

## محاسبه دامنه و فرکانس نوسانات سیکل محدود ایرفویل با اثر غیرخطی درجه ۳\*

(یادداشت پژوهشی)

بهزاد قدیری<sup>(۱)</sup>مانی رازی<sup>(۲)</sup>

**چکیده** در این مقاله معادلات آیرولاستیک حاکم بر ایرفویل دو درجه آزادی با اثر غیرخطی درجه ۳ در جریان تراکم ناپذیر در دو حوزه فرکانس و زمان، ارائه شده‌اند. از دو روش تحلیل عددی و بالانس هارمونیک برای حل معادلات حاکم در حوزه زمان جهت یافتن دامنه و فرکانس نوسانات سیکل محدود استفاده شده است. همچنین روش تابع توصیف برای پیش بینی فرکانس و دامنه نوسانات سیکل محدود در حوزه فرکانس اصلاح و ارائه گردیده است. دامنه و فرکانس نوسانات سیکل محدود با سه روش بالانس هارمونیک و تابع توصیف و روش عددی برای دو حالت مختلف به دست آمده‌اند. مقایسه نتایج، حاکی از تطابق بسیار خوبی بین نتایج حاصل از این روش‌ها می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی** نوسانات سیکل محدود، اثر غیرخطی درجه ۳، روش بالانس هارمونیک، روش تابع توصیف

## Calculation of Limit Cycle Oscillation Amplitude and Frequency of Airfoils Containing Cubic Nonlinearity

B. Ghadiri

M. Razi

**Abstract** In this paper governing aeroelastic equations of the two degree of freedom airfoil containing cubic nonlinearity in an incompressible flow are presented in the both time and frequency domains. Numerical solution and harmonic balance methods are applied for the solution of governing aeroelastic equations in the time domain to obtain amplitude and frequency of limit cycle oscillations (LCO). Also, describing function method is modified and presented for the prediction of the LCO amplitude and frequency in the frequency domain. LCO frequency and amplitude are obtained via applying three methods as harmonic balance, describing function and numerical solution methods for two different cases. Comparison between the results of these three methods shows a very good agreement.

**Key Words** Limit Cycle Oscillations, Cubic Nonlinearity, Harmonic Balance Method, Describing Function Method

\* نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۸۵/۲/۵، نسخه پذیرش آن در تاریخ ۹۰/۱/۱۸ و نسخه آماده چاپ آن در تاریخ ۹۰/۵/۳ به دفتر نشریه رسیده‌است.

(۱) نویسنده‌ی مسئول: استادیار، بخش مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد، بخش مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

## مقدمه

دانش آیروالاستیسیته (Aeroelasticity) به عنوان فصل مشترک علوم آیرودینامیک (Aerodynamics)، الاستیسیته (Elasticity) و دینامیک تعریف می‌گردد. تئوری‌های کلاسیک در آیروالاستیسیته بر پایه آیرودینامیک و الاستیسیته خطی، برای دهه‌های متمادی توفیق خود را در پیش بینی مرزهای ناپایداری فلاتر (Flutter) و تحلیل پاسخ دینامیکی هواپیما به گاست (Gust)، توربولانس و تحریک خارجی نشان داده‌اند. اثرات غیرخطی آیرودینامیکی معمولاً ناشی از حضور جسم در رژیم جریان ترانسونیک (Transonic) و یا زاویای حمله بالا که در آنها جدایش رخ می‌دهد، می‌باشند. اثرات غیرخطی سازه‌ای را می‌توان به دو صورت پیوسته و متمرکز طبقه‌بندی کرد. به طور کلی تغییر مکان‌های الاستودینامیک (Elastodynamic) که برکل سازه تأثیر می‌گذارند، بر اثرات غیرخطی پیوسته سازه‌ای حاکم می‌باشند. اثرات غیرخطی متمرکز سازه‌ای عمدتاً ناشی از فرسودگی مفاصل، لقی اتصالات کنترل و رفتار مواد می‌باشند. مرور جامعی بر روی این موضوع در مرجع [1] ارائه گردیده است.

در این مقاله اثر غیرخطی درجه ۳ سخت شونده (Hardening cubic nonlinearity) به عنوان یک اثر غیرخطی سازه‌ای متمرکز مورد بررسی قرار می‌گیرد. این اثر غیرخطی ابتدا به وسیله ولستن (Woolsten) [2] و شن (Shen) [3] در اواخر دهه ۱۹۵۰، مورد بررسی قرار گرفت. آنها نشان دادند که با افزایش سرعت جریان بالاتر از سرعت فلاتر خطی، پدیده نوسانات سیکل محدود (Limit Cycle Oscillations) (LCO) مشاهده می‌گردد. در ادامه، لی (Lee) پاسخ دینامیکی ایرفویل دو درجه آزادی، دارای اثر غیرخطی درجه ۳ را به صورت عددی به دست آورد [4,5]. پرایس (Price) و "لی" روش تابع توصیف را برای یافتن دامنه نوسانات سیکل محدود ایرفویل دو درجه

آزادی با اثر غیرخطی درجه ۳، در درجه آزادی پیچش ارائه کردند [6]. این روش، قادر به پیش بینی فرکانس نوسانات سیکل محدود نبود. لی در سال ۲۰۰۰ روش تحلیلی منیفولد مرکزی را برای یافتن فرکانس نوسانات سیکل محدود به کار گرفت [7]. اخیراً لی از روش بالانس هارمونیک برای یافتن فرکانس و دامنه نوسانات سیکل محدود استفاده کرده است [8].

در این مقاله روش تابع توصیف ارائه شده به وسیله "پرایس و لی" برای یافتن فرکانس و دامنه نوسانات سیکل محدود ایرفویل با دو درجه آزادی، اصلاح گردیده است. نتایج حاصله با روش عددی و همچنین روش بالانس هارمونیک و نتایج مرجع [7] مقایسه می‌گردد.

## معادلات حاکم در حوزه زمان

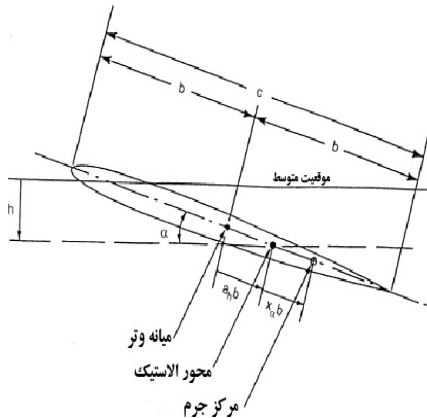
لی با در نظر گرفتن  $\alpha$  و  $h$  به ترتیب به عنوان تغییر مکان پیچش و تغییر مکان خمش، معادلات حرکت را برای ارتعاشات آزاد ایرفویل با دو درجه آزادی پیچش و خمش به صورت زیر ارائه کرد:

$$m\ddot{h} + mbx_{\alpha}\ddot{\alpha} + C_h\dot{h} + K_h h = -L \quad (1)$$

$$mbx_{\alpha}\ddot{h} + I_{\alpha}\ddot{\alpha} + C_{\alpha}\dot{\alpha} + K_{\alpha}\alpha = M_{E.A} \quad (2)$$

همان‌گونه که در شکل (۱) مشاهده می‌شود:  $x_{\alpha}$  فاصله بدون بعد بین مرکز ثقل و محور الاستیک،  $a_h$  فاصله بدون بعد محور الاستیک تا وسط وتر (Chord) و  $b$ ، نصف طول وتر می‌باشند. معادلات (۱ و ۲) را می‌توان با متغیرهای بدون بعد به این صورت بازنویسی کرد:

$$\xi'' + x_{\alpha}\alpha'' + 2c_{\xi}\frac{\bar{\omega}}{U^*}\xi' + \left(\frac{\bar{\omega}}{U^*}\right)^2 G(\xi) = -\frac{1}{\pi\mu}C_L(\tau), \quad (3)$$



شکل ۱ نمای حرکت دو درجه آزادی ایرفویل

فانگ (Fung) برای جریان پتانسیل تراکم ناپذیر با صرف نظر کردن از ضخامت ایرفویل، ضریب نیروی برآ (Lift) و ضریب ممان آیرودینامیکی حول محور الاستیک را در حوزه زمان به صورت معادلات (۸ و ۹) ارائه کرده است [9].

$$C_L(\tau) = \pi(\xi'' - a_h \alpha'' + \alpha') + 2\pi\alpha(0)\phi(\tau) + 2\pi\xi'(0)\phi(\tau) + 2\pi\left[\frac{1}{2} - a_h\right]\alpha'(0)\phi(\tau) + 2\pi\int_0^\tau \phi(\tau - \sigma) \left[\alpha'(\sigma) + \xi''(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\alpha''(\sigma)\right]d\sigma \quad (۸)$$

$$C_M(\tau) = \pi\left(\frac{1}{2} + a_h\right)\phi(\tau)[\alpha(0) + \xi(0)] + \left[\frac{1}{2} - a_h\right]\alpha'(0) + \pi\left(\frac{1}{2} + a_h\right)\int_0^\tau \phi(\tau - \sigma)[\alpha'(\sigma) + \xi''(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\alpha''(\sigma)]d\sigma + \frac{\pi}{2}a_h(\xi'' - a_h \alpha'') - \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\frac{\pi}{2}\alpha' - \frac{\pi}{16}\alpha'' \quad (۹)$$

در اینجا  $\phi(\tau)$  تابع واگنر می‌باشد و به صورت زیر تقریب زده می‌شود [9]:

$$\phi(\tau) = 1 - \psi_1 e^{-\varepsilon_1 \tau} - \psi_2 e^{-\varepsilon_2 \tau} \quad (۱۰)$$

که  $\varepsilon_1 = 0.0455$ ،  $\psi_2 = 0.335$ ،  $\psi_1 = 0.165$  و  $\varepsilon_2 = 0.3$  می‌باشند. با قرار دادن معادلات (۸ و ۹) در

$$\frac{x_\alpha}{r_\alpha} \xi'' + \alpha'' + 2\frac{c_\alpha}{U^*} \alpha' + \left(\frac{1}{U^*}\right)^2 M(\alpha) = \frac{2}{\pi\mu \times I_\alpha^2} C_M(\tau) \quad (۴)$$

در اینجا  $\xi$  خمش بدون بعد ( $h/b =$ )،  $\omega_\xi$  فرکانس طبیعی خمش ( $= \sqrt{K_\xi/m}$ )،  $\omega_\alpha$  فرکانس طبیعی پیچش ( $= \sqrt{K_\alpha/I_\alpha}$ )،  $U^*$  سرعت بدون بعد ( $= U/(b\omega_\alpha)$ )، شعاع ژیراسیون حول محور الاستیک ( $= \sqrt{I_\alpha/(mb^2)}$ )،  $\xi$  نسبت استهلاک لزوج خمشی ( $= C_h/(2\sqrt{mK_\xi})$ )،  $c_\alpha$  نسبت استهلاک لزوج پیچشی ( $= C_\alpha/(2\sqrt{I_\alpha K_\alpha})$ )،  $\mu$  نسبت جرم ایرفویل به هوا ( $= m/(\pi\rho b^2)$ )،  $\bar{\omega}$  نسبت فرکانس طبیعی خمشی به پیچشی می‌باشند. در معادلات (۴ و ۳) علامت پریم (prime) نشانگر مشتق نسبت به زمان بدون بعد  $\tau$  است که به صورت

$$\tau = \frac{U \cdot t}{b} \quad (۵)$$

تعریف می‌شود. همچنین  $m$ ،  $C_h$ ،  $I_\alpha$ ،  $C_\alpha$ ،  $K_\alpha$ ،  $\rho$ ،  $U$  و  $K_\xi$  به ترتیب نشانگر جرم ایرفویل، ضریب میرایی خمشی، ممان اینرسی جرمی ایرفویل حول محور الاستیک، ضریب میرایی پیچشی، سختی خطی پیچشی، چگالی هوا، سرعت جریان آزاد هوا و سختی خطی خمشی می‌باشند.  $G(\xi)$  و  $M(\alpha)$  عبارات سختی می‌باشند، که اثرات غیر خطی سازه‌ای را در بر می‌گیرند و برای ایرفویل با اثر غیرخطی درجه ۳، عبارات غیرخطی  $G(\xi)$  و  $M(\alpha)$  به این صورت تعریف می‌گردند:

$$G(\xi) = \beta_\xi \xi + \beta_{\xi^3} \xi^3 \quad (۶)$$

$$M(\alpha) = \beta_\alpha \alpha + \beta_{\alpha^3} \alpha^3 \quad (۷)$$

$$L = \pi \rho b^2 \left[ \dot{h} + U \dot{\alpha} - b a_h \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho U b C(k) \left[ \dot{h} + U \alpha + b \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha} \right] \quad (17)$$

$$M_{E.A} = \pi \rho b^2 \left[ b a_h \ddot{h} - U b \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a_h^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho b^3 U \left( a_h + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[ \dot{h} + U \alpha \right] + 2\pi \rho b^3 U \left( a_h + \frac{1}{2} \right) C(k) \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha} \quad (18)$$

$C(k)$  تابع تئودرسن (Theodorsen) و  $k$  فرکانس

بدون بعد یا فرکانس کاهش یافته گردابه‌های تولید شده در ایرفویل، بر اساس نظریه کلویین (Kelvin) می باشد که در این مقاله از تقریب ارائه شده در مرجع [9] برای تابع تئودرسن استفاده شده است.

$$C(k) = \begin{cases} 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.0455}{k}} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.3}{k}} & k < 0.5 \\ 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.041}{k}} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.32}{k}} & k \geq 0.5 \end{cases} \quad (19)$$

با استفاده از متغیرهای بدون بعد معرفی شده و معادلات (۱۷ و ۱۸) می توان ضرایب نیروی برآ و ممان آیرودینامیکی را حول محور الاستیک به این شکل نوشت:

$$C_L = \pi (\xi'' + \alpha' - a_h \alpha'') + 2\pi C(k) \left[ \xi' + \alpha + \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \alpha' \right] \quad (20)$$

$$C_M = \frac{\pi}{2} \left[ a_h \xi'' - \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \alpha' - \left( \frac{1}{8} + a_h^2 \right) \alpha'' \right] + \frac{\pi}{2} (2a_h + 1) C(k) \left[ \xi' + \alpha + \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \alpha' \right] \quad (21)$$

معادلات (۳ و ۴) و استفاده از تکنیک انتگرال گیری جزء به جزء و معرفی متغیرهای جدید، معادلات حاکم بر سیستم در حوزه زمان به صورت زیر به دست می آید:

$$c_0 \xi'' + c_1 \alpha'' + c_2 \xi' + c_3 \alpha' + c_4 \xi + c_5 \alpha + c_6 w_1 + c_7 w_2 + c_8 w_3 + c_9 w_4 + \left( \frac{\bar{\omega}}{U^*} \right)^2 G(\xi) = f(\tau) \quad (11)$$

$$d_0 \xi'' + d_1 \alpha'' + d_2 \alpha' + d_3 \alpha + d_4 \xi' + d_5 \xi + d_6 w_1 + d_7 w_2 + d_8 w_3 + d_9 w_4 + \left( \frac{1}{U^*} \right)^2 M(\alpha) = g(\tau) \quad (12)$$

که در اینجا متغیرهای  $w_1$  تا  $w_4$  به صورت معادلات (۱۳ تا ۱۶) تعریف می شوند.

$$w_1 = \int_0^\tau e^{-\varepsilon_1(\tau-\sigma)} \alpha(\sigma) d\sigma \quad (13)$$

$$w_2 = \int_0^\tau e^{-\varepsilon_2(\tau-\sigma)} \alpha(\sigma) d\sigma \quad (14)$$

$$w_3 = \int_0^\tau e^{-\varepsilon_1(\tau-\sigma)} \xi(\sigma) d\sigma \quad (15)$$

$$w_4 = \int_0^\tau e^{-\varepsilon_2(\tau-\sigma)} \xi(\sigma) d\sigma \quad (16)$$

ضرایب  $c_0$  تا  $c_9$ ،  $d_0$  تا  $d_9$  و عبارات  $f(\tau)$  و  $g(\tau)$  که وابسته به زمان و شرایط اولیه می باشند، در بخش پیوست (الف) ارائه شده اند.

### معادلات حاکم در حوزه فرکانس

تئودرسن [10] نیروی برآ و ممان آیرودینامیکی حول محور الاستیک را برای نوسانات ایرفویل با دو درجه آزادی در پیچش و خمش در جریان پتانسیل و تراکم ناپذیر و غیردائم، صرف نظر از ضخامت ایرفویل و هارمونیک، و با در نظر گرفتن نوسانات، به صورت زیر به دست آورد:

به آغاز عملیات روش رونگ - کوتا، مرتبه ۴، خواهیم بود.

### روش بالانس هارمونیک

روش بالانس هارمونیک، یکی از روش های متداول برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی است. در این مقاله از این روش برای به دست آوردن دامنه و فرکانس نوسانات سیکل محدود استفاده شده است. مطابق ویژگی های نوسانات سیکل محدود، پس از برطرف شدن اثرات گذرا یا اثر شرایط اولیه، دامنه و فرکانس نوسانات سیکل محدود، نسبت به زمان، ثابت می باشند. بنابراین می توان از این ویژگی برای حل معادلات حاکم استفاده کرد. در این روش ما حرکت ایرفویل را با بسط سینوسی و کسینوسی تقریب می زنیم:

$$\alpha(\tau) = a_1 \sin(\omega\tau) + \sum_{i=3,5,7,9,\dots} a_i \sin(i\omega\tau) + b_i \cos(i\omega\tau) \quad (27)$$

$$\xi(\tau) = \sum_{j=1,3,5,9,\dots} e_j \sin(j\omega\tau) + f_j \cos(j\omega\tau) \quad (28)$$

در معادلات (۲۷) و (۲۸) مطابق ویژگی نوسانات سیکل محدود، ضرایب  $a_i$ ،  $b_i$ ،  $e_j$  و  $f_j$  و همچنین فرکانس نوسانات سیکل محدود  $\omega$  نسبت به زمان، ثابت می باشند. با جایگذاری معادلات (۲۷ و ۲۸) در معادلات حاکم بر سیستم در حوزه زمان یا همان معادلات (۱۱ و ۱۲) و صرف نظر کردن از شرایط اولیه و همچنین با فاکتورگیری از جملات با نسبت های مثلثاتی مشابه به یک دستگاه معادلات غیرخطی جبری می رسمیم که مجهولات آن ضرایب نسبت های مثلثاتی معادلات (۲۷ و ۲۸) به علاوه  $\omega$  می باشند. مقدار بیشینه شمارنده های  $i$  و  $j$  مساوی می باشند و برابر مرتبه

در نهایت با استفاده از معادلات (۲۱ و ۲۰) در معادلات (۳ و ۴)، معادلات حاکم بر یک ایرفویل دو درجه آزادی در حوزه فرکانس به دست می آید:

$$m_6 \xi'' + m_3 G(\xi) + m_5 \alpha'' + m_4 \xi' + m_2 \alpha' + m_1 \alpha = 0 \quad (22)$$

$$n_6 \xi'' + n_3 M(\alpha) + n_5 \alpha'' - n_4 \xi' + n_2 \alpha' - n_1 \alpha = 0 \quad (23)$$

ضرایب  $m_1$  تا  $m_6$ ،  $n_1$  تا  $n_6$  در قسمت پیوست (ب) مقاله آورده شده اند.

### حل عددی

دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم در حوزه زمان که به صورت معادلات (۱۲ و ۱۱) ارائه گردیده است را می توان به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول نوشت [1]:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \tau) \quad (24)$$

که در آن:

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T = [\alpha \ \alpha' \ \xi \ \xi' \ w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4]^T \quad (25)$$

برای حل عددی معادله (۲۴) از روش استاندارد رونگ - کوتا (Runge - Kutta) مرتبه ۴، استفاده شده است. برای حل عددی با این روش، نیاز به دانستن شرایط اولیه داریم. از معادلات (۱۳ تا ۱۶) به راحتی می توان نتیجه گرفت که:

$$\tau = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0 \quad (26)$$

با دانستن  $\alpha(0)$ ،  $\alpha'(0)$ ،  $\xi(0)$ ،  $\xi'(0)$  که به ترتیب مقادیر تغییر مکان و سرعت پيچش (Pitch)، تغییر مکان و سرعت خمش (Plunge) اولیه می باشند، قادر

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M(\alpha) d(\omega\tau) \quad (33)$$

$$= B \left[ \beta_{\xi} + \beta_{\xi^3} \left( B^2 + \frac{3}{2} A^2 \right) \right]$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M(\alpha) \cos(\omega\tau) d(\omega\tau) = 0 \quad (34)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M(\alpha) \sin(\omega\tau) d(\omega\tau) \quad (35)$$

$$= A \left[ \beta_{\xi} + 3\beta_{\xi^3} B^2 + \frac{3}{4} \beta_{\xi^3} A^2 \right]$$

با انجام روندی مشابه روند فوق، می توان ضرایب  $a_0'$ ،  $a_1'$  و  $b_1'$  را هم به دست می آورد. از آنجا که هیچ نیرو یا ممان ثابت خارجی، آیرودینامیکی و ... بر ایرفویل وارد نمی شود، در نتیجه هیچ مؤلفه پایایی (Steady) برای  $G(\xi)$  و  $M(\alpha)$  وجود ندارد، بنابراین  $a_0'$  و  $a_1'$  برابر صفر می باشند که برای  $M(\alpha)$  مطابق معادله (۳۰) منجر به جواب بدیهی  $B=0$  می شود. با استفاده از این نتیجه در معادله (۳۵)، سختی خطی معادل پیچشی برای ایرفویل با سختی غیرخطی در درجه آزادی پیچش به دست می آید:

$$M(\alpha) \approx \frac{b_1}{A} \alpha \quad (36)$$

به همین ترتیب می توان سختی خطی معادل را برای سختی غیرخطی در درجه آزادی خمش به صورت معادله (۳۷) به دست آورد.

$$G(\xi) \approx \frac{b_1'}{D} \xi \quad (37)$$

با قرار دادن عبارات خطی معادل به جای عبارات غیرخطی، در معادلات (۲۲ و ۲۳) که معادلات حاکم بر سیستم در حوزه فرکانس می باشند، دستگاه معادلات خطی معادل با دستگاه معادلات غیرخطی حاکم به دست می آید؛ در نتیجه قادر به استفاده از روش P-k

روش بالانس هارمونیک در نظر گرفته می شود. تعداد معادلات برای مرتبه اول این روش برابر ۴ است و برای هر بار افزایش مرتبه، ۴ مجهول و در نتیجه ۴ معادله به تعداد معادلات افزوده خواهد شد و دستگاه معادلات حاصل پیچیده تر خواهد شد. با حل دستگاه معادلات غیرخطی جبری حاصل به راحتی می توان دامنه و فرکانس نوسانات سیکل محدود را به دست آورد.

### روش تابع توصیف

روش تابع توصیف، روشی است برای به دست آوردن سیستم خطی معادل تا روش های کلاسیک و متداول آیرولاستیسیته خطی در حالت غیرخطی نیز قابل استفاده گردد. اگر تغییر مکان پیچش و خمش به صورت

$$\alpha = B + A \sin(\omega\tau) \quad (29)$$

$$\xi = C + D \sin(\omega\tau) \quad (30)$$

توصیف کردند، می توان با توجه به ویژگی نوسانات سیکل محدود که به صورت هارمونیک و متناوب می باشند، از آنالیز فوریه برای یافتن توابع سختی خطی معادل با توابع سختی غیرخطی  $G(\xi)$  و  $M(\alpha)$  استفاده کرد. برای ایرفویل با سختی غیرخطی درجه ۳ با در نظر گرفتن معادلات (۲۹ و ۳۰) و استفاده از جملات ابتدایی سری فوریه داریم:

$$M \cong a_0 + a_1 \cos(\omega\tau) + b_1 \sin(\omega\tau) \quad (31)$$

$$G \cong a_0' + a_1' \cos(\omega\tau) + b_1' \sin(\omega\tau) \quad (32)$$

که در اینجا  $a_0$ ،  $a_1$ ،  $b_1$ ،  $a_0'$ ،  $a_1'$  و  $b_1'$  ضرایب سری فوریه می باشند. ضرایب معادله (۳۱) با استفاده از معادله (۷) برای سختی غیرخطی درجه ۳ به صورت زیر به دست می آیند:

روش تابع توصیف سرعت حاصل، سرعت مورد نیاز برای ایجاد نوسانات سیکل محدود در ایرفویل با دامنه های پیچش و خمش  $A$  و  $D$  می باشد. با قرار دادن معادلات (۳۸) و (۳۹) در معادله (۲۳) و با فرض  $\alpha_0 = A$  و  $\xi_0 = D$  داریم:

$$D = \left| \frac{n_1 - n_3 \frac{b_1}{A} - \lambda^2 n_5 - \lambda n_2}{\lambda^2 n_6 - \lambda n_4} \right| A \quad (41)$$

در حالتی که ایرفویل دارای سختی غیرخطی درجه ۳ فقط در یک درجه آزادی به طور مثال در درجه آزادی پیچش ( $\beta_{\xi_3} = 0$ ) است، با استفاده از معادله (۳۶) سختی خطی معادل را به دست آورده و سپس با استفاده از روش P-k سرعت مورد نیاز به منظور نوسان ایرفویل با دامنه پیچش سیکل محدود  $A$  را محاسبه می کنیم. فرکانس و دامنه نوسانات سیکل محدود در درجه آزادی خمش، به طور مستقیم از روابط (۴۰ و ۴۱) به دست می آید.

اما در حالتی که ایرفویل دارای اثر غیرخطی درجه ۳، در هر دو درجه آزادی باشد، برای یافتن دامنه و فرکانس نوسانات سیکل محدود، نیاز به یک روش تکرار داریم. برای مقدار دلخواه  $A$ ،  $D$  را حدس زده، سختی های خطی معادل در پیچش و خمش را از روابط (۳۶ و ۳۷) به دست آورده و با استفاده از روش توضیح داده شده فوق، از رابطه (۴۱)،  $D$  جدید را به دست می آوریم. در صورتی که اختلاف مقدار به دست آمده برای  $D$  با مقدار حدس زده شده بیشتر از مقدار مورد نظر ما باشد، مقدار به دست آمده را جایگزین حدس اولیه برای  $D$  کرده و عملیات را دوباره تکرار می کنیم. عملیات تا زمانی ادامه می یابد که این اختلاف ناچیز باشد و حل (روش تکرار) همگرا شود.

برای یافتن سرعت متناسب با دامنه دلخواه نوسانات سیکل محدود ایرفویل با سختی غیرخطی درجه ۳ خواهیم بود. در روش P-k که روشی متداول در بحث خطی آیروالاستیسیته می باشد، با فرض هارمونیک بودن نوسانات برای اعمال تحلیل مقادیر ویژه، داریم:

$$\xi = \xi_0 e^{\lambda \tau} \quad (38)$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{\lambda \tau} \quad (39)$$

که در اینجا  $\xi_0$  و  $\alpha_0$  دامنه نوسانات می باشند. با قرار دادن معادلات (۳۸، ۳۹) در دستگاه خطی معادل به دست آمده، به یک دستگاه معادلات خطی جبری بر حسب  $\xi_0$  و  $\alpha_0$  می رسیم که با صفر قرار دادن درمینان ماتریس ضرایب، به معادله ای درجه ۴ می رسیم. این معادله همان معادله مشخصه دستگاه معادلات خطی معادل می باشد که در آن  $\lambda$  ریشه معادله مشخصه می باشد.  $\lambda$  مقداری است مختلط و همان مقدار ویژه دستگاه معادلات خطی معادل دستگاه معادلات غیرخطی (۲۳ و ۲۲) می باشد. قسمت موهومی آن، فرکانس بدون بعد نوسانات گردابه های تولید شده در امتداد ایرفویل می باشد که در سرعت های بالاتر از سرعت فلاتر خطی برابر با فرکانس بدون بعد نوسانات سیکل محدود فرض می شود.

$$\text{Im}(\lambda) = k = \omega_{LCO} \quad (40)$$

با آغاز عملیات از یک سرعت جریان پایین و با استفاده از یک روش تکرار برای سرعت های مختلف می توان  $\lambda$  را تعیین کرد. برای یافتن سرعت فلاتر خطی، در صورتی که قسمت حقیقی  $\lambda$  مثبت باشد در سرعت متناظر با آن ناپایداری فلاتر رخ می دهد. اما در

### بحث و نتیجه گیری

در این مقاله نوسانات سیکل محدود ایرفویل دارای سختی غیرخطی درجه ۳ با این مشخصات مورد بررسی قرار گرفته است:

$$a_h = -0.5, \mu = 100.0, \zeta_\xi = \zeta_\alpha = 0, x_\alpha = 0.25, \\ r_\alpha = 0.5, \bar{\omega} = 0.2$$

ضرایب توابع سختی غیرخطی درجه ۳ در دو حالت مطابق جدول (۱) مورد بررسی قرار گرفته است. نمودار های رسم شده شامل: نمودار دامنه و فرکانس بی بعد نوسانات سیکل محدود در مقابل نسبت سرعت بدون بعد جریان به سرعت بدون بعد فلاتر خطی و همچنین پاسخ دینامیکی ایرفویل در برابر زمان بدون بعد می باشد. مطابق مرجع [7] نتایج حاصله برای دامنه نوسانات سیکل محدود، برحسب درجه ارائه گردیده اند.

جدول ۱ حالت های مورد بررسی

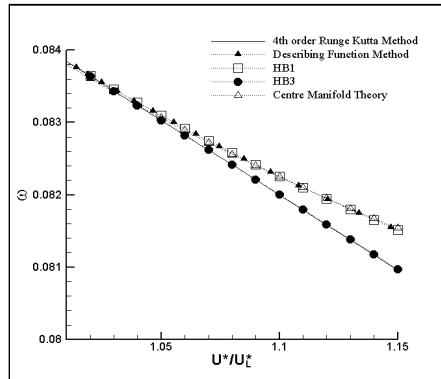
حالت مورد بررسی	$\beta_{\xi^3}$	$\beta_\xi$	$\beta_{\alpha^3}$	$\beta_\alpha$
۱	۰	۱	۳	۱
۲	۰/۱	۱	۴۰	۱

برای محاسبه سرعت فلاتر خطی، با برابر صفر قرار دادن ضرایب غیرخطی ( $\beta_{\alpha^3}$  ,  $\beta_{\xi^3}$ ) و با استفاده از روش P-k، سرعت بدون بعد فلاتر خطی  $U_L^*$  به دست می آید. با توجه به اطلاعات داده شده و یکسان بودن ضرایب خطی در دو حالت مورد بررسی  $U_L^*$  را در هر دو حالت برابر  $6/28510$  به دست می آوریم. مطابق با جدول (۱)، دو ایرفویل با توابع سختی غیرخطی درجه ۳ مختلف را مورد بررسی قرار دادیم. در حالت اول، ایرفویل دارای سختی غیرخطی درجه ۳ در درجه آزادی پیچش می باشد. اما در حالت دوم، ایرفویل دارای سختی غیرخطی درجه ۳ هم در

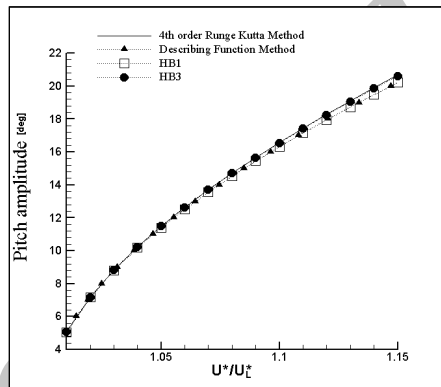
درجه آزادی پیچش و هم در درجه آزادی خمش می باشد. در شکل های (۲ تا ۷) دامنه و فرکانس نوسانات سیکل محدود را در مقابل نسبت سرعت بدون بعد جریان به سرعت بدون بعد فلاتر خطی برای هر دو حالت مذکور رسم گردیده اند. در اینجا از روش های تابع توصیف، بالانس هارمونیک مرتبه اول و سوم (HB3 ، HB1) و روش عددی دقیق رونگ - کوتا، مرتبه ۴ استفاده گردیده است. با مقایسه نتایج به دست آمده می توان دریافت که در تمامی موارد دقت روش تابع توصیف، همانند دقت روش بالانس هارمونیک مرتبه اول می باشد، زیرا هر دو بر پایه جملات ابتدایی بسط نسبت های مثلثاتی سینوسی و کسینوسی (سری فوریه) می باشند. هرچند که یکی در حوزه فرکانس و دیگری در حوزه زمان اعمال گردیده اند. این نتیجه خود به وضوح بیانگر تطابق مناسب بین نتایج به دست آمده در حوزه فرکانس و زمان می باشد. همچنین دقت فرکانس نوسانات سیکل محدود به دست آمده از دو روش فوق با دقت نتایج روش منیفولد مرکزی ارائه شده در مرجع [7] برابر است. این در حالی است که روش بالانس هارمونیک مرتبه ۳، نتایج دقیق تری را نسبت به سه روش فوق ارائه می کند و در محدوده سرعت های بدون بعد مورد بررسی دقتی معادل روش عددی دقیق رونگ کوتا مرتبه ۴ را دارا می باشد. اثر شرایط اولیه بر نوسانات سیکل محدود در شکل های (۸ و ۹) مورد بررسی قرار گرفته است. همان گونه که ملاحظه می گردد، تغییر در زاویه پیچش اولیه تأثیری بر دامنه نوسانات سیکل محدود ندارد. همچنین مطابق با محاسبات انجام شده با روش عددی رونگ - کوتا مرتبه ۴، فرکانس نوسانات سیکل محدود مستقل از شرایط اولیه می باشد. در نتیجه



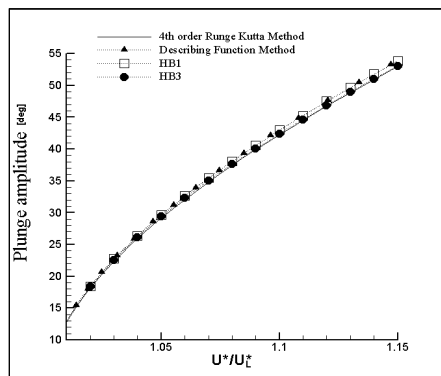
دامنه و فرکانس نوسانات سیکل محدود مستقل از شرایط اولیه و اثرات گذرا می‌باشد. همین ویژگی است که استفاده از روش های بالانس هارمونیک و تابع توصیف را امکان پذیر می‌سازد.



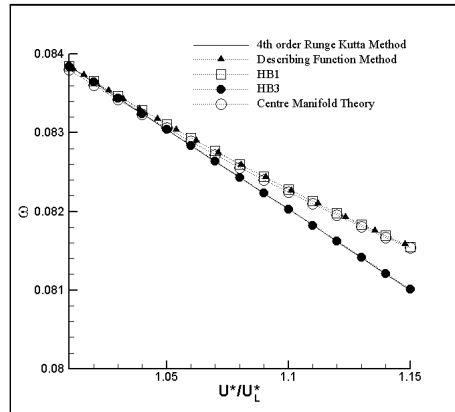
شکل ۲ مقایسه نتایج به دست آمده از روش های مختلف برای فرکانس بی بعد نوسانات سیکل محدود (LCO) در حالت ۱



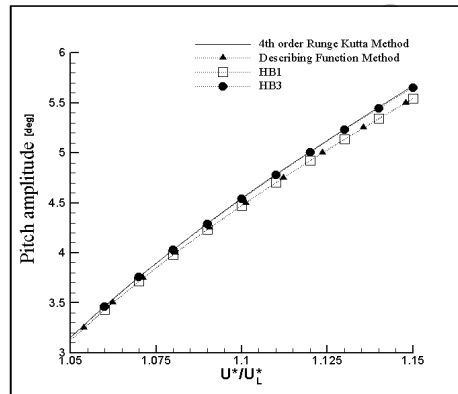
شکل ۳ مقایسه نتایج به دست آمده از روش های مختلف برای دامنه پیش نوسانات سیکل محدود (LCO) در حالت ۱



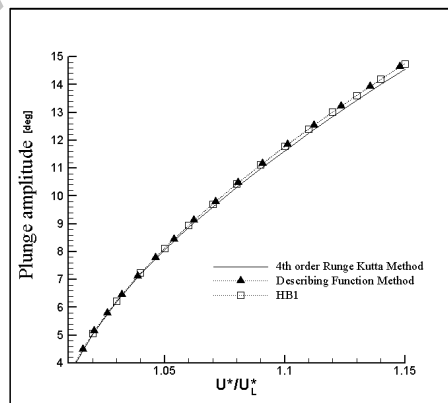
شکل ۴ مقایسه نتایج به دست آمده از روش های مختلف برای دامنه خمش نوسانات سیکل محدود (LCO) در حالت ۱



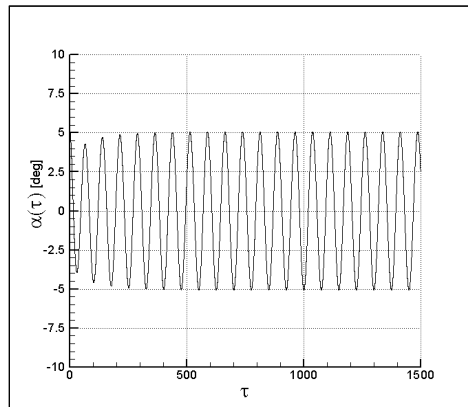
شکل ۵ مقایسه نتایج به دست آمده از روش های مختلف برای فرکانس بی بعد نوسانات سیکل محدود (LCO) در حالت ۲



شکل ۶ مقایسه نتایج به دست آمده از روش های مختلف برای دامنه پیچش نوسانات سیکل محدود (LCO) در حالت ۲

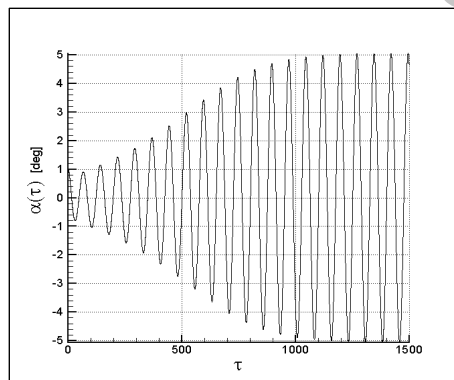


شکل ۷ مقایسه نتایج به دست آمده از روش های مختلف برای دامنه خمش نوسانات سیکل محدود (LCO) در حالت ۲



شکل ۸ نوسانات سیکل محدود ایرفویل در درجه آزادی پیچش در حالت ۱،

$$\alpha(0) = 1^\circ, \alpha'(0) = \xi(0) = \xi'(0) = 0 \text{ و } U^* = 1.01U_L^*$$



شکل ۹ نوسانات سیکل محدود ایرفویل در درجه آزادی پیچش در حالت ۱،

$$\alpha(0) = 5^\circ, \alpha'(0) = \xi(0) = \xi'(0) = 0 \text{ و } U^* = 1.01U_L^*$$

		<b>فهرست نشانه‌ها</b>		
تغییر مکان خمش	$h$	فاصله بدون بعد محور الاستیک تا وسط وتر ایرفویل	$a_h$	
ممان اینرسی جرمی ایرفویل حول محور الاستیک	$I_\alpha$	طول نصف وتر ایرفویل	$b$	
فرکانس کاهش یافته	$k$	طول وتر ایرفویل	$C$	
نیروی لیفت	$L$	ضرایب میرایی ایرفویل در درجات آزادی پیچش و خمش	$C_h, C_\alpha$	
نوسانات سیکل محدود	LCO	ضریب نیروی لیفت ایرفویل	$C_L$	
جرم بر واحد طول ایرفویل	$m$	تابع تنودرسن	$C(k)$	
سختی غیرخطی در درجه آزادی پیچش	$M(\alpha)$	ضریب ممان آیرودینامیکی ایرفویل حول محور الاستیک	$C_M$	
ممان آیرودینامیکی حول محور الاستیک	$M_{E.A}$	سختی غیرخطی در درجه آزادی خمش	$G(\xi)$	
شعاع ژیراسیون حول محور الاستیک	$r_\alpha$			
زمان	$t$			
سرعت جریان	$U$			
سرعت بدون بعد	$U^*$			

سبب جرمی ایرفویل به هوا	$\mu$	سرعت فلاتر خطی	$U_L^*$
چگالی هوا	$P$	فاصله بدون بعد محور الاستیک تا مرکز ثقل	$x_\alpha$
زمان بدون بعد	$\tau$	ایرفویل	
فرکانس، فرکانس نوسانات سیکل محدود	$\omega$	زاویه پیش	$\alpha$
فرکانس طبیعی کول نشده ایرفویل در درجات آزادی پیش و خمش	$\omega_\xi, \omega_\alpha$	ضرایب سختی غیرخطی Cubic در درجه آزادی پیش	$\beta_\alpha, \beta_{\alpha^3}$
نسبت فرکانس	$\bar{\omega}$	ضرایب سختی غیرخطی Cubic در درجه آزادی خمش	$\beta_\xi, \beta_{\xi^3}$
تغییر مکان خمش بدون بعد	$\xi$	ثوابت تابع واگنر	$\varepsilon_1, \varepsilon_2$
ثوابت تابع واگنر	$\Psi_1, \Psi_2$	تابع واگنر	$\phi(\tau)$
نسبت میرایی در پیش و خمش	$\zeta_\xi, \zeta_\alpha$	مقدار ویژه	$\lambda$

## مراجع

1. Lee, B.H.K. Price, S.J., and Wong, Y.C., "Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos", *Progress in Aerospace Sciences*, 35, pp. 205-334, (1999).
2. Woolsten, D.S., Runyan, H.L., and Andrews, R.E., "An investigation of effects of certain types of structural nonlinearities on wing and control surface flutter", *Journal of Aeronautical Science*, 24, pp. 57-63, (1957).
3. Shen, S.F., "An approximate analysis of nonlinear flutter problems", *Journal of Aerospace Science*, 26, pp. 25-32, (1999).
4. Lee, B.H.K., LeBlanc, P., "Flutter analysis of a two-dimensional airfoil with cubic nonlinear restoring force", National Research Council of Canada, Aeronautical Note, NAE-AN-36, NRC No. 25438, (1986).
5. Lee, B.H.K., Jiang, L.Y., and Wong, Y.S., "Flutter of an airfoil with a cubic nonlinear restoring force", *Journal of Fluids and Structures*, 13, pp. 75-101, (1999).
6. Price, S.J., Alighanbari, H., and Lee, B.H.K., "The aeroelastic response of a two-dimensional airfoil with bilinear and cubic structural nonlinearities", *Journal of Fluids and Structures*, 9, pp. 175-193, (2005).
7. Liu, L., Wong, Y.S., and Lee, B.H.K., "Application of the center manifold theory in nonlinear aeroelasticity", *Journal of Sound and Vibration*, 234, pp. 641-659, (2000).
8. Lee, B.H.K., Liu, L., and Chung, K.W., "Airfoil motion in subsonic flow with strong cubic nonlinear restoring forces", *Journal of Sound and Vibration*, 281, pp. 699-717, (2005).
9. Fung, Y.C., "An introduction to the theory of aeroelasticity", Dover Publication, New York, (1969).
10. Theodorsen, T., "General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter", *N.A.C.A*, T. R. No. 496, (1935).

## پیوست (الف)

ضرایب معادله (۱۱) به شرح زیر می باشد:

$$c_0 = 1 + \frac{1}{\mu},$$

$$c_1 = x_\alpha - \frac{a_h}{\mu},$$

$$c_2 = 2\zeta_\xi \frac{\bar{\omega}}{U^*} + \frac{2}{\mu}(1 - \psi_1 - \psi_2),$$

$$c_3 = \frac{1 + 2\left(\frac{1}{2} - a_h\right)(1 - \psi_1 - \psi_2)}{\mu},$$

$$c_4 = \frac{2}{\mu}(\psi_1 \varepsilon_1 + \psi_2 \varepsilon_2),$$

$$c_5 = \frac{2}{\mu} \left[ (1 - \psi_1 - \psi_2) + \left(\frac{1}{2} - a_h\right) (\psi_1 \varepsilon_1 + \psi_2 \varepsilon_2) \right],$$

$$c_6 = \frac{2}{\mu} \psi_1 \varepsilon_1 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2} - a_h\right) \varepsilon_1 \right]$$

$$c_7 = \frac{2}{\mu} \psi_2 \varepsilon_2 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2} - a_h\right) \varepsilon_2 \right],$$

$$c_8 = -\frac{2}{\mu} \psi_1 \varepsilon_1^2,$$

$$c_9 = -\frac{2}{\mu} \psi_2 \varepsilon_2^2,$$

ضرایب معادله (۱۲) را نیز می توان به صورت ذیل ارائه نمود:

$$d_0 = \frac{x_\alpha}{r_\alpha^2} - \frac{a_h}{\mu \times r_\alpha^2},$$

$$d_1 = 1 + \frac{1 + 8a_h^2}{8\mu \times r_\alpha^2},$$

$$d_2 = 2 \frac{\zeta_\alpha}{U^*} + \frac{1 - 2a_h}{2\mu \times r_\alpha^2} - \frac{(1 + 2a_h)(1 - 2a_h)(1 - \psi_1 - \psi_2)}{2\mu \times r_\alpha^2},$$

$$d_3 = -\frac{(1 + 2a_h)(1 - \psi_1 - \psi_2)}{\mu \times r_\alpha^2} - \frac{(1 + 2a_h)(1 - 2a_h)(\psi_1 \varepsilon_1 + \psi_2 \varepsilon_2)}{2\mu \times r_\alpha^2},$$

$$d_4 = -\frac{(1+2a_h)(1-\psi_1-\psi_2)}{\mu \times r_\alpha^2},$$

$$d_5 = -\frac{(1+2a_h)(\psi_1\varepsilon_1 + \psi_2\varepsilon_2)}{\mu \times r_\alpha^2},$$

$$d_6 = -\frac{(1+2a_h)\psi_1\varepsilon_1 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \varepsilon_1 \right]}{\mu \times r_\alpha^2},$$

$$d_7 = -\frac{(1+2a_h)\psi_2\varepsilon_2 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \varepsilon_2 \right]}{\mu \times r_\alpha^2},$$

$$d_8 = \frac{(1+2a_h)\psi_1\varepsilon_1^2}{\mu \times r_\alpha^2},$$

$$d_9 = \frac{(1+2a_h)\psi_2\varepsilon_2^2}{\mu \times r_\alpha^2},$$

همچنین توابع  $f(\tau)$  و  $g(\tau)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$f(\tau) = \frac{2}{\mu} \left( \left( \frac{1}{2} - a_h \right) \alpha(0) + \xi(0) \right) (\psi_1 \varepsilon_1 e^{-\varepsilon_1 \tau} + \psi_2 \varepsilon_2 e^{-\varepsilon_2 \tau}),$$

$$g(\tau) = -\frac{(1+2a_h)f(\tau)}{2r_\alpha^2}$$

پیوست (ب)

ضرایب معادلات (۲۲) و (۲۳) به صورت زیر به دست می آید:

$$m_1 = \frac{2C(k)}{\mu}, \quad m_2 = \frac{1}{\mu} + \frac{2C(k)}{\mu} \left( \frac{1}{2} - a_h \right),$$

$$m_3 = \left( \frac{\bar{\omega}}{U^*} \right)^2, \quad m_4 = 2\zeta_\xi \frac{\bar{\omega}}{U^*} + \frac{2C(k)}{\mu},$$

$$m_5 = x_\alpha - \frac{a_h}{\mu}, \quad m_6 = 1 + \frac{1}{\mu},$$

$$n_1 = \frac{C(k)(2a_h + 1)}{\mu \times r_\alpha^2},$$

$$n_2 = 2 \frac{\zeta_\alpha}{U^*} + \frac{\left( \frac{1}{2} - a_h \right) C(k)(2a_h + 1) \left( \frac{1}{2} - a_h \right)}{\mu \times r_\alpha^2},$$

$$n_3 = \left( \frac{1}{U^*} \right)^2, \quad n_4 = \frac{C(k)(2a_h + 1)}{\mu \times r_\alpha^2},$$

$$n_5 = 1 + \frac{1}{8} + \frac{a_h^2}{\mu \times r_\alpha^2}, \quad n_6 = \frac{x_\alpha}{r_\alpha^2} - \frac{a_h}{\mu \times r_\alpha^2},$$