یر، معادلات دیفرانسیل خودالحاق جدیدی برای تیر اویلر-برنولی ترک‌دار حاصل می‌شود.

برای استخراج شکل موده‌های ارتعاشی، معادله دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش گالرکین حل شده و سپس برای محاسبه قسمت زمانی پاسخ تیر دارای ترک خستگی، مدل جدید سفتی دو خطی ارائه گردید. به کمک این مدل، معادله دیفرانسیل دوخطی حاکم بر مدل تیر ترک‌دار به شکل قابل حل به روش لیندست-پوانکاره نوشته شد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که در تحلیل انجام شده به روش لیندست-پوانکاره پاسخ به دست آمده از مجموع پاسخ سیستم خطی متناظر و مجموعه‌ای از جملات

مراجع

1. Dimarogonas, A. D., "Vibration of cracked structures: A state of the art reviews", *Engineering Fracture Mechanics*, 55(5), pp. 831-857, (1996).
2. Loutridis, S., Doukab, E. and Hadjileontiadis, L.J., "Forced vibration behaviour and crack detection of cracked beams using instantaneous frequency", *NDT&E International*, Vol. 38, pp. 411-419,

- (2005).
3. Haisty, B. S., Spiringer, W. T., "A general beam element for use in damage assessment of complex structure", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. 110, pp. 389-394, (1988).
 4. Friswell, M. I., Penny, J. E. T., and Garvey, S. D., "A combine genetic and eigensensitivity algorithm for the location of damage in structures." *Computers and Structures*, Vol. 69, pp. 547-556, (1988).
 5. Zheng, D.Y. and Kessissoglou, N. J., "Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, pp. 457-475, (2004).
 6. Orhan, S., "Analysis of free and forced vibration of a cracked cantilever beam", *NDT&E International*, Vol. 40, pp. 443-450, (2007).
 7. Kirmser, P. G., "The effect of discontinuities on the natural frequency of beams", *In Proceeding of the American Society of Testing and Materials*, Vol. 44, pp. 897-904, (1944).
 8. Tasi, T. C. and Wang, Y. Z., "Vibration analysis and diagnosis of a cracked shaft", *Journal of Applied Mechanics*, 192(3), pp. 607-620, (1996).
 9. Lin, H. "Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack", *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 427-436, (2004).
 10. Viola, E., Ricci, P., Aliabadi, M. H., "Free vibration analysis of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using the dynamic stiffness method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, pp. 124-153, (2007).
 11. Khaji, N., Shafiei, M., Jalalpour, M., "Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 51, pp. 667-681, (2009).
 12. Alsabbagh, A. S. Y., Abuzeid, O. M., Dado, M. H., "Simplified stress correction factor to study the dynamic behavior of a cracked beam", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, pp. 127-139, (2009).
 13. Christides, S., Barr, A. D. S., "One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams." *International Journal of Mechanical Science*, 26(11/12), pp. 639-648, (1984).
 14. Christides, S., Barr, A. D. S., "Torsional vibration of cracked beams of non-circular cross-section", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 28, pp. 473-490, (1986).
 15. Shen, M.H. H, Pierre, C., "Free vibrations of beams with a single-edge crack", *Journal of sound and vibration*, 170(2), pp. 237-259, (1994).
 16. Shen, M.H. H, Pierre, C., "Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks", *Journal of Sound and Vibration*, 138(1), pp. 115-134, (1990).
 17. Shen, M. H. H, Pierre, C., "On-line structural damage detection", *Structural Systems: Smart Structures, Devices and Systems*, Vol. 14, pp. 271-332, (1998).
 18. Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., "Vibration of a beam with a breathing crack", *Journal of*

- Sound and Vibration*, 239(1), pp.57-67, (2001).
19. Chondros, T.G., Labeas, G.N, "Torsional vibration of a cracked rod by variational formulation and numerical analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, pp. 994–1006, (2007).
 20. Behzad, M., Meghdari, A., Ebrahimi, A., "A new continuous model for flexural vibration analysis of a cracked beam", *Polish Maritime Research*, Vol. 2, pp. 32-39, (2008).
 21. Behzad, M., Meghdari, A., Ebrahimi, A., "A new approach for vibration analysis of a cracked beam", *International Journal of Engineering*, 18(4), pp. 319-330, (2005).
 22. Sergio, H. S., Daniel J. I., "Continuous model for the transverse vibration of cracked timoshenko beams", *Transactions of the ASME*, Vol. 124, pp.310-320, (2002).
 23. Caddemi, S., Paola, M. D., "The Hu–Washizu variational principle for the identification of imperfections in beam", *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 75, pp. 1259–1281, (2008).
 24. Barr, A. D. S., "An extension of the Hu-Washizu variational principle in linear elasticity for dynamic problem", *Transactions of the ASME Applied Mechanics*, 33(2), pp. 480-493, (1966).
 25. Elber, W., "The Significance of fatigue crack closure", *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, pp. 230-242, (1971).
 26. Gudmundson, P., "The dynamic behaviour of slender structures with cross-sectional cracks", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 31, pp.329-345, (1983).
 27. Friswell, M.I. and Penny, J.E.T. "A simple nonlinear model of a cracked beam", *10th International Modal Analysis Conference*, San Diego, California, USA., pp. 516–521, (1992).
 28. Ostachowicz, W. M and Krawczuk, M., "Forced vibrations of a cantilever Timoshenko beam with a closing crack", *In: Proceedings of ISMA 19*, Leuven, Belgium, 3, pp. 1067-78, (1994).
 29. Douka, E. and Hadjileontiadis, L.J., "Time–frequency analysis of the free vibration response of a beam with a breathing crack", *NDT&E International*, Vol. 38, pp. 3–10, (2005).
 30. Shen, M. H. H, Chu, Y. C. "Analysis of forced bilinear oscillators and the application to cracked beam dynamics", *Am Inst Aeronaut Astronaut Journal*, Vol. 30, pp. 2512-2519, (1992).
 31. Han-Ik Yoona, In-Soo Sona and Sung-Jin Ahnb, "Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beam with double cracks", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 21, pp. 476-485, (2007).
 32. Ledonard, F., Lanteigne, J., Lalonde, S. and Turcotte, Y., "Free vibration behaviour of a cracked cantilever beam and crack detection", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(3), pp.529-548, (2001).
 33. Pakdemirli, M., Mehmet, M. and Karahan, F., "A new perturbation solution for systems with strong quadratic and cubic nonlinearities", *Mathematical Method in Applied Science*, Vol. 33, pp.704–712, (2010).
 34. Yildirim, A., "Determination of periodic solutions for nonlinear oscillators with fractional powers by He's modified Lindstedt-Poincare method", *Meccanica*, Vol. 45, pp. 1–6, (2010).