

## تحلیل احتمال اندیشانه‌ی تیر با خواص مواد و بارگذاری اتفاقی\*

محمد شرعیات<sup>(۱)</sup>محبوبه رجیبی قهنویه<sup>(۲)</sup>

**چکیده** در مقاله‌ی حاضر، الگوریتمی برای تحلیل تیر تحت خمش با ویژگی‌های مواد اتفاقی تحت بارگذاری استاتیکی اتفاقی وابسته به مکان ارائه شده است. اتفاقی بودن خواص مواد که ناشی از سطوح مختلف فرآیند ساخت و تولید است سبب می‌شود که خواص مواد ساختارهای مختلف اتفاقی داشته باشند. به دلیل اتفاقی بودن خواص مواد، ماتریس سفتی سازه‌های نیز اتفاقی می‌باشد و متعاقباً پاسخ را تحت تأثیر قرار می‌دهد. از سوی دیگر بارهای وارد بر بسیاری از سازه‌های مختلف مانند اجزای خودرو، بال هواپیما و... ماهیتی اتفاقی دارند که در تحلیل‌های معمول سازه‌ای به صورت معین فرض می‌گردند؛ لذا طراحی سازه‌ای بر پایه‌ی روش‌های متعارف با قابلیت اطمینان بالا، همراه نمی‌باشد. طبق روش ارائه‌شده در این مقاله، پاسخ تغییرپذیری بر اساس معیار جابه‌جایی برای تیر با فرض خواص مواد و بارگذاری اتفاقی محاسبه شده و توسط مثال‌های عددی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین الگوریتم مذکور با انجام تغییرات لازم به روشی برای محاسبه‌ی پاسخ تغییرپذیری تیر بر اساس معیار تنش، گسترش داده شده و پس از به‌کارگیری در مثال‌های مربوط، قابلیت اطمینان تیر در شرایط عدم قطعیت خواص مواد و بارگذاری، بر اساس معیار جابه‌جایی مجاز محاسبه شده است.

**واژه‌های کلیدی** تحلیل استاتیکی خمش تیر، خواص مواد اتفاقی، بارگذاری استاتیکی اتفاقی، تابع چگالی طیفی، تابع خود همبستگی، تغییرپذیری پاسخ.

### Reliability Analysis of Beams with both Random Material Properties and Random Loading Conditions

M. Shariyat

M. Rajabi Ghahnavieh

**Abstract** In the present paper, an algorithm is presented for reliability analysis of beams with random material properties under static spatially random loads. The randomness may be due to the employed manufacturing process that leads to components with slightly different microstructures. Since the material properties are random, the stiffness matrices and subsequently, the response will be of random natures. On the other hand, majority of the service loads of some structures, e.g. airplanes, vehicles, and machining equipments are random. Therefore, special techniques should be utilized. In the present paper, variability of the response is determined and discussed through various examples. The proposed algorithm is extended to include a stress-based analysis. Finally, reliability of the beam is evaluated in the treated examples.

**Key Words** Static analysis of beams, random material properties, power spectral density, correlation, variability of the response.

\*تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۱۲/۴ و تاریخ پذیرش آن ۱۳۹۱/۸/۷ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.

(۲) کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.

## مقدمه

یک سیستم اتفاقی به عنوان هر سیستم سازه‌ای که دارای عدم قطعیت در خواص مواد یا پارامترهای هندسی یا شرایط بارگذاری است، تعریف می‌شود. تحلیل‌های تصادفی تأثیر تصادفی بودن مکانی خواص مواد، پارامترهای هندسی یا شرایط بارگذاری را در پاسخ تغییرپذیری (Response variability) ساختاری در نظر می‌گیرند. تحلیل پاسخ تغییرپذیری سیستم اتفاقی عبارتست از ارزیابی مشخصات احتمالی پاسخ این سیستم‌ها با در نظر گرفتن ویژگی‌های آماری خصوصیات مواد اتفاقی یا بارگذاری اتفاقی.

روش المان محدود دربرگیرنده خصوصیات مواد و پارامترهای هندسی یا بارگذاری‌های اتفاقی در سه دهه‌ی گذشته مورد توجه بسیاری از محققان بوده است. در سال ۱۹۹۴ Araujo و Awruch [1] با در نظر گرفتن تغییرات مکانی اتفاقی خواص مواد و بارگذاری‌های اتفاقی، تحلیل المان محدود اتفاقی سازه‌ها را انجام دادند. آن‌ها روش مونت‌کارلو مستقیم و شبیه‌سازی مونت‌کارلو را با استفاده از بسط Neumann و بسط سری تیلور برای مسائل خطی استاتیکی مقایسه کردند.

در سال ۱۹۸۸ Igusa و Kiureghian [2] تحلیل قابلیت اطمینان سیستم‌های سازه‌ای با پارامترهای اتفاقی نامتغیر با زمان را، تحت تحریک اتفاقی بر حسب زمان انجام دادند. آن‌ها خصوصیات سیستم مانند سفتی، جرم و میرایی را اتفاقی در نظر گرفتند و به صورت متغیر اتفاقی پیوسته مدل کردند. سپس با استفاده از روش تحلیل قابلیت اطمینان مرتبه‌ی اول و دوم، احتمال پاسخ بحرانی فراتر از حد مجاز را تخمین زدند.

در سال ۱۹۹۲ Jensen و Iwan [3] مقاله‌ای ارائه دادند که در آن یک روش برای تحلیل سیستم‌های خطی با پارامترهای غیرقطعی تحت تحریک اتفاقی بررسی شده بود. در این روش، تابع نیروی وارد توسط یک نویز سفید (White noise) گوسی بر حسب زمان مدل شده بود. سپس روشی برای حصول معادله‌ی

امروزه استفاده از روش المان محدود در طراحی سازه و اجزای ماشین، به صورت جهانی به عنوان یک روش استاندارد پذیرفته شده است. تحلیل‌هایی که تاکنون انجام شده‌اند اساساً بر روی سازه‌هایی با خواص مواد و پارامترهای هندسی و شرایط بارگذاری معین بوده‌اند؛ لذا در تحلیل‌های معمول سازه‌ای، مقادیر خواص مواد مانند ضریب الاستیسیته، ضریب پواسون، چگالی و غیره در ساختارهای کامپوزیتی و ساده معمولاً معین فرض می‌شوند. به دلیل عدم قطعیت ذاتی خواص مواد که ناشی از سطوح مختلف فرآیند ساخت و تولید است، مقادیر دقیق این خواص را نمی‌توان به دست آورد، لذا خواص مواد طبیعتاً به صورت تصادفی‌اند. به دلیل تصادفی بودن خواص مواد، ماتریس جرم و سختی سازه‌ای نیز تصادفی‌اند. متغیر بودن خصوصیات ماتریس جرم و سختی سبب تغییرات آماری در بردارها می‌شوند و متعاقباً پاسخ را تحت تأثیر قرار می‌دهند. از سوی دیگر سازه‌های تحت بارگذاری‌های اتفاقی وابسته به زمان با ساختار المان محدود معین را می‌توان به آسانی انجام داد. خصوصیات مواد و هندسه‌ی سازه نقش بسیار مهمی در این تحلیل‌ها ایفا می‌کنند. بنابراین، هر تغییری در مقادیر این خصوصیات به طور قابل ملاحظه‌ای پاسخ سازه را تغییر می‌دهد. در برخی تحلیل‌های عملی نیز خصوصیات هندسی و یا خصوصیات مواد، به دلیل تغییرات محیطی سازه، با زمان تغییر می‌کنند.

هم‌چنین توزیع بار سازه‌های تحت بارگذاری استاتیکی عملاً توزیعی نامعلوم است. به عنوان مثال، بارهای وارد بر یک کفی تریلر در هر بارگیری دارای توزیع مکانی متفاوتی از دفعات دیگر است؛ لذا تحلیل سازه‌های استاتیکی با در نظر گرفتن توزیع نیروی مکانی اتفاقی دارای اهمیت است که تا کنون در مراجع به آن پرداخته نشده است.

در این زمینه از تحقیق، تعدادی مقاله توسط Shinozuka و Deodatis و دیگر افراد [10-13] چاپ شد و پاسخ تغییرپذیری سازه‌های اتفافی تحت بارهای استاتیکی معین به دقت بررسی شد. در سال ۲۰۰۳، Singh و Zheng [14]، مقاله‌ای ارائه دادند که در آن ضمن ساده‌سازی مسیر تحلیل بکارگرفته شده در مرجع [9]، به تحلیل مثال‌های متنوعی پرداخته شده بود.

با توجه به مرور مقالات ذکرشده، این نتیجه حاصل شد که در کارهای پیشین تنها اثر خواص مواد اتفافی یا بارگذاری اتفافی به صورت مجزا در نظر گرفته شده و در برخی مقالات نیز اثر خواص مواد اتفافی و بارگذاری اتفافی برحسب زمان (دینامیکی) در نظر گرفته شده است و تاکنون تحلیل تیر تحت شرایط بارگذاری اتفافی وابسته به مکان با هر دو شرایط خواص مواد اتفافی و بارگذاری اتفافی بر حسب مکان انجام نشده است.

در مقاله‌ی کنونی، یک روش برای ارزیابی پاسخ تغییرپذیری سیستم اتفافی برای تیرها، خرپاها و قاب‌ها در شرایط ضریب الاستیسیته اتفافی تحت بارگذاری استاتیکی اتفافی ارائه شده است، که بر اساس آن تیر تحت بارگذاری مکانی اتفافی فرض شده است به نحوی که هر نقطه از تیر دارای توزیع گوسی متفاوت با مقدار میانگین صفر باشد. روند محاسبه‌ی پاسخ تغییرپذیری سیستم اتفافی از گسترش نظریه‌ی تابع پاسخ تغییرپذیری سیستم اتفافی معرفی شده در مراجع [9,14] اقتباس شده است. سپس روشی برای محاسبه کوواریانس تنش برای اولین بار در دنیا ارائه و در نهایت قابلیت اطمینان تیر بررسی شده است. در این زمینه، از تئوری برنولی برای تحلیل تیر استفاده شده است. فرض‌های تحلیل عبارتند از رفتار خطی و سازه‌ای مواد، صفر بودن ضریب پوواسون، فرض بقای انرژی (صفر بودن میرایی سازه‌ای) و برقراری شرایط تحلیل استاتیکی.

حالت فضایی اتفافی برای ماتریس کوواریانس پاسخ سیستم ارائه کردند. پس از آن با انتگرال‌گیری معادله‌ی کوواریانس در زمان پاسخ تغییرپذیری را محاسبه کردند.

در سال ۱۹۹۴ Cheng و Wen [4,5] در دو مقاله به بررسی تحلیل قابلیت اطمینان سازه‌های خرپای غیرخطی با پارامترهای اتفافی تحت بارگذاری اتفافی پرداختند. آن‌ها در مقاله‌ی اول نیروی اتفافی را به صورت نوز سفید گوسی مدل کردند و پارامترهای سیستم را به صورت میدان‌های اتفافی یا متغیرهای اتفافی مدل کردند. آن‌ها در مطالعه‌ی خود نیروی اتفافی را وابسته به زمان و خواص اتفافی را وابسته به مکان فرض کردند.

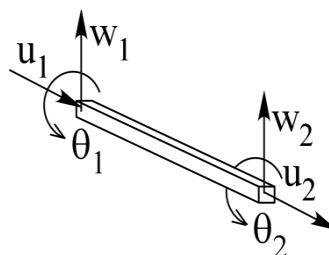
آن‌ها در مقاله‌ی دوم یک روش برای ارزیابی قابلیت اطمینان کارآمد برای چنین ساختارهایی ارائه کردند. یک نسخه‌ی اصلاح‌یافته از روش انتگرال سریع ارائه‌شده توسط Wen و Chen [6] در سال ۱۹۸۷، در ارتباط با روش مجانبی مرتبه دوم ارائه‌شده توسط Breitung [7] در سال ۱۹۸۹، برای تحلیل احتمال خرابی ارائه شد. روش پیشنهادی قابل کاربرد در مسائلی است که در آن احتمالات خرابی مشروط داده شده پارامترهای سیستم برای مثال از طریق ارتعاشات اتفافی یا دیگر روش‌های تجربی موجود باشد.

اجزای سازه‌ای مانند خرپاها و قاب‌های الاستیک خطی، با اعضایی با مدول الاستیسیته اتفافی توسط Deodatis [8] در سال ۱۹۸۸ مطالعه شدند. در این راستا پاسخ تغییرپذیری برای سیستم اتفافی در یک ساختار قاب دوبعدی ارزیابی شد. هم‌چنین وی در این مقاله تشریح کرد که توابع پاسخ تغییرپذیری، تشابه زیادی به تابع پاسخ فرکانسی استفاده‌شده در تئوری ارتعاشات اتفافی دارند. در این راستا Deodatis [9] با گسترش زمینه‌ی تحقیقات خود، وابستگی مکانی بین میدان‌های اتفافی المان‌های مختلف را در نظر گرفت.

## دستگاه معادلات حاکم بر تیر دارای

## خواص مواد اتفاقی

المان تیر دارای دو نقطه‌ی گره با شش درجه آزادی را مطابق شکل (۱) در نظر می‌گیریم.



شکل ۱ المان هرمیتی

که در آن  $N_e$  تعداد المان‌ها می‌باشد. سپس ماتریس‌های سفتی المان و بردارهای نیروی سازه‌ی الاستیک تحت بررسی ترکیب می‌شوند و در پایان، بعد از اعمال شرایط مرزی مناسب به فرم بسیار آشنای زیر می‌رسیم که همان معادله‌ی تعادل در دستگاه مختصات مرجع می‌باشد.

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (4)$$

از آنجا که خواص مواد تیر اتفاقی است، پاسخ آن به بارهای معین نیز اتفاقی است؛ لذا جهت حصول واریانس خیز تیر، مطابق مرجع [10]، عملیات ریاضی به صورت مشروح زیر انجام گرفته است.

از معادله‌ی (۳) مشاهده می‌شود که مقادیر میانگین متغیرهای اتفاقی  $X_{ei}$  نشان داده شده با  $\bar{X}_{ei}$  برابر صفرند. برای به دست آوردن واریانس خیز در اثر نیروی اتفاقی، تقریب مرتبه اول بسط تیلور تابع  $U$  را حول مقادیر میانگین متغیرهای اتفاقی  $X_{ei}$  در نظر می‌گیریم:

$$U \cong U_0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_i} (X_{ei} - \bar{X}_{ei}) \left[ \frac{\partial U}{\partial X_{ei}} \right]_E \quad (5)$$

برای دستیابی به عبارت  $\left[ \frac{\partial U}{\partial X_{ei}} \right]_E$  از رابطه‌ی (۴) نسبت به  $X_{ei}$  مشتق می‌گیریم. از آنجا که بردار  $\{F\}$  بردار نیروهای معین است، لذا مشتق آن نسبت به متغیرهای اتفاقی  $X_{ei}$  صفر است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial X_{ei}} \right]_E \{U\} + [K] \left[ \frac{\partial U}{\partial X_{ei}} \right]_E = 0 \quad (6)$$

حال با توجه به این‌که در رابطه‌ی (۲)  $\left[ \frac{\partial K}{\partial X_{ei}} \right]_E = \Delta K_i^{(e)}$  و با محاسبه‌ی رابطه‌ی (۶) در مقدار میانگین متغیرهای اتفاقی  $X_{ei}$  خواهیم داشت:

با استفاده از اصل انرژی پتانسیل کمینه، ماتریس‌های سفتی  $K_0$  و نیروی المانی  $F_0$  محاسبه می‌شوند، (به شرح پیوست). حال برای اعمال خواص مواد اتفاقی، فرض می‌کنیم که مدول الاستیسیته‌ی تیر به صورت اتفاقی در طول المان مطابق با رابطه‌ی زیر تغییر کند.

$$E^{(e)}(x) = E_0^{(e)} [1 + f^{(e)}(x)] \quad (1)$$

که  $E_0^{(e)}$  مقدار میانگین مدول الاستیسیته و  $f^{(e)}(x)$  میدان اتفاقی هم‌گن با مقدار میانگین صفر است. از اثر دادن رابطه‌ی (۱) در معادلات المان محدود کلاسیک ماتریس کلی سفتی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$K^{(e)} = K_0^{(e)} + X_{e0} \cdot \Delta K_0^{(e)} + X_{e1} \cdot \Delta K_1^{(e)} + X_{e2} \cdot \Delta K_2^{(e)} \quad (2)$$

که در آن  $X_{ei}$  متغیرهای اتفاقی به فرم رابطه‌ی (۳) می‌باشند که در واقع گشتاورهای مرتبه‌ی ۰ و ۱ و ۲ میدان اتفاقی  $f(x)$  هستند.

$$X_{ei} = \int_0^{L^{(e)}} x^{i-1} f^{(e)}(x) dx \quad i = 1, 2, 3e = 1, 2, \dots, N_e \quad (3)$$

مفهوم تابع خودهم‌بستگی داریم:

$$\begin{aligned} \epsilon[f^{(e_1)}(\xi_1)f^{(e_2)}(\xi_2)] &= \epsilon[f(x_{e_1} + \xi_1)f(x_{e_2} + \xi_2)] \\ R_{ff}(x_{e_2} + \xi_2 - x_{e_1} - \xi_1) &= R_{ff}(\Delta_{e_1 e_2} + \xi_2 - \xi_1) \end{aligned} \quad (11)$$

$R_{ff}(\xi)$  تابع خودهم‌بستگی (Autocorrelation function) میدان اتفاقی  $f(x)$  است که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$R_{ff}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(k) e^{ik\xi} dk \quad (12)$$

که در آن  $S_{ff}(k)$  تابع چگالی طیفی (Spectral density) نیروی میدان اتفاقی  $f(x)$  است. از اعمال روابط (۱۲) و (۱۱) در رابطه‌ی (۱۰) امید آماری زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \epsilon\{X_{e_1 i_1} X_{e_2 i_2}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(k) \int_0^{L^{(e_1)}} \xi_1^{i_1-1} e^{-ik\xi_1} d\xi_1 \\ &\cdot \int_0^{L^{(e_2)}} \xi_2^{i_2-1} e^{ik\xi_2} d\xi_2 e^{ik\Delta_{e_1 e_2}} dk \end{aligned} \quad (13)$$

سپس از جای‌گذاری رابطه‌ی (۱۰) در رابطه‌ی (۹)، بردار واریانس  $U$  تشکیل‌شده از اجزای قطری ماتریس کوواریانس  $U$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\text{Var}[U] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(k) V^E(k) dk \quad (14)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} V^E(k) &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_{i_1}} \sum_{i_2=1}^{N_{i_2}} \text{diag}(K_0^{-1} \Delta K_{ei}^{(e)} U_0) \cdot K_0^{-1} \Delta K_{ei}^{(e)} U_0 \\ &\cdot \int_0^{L^{(e_1)}} \xi_1^{i_1-1} e^{ik\xi_1} d\xi_1 \cdot \int_0^{L^{(e_2)}} \xi_2^{i_2-1} e^{ik\xi_2} d\xi_2 e^{ik\Delta_{e_1 e_2}} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial X_{ei}} \right]_E = -K_0^{-1} \Delta K_{ei}^{(e)} U_0 \quad (7)$$

که در آن  $U_0$  و  $K_0$  به ترتیب بردار جابه‌جایی و ماتریس سفی در اثر خواص مواد معین می‌باشند، حال ماتریس کوواریانس خیز را تشکیل می‌دهیم:

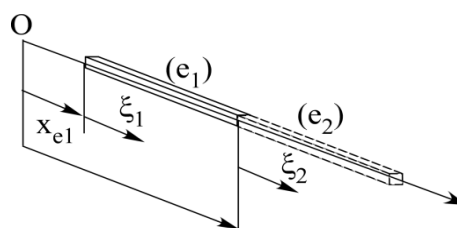
$$\epsilon[U] = U_0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[U, U] &= \epsilon[(U - U_0)(U - U_0)^T] = \\ &\sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_{i_1}} \sum_{i_2=1}^{N_{i_2}} K_0^{-1} \Delta K_{ei}^{(e)} U_0 U_0^T \Delta K_{ei}^{(e)T} (K_0^{-1})^T \\ &\cdot \epsilon\{X_{e_1 i_1} X_{e_2 i_2}\} \end{aligned} \quad (9)$$

امید آماری  $\epsilon\{X_{e_1 i_1} X_{e_2 i_2}\}$  مشاهده‌شده در رابطه‌ی (۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \epsilon\{X_{e_1 i_1} X_{e_2 i_2}\} &= \\ &\int_0^{L^{(e_1)}} \int_0^{L^{(e_2)}} \xi_1^{i_1-1} \xi_2^{i_2-1} \epsilon[f^{(e_1)}(\xi_1)f^{(e_2)}(\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (10)$$

حال با در نظر گرفتن میدان اتفاقی  $f(x)$  مشابه برای همه المان‌ها، برای محاسبه‌ی امید آماری ظاهرشده در انتگرال معادله‌ی (۱۰) المان‌های ۱ و ۲ مدل المان محدود تیر را مطابق شکل (۲) در نظر می‌گیریم.



شکل ۲ نمایش ارتباط مکانی المان‌های یک و دو

توجه شود که در شکل (۲)  $\xi_1$  و  $\xi_2$  به ترتیب در مختصات محلی برای المان‌های  $(e_1)$  و  $(e_2)$  اندازه‌گیری شده‌اند، در حالی که  $x_{e_1}$  و  $x_{e_2}$  در مختصات مرجع اندازه‌گیری شده‌اند. با استفاده از

داد که بیشترین مقدار واریانس  $i$  امین جابه‌جایی گره در فرم زیر از چگالی طیفی نیروی  $S_{ff}(k)$  حاصل می‌شود [9].

$$S_{ff}(k) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ff}^2 \cdot \delta(k - k_i^*) \quad (19)$$

که  $\delta()$  تابع دلتای دیراک است و  $k_i^*$  شماره موجی است که به ازای آن بیشترین مقدار  $|V_i^E(k)|^2$  حاصل می‌شود.

بنابراین برای هر فرم تابع چگالی طیفی  $S_{ff}(k)$  حد بالای واریانس برابر است با:

$$\text{Var}[u_i] \leq \sigma_{ff}^2 \cdot |V_i^E(k_i^*)|^2, i = 1, 2, \dots, N_d \quad (20)$$

یا بر حسب انحراف معیار استاندارد می‌توان نوشت:

$$\text{Std}[u_i] \leq \sigma_{ff} \cdot |V_i^E(k_i^*)|, i = 1, 2, \dots, N_d \quad (21)$$

از معادله‌ی (21) می‌توان نتیجه گرفت که حد بالای ضریب تغییرپذیری  $\text{COV}[u_i]$  مربوط به  $i$  امین جابه‌جایی گره با امید آماری غیر صفر به ازای شماره موج‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{COV}[u_i(k)] &= \frac{\text{Std}[u_i]}{|\epsilon\{u_i\}|} \\ &= \sigma_{ff} \cdot \frac{|V_i^E(k)|}{|\epsilon\{u_i\}|}, i = 1, 2, \dots, N_d \end{aligned} \quad (22)$$

رابطه‌ی فوق را هم‌چنین حد بالای کوواریانس به واحد شده نیز می‌نامند که برای تغییرپذیری مکانی بارگذاری گسترده‌ی توصیف‌شده با تابع چگالی طیفی ذیل، به هر مقدار شماره موج  $k$  ظاهر شده در معادله‌ی (22) می‌باشد.

$$S_{ff}(\bar{k}) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ff}^2 \cdot \delta(\bar{k} - k) \quad (23)$$

عبارت «diag()» نشان‌دهنده‌ی یک ماتریس قطری است که اجزای قطری آن از بردار داخل پراتنز تشکیل شده‌اند. اندیس  $E$  نشان‌دهنده‌ی بردار محاسبه‌شده در اثر بارگذاری اتفاقی می‌باشد. با توجه به این که تابع چگالی طیفی تابعی زوج و حقیقی از  $k$  است،  $\text{Var}[U]$  به دست آمده از رابطه‌ی (14) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \text{Var}[U] &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(k) V^E(k) dk \\ &= 2 \int_0^{\infty} S_{ff}(k) V^E(k) dk \end{aligned} \quad (16)$$

بنابراین، بردار واریانس  $U$  تابعی از شکل خاصی از چگالی طیفی  $S_{ff}(k)$  خواهد بود. تعداد اجزای بردار  $V^E(k)$  برابر با تعداد کل درجات آزادی سازه است و هر جزء از بردار  $V^E(k)$  مفسر تقریب مرتبه اول تابع پاسخ تغییرپذیری در درجه‌ی آزادی متناظر آن در سازه است. بنابراین، برای بردار  $V^E(k)$  می‌توان نوشت:

$$V^E(k) = \left[ |V_1^E(k)|^2 |V_2^E(k)|^2 \dots |V_{N_d}^E(k)|^2 \right]^T \quad (17)$$

که در آن  $N_d$  تعداد کل درجات آزادی سازه و  $|V_i^E(k)|^2$  تقریب مرتبه اول تابع پاسخ تغییرپذیری در  $i$  امین درجه‌ی آزادی سازه است. از آنجا که تابع چگالی احتمال متوسط مجذور یک فرآیند اتفاقی با مقدار میانگین صفر یک تابع حقیقی، زوج و غیر منفی از فرکانس آن است، برای هر شکل چگالی طیفی نیرو  $S_{ff}(k)$  رابطه‌ی زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} E \left[ \left( f^{(e)}(x) \right)^2 \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(k) dk = 2 \int_0^{\infty} S_{ff}(k) dk \\ &= \sigma_{ff}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

که  $\sigma_{ff}$  انحراف معیار استاندارد میدان اتفاقی  $f(x)$  که همان ضریب تغییرپذیری مدول الاستیسیته است، می‌باشد. حال با استفاده از معادله‌ی (16) می‌توان نشان

## الگوریتم محاسبات

متغیر اتفاقی  $X_{ei}$  مشتق می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= [D][B]\{U\} = [L]\{U\} \\ \rightarrow \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial X_{ei}} \right]_E &= \left[ \frac{\partial L}{\partial X_{ei}} \right]_E \{U\} + [L] \left[ \frac{\partial U}{\partial X_{ei}} \right]_E \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن  $[D]$  ماتریس ضرایب الاستیک،  $[B]$  ماتریس مشتقات تابع شکل (به شرح پیوست) و  $[L]$  عملگر است. از آنجا که عملگر  $[L]$  شامل ماتریس ضرایب الاستیک است و خواص مواد اتفاقی در ماتریس ضرایب الاستیک تأثیر می‌گذارد، لذا عملگر  $[L]$  در تیر با خواص مواد اتفاقی تغییر می‌کند. برای محاسبه‌ی عملگر  $[L]$  تیر با خواص مواد اتفاقی، طبق رابطه‌ی (۲۵) مدول الاستیسیته اتفاقی را در ماتریس ضرایب الاستیک جای‌گذاری و در ماتریس  $[B]$  ضرب می‌کنیم.

$$[D] = [E] \rightarrow [L] = [E_0^{(e)} [1 + f^{(e)}(\tilde{x})]] [B] \quad (26)$$

حال با توجه به رابطه‌ی (۳) ماتریس عملگر  $[L]$  را برحسب متغیرهای اتفاقی  $X_{ei}$  تفکیک می‌کنیم؛ لذا خواهیم داشت:

$$L^{(e)} = L_0^{(e)} + X_0^{(e)} \cdot \Delta L_0^{(e)} + X_1^{(e)} \cdot \Delta L_1^{(e)} \quad (27)$$

ماتریس‌های  $\Delta L_0^{(e)}$  و  $\Delta L_1^{(e)}$  در پیوست آمده‌اند. حال  $\left[ \frac{\partial L}{\partial X_{ei}} \right]_E = \Delta L_i$  و از جای‌گذاری رابطه‌ی (۷) در رابطه‌ی (۲۵) داریم:

$$\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial X_{ei}} \right]_E = \Delta L_i \{U\} - [L][K]^{-1} \Delta K_i \{U\} \quad (28)$$

سپس با در نظر گرفتن  $\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial Y_{ei}} \right]_E = \Delta \sigma_i$  و محاسبه‌ی رابطه‌ی (۲۸) در مقدار میانگین متغیرهای اتفاقی داریم:

$$\Delta \sigma_i = (\Delta L_i - [L][K_0]^{-1} \Delta K_i) \{U_0\} \quad (29)$$

برای دستیابی به پاسخ بر طبق روابط بیان‌شده، مسیر تحلیل در دو مرحله انجام گرفته است. ابتدا با استفاده از کد المان محدود نوشته‌شده توسط نرم افزار Maple، یک تیر با خواص مواد و هندسه و بارگذاری معین تحلیل می‌شود و ماتریس‌های  $K_0^{-1}$  و  $U_0$  محاسبه می‌گردند. سپس، از جای‌گذاری این ماتریس‌ها در رابطه‌ی (۱۵) ماتریس  $V^E(k)$  محاسبه می‌شود. در پایان، برای محاسبه کواریانس در درجه‌ی آزادی مورد نظر در هر گره مطلوب، عبارت متناظر از ماتریس‌های (۱۴ و ۸) انتخاب و با جای‌گذاری در رابطه‌ی (۲۲) کواریانس به‌واحدشده به دست می‌آید. این الگوریتم در محاسبه‌ی کواریانس همه‌ی تحلیل‌های بررسی شده در این مقاله به کار گرفته شده است.

## محاسبه‌ی واریانس تنش در تیر با خواص مواد

## اتفاقی تحت بارگذاری معین

برای محاسبه‌ی تنش در تیر با خواص مواد اتفاقی تحت بارگذاری معین، مجدداً تقریب مرتبه اول بسط تیلور تنش را حول مقدار میانگین متغیرهای اتفاقی  $Y_{ei}$  می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} [\sigma] &\cong [\sigma_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_i} (X_{ei} - \bar{X}_{ei}) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial X_{ei}} \right]_E \\ &= [\sigma_0] + X_0 \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial X_0} \right]_E + X_1 \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial X_1} \right]_E + X_2 \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial X_2} \right]_E \end{aligned} \quad (24)$$

که نماد  $[ ]_E$  نشان‌دهنده‌ی محاسبه در مقادیر میانگین متغیرهای اتفاقی  $X_{ei}$  است و  $[\sigma_0]$  تنش محاسبه‌شده از روش اجزای محدود برای تیر با فرض خواص مواد بارگذاری معین می‌باشد.

برای محاسبه‌ی  $\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial X_{ei}} \right]_E$  از رابطه‌ی تنش نسبت به

## دستگاه معادلات حاکم بر تیر با فرض

## بارگذاری اتفاقی

این بار فرض می‌کنیم خواص مواد تیر معین است و نیرو به صورت اتفاقی در طول المان بر اساس رابطه‌ی زیر تغییر کند.

$$q = q_0(1 + g(x)) \quad (35)$$

که در آن مقدار میانگین مدول الاستیسیته و  $g^{(e)}(x)$  میدان اتفاقی هم‌گن با مقدار میانگین صفر است. از آنجا که تیر تنها تحت نیروی گسترده‌ی قائم فرض شده است، مقدار نیرو در جهت افقی صفر می‌باشد.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_0(1 + g(x)) \end{Bmatrix} \quad (36)$$

از اثر دادن بردار اتفاقی نیرو، رابطه‌ی (36) در معادلات المان محدود کلاسیک بردار کلی نیروی گسترده به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$F^{(e)} = F_0^{(e)} + Y_{e0} \cdot \Delta F_0^{(e)} + Y_{e1} \cdot \Delta F_1^{(e)} + Y_{e2} \cdot \Delta F_2^{(e)} + Y_{e3} \cdot \Delta F_3^{(e)} \quad (37)$$

که در آن متغیرهای اتفاقی به شکل رابطه‌ی (38) می‌باشد. در واقع، گشتاورهای مرتبه‌ی 0 و 1 و 2 و 3 میدان اتفاقی  $g(x)$  هستند.

$$Y_{ei} = \int_0^{L^{(e)}} x^{i-1} g^{(e)}(x) dx, i = 1, 2, 3, 4, e = 1, 2, \dots, N_e \quad (38)$$

که در آن  $N_e$  تعداد المان‌ها می‌باشد. از آنجا که بارگذاری تیر اتفاقی است، پاسخ آن نیز اتفاقی خواهد بود؛ از این رو برای محاسبه‌ی واریانس خیز تیر، عملیات ریاضی به صورت مشروح زیر انجام گرفته است. از معادله‌ی (38) مشاهده می‌شود که مقادیر میانگین متغیرهای اتفاقی  $Y_{ei}$  نشان داده شده با  $\bar{Y}_{ei}$  برابر

که در آن  $i = 0, 1, 2$  و  $[L]$  ماتریس ترکیب یافته‌ی عملگر  $[L]$  است. بنابراین، تقریب مرتبه اول مقدار میانگین و واریانس ماتریس  $\sigma$  را می‌توان به آسانی به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_0 \quad (30)$$

$$\text{Cov}[\sigma, \sigma] = \epsilon [(\sigma - \sigma_0)(\sigma - \sigma_0)^T] =$$

$$\sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_i} \sum_{i_2=1}^{N_i} (\Delta L_{e_1 i_1} - [L] K_0^{-1} \Delta K_{e_1 i_1}) U_0 \cdot U_0^T (\Delta L_{e_2 i_2} - [L] K_0^{-1} \Delta K_{e_2 i_2})^T \cdot \epsilon \{X_{e_1 i_1} X_{e_2 i_2}\} \quad (31)$$

پس از جای گذاری امید آماری  $\epsilon \{X_{e_1 i_1} X_{e_2 i_2}\}$  از رابطه‌ی (13) در رابطه‌ی (31) ماتریس واریانس خیز به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\text{Var}[\sigma] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(k) V^E(k) dk \quad (32)$$

که در آن:

$$V^E(k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_i} \sum_{i_2=1}^{N_i} \text{diag}[(\Delta L_{e_1 i_1} - [L] K_0^{-1} \Delta K_{e_1 i_1}) U_0] \cdot (\Delta L_{e_2 i_2} - [L] K_0^{-1} \Delta K_{e_2 i_2}) U_0 \cdot \int_0^{L^{(e_1)}} \xi_1^{i_1-1} e^{-ik\xi_1} d\xi_1 \cdot \int_0^{L^{(e_2)}} \xi_2^{i_2-1} e^{ik\xi_2} d\xi_2 e^{ik\Delta e_1 e_2} \quad (33)$$

در پایان کوواریانس به واحد شده‌ی تنش مطابق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\text{COV}[\sigma_i(k)] = \sigma_{ff} \cdot \frac{|V_i^E(k)|}{|\epsilon\{\sigma_i\}|}, i = 1, 2, \dots, N_d \quad (34)$$



به صورت زیر نوشت:

$$\epsilon\{Y_{e_1 i_1} Y_{e_2 i_2}\} = \int_0^{L(e_1)} \int_0^{L(e_2)} \eta_1^{i_1-1} \eta_2^{i_2-1} \epsilon[g^{(e_1)}(\eta_1) g^{(e_2)}(\eta_2)] d\eta_1 d\eta_2 \quad (44)$$

با در نظر گرفتن میدان اتفاقی  $g(x)$  مشابه برای همه‌ی المان‌ها، جهت محاسبه‌ی امید آماری ظاهر شده در انتگرال مشابه روابط (۱۳-۱۰) از مفهوم تابع خود هم‌بستگی استفاده می‌کنیم؛ لذا رابطه‌ی (۴۴) برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} \epsilon\{Y_{e_1 i_1} Y_{e_2 i_2}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(k) \int_0^{L(e_1)} \eta_1^{i_1-1} e^{-ik\eta_1} d\eta_1 \cdot \int_0^{L(e_2)} \eta_2^{i_2-1} e^{ik\eta_2} d\eta_2 e^{ik\Delta_{e_1 e_2}} dk \quad (45) \end{aligned}$$

که در آن  $S_{gg}(k)$  تابع چگالی طیفی نیروی میدان اتفاقی  $g(x)$  است. سپس از جای‌گذاری رابطه‌ی (۴۵) در رابطه‌ی (۴۳)، بردار واریانس  $U$  تشکیل شده از اجزای قطری ماتریس کوواریانس  $U$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\text{Var}[U] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(k) V^F(k) dk \quad (46)$$

که در آن

$$\begin{aligned} V^F(k) &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_i} \sum_{i_2=1}^{N_i} \text{diag}(K_0^{-1} \Delta F_{e_1 i_1}) \cdot K_0^{-1} \Delta F_{e_2 i_2} \\ &\cdot \int_0^{L(e_1)} \eta_1^{i_1-1} e^{-ik\eta_1} d\eta_1 \cdot \int_0^{L(e_2)} \eta_2^{i_2-1} e^{ik\eta_2} d\eta_2 e^{ik\Delta_{e_1 e_2}} dk \quad (47) \end{aligned}$$

صفرند. برای به دست آوردن واریانس خیز در اثر نیروی اتفاقی تقریب مرتبه اول بسط تیلور تابع  $U$  حول مقادیر میانگین متغیرهای اتفاقی  $Y_{ei}$  را در نظر می‌گیریم:

$$U \cong U_0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_i} (Y_{ei} - \bar{Y}_{ei}) \left[ \frac{\partial U}{\partial Y_{ei}} \right]_E \quad (39)$$

برای دستیابی به عبارت  $\left[ \frac{\partial U}{\partial Y_{ei}} \right]_E$  از رابطه‌ی (۴) نسبت به  $Y_{ei}$  مشتق می‌گیریم. از آن‌جا که تنها بردار نیرو اتفاقی فرض شده است و خواص مواد و هندسی معین‌اند، لذا همه‌ی عناصر ماتریس سفتی معین است. بنابراین مشتق ماتریس سفتی نسبت به متغیرهای اتفاقی  $Y_{ei}$  صفر می‌باشد؛ لذا خواهیم داشت:

$$[K] \left[ \frac{\partial U}{\partial Y_{ei}} \right]_E = \left[ \frac{\partial F}{\partial Y_{ei}} \right]_E \quad (40)$$

حال با توجه به این‌که از رابطه‌ی (۳۷)،

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial Y_{ei}} \right]_E = \Delta F_i^{(e)} \quad \text{و با محاسبه‌ی رابطه‌ی (۴۰) در مقدار میانگین متغیرهای اتفاقی } Y_{ei} \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial Y_{ei}} \right]_E = K_0^{-1} \Delta F_{ei} \quad (41)$$

حال ماتریس کوواریانس خیز را تشکیل می‌دهیم:

$$\epsilon[U] = U_0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[U, U] &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_i} \sum_{i_2=1}^{N_i} K_0^{-1} \Delta F_{e_1 i_1} \Delta F_{e_2 i_2}^T (K_0^{-1})^T \cdot \epsilon\{Y_{e_1 i_1} Y_{e_2 i_2}\} \quad (43) \end{aligned}$$

با توجه به رابطه‌ی (۳۸)، امید آماری  $\epsilon\{Y_{e_1 i_1} Y_{e_2 i_2}\}$  مشاهده شده در رابطه‌ی (۴۳) را می‌توان

خواص مواد تیر معین فرض شده است تمامی عناصر عملگر  $[L]$  نیز معین هستند. از این رو مشتق عملگر  $[L]$  نسبت به متغیر اتفاقی  $Y_{ei}$   $\left(\frac{\partial L}{\partial Y_{ei}}\right)_E$  صفر می‌باشد. از جای گذاری رابطه‌ی (۴۱) در رابطه‌ی (۵۰) و با در نظر گرفتن  $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial Y_{ei}}\right]_E = \Delta \sigma_i$  خواهیم داشت:

$$\Delta \sigma_i = [L][K_0]^{-1} \Delta F_{ei} \quad i = 0,1,2,3 \quad (51)$$

که در آن  $[L]$  ماتریس ترکیب یافته عملگر  $[L]$  محاسبه شده در مقدار میانگین متغیر اتفاقی  $Y_{ei}$  است. بنابراین، تقریب مرتبه اول مقدار میانگین و واریانس ماتریس  $\sigma$  را می‌توان به آسانی به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\epsilon(\sigma) = \sigma_0 \quad (52)$$

$$\text{Cov}[\sigma, \sigma] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_i} \sum_{i_2=1}^{N_i} ([L]K_0^{-1} \Delta F_{e_1 i_1}) \cdot ([L]K_0^{-1} \Delta F_{e_2 i_2})^T \cdot \epsilon\{Y_{e_1 i_1} Y_{e_2 i_2}\} \quad (53)$$

پس از جای گذاری امید آماری  $\epsilon\{Y_{e_1 i_1} Y_{e_2 i_2}\}$  از رابطه‌ی (۴۵) در رابطه‌ی (۵۳)، ماتریس واریانس خیز به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\text{Var}[\sigma] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{gg}(k) V^F(k) dk \quad (54)$$

که در آن:

$$V^F(k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_i} \sum_{i_2=1}^{N_i} \text{diag}([L]K_0^{-1} \Delta F_{e_1 i_1}) \cdot ([L]K_0^{-1} \Delta F_{e_2 i_2}) \cdot \int_0^{L(e_1)} \eta_1^{i_1-1} e^{-ik\eta_1} d\eta_1 \cdot \int_0^{L(e_2)} \eta_2^{i_2-1} e^{ik\eta_2} d\eta_2 e^{ik\Delta e_1 e_2} dk \quad (55)$$

اندیس  $F$  نشان دهنده‌ی بردار محاسبه شده در اثر بارگذاری اتفاقی می‌باشد. حال مشابه رابطه‌ی (۲۲) کوواریانس به واحد شده‌ی خیز را می‌توان از رابطه‌ی (۴۸) به دست آورد:

$$\text{COV}[u_i(k)] = \frac{\text{Std}[u_i]}{|\epsilon\{u_i\}|} = \sigma_{gg} \cdot \frac{|V_i^F(k)|}{|\epsilon\{u_i\}|} \quad (48)$$

### محاسبه‌ی واریانس تنش در تیر با خواص مواد معین تحت بارگذاری اتفاقی

برای محاسبه‌ی تنش در تیر با خواص مواد معین تحت بارگذاری اتفاقی، مجدداً تقریب مرتبه‌ی اول بسط تیلور تنش را حول مقدار میانگین متغیرهای اتفاقی  $Y_{ei}$  می‌نویسیم:

$$[\sigma] \cong [\sigma_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_i} (Y_{ei} - \bar{Y}_{ei}) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial Y_{ei}}\right]_E = [\sigma_0] + Y_0 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial Y_0}\right]_E + Y_1 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial Y_1}\right]_E + Y_2 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial Y_2}\right]_E + Y_3 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial Y_3}\right]_E \quad (49)$$

که نماد  $[ ]_E$  نشان دهنده‌ی محاسبه در مقادیر میانگین متغیرهای اتفاقی  $Y_{ei}$  است و  $[\sigma_0]$  تنش محاسبه شده از روش اجزای محدود برای تیر با فرض خواص مواد و بارگذاری معین می‌باشد. برای محاسبه‌ی  $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial Y_{ei}}\right]_E$  از رابطه‌ی تنش نسبت به متغیر اتفاقی  $Y_{ei}$  مشتق می‌گیریم. بنابراین، خواهیم داشت:

$$[\sigma] = [D][B]\{U\} = [L]\{U\} \rightarrow \left[\frac{\partial \sigma}{\partial Y_{ei}}\right]_E = [L] \left[\frac{\partial U}{\partial Y_{ei}}\right]_E \quad (50)$$

که در آن  $[D]$  ماتریس ضرایب الاستیک،  $[B]$  ماتریس مشتقات تابع شکل و  $[L]$  عملگر است. از آنجا که

روابط (۴۹ و ۲۴) می‌باشد:

$$\sigma \cong \sigma_0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_i} (X_{ei} - \bar{X}_{ei}) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial X_{ei}} \right]_E + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_i} (Y_{ei} - \bar{Y}_{ei}) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial Y_{ei}} \right]_E \quad (59)$$

لذا کوواریانس حاصل از اعمال خواص اتفافی توام مواد و نیرو در واقع حاصل جمع عبارات محاسبه‌شده در روابط (۵۶ و ۳۶) خواهد بود.

$$\text{COV}[u_i(k)] = \sigma_{ff} \cdot \frac{|V_i^E(k)|}{|\epsilon\{u_i\}|} + \sigma_{gg} \cdot \frac{|V_i^F(k)|}{|\epsilon\{u_i\}|} \quad (60)$$

### تحلیل قابلیت اطمینان

اگر جابه‌جایی نقطه معینی از تیر از حد مجاز فراتر رود، تیر وضعیت نامطلوب خواهد داشت؛ لذا قابلیت اطمینان تیر عبارت است از احتمال آن که تیر وضعیت نامطلوب پیدا نکند. قابلیت اطمینان برای تیر ساکن (ایستا) از رابطه‌ی (۶۲) محاسبه می‌شود [15,16]:

$$\text{Reliability} = \exp(-\lambda t) \quad (61)$$

$$\lambda = \frac{\sigma_y}{2\pi\sigma_y} \exp\left(\frac{-\bar{y}^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (62)$$

که در آن  $\sigma_y$  انحراف معیار استاندارد خیز تیر در نقطه‌ی مورد نظر و  $\bar{y}$  انحراف معیار استاندارد شیب تیر در نقطه‌ی مورد نظر است.

### نتایج عددی

در ابتدای این بخش، تیری با شرایط تکیه‌گاهی و نیرویی منطبق بر مراجع مذکور به شرح زیر مدل شده است:

$$L = 5 \text{ m}, E_0 I_0 = 20.83 \times 10^5 \text{ Nm}^2, \sigma_{ff} = 0.1$$

و در پایان، کوواریانس به‌واحدشده تنش مطابق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\text{COV}[\sigma_i(k)] = \sigma_{gg} \cdot \frac{|V_i^F(k)|}{|\epsilon\{\sigma_i\}|} \quad (56)$$

### تحلیل تیر با فرض خواص مواد اتفافی و

#### بارگذاری اتفافی

برای در نظرگرفتن خواص اتفافی توأم مواد و نیروی گسترده، بسط تیلور بردار  $U$  را حول مقادیر میانگین متغیرهای اتفافی  $X_{ei}$  و  $Y_{ei}$  می‌نویسیم. از آن‌جا که متغیرها مستقلند، بسط تیلور از حاصل جمع دو بسط محاسبه‌شده در روابط (۳۹ و ۵) به دست می‌آید:

$$U \cong U_0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_i} (X_{ei} - \bar{X}_{ei}) \left[ \frac{\partial U}{\partial X_{ei}} \right]_E + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_i} (Y_{ei} - \bar{Y}_{ei}) \left[ \frac{\partial U}{\partial Y_{ei}} \right]_E \quad (57)$$

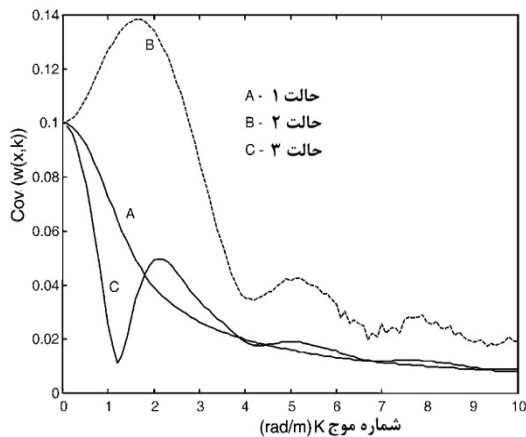
لذا کوواریانس حاصل از اعمال خواص اتفافی توام مواد و نیرو در واقع حاصل جمع عبارات محاسبه‌شده در روابط (۴۸ و ۲۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{COV}[u_i(k)] = \sigma_{ff} \cdot \frac{|V_i^E(k)|}{|\epsilon\{u_i\}|} + \sigma_{gg} \cdot \frac{|V_i^F(k)|}{|\epsilon\{u_i\}|} \quad (58)$$

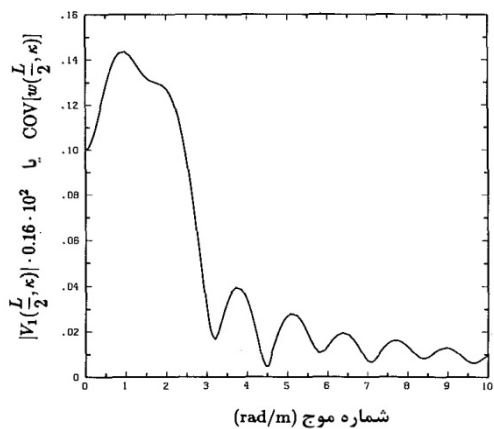
### محاسبه‌ی تنش در تیر با خواص مواد اتفافی

#### تحت بارگذاری اتفافی

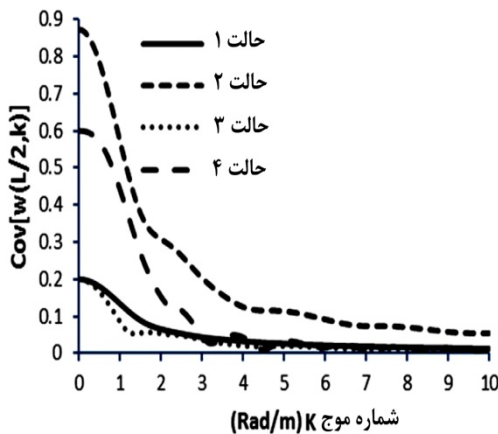
برای در نظرگرفتن خواص اتفافی توأم مواد و نیروی گسترده، به طریق مشابه بسط تیلور تنش  $\sigma$  را حول مقادیر میانگین متغیرهای اتفافی  $X_{ei}$  و  $Y_{ei}$  می‌نویسیم که در واقع همان حاصل جمع دو بسط محاسبه‌شده در



شکل ۴ کوواریانس نسبی خیز در نقطه‌ی میانی در حالات بارگذاری ۱ تا ۳ [14]



شکل ۵ کوواریانس نسبی خیز در حالت بارگذاری ۴ [10]

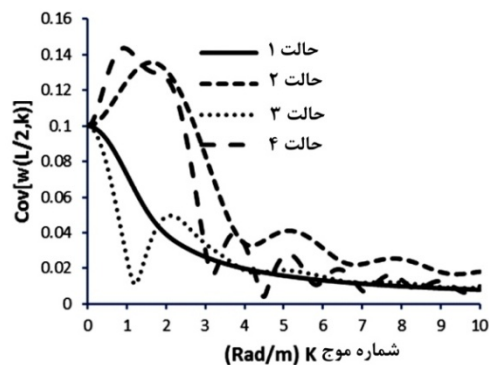


شکل ۶ منحنی کوواریانس نسبی خیز در نقطه‌ی میانی تیر

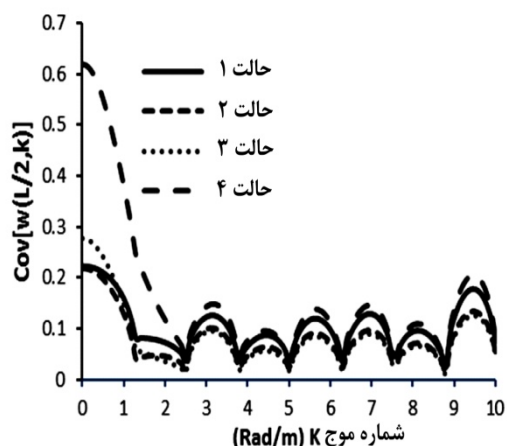
حالت ۱: تیر یک سر گیردار با شرایط بارگذاری گسترده یک‌نواخت:  $q = 1000 \text{ N/m}$   
 حالت ۲: تیر یک سر گیردار با شرایط بارگذاری  $q = 1000 \text{ N/m}$ ,  $M_0 = 10000 \text{ Nm}$   
 حالت ۳: تیر با شرایط تکیه‌گاه گیردار-مفصلی با شرایط بارگذاری  $q = 20000 \text{ N/m}$   
 حالت ۴: تیر با شرایط تکیه‌گاه گیردار-مفصلی با شرایط بارگذاری  $q = 20000 \text{ N/m}$ ,  $M_0 = 100000 \text{ Nm}$

برای صحت‌گذاری الگوریتم ارائه‌شده، منحنی کوواریانس نسبی خیز در نقطه‌ی میانی تیر در حالات بارگذاری ۱ تا ۴ برای تیر با خواص مواد معین در شکل (۳) رسم شده است که از مقایسه‌ی منحنی‌های به دست آمده در شکل (۳) با مراجع [10,14] که در شکل‌های (۴ و ۵) آمده‌اند، تطابق خوبی دارد. همان‌گونه که در شکل (۳) مشاهده می‌شود، بیش‌ترین تأثیر در منحنی کوواریانس نسبی خیز در همه‌ی حالات به ازای شماره موج‌های ۰ تا ۶ صورت می‌گیرد و هرچه شماره‌ی موج بالاتر می‌رود تأثیر تابع خودهمبستگی میدان‌های اتفاقی بر کوواریانس نسبی یا به تعبیری واریانس نسبی خیز حاصل کم‌تر و در حد، ناچیز خواهد بود.

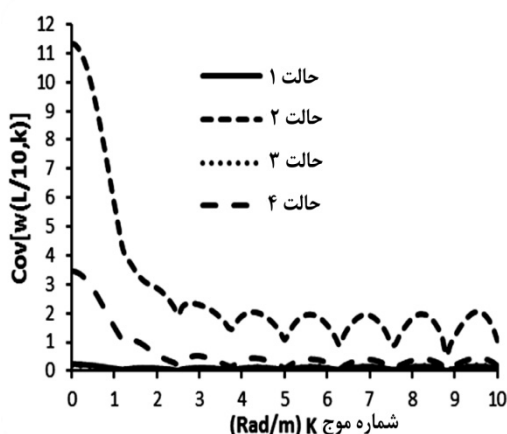
در ادامه کوواریانس نسبی خیز در نقطه‌ی میانی تیر در شرایط بارگذاری و خواص مواد توأم اتفاقی بررسی شده است که نتیجه‌ی آن در شکل (۶) نشان داده شده است.



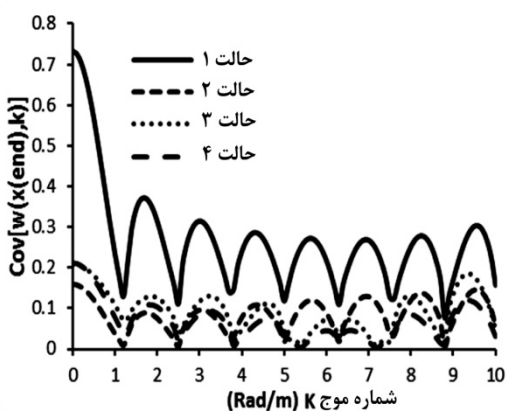
شکل ۳ منحنی کوواریانس نسبی خیز در نقطه‌ی میانی تیر



شکل ۷ منحنی کوواریانس تنش در نقطه‌ی میانی تیر



شکل ۸ منحنی کوواریانس تنش در نزدیک تکیه‌گاه گیردار تیر



شکل ۹ منحنی کوواریانس تنش در نقطه‌ی انتهای تیر

از شکل (۶) می‌توان دریافت که تأثیر تابع خودهمبستگی میدان‌های اتفاقی بر کوواریانس نسبی خیز در حالت بارگذاری ۲ به طور قابل توجهی بیش از سایر حالات است. هم‌چنین کلیه‌ی منحنی‌ها به صورت هموار و نزولی هستند و در شماره موج‌های بالا میرا می‌گردند. بخش تأثیرگذار بر کوواریانس نسبی در همه‌ی حالات به ازای شماره موج‌های ۰ تا ۳ می‌باشد. پس از آن کوواریانس نسبی تنش برای نقاط میانی، نقطه نزدیک تکیه‌گاه گیردار و هم‌چنین انتهای آزاد برای حالت بارگذاری ۱ و ۲ و نزدیک تکیه‌گاه ساده برای حالت بارگذاری ۳ و ۴ و در شرایط خواص مواد و بارگذاری توأم اتفاقی محاسبه گردیده است. نتایج این تحلیل‌ها در شکل‌های (۷-۹) آمده‌اند.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود کوواریانس تنش نوسانی قابل پیش‌بینی است. زیرا مدول الاستیسیته تأثیر مستقیمی بر روی تنش دارد و در حالتی که مدول الاستیسیته اتفاقی باشد نوسانات آن سبب ایجاد نوسان در تنش می‌شود. بنابراین، روند نوسانی بودن تنش در سایر نقاط نیز مشاهده می‌شود.

از مقایسه شکل‌های (۷-۹) نتیجه می‌شود که دامنه‌ی نوسانات کوواریانس نسبی تنش در ازای تمامی شماره‌های موج به ترتیب در نزدیک تکیه‌گاه گیردار بیش‌ترین مقدار و در نقطه‌ی میانی تیر کم‌ترین مقدار را دارد. نقطه‌ای که کوواریانس تنش با دامنه‌ی بالاتر دارد، تنش بالاتری نیز خواهد داشت؛ لذا خطرناک‌ترین نقطه، نقطه‌ی نزدیک تکیه‌گاه گیردار خواهد بود. هم‌چنین با کمی دقت می‌توان دریافت که حالت بارگذاری ۲ سبب ایجاد کوواریانس تنش با بیش‌ترین مقدار دامنه نسبت به سایر نقاط و سایر حالات می‌شود. بنابراین، خطرناک‌ترین حالت بارگذاری از بین حالات مذکور، حالت ۲ می‌باشد.

ویژگی‌های مواد و بارگذاری هر دو اتفاقی هستند و بارگذاری به طور اسمی یک‌نواخت پنداشته می‌شود. مشخصات مرتبط به گونه‌ی زیرند:

$$E = 2.07 \times 10^{11} \frac{N^2}{m^2},$$

$$I = 8.6 \times 10^4 N/m^2, \quad \sigma_{yield} = 550 MPa,$$

$$q = 29928.81 N/m^2,$$

$$\sigma_{ff} = 0.1, \quad \sigma_{gg} = 0.2$$

برای یافتن میزان تغییرپذیری پاسخ سازه، چهار مقطع بحرانی؛ یعنی، مقطع میانی دهانه‌ی اول تیر (مقطع A)، مقطع میانی دهانه‌ی دوم تیر (مقطع B)، انتهای آزاد تیر (مقطع C) و مقطع میانی کل مجموعه (مقطع D) مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

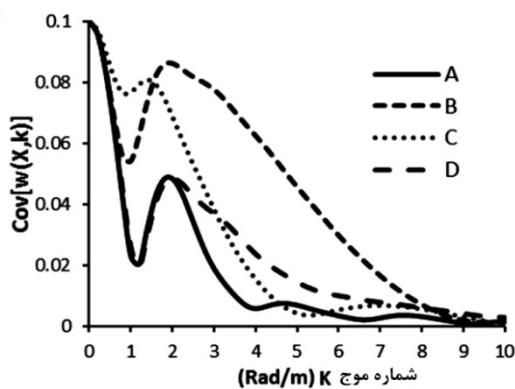
در این راستا، سه حالت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

حالت ۱: تنها ویژگی‌های مواد اتفاقی می‌باشند.

حالت ۲: تنها بارگذاری اتفاقی است.

حالت ۳: ویژگی‌های مواد و بارگذاری هر دو اتفاقی می‌باشند.

نتایج تغییرپذیری پاسخ خیز و تنش به ترتیب در شکل‌های (۱۷-۱۲) نشان داده شده‌اند. برای تجسم مناسب‌تر، نتایج هر چهار مقطع به طور یک‌جا نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۲ منحنی کوواریانس نسبی خیز در حالت خواص مواد اتفاقی در نقاط A و B و C و D

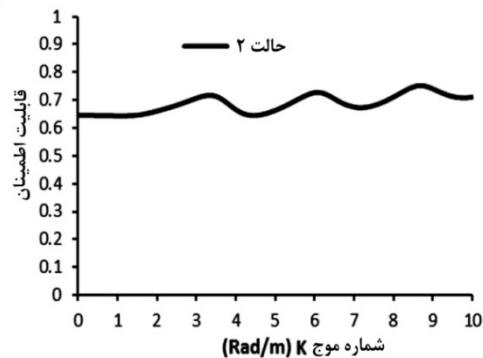
در ادامه با توجه به بحرانی‌تر بودن حالت ۲، تحلیل قابلیت اطمینان برای این حالت نیز انجام گرفته است. با توجه به این‌که سازه فولادی است لذا میزان بار در نظر گرفته در حالت ۲ منجر به حصول قابلیت اطمینان یک به ازای همه شماره موج‌ها می‌گردد.

برای بررسی تغییرات قابلیت احتمال سازه، شرایط بارگذاری مشابه شرایط کاربردی معمول سازه‌ها مطابق زیر، در نظر گرفته و پس از انجام تحلیل قابلیت اطمینان، نتیجه‌ی آن در شکل (۱۰) رسم شده است.

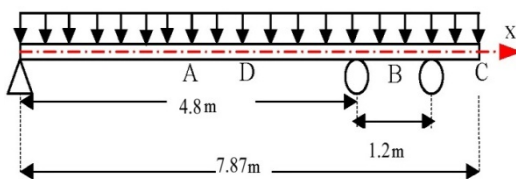
$$q = 1000 \text{ kN/m}, \quad M_0 = 10000 \text{ kNm}$$

همان‌گونه که در شکل (۱۰) مشاهده می‌شود، منحنی قابلیت اطمینان تیر نوسانی و با شیب ملایم افزایش می‌یابد.

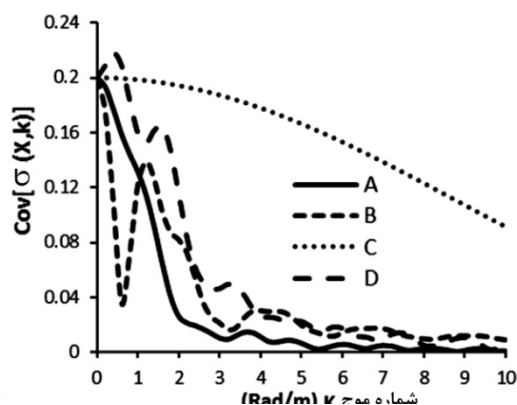
در گام دوم، مفاهیم ارائه‌شده را بر روی یک سازه‌ی کاربردی واقعی، که تریلر یک کامیون بوده و در شکل (۱۱) نشان داده شده است، بررسی می‌کنیم.



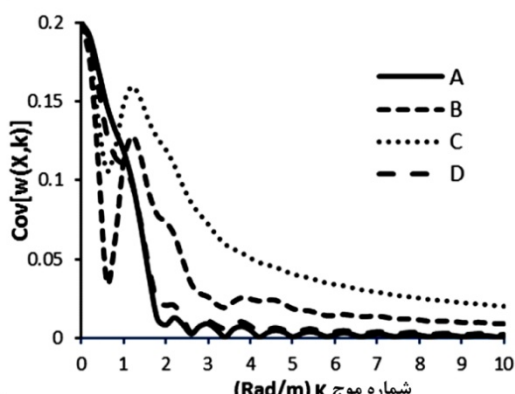
شکل ۱۰ منحنی قابلیت اطمینان در نقطه‌ی میانی تیر



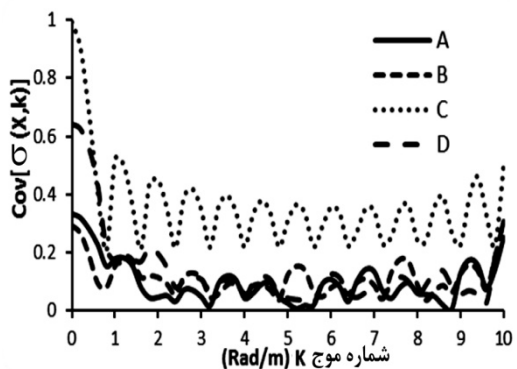
شکل ۱۱ مدل تیر سازه‌ی یک تریلر واقعی



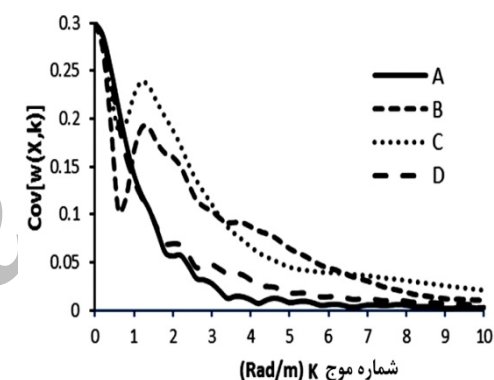
شکل ۱۶ منحنی کوواریانس نسبی تنش در حالت بارگذاری اتفاقی در نقاط A و B و C و D



شکل ۱۳ منحنی کوواریانس نسبی خیز در حالت بارگذاری اتفاقی در نقاط A و B و C و D



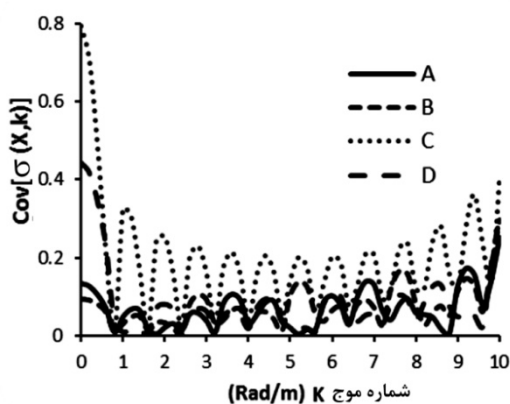
شکل ۱۷ منحنی کوواریانس نسبی تنش در حالت خواص مواد و بارگذاری اتفاقی در نقاط A و B و C و D



شکل ۱۴ منحنی کوواریانس نسبی خیز در حالت خواص مواد و بارگذاری اتفاقی در نقاط A و B و C و D

نتایج نشان داده شده در شکل های (۱۲-۱۴) آشکار می سازند که انحرافات پاسخ های خیز مقاطع B و C بیش از مقاطع دیگر است. نتایج تغییرپذیری پاسخ نشان می دهند که در تمامی حالت های در نظر گرفته شده، بزرگ ترین کوواریانس خیز در مقطع C روی می دهد زیرا مقطع یاد شده بیش ترین آزادی تحرک را دارد. در نتیجه، مقطع یاد شده بحرانی است.

شکل (۱۸) قابلیت اطمینان مقطع C را برای شماره موج های گوناگون نشان می دهد. همانگونه که از نمودار شکل (۱۸) پیدا است، در بارگذاری مشخص شده، احتمال رسیدن به حالت نامطلوب وجود

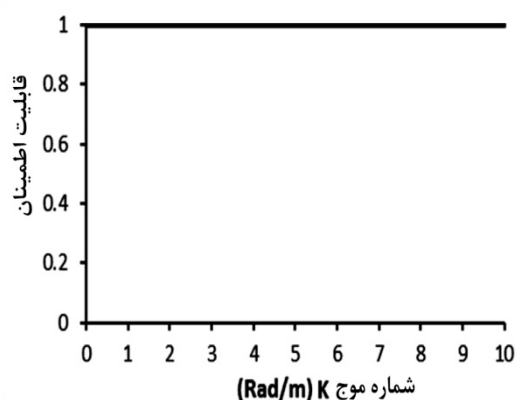


شکل ۱۵ منحنی کوواریانس نسبی تنش در حالت خواص مواد اتفاقی در نقاط A و B و C و D

بر اساس معیار جابه‌جایی مجاز، کاری جدید است. بررسی حالت‌های خاص مثال‌های ارائه‌شده با مراجع موجود، بیانگر دقت الگوریتم ارائه‌شده می‌باشد.

بررسی نتایج پاسخ‌های تغییرپذیری نشان می‌دهند که تأثیر تابع خودهم‌بستگی میدان‌های اتفاقی در پاسخ تغییرپذیری خیز عمدتاً در فرکانس‌های اولیه ظاهر می‌شود و منجر به حصول منحنی‌های میراشونده می‌گردد. حال آن‌که توابع خودهم‌بستگی میدان‌های اتفاقی ایجادشده در اثر ماهیت اتفاقی مواد سبب حصول پاسخ نوسانی تنش می‌گردد؛ لذا در این حالت، باید تأثیر تعداد موج‌های بیش‌تری از پاسخ در نظر گرفته شود. هم‌چنین مطالعه‌ی مقادیر پاسخ‌های تغییرپذیری بیانگر این نکته است که ماهیت اتفاقی مواد منجر به تأثیر حدوداً دو برابری نسبت به ماهیت اتفاقی بار بر روی پاسخ تغییرپذیری تنش می‌گردد که نشان‌دهنده‌ی اهمیت در نظر گرفتن اتفاقی بودن خواص مواد در محاسبات تنش می‌باشد. نتایج پاسخ‌های تغییرپذیری در حالت خواص مواد و بارگذاری اتفاقی گویای این نکته است که پاسخ تغییرپذیری خیز متأثر از بارگذاری اتفاقی و پاسخ تغییرپذیری تنش متأثر از خواص مواد اتفاقی است. این نتایج اهمیت در نظر گرفتن عدم قطعیت خواص مواد و بارگذاری در تحلیل سازه‌ها را آشکار می‌سازد.

ندارد. محاسبات انجام‌شده نشان می‌دهند که تنها در صورتی که شدت بارگذاری به طور قابل توجهی افزایش یابد، احتمال پیدایش حالت نامطلوب وجود خواهد داشت.



شکل ۱۸ قابلیت اطمینان مقطع C در شماره موج‌های مختلف

### نتیجه‌گیری

در مقاله‌ی کنونی، الگوریتمی برای تحلیل قابلیت اطمینان بر پایه‌ی معیار خیز و تنش مجاز برای تیر تحت خمش با ویژگی‌های مواد و بارگذاری استاتیکی اتفاقی ارائه شده است. در این زمینه مثال‌های متعددی از تیرهای تحت بار و شرایط مرزی متفاوت ارائه شده است. در این راستا، بررسی انحراف کواریانس تنش و قابلیت اطمینان تیر در شرایط اتفاقی بودن خواص مواد

پیوست

$$K_0^{(e)} = (E_0 I / L^3) \begin{bmatrix} AL^2/I & 0 & 0 & -(AL^2/I) & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -(AL^2/I) & 0 & 0 & AL^2/I & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



$$\Delta K_0^{(e)} = (E_0 I / L^6) \begin{bmatrix} AL^4 / I & 0 & 0 & -(AL^4 / I) & 0 & 0 \\ 0 & 36L^2 & 24L^3 & 0 & -36L^2 & 12L^3 \\ 0 & 24L^3 & 16L^4 & 0 & -24L^3 & 8L^4 \\ -(AL^4 / I) & 0 & 0 & AL^4 / I & 0 & 0 \\ 0 & -36L^2 & -24L^3 & 0 & 36L^2 & -12L^3 \\ 0 & 12L^3 & 8L^4 & 0 & -12L^3 & 4L^4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta K_1^{(e)} = (E_0 I / L^6) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -144L & -84L^2 & 0 & 144L & -60L^2 \\ 0 & -84L^2 & -48L^3 & 0 & 84L^2 & -36L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 144L & 84L^2 & 0 & -144L & 60L^2 \\ 0 & -60L^2 & -36L^3 & 0 & 60L^2 & -24L^3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta K_2^{(e)} = (E_0 I / L^6) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 144 & 72L & 0 & -144 & 72L \\ 0 & 72L & 36L^2 & 0 & -72L & 36L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -144 & -72L & 0 & 144 & -72L \\ 0 & 72L & 36L^2 & 0 & -72L & 36L^2 \end{bmatrix}$$

$$F_0^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} L q_0 \\ \frac{1}{12} L^2 q_0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} L q_0 \\ -\frac{1}{12} L^2 q_0 \end{bmatrix}, \Delta F_0^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta F_1^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta F_2^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \frac{q_0}{L^2} \\ -2 \frac{q_0}{L} \\ 0 \\ 3 \frac{q_0}{L^2} \\ -\frac{q_0}{L} \end{bmatrix}, \Delta F_3^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \frac{q_0}{L^3} \\ \frac{q_0}{L^2} \\ 0 \\ -2 \frac{q_0}{L^3} \\ \frac{q_0}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \left[ -\frac{1}{L} y \cdot \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) y \cdot \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \frac{1}{L} y \cdot \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) y \cdot \left( -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \right]$$

$$\Delta L_0^{(e)} = \left[ -\frac{E_0^{(e)}}{L} - \frac{6yE_0^{(e)}}{L^2} - \frac{4yE_0^{(e)}}{L} - \frac{E_0^{(e)}}{L} - \frac{6yE_0^{(e)}}{L^2} - \frac{2yE_0^{(e)}}{L} \right]$$

$$\Delta L_1^{(e)} = \left[ 0 \quad \frac{12yE_0^{(e)}}{L^3} \quad \frac{6yE_0^{(e)}}{L^2} \quad 0 \quad -\frac{12yE_0^{(e)}}{L^3} \quad \frac{6yE_0^{(e)}}{L^2} \right]$$

مراجع

1. Araujo, J.M. and Awruch, A.M., "On stochastic finite elements for structural analysis", *Computer and Structures*, Vol. 52, pp. 461-469, (1994).
2. Igusa, T. and Der Kiureghian, A., "Response of uncertain systems to stochastic excitation", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114; pp. 812-832, (1988).

3. Jensen, H. and Iwan, W.D., "Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, pp. 1012-1025, (1992).
4. Cherng, R.H. and Wen, Y.K., "Reliability of uncertain nonlinear trusses under random excitation. I", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, pp. 733-747, (1994).
5. Cherng, R.H. and Wen, Y.K., "Reliability of uncertain nonlinear trusses under random excitation. II", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, pp. 748-757, (1994).
6. Wen, Y.K. and Chen, H.C., "On fast integration for time variant structural reliability", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 2, pp. 156-162, (1987).
7. Breitung, K., "Asymptotic approximations for probability integrals", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 4, pp. 187-190, (1989).
8. Deodatis, G., "Bounds on response variability of stochastic finite element systems", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, pp. 565-85, (1990).
9. Deodatis, G., "Bounds on response variability of stochastic finite element systems: effect of statistical dependence", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 5, pp. 88-98, (1990).
10. Deodatis, G. and Shinozuka, M., "Bounds on response variability of stochastic systems", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, pp. 2543-63, (1989).
11. Friedrich, J. and Deodatis, G., "Variability response functions of stochastic plane stress/strain problems", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, pp. 1963-82, (1994).
12. Shinozuka, M. and Deodatis, G., "Response variability of stochastic finite element systems", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, pp. 499-519, (1988).
13. Deodatis, G., "Stochastic FEM sensitivity analysis of nonlinear dynamic problems", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 4, pp. 135-41, (1989).
14. Singh A.V. and Zheng, Y., "On finite element analysis of beams with random material properties", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 18, pp. 273-278, (2003).
15. Chen, C.L. and Chen, L.W., "Random vibration of a rotating blade with external and internal damping by the finite element", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 252, pp. 697-715, (2002).
16. Hosseini, S.A.A. and Khadem, S.E., "Vibration and reliability of a rotating beam with random properties under random excitation", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, pp. 1377-1388, (2007).