تحلیل شکست دینامیکی مود ترکیبی ورق مدرج تابعی با روش بدون مش*

على عبداللهي فر^(۱) محمد رحيم نامي^(۲) بهادر سرانجام^(۳)

چکیده در این مقاله تحلیل ترک مود ترکیبی ورق مدرج تابعی با استفاده از روش MLPG انجام شده است و تأثیر تغییرات مقدار و زاویهی گرادیان خواص بر ضرایب شدت تنش دینامیکی مود اول، دوم و مؤثر دینامیکی بررسی شده است. برای حل معادلات وابسته به زمان که توسط MLPG شکسته شدهاند روش های تفاضل مرکزی و نیومارک استفاده شده است. اگر چه روش انتگرال I یکی از روش های مرسوم در محاسبهی ضریب شدت تنش است اما به طور کلی این روش برای مواد مدرج تابعی قابل استفاده نیست. بناری در این مقاله برای محاسبهی ضریب شدت تنش از انتگرال مستقل از مسیر *I که برای مواد ناهمگن فرمول بندی شده، استفاده گردیده است. افر جه که روش حاضر تطابق خوبی با حل دقیق و سایر حل های موجود دارد. همچنین نتایج نشان می دهد، که حداکثر و حداقل مقدار ضریب شدت تنش مؤثر برای I

واژههای کلیدی تحلیل شکست دینامیکی مود ترکیبی، روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین، زاویهی گرادیان خواص، مـواد مـدرج تابعی، روش نیومارک، روش تفاضل مرکزی.

Mixed-Mode Dynamic Fracture Analysis of FGM Plate by MFree Method

A. Abdollahifar M.R. Nami B. Saranjam

Abstract In this paper, the mixed-Mode dynamic fracture analysis of a FGM plate is performed using MLPG method also the effect of changes in value and angle of material gradation on the dynamic Stress Intensity Fctor(SIF) of Mode I, II, and effective are investigated. To solve time dependent equations that discretized by MLPG method, the Central Difference Method (CDM) and the Newmark method are used. Although the J integral is one of the most common methods to calculate the SIF, but in general, it is not applicable for FGMs. So, in this paper the path independent integral, J*, which is formulated for the nonhomogeneous material is used to calculate stress intensity factor. Results show that the present method has good agreement with the exact and other existent solutions. Results also, show the maximum and minimum values of effective stress intensity factor for $E_2/E_1 > 1$ are occurred at material gradation angle equal to 0° and 90° respectively, and for $E_2/E_1 < 1$, vice versa.

Key Words Mixed-Mode dynamic fracture analysis, Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, Material gradation angle, Functionally graded material (FGM), Newmark method, Central difference method (CDM).

^{*} تاریخ دریافت مقاله ۹۲/٤/۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۱۱/۱٤ میباشد.

⁽۱) نویسندهی مسؤول: استادیار مهندسی مکانیک، پژوهشکدهی هوا دریا، شیراز.

⁽۲) دانشیار مهندسی مکانیک، دانشکدهی مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز.

⁽۳) استادیار مهندسی مکانیک، پژوهشکدهی هوا دریا، شیراز.

مقدمه

در اکثر مسائل واقعی بارگذاری به صورت وابسته به زمان است و هر چند سازه از نظر بار الاستواستاتیک دارای طراح مطمئنی باشد اما ممکن است با اعمال بار ناگهانی دچار خرابی گردد. به همین دلیل لازم است بسیاری از مسائل به صورت دینامیکی مورد بررسی قرار گیرند. با توجه به کاربرد زیاد مکانیک شکست دینامیکی در زمینه های گوناگون، شناسایی و مطالعه ی آن حائز اهمیت است. برای شناسایی مسائل دینامیکی، در حالت عمومی به بزرگی ترم انرژی جنبشی در بالانس انرژی توجه می شود؛ یعنی مسأله را زمانی دینامیکی فرض میکنند که نیروهای اینرسی به حدی انرژی جنبشی نیز لحاظ گردد. اما برای شناسایی مسائل شکست دینامیکی محققان تعریف جامع تری به شرح زیر ارائه کردند؛

شکست دینامیکی شامل تمام مسائل مکانیک شکستی میشود که بارگذاری یا اندازهی ترک با زمان تغییر میکند [1]. میدان تنش دینامیکی بهعلت وجود ترمهای وابسته به زمان در معادلات، تفاوت زیادی با میدان تنش استاتیکی در اطراف تـ ک دارد و مطالعـ می آن بهمراتب پیچیدهتر است. یکی از پارامترهای مهم در شکست دینامیکی، ضریب شدت تانش دینامیکی (Dynamic Stress Intensity Factor (DSIF)) است که تاکنون از روش های تجربی، تحلیلی و عددی مختلفی برای محاسبهی آن استفاده شده است. در مرجع [2] با روش آشکارسازی برای دو حالت ترک در حال رشد تحت بار ثابت و ترک ایستا تحت بار دینامیکی، ضریب شدت تنش دینامیکی محاسبه شده است. در مرجع [3] ضریب شدت تنش دینامیکی ورق تركدار مركزي همگن ايزوتروپيك بهصورت تحليلي ارائه شده است. روشهای عددی متنوعی نیز برای محاسبهی ضریب شدت تنش دینامیکی بـهکار گرفتـه شده است که در ادامه برخی از آنها ذکر می شود.

در مراجع [4,5] از روش اختلاف محدود و در مراجع [4-6] از روش المان محدود برای محاسبهی ضریب شدت تنش دینامیکی استفاده شده است. از روش های المان مرزی با معیار بازشدگی ترک در مراجع [10-12]، المان های مرزی دوتایی (DBEM) Dual Boundary Element Method)) در مراجع [13-15]، روش المان مرزی متقابل دوتایی Dual Reciprocity Boundary Element Method)) در (DRBEM)) در مراجع [16,17]، المان های مرزی دوتایی در حوزهی زمانی با معیار بازشدگی ترک و انتگرال J در مراجع [20-18] و المان مرزی در حوزهی لاپلاس در مرجع [22] برای محاسبهی ضریب شدت

روش ترکیبی نیز در مرجع [21] بکار گرفته شده است؛ بدینصورت که در معادلات انتگرال مرزی تغییر مکان و ترکشن از روش المانهای مرزی دوتایی استفاده شده و با روش حوزه زمانی، قضیهی انتقال انتگرالی و روش تقابلی دوتایی ترکیب گردیده است. علاوه بر روشهای فوق از روشهای بدون مش مانند ساولی(Cell Method) [23]، نقطه مادی مش محلی پتروف گالرکین(-24,20] و بدون مش محلی پتروف گالرکین(-24,20] نیر برای مش محلی پتروف گالرکین(-26,20] نیر برای محاسبهی ضریب شدت تنش دینامیکی بهره گرفته شده است.

در اکثر مراجع فوق شکست دینامیکی مواد ایزوتروپیک همگن بررسی شده است، تنها در مراجع [75] مواد همگن غیر ایزوتروپیک و در مرجع [27] Functionally Graded Material مواد مدرج تابعی (FGM)) برای حالت خاصی از ناهمگنی تحلیل شده است. از طرفی با گسترش روزافزون کاربرد مواد مدرج تابعی بررسی شکست دینامیکی آنها از اهمیت بالایی برخوردار شده است. زیرا مهندسان برای استفاده از این مواد در طراحی قطعات صنعتی، باید شناخت صحیحی

از رفتار آنها داشته باشند.

مواد مدرج تابعی یک راہ حل مناسب برای رفع مشکل مرز مشترک در ترکیب دو مادهی ناهمگون می باشد. این مواد اولین بار در سال ۱۹۸٤ برای تولید عایق حرارتی در سازههای فضایی و راکتورها استفاده شدند [28]. با بررسی پنج مدل موجود مواد مدرج تابعی، نشان داده شد، که مدل تغییرات پیوسته برای آنالیز دینامیکی این مواد مناسب است [29]. در مرجع [30] نشان داده شد که میدان تنش اطراف نوک ترک در صفحهی ناهمگن با فرض گرادیان مادهی پیوسته و مشتق پذیر تکه ای، مشابه با میدان تنش مادهی همگن در نوک ترک میشود، لذا مفهوم ضریب شدت تـنش برای مطالعهی شکست مواد مدرج تابعی نیے قابل تعمیم است. همچنین در این مرجع نشان داده شـد کـه اگر چه گرادیان خواص ماده بر میدان تـنش ناحیـهی اطراف نوک ترک تأثیر ندارد ولی ابعاد این ناحیه را تغییر میدهـد. در مرجـع [31] میـدان تـنش و سـایر پارامترهای شکست در یک صفحهی مدرج تـابعی بـا ترک لبهای عمود بر گرادیان ماده محاسبه شدند. در این مقاله تنش يكنواخت كششي استاتيكي σ_0 به مرزهاي صفحه اعمال گردید و پارامتر ناهمگنی (E₂/E₁) برابر سه فرض شد. در مرجع [32] نشان داده شد که انتگرال J معرفی شده توسط رایس در مواد ناهمگن مستقل از مسیر نیست و مقدار انتگرال، برابر با نرخ رهایی انرژی کرنشی نمیباشد. در مرجع [33] روش سادهای برای تعیین عددی ضرایب شدت ارائه شده و تأثیر ناهمگنی بر مقدار انتگرال J بررسی شده است. در این مقاله نشان داده شد که در صورت استفاده از المان های بسیار کوچک در اطراف ترک، می توان از انتگرال J استفاده کرد. در سال ۲۰۰۰ در مرجع [34] نشان داده شـد کـه انتگرال J برای مواد مدرج تابعی تنها زمانی مستقل از مسیر است که گرایان خواص بر ترک عمود باشد. برای \mathbf{J}^* رفع این مشکل در این مقاله انتگرال مستقل از مسیر با اضافه کردن یک ترم به انتگرال J برای مسائل مدرج

تابعی معرفی گردید و تنها در تعیین ضریب شدت تنش استاتیکی از آن استفاده شد.

هر چند که روشهای تحلیلی پاسخ به فـرم بسـته نتيجه مىدهند اما در بيشتر مسائل عملى اين پاسخ هـ قابل محاسبه نیستند در نتیجـه اسـتفاده از روشهـای عددي مانند المان محدود، المان مرزي و بدون مش، گریزناپذیر است. از طرفی استفاده از المان بهعنوان زیربنای روش المان محدود محدودیت های زیادی را در بر دارد [35]. اخیراً روش،ای محاسباتی جدیدی یدید آمدهاند که معادلات دیفرانسیل پارهای را بـدون نیاز به مشبندی حل میکنند به همین دلیل آن ها را روش های بدون مش نامیدهاند. یکی از روش های بدون مـش ارائـه شـده كـه از دقـت و پايـداري مناسبی برخوردار است روش المان آزاد گالرکین ((Element free Galerkin (EFG)) است، اما این روش بـ سـلول پــسزمينــهي كلــي بــراي انتگــرالگيــري ماتریس های به دست آمده از فرم ضعیف معادلات نیازمند است به همین دلیل این روش، بدون مش واقعمی نیست [35]. برای اجتناب از ایجاد سلول پسزمینه یکلی روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین که بر اساس فرم ضعیف متقارن محلی بوده است در سال ۱۹۹۸ ارائه گردید [36]. این روش، ساختار سادهای شبیه به روشهای فرم قـوی دارد و در عین حال، برای درونیابی متغیرہای میدان و انتگرالگیری فرم ضعیف معادلات نیاز به ایجاد یک مش مشخص بر روی کل دامنه نـدارد. لـذا ایـن روش بسیار مورد توجه و استقبال واقع شده و با موفقیت در حل مسائل بسیاری بهکار گرفته شده است. ایـن روش بر اساس تابع تست انتخابی به شش نوع تقسیم شده است اما نوع اول و پس از آن نوع پنجم بهعلت دقت و پایداری مناسب بیش از سایرین مورد توجه قرار گرفتند. در مرجع [26] تحلیل شکست دینامیکی مواد همگن ایزوتروپیک با استفاده از روش MLPG نوع اول انجام شده است. در مرجع [37] با استفاده از

از شکل اصلاح شده ی آن با نام انتگرال *J برای محاسبه ی ضرایب شدت تنش در مواد مدرج تابعی استفاده شده است. ابتدا ورق ترکدار مرکزی همگن تحت بارگذاری دینامیکی تحلیل شده و ضریب شدت منش دینامیکی محاسبه شده و با پاسخ سایر مراجع مقایسه گردیده است. سپس ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک و عمود بر ترک تحت بارگذاری دینامیکی محاسبه شده است و نتایج بددست آمده با حل المان محدود مقایسه گردیده است. در نهایت ورق ترکدار مدرج تابعی تحت بارگذاری دینامیکی تحلیل شده است و اثر مقدار و زاویه ی گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی بررسی گردیده است.

فرمولبندی روش MLPG برای مسائل الاستودینامیک ناهمگن دوبعدی، معادلهی حرکت و شرایط مرزی اساسی و طبیعی روی دامنهی Ω با مرز Γ بهصورت زیر است:

 $\sigma_{ij,j}(x,t) - \rho(x)\ddot{u}_i(x,t) = -B_i(x,t)$

$t_i(x,t) = \overline{t_i}(x,t)$	شرط مرزي طبيعي	(1)
$u_i(x,t) = \overline{u}_i(x,t)$	شرط مرزی اساسی	
$\mathbf{u}_{i}(\mathbf{x},t)\big _{t=0} = \mathbf{u}_{i}(\mathbf{x},0)$	شرط جابهجايي اوليه	
$u_i(x,t) _{t=0} = \dot{u}_i(x,0)$	شرط سرعت اوليه	

در معادلات فوق، (x,t) مشتق مؤلفههای تانسور تنش، (B_i(x,t) مؤلفههای بردار نیروی کالبدی، (x) چگالی جسم، (u_i(x,t مؤلفههای بردار تغییر ناز، (x,t) مؤلفههای بردار سرعت و مکان، (u_i(x,t) مؤلفههای بردار سرعت و مؤلفههای بردار شتاب هستند. همچنین (u_i(x,t) و مؤلفههای بردار جابجایی و روش MLPG نوع پنجم و با درونیابی حداقل مربعات متحرک (Moving Least Square interpolation) (MLS) مسائل شکست دینامیکی مواد ایزوتروپیک همگن بررسی شده و ضریب شدت تـنش دینامیکی محاسبه شده است. در مرجع [38] تحليل اسـتاتيكي و دینامیکی یک تیر سادہ مدرج تابعی با گرادیان خـواص در راستای تیر و عمود بر تیر با روش MLPG انجام شده است. آنالیز ترک دوبعدی مواد مدرج تابعی با یک زاویه ی گرادیان خاص با درون یابی MLS و تابع آزمون پله در سال ۲۰۰۹ در مرجع [39] با روش MLPG انجام شده است. در مرجع [27] از روش MLPG نوع اول برای تحلیل ترک مواد مدرج تابعی با یک زاویهی گرادیان خاص در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی بهره گرفته شده است. در مرجع [40] برای اولین بار اثر تغییر گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش استاتیکی بررسی شده است.

همانگونه که بیان شد در اکثر مراجع زاویـهی گرادیان خواص ثابت فـرض شـده اسـت و تنهـا یـک مرجع بەصورت استاتیکی اثر زاویەی گرادیان خـواص را بر ضریب شدت تنش بررسی کرده است و آنالیز شكست ديناميكي مواد مدرج تابعي با بررسي اثر تغيير زاویهی گرادیان خواص تاکنون انجام نشده است (بـر اساس اطلاعات نویسندگان). به همین دلیل در این مقاله تحليل ترک ديناميکي مود ترکيبي ورق مدرج تابعی با استفاده از روش بدون مش محلی پتروف گالرکین انجام شده و تأثیر تغییر مقدار و زاویهی گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم و مؤثر بهصورت زمانمند بررسی شده است. برای حل زمانمند معادلات شكستهشده توسط روش بدون مش از روش های نیومارک و تفاضل مرکزی بهره گرفته شده است. هر چند روش انتگرال J یک روش کارآمـد و مؤثر در محاسبهی ضرایب شدت تنش میباشد اما این روش برای مواد مدرج تابعی با زاویه یگرادیان دلخواه قابل استفاده نيست، به همين دليل در اين مقاله

در MLPG4 حل اساسی بهبود یافتهی معادلهی دیفرانسیل حاکم، در MLPG5 تابع پله هویساید و در MLPG6 مشابه تابع آزمون (روش گالرکین) است. در این مقاله تابع تست مشابه تابع وزن در تخمین MLS استفاده شده است و تابع وزن نیز تابع اسـپیلاین درجه ٤ می باشد. با اعمال تئوری دیـورژانس بـر (٥) رابطـهی زیـر بەدست مى آيد. $\int_{\Omega_{-}} \sigma_{ij}(x,t) \upsilon_{i,j}(x) \, d\Omega +$ $\int_{\Omega_0} \rho(x) \ddot{u}_i(x,t) \upsilon_i(x) \, d\Omega -$ (٦) $\int_{\Omega} B_i(x,t) v_i(x) d\Omega \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(x,t)n_j(x)v_i(x) d\Gamma = 0$ با اعمال شرایط مرزی هندسی، رابطهی زیر حاصل مي شود. $\int_{\Omega_0} \sigma_{ij}(x,t) \upsilon_{i,j}(x) \, d\Omega +$ $\int_{\Omega_0} \rho(x) \ddot{u}_i(x,t) \upsilon_i(x) \, d\Omega \int_{\Omega_{\Omega}} B_i(x,t) \upsilon_i(x) \, d\Omega \int_{\Gamma_0+\Gamma_n} (t_i(x,t)v_i(x)) \, d\Gamma +$ $\int_{\Gamma} \left(\overline{t_i}(x,t) \upsilon_i(x) \right) d\Gamma = 0$

در این مقاله برای ساخت توابع شکل به منظ ور درونیابی متغیرهای میدان ((u_i(x,t)) از روش تخمین حداقل مربعات متحرک استفاده شده است. در این روش برای هر گره دامنه تأثیری در نظر گرفته شده است و نودهای درون این دامنه در ساخت تابع شکل آن گره مؤثر هستند. دامنهی هر گره می تواند اندازه و شکلی متفاوت نسبت به سایرین داشته باشد. در این روش توابع (x,t) یا میدان میدان در (۷) می شود.

$$u^{a}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \phi_{k}(x)\hat{u}_{k}(t) \tag{A}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = C_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}(\mathbf{x},t)$$
^(Y)

$$t_{i}(\mathbf{x},t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x},t)n_{j}(\mathbf{x})$$

= $C_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}(\mathbf{x},t)n_{j}(\mathbf{x})$ ($\boldsymbol{\Upsilon}$)

که در این رابطه (n_j(x) مؤلفههای بردار عمود بر سطح است و (C_{ijkl}(x) تانسور (مرتبه چهار) الاستیسیته است که با سادهسازی برای مواد ناهمگن ایزوتروپیک بهصورت ماتریس ارائه می شود.

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x})}{1 - [\mathbf{v}(\mathbf{x})]^2} & \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})}{1 - [\mathbf{v}(\mathbf{x})]^2} & 0\\ \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})}{1 - [\mathbf{v}(\mathbf{x})]^2} & \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x})}{1 - [\mathbf{v}(\mathbf{x})]^2} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$
(£)

فرم ضعیف محلی بـرای یـک گـره بـا اسـتفاده از روش باقیمانده وزندار محلی بهصـورت زیـر تعریـف میشود:

$$\int_{\Omega_{Q}} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{ij,j}(x,t) - \rho(x)\ddot{u}_{i}(x,t) \\ +B_{i}(x,t) \end{matrix} \right\} \upsilon_{i}(x) \ d\Omega = 0 \tag{0}$$

 $v_i(x)$ ناحیه ی انتگرال گیری حول گره i است Ω_{ϱ} MLPG تابع تست می باشد که با تغییر آن، نوع روش MLPG تغییر می کند. تابع تست در MLPG1 مشابه تابع وزن در تخمین MLS، در تخمین MLS تابع دلتای دیو اسیل حاکم، MLPG3 در ایــن رابطـه (k,(x توابـع شــکل و m تعــداد گرههای موجود درون دامنه هستند.

با جایگذاری (۸) در (۷)، پس از سادهسازی در نهایت برای گره I رابطهای به فرم ماتریسی زیر بهدست میآید.

$$\sum_{J=1}^{m} (M_{IJ}(x)\hat{\hat{u}}_{J}(t) + K_{IJ}(x)\hat{\hat{u}}_{J}(t)) = f_{I}(x,t)$$

$$I = 1,2,...,N$$
(9)

که N تعداد کل گرههای مورد استفاده است و مـاتریس سختی، ماتریس جرم و بردار نیرو بهترتیب عبارتند از:

$$K_{IJ}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_Q} V_I^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) \Phi_J(\mathbf{x}) d\Omega$$

-
$$\int_{\Gamma_u} v_I(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) \Phi_J(\mathbf{x}) d\Gamma$$
 (1.1)

$$M_{IJ}(x) = \int_{\Omega_Q} \rho(x) v_I(x) \phi_J(x) d\Omega$$
 (11)

$$f_{I}(x,t) = \int_{\Gamma_{Q_{t}}} v_{I}(x) \overline{t}_{I}(x,t) d\Gamma$$

$$+ \int_{\Omega_{Q}} v_{I}(x) B_{I}(x,t) d\Omega$$
(17)

که در روابط فوق

$$V_{I}(x) = \begin{bmatrix} v_{I,x}(x) & 0 \\ 0 & v_{I,y}(x) \\ v_{I,y}(x) & v_{I,x}(x) \end{bmatrix}$$
(1°)

$$\mathbf{v}_{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v}_{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$
(15)

$$\Phi_{J}(x) = \begin{vmatrix} \phi_{I,x}(x) & 0 \\ 0 & \phi_{I,y}(x) \\ \phi_{I,y}(x) & \phi_{I,x}(x) \end{vmatrix}$$
(10)

$$\varphi_{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_{I}(\mathbf{x}) & 0\\ 0 & \phi_{I}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$
(17)

برای محاسبهی عددی انتگرالهای موجود در روابط فوق، از روش مرسوم انتگرالگیری گوسی استفاده شده است، به این ترتیب که ابتدا اندازهی دامنهی محلی تربیع (_{dq}) تعیین می شود. سپس بازهی انتگرال با تغییر متغیر مناسب به صورت استاندارد (1 و 1-) بیان می شود، در نهایت مقادیر عددی تابع

زیر انتگرال در تمام نقاط گوسی مشخص می گردنـد و پس از ضرب در تابع وزن گوسی مربـوط بـا یکـدیگر جمع میشوند.

در ایـن مقالـه دامنـهی پوشـش در روش MLS و دامنهی تربیع بـرای انتگـرالگیـری هـر دو بـهصـورت دایرهای فرض شدهاند و اندازهی آنها مطابق با روابـط زیر میباشد.

$$d_{q} = d \cdot \alpha_{q}$$

$$d_{s} = d \cdot \alpha_{s}$$
(1V)

که در ایسن روابط م_a ،d ، d_s ،d_q بهترتیب اندازهی دامنهی تربیع، اندازهی دامنهی تأثیر، متوسط فاصله گرهای، ضریب دامنهی تربیع و ضریب دامنهی پوشش هستند.

به دلیل استفاده از روش حداقل مربعات متحرک ارضای شرایط مرزی اساسی مشکلاتی را بههمراه خواهد داشت. به همین دلیل در این مقاله از روش مستقیم برای ارضای شرایط مرزی استفاده شده است، که ضمن راحتی، دقت بالایی نیز دارد.

حل مسائل مکانیک شکست با استفاده از روش های بدون مش، نیازمند اضافه کردن تعدادی گره در نزدیکی ترک است، که باعث افزایش حجم محاسبات می شود. یکی از روش های معمول برای رفع این مشکل، توسعهی توابع پایه است، که در مرجع [41] پیشنهاد شده است. با وجود سادگی این روش، استفاده از آن باعث افزایش تعداد توابع پایه و در نتیجه افزایش مدت زمان لازم برای محاسبهی تابع شکل می شود.

از طرف دیگر، میدان تغییـر مکـان در طـول تـرک دارای ناپیوستگی است، در حالی که روشهـای بـدون مش همواره تابع شکل و مشتقات آن را بهطور پیوسـته و هموار نتیجه میدهند. یکی از روش های مناسب برای ایجاد این ناپیوستگی در طول ترک روش مشاهدهای (Visibility criteria) [42] است، که اولین بار به منظور مدلسازی ترک در روش المان آزاد گالرکین ارائه شد.

در این روش (مطابق شکل ۱) ترک به عنوان یک سطح کدر فرض می شود. پس از تعیین دامنه ی پوشش تابع وزن گره ی x_I خطی که از نقطه ی دلخواه x به این گره می رسد یک پرتو نور فرض می شود. در صورتی که این پرتو به سطح ترک برخورد کند به گرهی x_I نمی رسد و لذا نقطه ی x از دامنه ی پوشش گره ی x_I حذف می شود.



شکل ۱ داهنهی پوشش در روش مشاهدهای

به این ترتیب توابع وزن در نقاط دور از ترک بدون تغییر باقی می مانند و در نزدیکی ترک دچار ناپیوستگی می شوند و به تبع آنها توابع شکل ناپیوسته می شود و در نتیجه میدان جابهجایی در امتداد ترک ناپیوسته می گردد. معیار مشاهدهای ضمن سادگی از دقت بالایی نیز برخوردار است. برای اطلاع بیش تر می توان به مرجع [42] مراجعه کرد. این روش بیش تر در تحلیل ترک، تحت بارگذاری استاتیکی مورد توجه بوده است، اما در مقاله حاضر، این روش برای تحلیل ترک دینامیکی با روش MLPG استفاده شده است.

روش تفاضل مرکزی در این روش سرعت و شـتاب در زمـان t بـر اسـاس

جابهجایی در زمانهای t · t - Δt و t + Δt بهدست می آید [35].

$$\dot{\mathbf{u}}_{t} = \frac{1}{2\Delta t} \left(-\mathbf{u}_{t-\Delta t} + \mathbf{u}_{t+\Delta t} \right)$$
(1A)

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t} = \frac{1}{\Delta t^{2}} (\mathbf{u}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{u}_{t} + \mathbf{u}_{t+\Delta t})$$
(19)

$$\sum_{\lambda t} \Delta t \Delta t \delta \Delta t = 0$$

در این روش، سرعت و شتاب در زمان t با اســتفاده از روابط زیر بهدست میآید:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t} = \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{t}$$
(Y•)

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t} = \frac{1}{\beta \left(\Delta t\right)^{2}} \left(\mathbf{u}_{t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t}\right) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t}$$
(Y1)

β و γ پارامترهای کنترل کننـدهٔ پایـداری و دقـت پاسخ هستند و در صورت ارضای شرط زیر، پایـداری روش نیومارک را تضمین میکنند [35].

$$4\beta - \frac{1}{2} \ge \gamma \ge \frac{1}{2} \tag{(YY)}$$

در این مقاله، $\beta = 0.25 = \beta$ و $\gamma = 0.5 = \gamma$ فرض شده است.

محاسبهی ضرایب شدت تنش

پس از محاسبهی میدان تنش و کرنش، از دو روش مستقیم و غیرمستقیم میتوان ضرایب شدت تنش را بر آورد نمود. در روش اول باید میدان تنش و جابهجایی اطراف نوک ترک بسیار دقیق محاسبه شوند. این روش بسیار زمانبر است، و از این رو کمتر به کار می رود. روش دوم استفاده از انتگر الهای مستقل از مسیر برای محاسبه ی غیرمستقیم ضرایب شدت تنش است. یکی از انتگرالهای مستقل از مسیر، انتگرال J است که توسط رایس در سال ۱۹۶۸ برای محیط الاستیک همگن غیرخطی بهصورت زیر ارائه شده است. [34]

$$J = \lim_{\Gamma_{\epsilon} \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_{0}} \left(Wn_{1} - \sigma_{ij}n_{j}u_{i,1} \right) d\Gamma \right\}$$
 (YY)

که در این رابطه n مؤلفهی بردار واحد عمود بـر مسـیر بستهی ۲ و W چگالی انرژی کرنشی هستند.

اگر چه روش انتگرال ل، در بسیاری از مسائل روشی بسیار موفق و کارآمد و مرسوم می باشد اما این انتگرال برای مواد مدرج تابعی همیشه مستقل از مسیر نیست و تنها زمانی مستقل از مسیر است که گرادیان خواص با ترک زاویهی ۹۰ درجه داشته باشد و در دیگر زوایای گرادیان خواص این انتگرال به مسیر وابسته است و نمی توان از آن استفاده نمود. به همین دلیل در این مقاله برای محاسبهی ضرایب شدت تنش بهجای انتگرال لا از شکل توسعهیافتهی آن (*ل) استفاده شده است. رابطهی *لا برای بارگذاری استایکی در مرجع [34] و برای بارگذاری دینامیکی در مرجع [34] ارائه شده است. با فرض عدم تنش سطحی بر روی ترک، برای مودهای اول و دوم رابطهی انتگرال *ل به شکل زیر می باشد [43].

$$J_{1}^{*} = \int_{\Gamma_{0}} Wn_{1} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{1}} n_{j} d\Gamma$$
$$-\lim_{\epsilon \to 0} \begin{cases} \int_{\Omega_{0} - \Omega_{\epsilon}} (B_{i} - \rho \ddot{u}_{i}) \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{1}} d\Omega \\ -\int_{\Omega_{0} - \Omega_{\epsilon}} \left(\frac{\partial W}{\partial x_{1}} \right) |_{explicit} d\Omega \end{cases}$$
(Y£)

$$J_{2}^{*} = \int_{\Gamma_{0}} Wn_{2} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{2}} n_{j} d\Gamma + \int_{\Gamma_{C}^{+}} (W^{+} - W^{-}) d\Gamma$$
$$- \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{\Omega_{0} - \Omega_{\epsilon}} (B_{i} - \rho \ddot{u}_{i}) \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{2}} d\Omega - \int_{\Omega_{0} - \Omega_{\epsilon}} \left(\frac{\partial W}{\partial x_{2}} \right) \right|_{explicit} d\Omega \right\}$$
(Y \diamond)

ضرایب شدت تنش بهصورت زیر به انتگرالهای *J وابسته میشود [44].

$$K_{I} = \left\{ \frac{E_{tip}^{*}J_{1}^{*}}{2} \left[1 \pm \left(1 - \left(\frac{J_{2}^{*}}{J_{1}^{*}} \right)^{2} \right)^{0.5} \right] \right\}^{0.5}$$
(77)

$$K_{II} = \pm \left\{ \frac{E_{tip}^* J_1^*}{2} \left[1 \mp \left(1 - \left(\frac{J_2^*}{J_1^*} \right)^2 \right)^{0.5} \right] \right\}^{0.5}$$
 (YV)

که در رابطهی فوق، E^{*}tip مقدار مدول یانـگ در محـل نوک ترک است. بنا به اطلاعات نویسندگان تـاکنون از انتگرال مستقل از مسیر *J در تحلیـل تـرک دینـامیکی مواد مدرج تابعی با زاویهی گرادیـان خـواص دلخـواه استفاده نشده است. از این روی در این مقالـه موفقیـت این روش در این آنالیز نشان داده شده است.

ضریب شدت تنش مؤثر از رابطهی زیر بـهدسـت میآید [45].

 $K_{eff} = \sqrt{K_I^2 + 2K_{II}^2}$

مادەي مدرج تابعي

مادهی مدرج تابعی یک راه حل مناسب برای رفع مشکل مرز مشترک در استفاده از مواد مختلف در یک قطعه میباشد. برای مدلسازی این مواد می توان ضریب پواسون را ثابت و مدول الاستیک و چگالی را به شکل نمایی زیر فرض نمود [46].

$$E(X) = E_{1} \exp(\beta X),$$

$$\zeta = \ln(E_{2} / E_{1}) / L, \quad E_{1} = E(0)$$

$$E(x, y) = E_{1} \exp(\alpha x + \gamma y),$$

$$\alpha = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \tan(\phi)^{2}}}, \quad \gamma = \frac{\zeta \tan(\phi)}{\sqrt{1 + \tan(\phi)^{2}}}$$

$$\rho(X) = \rho_{1} \exp(\beta X)$$
(Y4)

 $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \rho_1 \exp(\alpha \mathbf{x} + \gamma \mathbf{y}),$

 $(\Lambda \lambda)$

که کړ ثابت ناهمگنی، ¢ زاویـهی گرادیـان خـواص بـا ترک، X جهـت گرادیـان خـواص و x و y مختصـات ثابت روی ورق هستند.

مسائل نمونه

ورق ترکدار همگن تحت بارگذاری دینامیکی. ورق همگن ترکدار مرکزی تحت بارگذاری کششی پله طبق شکل (۲- الف) با شرایط اولیه صفر و با مشخصاتی مطابق با [3, 6, 14] به صورت زیر فرض شده است.

L=40(mm), W=104(mm), E=76 (GPa), v=0.286, a=12(mm), $\rho = 2450 (\text{kg/m}^3)$, $\bar{\sigma} = \sigma_0 H(t)(\text{GPa}) = \begin{cases} 0.4 & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$ (GPa)



در این مقاله شبکهی گرهها به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است. در ابتدا تأثیر تغییرات شبکهی گرهها و اندازهی نواحی تربیع و پوشش بر دقت روش حاضر بررسی می شود. به این منظور خطای لگاریتمی در زمان ۱۱ میکرو ثانیه (نقطه حداکثر ضریب شدت تنش دینامیکی) به صورت زیر تعریف می شود.

$$e_{r} = Log \left| \frac{K_{I}^{exact}(t) - K_{I}^{computed}(t)}{K_{I}^{exact}(t)} \right|_{t = 1 l(\mu s)}$$
(\mathcal{V} \cdots)

در رابط می ف وق K_I^{exact} ضریب شدت تنش تحلیلی [3] و K_I^{computed} ضریب شدت تنش دقیق محاسبه شده با استفاده از روش موجود می باشد.





شکل ۲ نوار مدرج تابعی شامل ترک مرکزی تحت بارگذاری کششی پله از جنس (الف) مادهی همگن، (ب) مادهی مدرج تابعی با گرادیان خواص عمود بر ترک، (ج) مادهی مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک، (د) مادهی مدرج تابعی با گرادیان خواص در زاویه دلخواه φ

در شکل (۳- الف) تغییرات خطا بر حسب تغییرات تعداد گره ارائه شده است. همانگونه که در این شکل مشاهده می شود نمودار به صورت غیر یکنوا نزولی است که به معنای کاهش خطا با افزایش تعداد گره در ناحیه است که نتیجهای قابل انتظار بود. از آنجایی که ٤٨٤ گره منظم دقت قابل قبولی ارائه کرده است در ادامهی تحلیل از این شبکه گره استفاده می شود.

هر چند که در بسیاری از مراجع دامنههای تربیع و پوشش را بهصورت مستطیلی فرض می کنند، اما در این مقاله از دامنه به شکل دایره استفاده شده است. استفاده از این نوع دامنه نه تنها باعث کدنویسی سادهتر می شود بلکه، باعث می شود به جای چهار پارامتر نامعین برای اندازهی دامنه ها [35] (در مسائل دوبعدی) تنها دو پارامتر نامعین در ابتدای حل وجود داشته باشد.

در ادامه مشاهده میشـود کـه اسـتفاده از دامنـهی دایرهای دقت مطلوبی نیز ارائه نموده است.

در اکثر مراجع مقدار ضریب دامنهها را عددی بین ۱ تا ۳ پیشنهاد کردهاند. بهمنظور بررسی تـأثیر انـدازهی دامنهها بر میزان دقت، در شکل (۳– ب و ج) تغییـرات خطا بر حسب تغییرات مقدار ضریب دامنـهی تربیـع و پوشش نشان داده شده است.

 $lpha_{
m q}$ با توجه به ایـن شـکل توصـیه مـیشـود کـه $lpha_{
m q}$ عـدی بـین ۱/۵ تـا ۲/۳ و عددی بـین ۱/۵ تـا ۲/۳ و انتخاب شوند. در این مقاله $lpha_{
m g}$ و $lpha_{
m s}$ بهترتیـب ۱/۲ و ۲ فرض شدهاند.

در شکل (٤) ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول بر حسب زمان با استفاده از روش های تفاضل مرکزی و نیومارک برای دو گام زمانی متفاوت با روش های موجود [3, 6, 14] مقایسه شده است. در این شکل مشاهده می شود که هر چند در گام های زمانی بزرگتر روش نیومارک کمی بهتر مسأله را مدل می کند اما با در نظر گرفتن گام زمانی به اندازهی کافی کوچک هر دو روش به خوبی جواب مناسب و دقیق ارائه

میکنند در ایـن شـکل بـا تغییـر انـدازهی گـام زمـانی نحوهی همگرایـی بـرای هـر دو روش کـاملاً مشـهود است.





شکل ۳ تغییرات خطا بر حسب (الف) تغییرات تعداد گره (N) (ب) تغییرات ضریب دامنهی تربیع بهازای ضرایب ثابت دامنهی پوشش، (ج) تغییرات ضریب دامنه پوشش بهازای ضرایب ثابت دامنهی تربیع

مشاهده می شود که در گمام زمانی ۲۰/۱ میکرو ثانیه پاسخ هر دو روش کاملاً با یکدیگر منطبق شده و انطباق مناسبی نیز با روش المان محدود (با ۱۷۷۲ المان و گم زمانی ۲۰/۱ میکرو ثانیه) دارد. در این شکل نیز با تغییر اندازه یگام زمانی نحوه ی همگرایی برای هر دو روش کاملاً مشهود است. در این شکل مشاهده می شود که مقدار ضریب شدت تنش بی بعد شده بهازای پارامترهای ناهمگنی ۵ و ۲/۱ یکسان می-باشد که این موضوع به دلیل تقارن موجود در مسأله مورد انتظار بوده است.



شکل ۵ ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول بیبعد شده در ورق مدرج تابعی با گرادیان خواص عمود بر ترک بهازای نسبت ناهمگنی (الف) ۵، (ب) ۲.۲



شکل ٤ ضریب شدت تنش دینامیکی بیبعد شدهی مود اول در ورق ترکدار مرکزی همگن (الف) گام زمانی ۱ میکرو ثانیه (ب) گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه

ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص عمود بر ترک تحت بارگذاری دینامیکی. ورق مدرج تابعی با گردیان خواص عمود بر ترک تحت بارگذاری کششی پله طبق شکل (۲- ب) با مشخصاتی مانند مسألهی قبل با این تفاوت که مدول الاستیسیته و چگالی مطابق با رابطهی (۲۹) فرض شده است. چگالی مطابق با رابطهی (۲۹) فرض شده است و ضریب شدت تنش نیز از هر دو روش انتگرال J و * J قابل محاسبه است. در شکل (۵) ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول برای دو پارامتر ناهمگنی ۵ و مشابه با مسألهی قبل میباشد با این تفاوت که زاویهی

گرادیان خواص نسبت به ترک به صورت دلخواه فرض

شده است (شکل ۲-د). همانگونه که بیان شد یکی از

مشکلات فراروی در مسائلی که گردایان خواص بر

مسیر ترک عمود نیستند، عدم استقلال انتگرال J نسبت

به مسیر است. لذا برای رفع این مشکل در این مقاله از

شکل اصلاح شدهی آن به نام انتگرال *J برای

در شکل (۷) و سپس ضریب شدت تـنش دینامیکی

مود اول و دوم در زمان های ۸ و ۱۲ میکرو ثانیه

بهترتیب در شکل (۹ و ۸) با تغییر زاویه ی گرادیان

خواص برای نسبتهای ناهمگنی مختلف با استفاده از

هر دو روش نیومارک و تفاضل مرکزی رسم شده

است. گام زمانی در این مسأله برای هر دو روش

نیومارک و تفاضل مرکزی برابر ۰/۰۱ میکرو ثانیه فرض

با مقایسه ی شکل (۷–الف و ۸) مشاهده می شود

که رفتار کلی ضرایب شدت تنش مود اول استاتیکی و

دینامیکی در زمانهای مختلف نسبت به تغییر زاویـهی گرادیان خواص یکسان میباشد. ضرایب شـدت تـنش

دینامیکی مود دوم در زمانهای مختلف رفتار یکسانی دارند اما رفتار آنها با ضریب شدت تـنش اسـتاتیکی

(ت)

Vormalized KI

ابتدا ضریب شدت تنش استاتیکی مود اول و دوم

محاسبهی ضرایب شدت تنش استفاده شده است.

ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک تحت بارگذاری دینامیکی. مشخصات و مدلسازی این مسأله نیز مشابه با مسألهی قبل است با این تفاوت کـه گرادیـان خـواص در ایـن مسـأله در راستای ترک فرض شده است (شکل ۲-ج). در این مسأله انتگرال J وابسته به مسير مي باشد، در نتيجه براي یافتن ضریب شدت تنش از انتگرال J نمی توان استفاده کرد. به همین دلیل از انتگرال *J استفاده شده است. در شکل (٦) ضریب شدت تـنش دینامیکی مـود اول برای دو پارامتر ناهمگنی ۵ و ۰/۲ بر حسب زمان رسم شده است. در این شکل مشاهده می شود که در گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه پاسخ هر دو روش بر یکدیگر منطبق شده و انطباق مناسبی نیز با روش المان محدود (با ۱۷۷۲ المان و گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه) دارد. اکنون پس از اطمینان از دقت مناسب روش تلفیقی حاضر (روش بدون مش محلی پتروف گالرکین، روش مشاهدهای، روش نیومارک و تفاضل مرکزی، روش انتگرال *J)، از آن برای تحلیل ورق ترکـدار مـدرج تابعی با گرادیان خـواص بـا زاویـهی دلخـواه تحـت بارگذاری دینامیکی استفاده میشود.

ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص تحت زاویهی دلخواه نسبت به ترک تحت بارگذاری دینامیکی. مشخصات و مدلسازی این مسأله نیز

> 5 Time(μs)

(الف)



شده است.

. شکل ٦ ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول بی بعد شده در ورق مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک بهازای نسبت ناهمگنی (الف) ٥، (ب) ٢.

2.5 2.5 COM Δt=0.01(is) Δ Nowmark Δt=0.01(is) Δ Nowmark Δt=0.01(is) Δ Nowmark Δt=1(is) V FEM Δt=1(is) Δ Δt



شکل ۹ ضریب شدت تنش بی بعد شدهی دینامیکی مود دوم بر حسب زاویهی گرادیان خواص بهازای پارامتر ناهمگنی مختلف در زمان (الف) ۸ میکروثانیه، (ب) ۱۲میکروثانیه

(ب)

(الف)



شکل ۱۰ ضریب شدت تنش مؤثر بیبعد بر حسب زاویهی گرادیان خواص بهازای پارامتر ناهمگنی مختلف در زمانهای مختلف بهازای پارامتر ناهمگنی(الف) ۱۰، (ب) ۱.

در شکل (۱۰) ضریب شدت تنش مؤثر بی بعد شده بر حسب زاویهی گرادیان خواص بهازای پارامتر ناهمگنی ۱۰ و ۱/۰ در زمانهای مختلف با روش نیومارک رسم شده است. در این شکل مشاهده می شود که برای 1<E2/E1 حداکثر ضریب شدت تنش مؤثر در زاویهی گرادیان خواص صفر درجه و حداقل آن در ۹۰ درجه رخ می دهد و برای 1>E2/E1 بالعکس حداکثر ضریب تنش مؤثر در زاویهی گرادیان خواص ۹۰ درجه و حداقل آن در صفر درجه رخ می دهد. هم چنین در این شکل ترتیب بزرگی ضریب شدت تنش نسبت به زمان مشاهده می شود.

نتیجه گیری و جمع بندی

در این مقاله تحلیل ترک مود ترکیبی ورق مدرج تابعی با استفاده از روش بدون مش محلی پتروف گالرکین انجام شده و تأثیر مقدار و زاویهی گرادیان خواص بر ضرایب شدت تنش مود ترکیبی دینامیکی بررسی شده است. برای حل زمانمند معادلات شکسته شده توسط روش بدون مش، روشهای نیومارک و تفاضل مرکزی بهکار گرفته شده و از انتگرال *J که فرم توسعه یافتهی

انتگرال J برای مواد ناهمگن است برای محاسبهی ضریب شدت تنش مود اول و دوم دینامیکی استفاده شده است. برای مدلسازی ترک و ایجاد ناپیوستگی در میدان تغییر مکان از روش مشاهدهای استفاده شده است. ابتدا ورق تركدار مركزي همگن تحت بارگذاري دینامیکی تحلیل شدہ و ضریب شدت تـنش دینـامیکی محاسبه شده و با پاسخ سایر مراجع مقایسه گردیده است. سپس ضریب شدت تنش دینامیکی در ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک و عمود بر ترک تحت بارگذاری دینامیکی محاسبه شده و نتايج بهدست آمده با حل المان محدود مقايسه شـده است. در نهایت ورق ترکدار مدرج تابعی با زاویه گرادیان خـواص دلخـواه تحـت بارگـذاری دینـامیکی تحلیل شده و اثر مقدار و زاویهی گرادیان خـواص بـر ضریب شدت تنش مود اول و دوم در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی بررسی و نتایج ارائه شـده اسـت. همان گونه که مشاهده می شود در مسائل اول تا سوم تطابق مطلوبی بین پاسخهای روش حاضر و روشهای دیگر وجود دارد. برای گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه هر دو روش نیومارک و تفاضل مرکزی بهخوبی به حل

می شود که رفتار ضریب شدت تنش مود اول استاتیکی 🦳 رفتار ضریب شدت تـنش مـود دوم اسـتاتیکی و ديناميکي نيز تا حـدودي بـه يکـديگر شـبيه اسـت. در شکل (۷ تا ۹) مشاهده می شود که در زاویه ی ۹۰ درجه نمودارهای ضریب شدت تنش با گرادیان خـواص مکمـل ماننـد ۱۰ و ۰/۱ بـا یکـدیگر تلاقـی یافتهاند که این موضوع با توجه به فیزیک مسأله مـورد انتظار يو د.

دقيق همگرا شدهاند. در مسألهي چهارم مشاهده ۲۰ درجه و حداقل آن در صفر درجه رخ ميدهد. و دینامیکی در زمانهای مختلف نسبت به تغییر زاویهی گرادیان خواص کاملاً شبیه یکدیگر است و برای E₂/E₁>1 حداکثر ضریب شدت تـنش مـؤثر در زاویهی گرادیان خواص صفر درجه و حداقل آن در ۹۰ درجـه رخ مــیدهـد و بـرای E₂/E₁<1 بـالعکس حداکثر ضریب تنش مؤثر در زاویهی گرادیان خواص

مراجع

- 1. Broek, D., "The Practical Use of Fracture Mechanics", Kluwer Academic Publishers, Southamptom, U.K., (1989).
- 2. Freund, L.B., "Energy flux into the tip of an extended crack in an elastic solid," J. Elasticity, Vol. 21, pp. 345-356, (1996).
- Baker, B.R., "Dynamic Stresses Created by a Moving Crack." J. Appl. Mech., Vol. 29, pp. 449-545, 3. (1962).
- Chen, Y.M. and Wilkens, M.L., "Numerical Analysis of Dynamic Crack Problems, In 4. Elastodynamic Crack Problems", Noordhoff Inter. Publng, the Netherlands, pp. 317-325, (1977).
- 5. Hua, Z.F., Tian-You, S.N. and Lan-Quao, T., "Composite materials dynamic fracture studies by generalized Shmuely difference algorithm." Eng. Fract. Mech., Vol. 54, pp. 869-77, (1996).
- Nishioka, T., Atluri, S.N., "Numerical Modeling of Dynamic Crack Propagation in Finite Bodies by 6. Moving Singular Elements", Part II. J. Appl. Mech., Vol. 47, pp. 577-582, (1980).
- Nishioka, T., "Recent Developments in Computational Dynamic Fracture Mechanics, In Dynamic 7. Fracture Mechanics", Comput. Mech. Publ., Southampton, UK, pp. 1-58, (1995)
- 8. Aberson, J.A., Anderson, J.M. and King, W.W., "Dynamic analysis of cracked structures using singularity finite elements", In: Sih GC, editor. Mech. of fract., Noordhoff Int Pub, Vol. 4, pp. 249-94, (1977).
- 9. Song, S.H. and Paulino, G.H., "Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method", Int. J. Solids and Struct., Vol. 43, pp. 4830-4866, (2006).
- 10. Nicholson, J.W., "Computation of dynamic stress intensity factors by the time domain boundary integral equation method", Analysis. Engng. Fract. Mech., Vol. 31, pp. 759-767, (1988).

- 11. Mettu, S.R. and Kim, K.S., "An application of the time domain boundary integral equation method to dynamic crack propagation", Engng Fract. mech, Vol. 39, pp. 769-782, (1991).
- 12. Dominguez, J., "Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 33, pp. 635-647, (1992).
- Aliabadi, M.H. and Portela, A., "The dual boundary elemnt method", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 33, pp. 1269-1287, (1992).
- 14. Fedelinski, P., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., "The dual boundary method: J-integral for dynamic stress intensity factors.", Int. J F., Vol. 65, pp. 369-381, (1994).
- 15. Wen, P.H., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., "Cracks in Three Dimensions: A Dynamic Dual Boundary Element Analysis", Comput. Methods Appl. Mech.Engrg, Vol. 167, pp. 139–151, (1998).
- Fedelenski, P. and Aliabadi, M.H., "The dual boundary element in dynamic fracture mechanics," Engng Anal. Bound. Elem., Vol. 12, pp. 203-210, (1993).
- Albuquerque, E.L., Sollero, P. and Fedelinski, P., "Dual reciprocity boundary element method in Laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems", Comp. and Struct., Vol. 81, pp. 1703–1713, (2003).
- Aliabadi, M.H., "Boundary element method in fracture mechanics", Appl. Mech. Rev., Vol.50, pp. 83-96, (1997).
- Zhang, C.H. and Savaidis, A., "Time-domain BEM for dynamic crack analysis", Math. and Comp. in Simul., Vol. 35, pp. 17-40, (1999).
- 20. Zhang, C.H., "A 2D hypersingular time-domain traction BEM for transient elastodynamic crack analysis," Engng Anal. in BEM, Vol. 35, pp. 17-40, (2002).
- 21. Fedelinski, P., "Boundary element method in dynamic analysis of structures with cracks", Engng Anal. in BEM, Vol. 28, pp. 1135-1147, (2004).
- 22. Zhang, C.H. and sladek, V., "A frequency-domain BEM for 3D non-synchronous crack interaction analysis in elastic solids", Enging anal in BEM, Vol. 30,pp. 167-175, (2006).
- 23. Ferretti, E., "Crack Propagation Modeling by Remeshing Using the Cell Method (CM)" CMES, Vol. 4, pp. 51–72, (2003).
- 24. GUO, Y.J. and NAIRN, J.A. "Three-Dimensional Dynamic Fracture Analysis Using the Material Point Method", CMES, Vol. 1, No. 1, pp. 11-25, (2006).
- Guo, Y.; Nairn, J.A., "Calculation of J integral and stress intensity factors using the material point method", CMES, Vol. 6, pp. 295–308, (2004).
- 26. Batra, R.C. and Ching, H.K. "Analysis of Elastodynamic Deformations near a Crack/Notch Tip by the meshless local Petrov- Galerkin (MLPG) method", CMES, Vol. 3, pp. 717–730, (2002).
- 27. Sladek, J., Sladek V. and Zhang, C., "The MLPG method for crack analysis in anisotropic

functionally graded mmaterials", SID, Vol. 1, pp. 131-144, (2005).

- Niino, M., Hirai, T. and Watanabe, R., "Functionally gradient material as barrier for space plane" J. Jpn. Son. Com. Mater., Vol. 13, pp. 257-264, (1987)
- 29. Banks-sills, L., Eliasi, R. and Berlin, Y. "Modeling of functionally graded materials in dynamic analysis", comp part B Enging: Part B, Vol. 33, pp. 7-15., (2002)
- Jin, Z.H., Noda, N., "Crack tip singular fields in nonhomogeneous materials", J Appl Mech, Vol. 61, pp. 738-740, (1994).
- 31. Marur, P.R. and Tippur, H.h V., "Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient", Int J Solids and Struct, Vol. 37, pp. 5353-5370, (2000).
- 32. Tohgo, K., Sakaguchi, M. and Ishii, H., "Applicability of fracture mechanics in strength evaluation of functionally graded materials", JSME Int. J. Series A, Vol. 39(4), pp. 479-488, (1996).
- Gu, P., Dao, M. and Asaro, R.J., "A simplified method for calculating the crack tip field of functionally graded materials using the domain integral", J Appl Mech, Vol. 66, pp. 101-108, (1999).
- 34. Chen, J., Wu, L. and Du, S., "A Modified J Integral for Functionally Graded Materials", Mech. Res. Commun., Vol. 27(3), pp. 301-306, (2000).
- 35. Liu, G.R. and Gu, Y.T, "An introduction to meshfree methods and their programming", Springer, (2005).
- Atluri, S.N. and Zhu, T., "A new Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", Comp. Mech, Vol. 22, pp. 117-127, (1998).
- 37. Liu, K., Long, Sh. and Li, G., "A simple and less-costly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for dynamic fracture problem", Engng Anal. with Bound. Elem, Vol. 30, pp. 72-76, (2006).
- Qian, L.F. and Ching, H.K., "Static and dynamic analysis of 2-D functionally graded elasticity by using meshless local Petrov-Galerkin method", Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 27(4), pp. 491-503, (2004).
- 39. Sladek, J., Sladek, V., Zhang, Ch. and Tan, CH.-L., "Evaluation of fracture parameters for crack problems in FGM by a meshless method", Theo. Appl. mech., Vol. 44(3), pp. 603-636, (2006).
- Abdollahifar, A. and Nami, M.R., "Investigating the effect of angle between the material gradation direction and crack on mixed-mode stress intensity factor of FGM plates using MLPG method". Modares Mech. Enging, in persian, Vol. 13(1), pp. 138-150, (2013).
- Fleming, M., Chu, Y., Moran, B. and Belytschko, T., "Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields", Int. J. Num. Meth. in Engng, Vol. 40, pp. 1483-1504, (1997).
- 42. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu L., "Crack propagation by Element-free Galerkin methods"

Engineering Fracture Mechanics, Vol. 51, No. 2, pp. 295-315, (1995).

- 43. Abdollahifar, A. and Nami, M.R., "Determination of dynamic stress intensity factor in FGM plates by MLPG method", IJST, Trans. of Mech. Engng, Vol. 38(M1⁺), pp. 181-194, (2014).
- 44. Eischen, J.W., "Fracture of nonhomogeneous materials", Int. J. Fract., Vol. 34(1), pp. 3-22, (1987).
- 45. Lucht, T., "Finite element analysis of three-dimensional crack growth by the use of a boundary element sub model", Eng. Fract. Mech., Vol. 76, pp. 2148-2162, (2009).
- 46. Shukla, A., "Dynamic Fracture Mechanics", World Scientific Publishing Co., (2006).