تحلیل شکست دینامیکی مود ترکیبی ورق مدرج تابعی با روش بدون مش*

علی عبداللهی فر[۱] محمد رحیم نامی[۲] بهادر سرانجام[۳]

چکیده *در این مقاله تحلیل ترک مود ترکیبی ورق مدرج تابعی با استفاده از روش MLPG انجام شده است و تأثیر تغییرات مقدار و زاویه‌ی گرادیان خواص بر ضرایب شدت تنش دینامیکی مود اول، دوم و مؤثر دینامیکی بررسی شده است. برای حل معادلات وابسته به زمان که توسط MLPG شکسته شده‌اند روش‌های تفاضل مرکزی و نیومارک استفاده شده است. اگر چه روش انتگرال J یکی از روش‌های مرسوم در محاسبه‌ی ضریب شدت تنش است اما به‌طور کلی این روش برای مواد مدرج تابعی قابل استفاده نیست. بنابراین در این مقاله برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش از انتگرال مستقل از مسیر *J که برای مواد ناهمگن فرمول‌بندی شده، استفاده گردیده است. نتایج نشان می‌دهد که روش حاضر تطابق خوبی با حل دقیق و سایر حل‌های موجود دارد. هم‌چنین نتایج نشان می‌دهد، که حداکثر و حداقل مقدار ضریب شدت تنش مؤثر برای E2/E1>1 به‌ترتیب در زاویه‌ی گرادیان خواص ۰ و ۹۰ درجه رخ می‌دهد و برای E2/E1<1 بالعکس.*

واژه‌های کلیدی تحلیل شکست دینامیکی مود ترکیبی، روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین، زاویه‌ی گرادیان خواص، مواد مدرج تابعی، روش نیومارک، روش تفاضل مرکزی.

Mixed-Mode Dynamic Fracture Analysis of FGM Plate by MFree Method

A. Abdollahifar M.R. Nami B. Saranjam

Abstract *In this paper, the mixed-Mode dynamic fracture analysis of a FGM plate is performed using MLPG method also the effect of changes in value and angle of material gradation on the dynamic Stress Intensity Fctor(SIF) of Mode I, II, and effective are investigated. To solve time dependent equations that discretized by MLPG method, the Central Difference Method (CDM) and the Newmark method are used. Although the J integral is one of the most common methods to calculate the SIF, but in general, it is not applicable for FGMs. So, in this paper the path independent integral, J*, which is formulated for the non-homogeneous material is used to calculate stress intensity factor. Results show that the present method has good agreement with the exact and other existent solutions. Results also, show the maximum and minimum values of effective stress intensity factor for $E_2/E_1>1$ are occurred at material gradation angle equal to 0° and 90° respectively, and for $E_2/E_1<1$, vice versa.*

Key Words Mixed-Mode dynamic fracture analysis, Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, Material gradation angle, Functionally graded material (FGM), Newmark method, Central difference method (CDM).

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۲/٤/۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۱۱/۱٤ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: استادیار مهندسی مکانیک، پژوهشکده‌ی هوا دریا، شیراز.

(۲) دانشیار مهندسی مکانیک، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز.

(۳) استادیار مهندسی مکانیک، پژوهشکده‌ی هوا دریا، شیراز.

مقدمه

در اکثر مسائل واقعی بارگذاری به‌صورت وابسته به زمان است و هر چند سازه از نظر بار الاستواستاتیک دارای طراح مطمئنی باشد اما ممکن است با اعمال بار ناگهانی دچار خرابی گردد. به همین دلیل لازم است بسیاری از مسائل به‌صورت دینامیکی مورد بررسی قرار گیرند. با توجه به کاربرد زیاد مکانیک شکست دینامیکی در زمینه‌های گوناگون، شناسایی و مطالعه‌ی آن حائز اهمیت است. برای شناسایی مسائل دینامیکی، در حالت عمومی به بزرگی ترم انرژی جنبشی در بالانس انرژی توجه می‌شود؛ یعنی مسأله را زمانی دینامیکی فرض می‌کنند که نیروهای اینرسی به‌حدی بزرگ باشند که برای بالانس انرژی لازم شود ترم‌های انرژی جنبشی نیز لحاظ گردد. اما برای شناسایی مسائل شکست دینامیکی محققان تعریف جامع‌تری به شرح زیر ارائه کردند؛

شکست دینامیکی شامل تمام مسائل مکانیک شکستی می‌شود که بارگذاری یا اندازه‌ی ترک با زمان تغییر می‌کند [1]. میدان تنش دینامیکی به‌علت وجود ترم‌های وابسته به زمان در معادلات، تفاوت زیادی با میدان تنش استاتیکی در اطراف ترک دارد و مطالعه‌ی آن به‌مراتب پیچیده‌تر است. یکی از پارامترهای مهم در شکست دینامیکی، ضریب شدت تنش دینامیکی (Dynamic Stress Intensity Factor (DSIF)) است که تاکنون از روش‌های تجربی، تحلیلی و عددی مختلفی برای محاسبه‌ی آن استفاده شده است. در مرجع [2] با روش آشکارسازی برای دو حالت ترک در حال رشد تحت بار ثابت و ترک ایستا تحت بار دینامیکی، ضریب شدت تنش دینامیکی محاسبه شده است. در مرجع [3] ضریب شدت تنش دینامیکی ورق ترکدار مرکزی همگن ایزوتروپیک به‌صورت تحلیلی ارائه شده است. روش‌های عددی متنوعی نیز برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش دینامیکی به‌کار گرفته شده است که در ادامه برخی از آن‌ها ذکر می‌شود.

در مراجع [4,5] از روش اختلاف محدود و در مراجع [6-9] از روش المان محدود برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش دینامیکی استفاده شده است.

از روش‌های المان مرزی با معیار بازشدگی ترک در مراجع [10-12]، المان‌های مرزی دوتایی (Dual Boundary Element Method (DBEM)) در مراجع [13-15]، روش المان مرزی متقابل دوتایی (Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM)) در مراجع [16,17]، المان‌های مرزی دوتایی در حوزه‌ی زمانی با معیار بازشدگی ترک و انتگرال J در مراجع [18-20] و المان مرزی در حوزه‌ی لاپلاس در مرجع [22] برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش دینامیکی استفاده شده است.

روش ترکیبی نیز در مرجع [21] بکار گرفته شده است؛ بدین‌صورت که در معادلات انتگرال مرزی تغییر مکان و ترکشن از روش المان‌های مرزی دوتایی استفاده شده و با روش حوزه زمانی، قضیه‌ی انتقال انتگرالی و روش تقابلی دوتایی ترکیب گردیده است.

علاوه بر روش‌های فوق از روش‌های بدون مش مانند سلولی(Cell Method) [23]، نقطه مادی (Material Point Method (MPM)) [24,25] و بدون مش محلی پتروف گالرکین(Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method) [26,27] نیز برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش دینامیکی بهره گرفته شده است.

در اکثر مراجع فوق شکست دینامیکی مواد ایزوتروپیک همگن بررسی شده است، تنها در مراجع [5,17] مواد همگن غیر ایزوتروپیک و در مرجع [27] مواد مدرج تابعی (Functionally Graded Material (FGM)) برای حالت خاصی از ناهمگنی تحلیل شده است. از طرفی با گسترش روزافزون کاربرد مواد مدرج تابعی بررسی شکست دینامیکی آن‌ها از اهمیت بالایی برخوردار شده است. زیرا مهندسان برای استفاده از این مواد در طراحی قطعات صنعتی، باید شناخت صحیحی

از رفتار آن‌ها داشته باشند.

مواد مدرج تابعی یک راه حل مناسب برای رفع مشکل مرز مشترک در ترکیب دو ماده‌ی ناهمگون می‌باشد. این مواد اولین بار در سال ۱۹۸٤ برای تولید عایق حرارتی در سازه‌های فضایی و راکتورها استفاده شدند [28]. با بررسی پنج مدل موجود مواد مدرج تابعی، نشان داده شد، که مدل تغییرات پیوسته برای آنالیز دینامیکی این مواد مناسب است [29]. در مرجع [30] نشان داده شد که میدان تنش اطراف نوک ترک در صفحه‌ی ناهمگن با فرض گرادیان ماده‌ی پیوسته و مشتق‌پذیر تکه‌ای، مشابه با میدان تنش ماده‌ی همگن در نوک ترک می‌شود، لذا مفهوم ضریب شدت تنش برای مطالعه‌ی شکست مواد مدرج تابعی نیز قابل تعمیم است. هم‌چنین در این مرجع نشان داده شد که اگر چه گرادیان خواص ماده بر میدان تنش ناحیه‌ی اطراف نوک ترک تأثیر ندارد ولی ابعاد این ناحیه را تغییر می‌دهد. در مرجع [31] میدان تنش و سایر پارامترهای شکست در یک صفحه‌ی مدرج تابعی با ترک لبه‌ای عمود بر گرادیان ماده محاسبه شدند. در این مقاله تنش یکنواخت کششی استاتیکی σ_0 به مرزهای صفحه اعمال گردید و پارامتر ناهمگنی (E_2/E_1) برابر سه فرض شد. در مرجع [32] نشان داده شد که انتگرال J معرفی‌شده توسط رایس در مواد ناهمگن مستقل از مسیر نیست و مقدار انتگرال، برابر با نرخ رهایی انرژی کرنشی نمی‌باشد. در مرجع [33] روش ساده‌ای برای تعیین عددی ضرایب شدت ارائه شده و تأثیر ناهمگنی بر مقدار انتگرال J بررسی شده است. در این مقاله نشان داده شد که در صورت استفاده از المان‌های بسیار کوچک در اطراف ترک، می‌توان از انتگرال J استفاده کرد. در سال ۲۰۰۰ در مرجع [34] نشان داده شد که انتگرال J برای مواد مدرج تابعی تنها زمانی مستقل از مسیر است که گرایان خواص بر ترک عمود باشد. برای رفع این مشکل در این مقاله انتگرال مستقل از مسیر J^* با اضافه کردن یک ترم به انتگرال J برای مسائل مدرج تابعی معرفی گردید و تنها در تعیین ضریب شدت تنش استاتیکی از آن استفاده شد.

هر چند که روش‌های تحلیلی پاسخ به فرم بسته نتیجه می‌دهند اما در بیش‌تر مسائل عملی این پاسخ‌ها قابل محاسبه نیستند در نتیجه استفاده از روش‌های عددی مانند المان محدود، المان مرزی و بدون مش، گریزناپذیر است. از طرفی استفاده از المان به‌عنوان زیربنای روش المان محدود محدودیت‌های زیادی را در بر دارد [35]. اخیراً روش‌های محاسباتی جدیدی پدید آمده‌اند که معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را بدون نیاز به مش‌بندی حل می‌کنند به همین دلیل آن‌ها را روش‌های بدون مش نامیده‌اند. یکی از روش‌های بدون مش ارائه شده که از دقت و پایداری مناسبی برخوردار است روش المان آزاد گالرکین (Element free Galerkin (EFG)) است، اما این روش به سلول پس‌زمینه‌ی کلی برای انتگرال‌گیری ماتریس‌های به‌دست آمده از فرم ضعیف معادلات نیازمند است به همین دلیل این روش، بدون مش واقعی نیست [35]. برای اجتناب از ایجاد سلول پس‌زمینه‌ی کلی روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین که بر اساس فرم ضعیف متقارن محلی بوده است در سال ۱۹۹۸ ارائه گردید [36]. این روش، ساختار ساده‌ای شبیه به روش‌های فرم قوی دارد و در عین حال، برای درون‌یابی متغیرهای میدان و انتگرال‌گیری فرم ضعیف معادلات نیاز به ایجاد یک مش مشخص بر روی کل دامنه ندارد. لذا این روش بسیار مورد توجه و استقبال واقع شده و با موفقیت در حل مسائل بسیاری به‌کار گرفته شده است. این روش بر اساس تابع تست انتخابی به شش نوع تقسیم شده است اما نوع اول و پس از آن نوع پنجم به‌علت دقت و پایداری مناسب بیش از سایرین مورد توجه قرار گرفتند. در مرجع [26] تحلیل شکست دینامیکی مواد همگن ایزوتروپیک با استفاده از روش MLPG نوع اول انجام شده است. در مرجع [37] با استفاده از

روش MLPG نوع پنجم و با درون‌یابی حداقل مربعات متحرک (Moving Least Square interpolation (MLS)) مسائل شکست دینامیکی مواد ایزوتروپیک همگن بررسی شده و ضریب شدت تنش دینامیکی محاسبه شده است. در مرجع [38] تحلیل استاتیکی و دینامیکی یک تیر ساده مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای تیر و عمود بر تیر با روش MLPG انجام شده است. آنالیز ترک دوبعدی مواد مدرج تابعی با یک زاویه‌ی گرادیان خاص با درون‌یابی MLS و تابع آزمون پله در سال ۲۰۰۶ در مرجع [39] با روش MLPG انجام شده است. در مرجع [27] از روش MLPG نوع اول برای تحلیل ترک مواد مدرج تابعی با یک زاویه‌ی گرادیان خاص در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی بهره گرفته شده است. در مرجع [40] برای اولین بار اثر تغییر گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش استاتیکی بررسی شده است.

همان‌گونه که بیان شد در اکثر مراجع زاویه‌ی گرادیان خواص ثابت فرض شده است و تنها یک مرجع به‌صورت استاتیکی اثر زاویه‌ی گرادیان خواص را بر ضریب شدت تنش بررسی کرده است و آنالیز شکست دینامیکی مواد مدرج تابعی با بررسی اثر تغییر زاویه‌ی گرادیان خواص تاکنون انجام نشده است (بر اساس اطلاعات نویسندگان). به همین دلیل در این مقاله تحلیل ترک دینامیکی مود ترکیبی ورق مدرج تابعی با استفاده از روش بدون مش محلی پتروف گالرکین انجام شده و تأثیر تغییر مقدار و زاویه‌ی گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم و مؤثر به‌صورت زمانمند بررسی شده است. برای حل زمانمند معادلات شکسته‌شده توسط روش بدون مش از روش‌های نیومارک و تفاضل مرکزی بهره گرفته شده است. هر چند روش انتگرال J یک روش کارآمد و مؤثر در محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش می‌باشد اما این روش برای مواد مدرج تابعی با زاویه‌ی گرادیان دلخواه قابل استفاده نیست، به همین دلیل در این مقاله از شکل اصلاح شده‌ی آن با نام انتگرال *J برای محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش در مواد مدرج تابعی استفاده شده است. ابتدا ورق ترکدار مرکزی همگن تحت بارگذاری دینامیکی تحلیل شده و ضریب شدت تنش دینامیکی محاسبه شده و با پاسخ سایر مراجع مقایسه گردیده است. سپس ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک و عمود بر ترک تحت بارگذاری دینامیکی محاسبه شده است و نتایج به‌دست آمده با حل المان محدود مقایسه گردیده است. در نهایت ورق ترکدار مدرج تابعی تحت بارگذاری دینامیکی تحلیل شده است و اثر مقدار و زاویه‌ی گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی بررسی گردیده است.

فرمول‌بندی روش MLPG

برای مسائل الاستودینامیک ناهمگن دوبعدی، معادله‌ی حرکت و شرایط مرزی اساسی و طبیعی روی دامنه‌ی Ω با مرز Γ به‌صورت زیر است:

$$\sigma_{ij,j}(x,t) - \rho(x)\ddot{u}_i(x,t) = -B_i(x,t)$$

$$t_i(x,t) = \bar{t}_i(x,t) \qquad \text{شرط مرزی طبیعی}$$

$$u_i(x,t) = \bar{u}_i(x,t) \qquad \text{شرط مرزی اساسی} \qquad (1)$$

$$u_i(x,t)\big|_{t=0} = u_i(x,0) \qquad \text{شرط جابه‌جایی اولیه}$$

$$u_i(x,t)\big|_{t=0} = \dot{u}_i(x,0) \qquad \text{شرط سرعت اولیه}$$

در معادلات فوق، $\sigma_{ij,j}(x,t)$ مشتق مؤلفه‌های تانسور تنش، $B_i(x,t)$ مؤلفه‌های بردار نیروی کالبدی، $\rho(x)$ چگالی جسم، $u_i(x,t)$ مؤلفه‌های بردار تغییر مکان، $\dot{u}_i(x,t)$ مؤلفه‌های بردار سرعت و $\ddot{u}_i(x,t)$ مؤلفه‌های بردار شتاب هستند. هم‌چنین $\bar{u}_i(x,t)$، $\bar{t}_i(x,t)$، $u_i(x,0)$ و $\dot{u}_i(x,0)$ به‌ترتیب مقادیر جابجایی و

تنش معلوم بر روی مرزهای طبیعی و اساسی، تغییر مکان و سرعت اولیه می‌باشند.

با استفاده از قانون هوک رابطه‌ی زیر را می‌توان بین مؤلفه‌های تغییر مکان و تنش بیان نمود.

$$\sigma_{ij}(x,t) = C_{ijkl}(x)u_{k,l}(x,t) \qquad (۲)$$

در نتیجه مؤلفه‌ی بردار تنش (ترکشن) رابطه‌ی زیر را با مؤلفه‌های تغییر مکان خواهد داشت.

$$\begin{aligned} t_i(x,t) &= \sigma_{ij}(x,t)n_j(x) \\ &= C_{ijkl}(x)u_{k,l}(x,t)n_j(x) \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در این رابطه $n_j(x)$ مؤلفه‌های بردار عمود بر سطح است و $C_{ijkl}(x)$ تانسور (مرتبه چهار) الاستیسیته است که با ساده‌سازی برای مواد ناهمگن ایزوتروپیک به‌صورت ماتریس ارائه می‌شود.

$$c(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{E(x)}{1-[\nu(x)]^2} & \dfrac{E(x)\nu(x)}{1-[\nu(x)]^2} & 0 \\ \dfrac{E(x)\nu(x)}{1-[\nu(x)]^2} & \dfrac{E(x)}{1-[\nu(x)]^2} & 0 \\ 0 & 0 & G(x) \end{bmatrix} \qquad (٤)$$

فرم ضعیف محلی برای یک گره با استفاده از روش باقیمانده وزن‌دار محلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\Omega_Q} \begin{Bmatrix} \sigma_{ij,j}(x,t) - \rho(x)\ddot{u}_i(x,t) \\ +B_i(x,t) \end{Bmatrix} \upsilon_i(x)\, d\Omega = 0 \qquad (۵)$$

Ω_Q ناحیه‌ی انتگرال‌گیری حول گره i است $\upsilon_i(x)$ تابع تست می‌باشد که با تغییر آن، نوع روش MLPG تغییر می‌کند. تابع تست در MLPG1 مشابه تابع وزن در تخمین MLS، در MLPG2 تابع دلتای دیراک، در MLPG3 مشابه تابع خطا در معادله‌ی دیفرانسیل حاکم، در MLPG4 حل اساسی بهبود یافته‌ی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم، در MLPG5 تابع پله هویساید و در MLPG6 مشابه تابع آزمون (روش گالرکین) است.

در این مقاله تابع تست مشابه تابع وزن در تخمین MLS استفاده شده است و تابع وزن نیز تابع اسپیلاین درجه ٤ می‌باشد.

با اعمال تئوری دیورژانس بر (۵) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_Q} \sigma_{ij}(x,t)\upsilon_{i,j}(x)\, d\Omega + \\ &\int_{\Omega_Q} \rho(x)\ddot{u}_i(x,t)\upsilon_i(x)\, d\Omega - \\ &\int_{\Omega_Q} B_i(x,t)\upsilon_i(x)\, d\Omega - \\ &\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(x,t)n_j(x)\upsilon_i(x)\, d\Gamma = 0 \end{aligned} \qquad (٦)$$

با اعمال شرایط مرزی هندسی، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_Q} \sigma_{ij}(x,t)\upsilon_{i,j}(x)\, d\Omega + \\ &\int_{\Omega_Q} \rho(x)\ddot{u}_i(x,t)\upsilon_i(x)\, d\Omega - \\ &\int_{\Omega_Q} B_i(x,t)\upsilon_i(x)\, d\Omega - \\ &\int_{\Gamma_Q+\Gamma_u} (t_i(x,t)\upsilon_i(x))\, d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_t} (\bar{t}_i(x,t)\upsilon_i(x))\, d\Gamma = 0 \end{aligned} \qquad (۷)$$

در این مقاله برای ساخت توابع شکل به‌منظور درون‌یابی متغیرهای میدان ($u_i(x,t)$) از روش تخمین حداقل مربعات متحرک استفاده شده است. در این روش برای هر گره دامنه تأثیری در نظر گرفته شده است و نودهای درون این دامنه در ساخت تابع شکل آن گره مؤثر هستند. دامنه‌ی هر گره می‌تواند اندازه و شکلی متفاوت نسبت به سایرین داشته باشد. در این روش توابع $u^a(x,t)$ تخمین مناسبی از متغیرهای میدان $u_i(x,t)$ ارائه می‌دهند و به همین سبب رابطه‌ی (۸) جایگزین متغیرهای میدان در (۷) می‌شود.

$$u^a(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \phi_k(x)\hat{u}_k(t) \qquad (۸)$$

در ایـن رابطـه $\phi_k(x)$ توابـع شـکل و m تعـداد گره‌های موجود درون دامنه هستند.

با جای‌گذاری (۸) در (۷)، پس از سـاده‌سـازی در نهایت برای گره I رابطه‌ای به فرم ماتریسی زیر به‌دست می‌آید.

$$\sum_{J=1}^{m}(M_{IJ}(x)\ddot{\hat{u}}_J(t)+K_{IJ}(x)\hat{u}_J(t))=f_I(x,t) \qquad I=1,2,...,N \tag{۹}$$

که N تعداد کل گره‌های مورد استفاده است و مـاتریس سختی، ماتریس جرم و بردار نیرو به‌ترتیب عبارتند از:

$$K_{IJ}(x)=\int_{\Omega_Q}V_I^T(x)\Phi_J(x)d\Omega-\int_{\Gamma_u}v_I(x)N(x)c(x)\Phi_J(x)d\Gamma \tag{۱۰}$$

$$M_{IJ}(x)=\int_{\Omega_Q}\rho(x)v_I(x)\varphi_J(x)d\Omega \tag{۱۱}$$

$$f_I(x,t)=\int_{\Gamma_{Q_t}}v_I(x)\bar{t}_I(x,t)d\Gamma+\int_{\Omega_Q}v_I(x)B_I(x,t)d\Omega \tag{۱۲}$$

که در روابط فوق

$$V_I(x)=\begin{bmatrix}v_{I,x}(x) & 0\\ 0 & v_{I,y}(x)\\ v_{I,y}(x) & v_{I,x}(x)\end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

$$v_I(x)=\begin{bmatrix}v_I(x) & 0\\ 0 & v_I(x)\end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

$$\Phi_J(x)=\begin{bmatrix}\phi_{I,x}(x) & 0\\ 0 & \phi_{I,y}(x)\\ \phi_{I,y}(x) & \phi_{I,x}(x)\end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

$$\varphi_J(x)=\begin{bmatrix}\phi_I(x) & 0\\ 0 & \phi_I(x)\end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

برای محاسـبه‌ی عـددی انتگـرال‌هـای موجـود در روابـط فـوق، از روش مرسـوم انتگـرال‌گیـری گوسـی استفاده شده است، بـه ایـن ترتیـب کـه ابتـدا انـدازه‌ی دامنه‌ی محلی تربیع (d_q) تعیین می‌شود. سپس بـازه‌ی انتگرال با تغییـر متغیـر مناسـب بـه‌صـورت اسـتاندارد (۱ و ۱-) بیان می‌شود، در نهایت مقـادیر عـددی تـابع زیر انتگرال در تمام نقاط گوسی مشخص می‌گردنـد و پس از ضرب در تابع وزن گوسی مربـوط بـا یکـدیگر جمع می‌شوند.

در ایـن مقالـه دامنـه‌ی پوشـش در روش MLS و دامنه‌ی تربیع بـرای انتگـرال‌گیـری هـر دو بـه‌صـورت دایره‌ای فرض شده‌اند و اندازه‌ی آن‌ها مطابق با روابـط زیر می‌باشد.

$$d_q=d\cdot\alpha_q \qquad d_s=d\cdot\alpha_s \tag{۱۷}$$

کـه در ایـن روابـط d_q، d_s، d، α_q و α_s بـه‌ترتیـب اندازه‌ی دامنه‌ی تربیع، اندازه‌ی دامنـه‌ی تـأثیر، متوسـط فاصله گره‌ای، ضریب دامنه‌ی تربیع و ضـریب دامنـه‌ی پوشش هستند.

به دلیل استفاده از روش حداقل مربعـات متحـرک ارضای شرایط مـرزی اساسـی مشـکلاتی را بـه‌همـراه خواهد داشت. به همـین دلیـل در ایـن مقالـه از روش مستقیم برای ارضای شرایط مرزی استفاده شده اسـت، که ضمن راحتی، دقت بالایی نیز دارد.

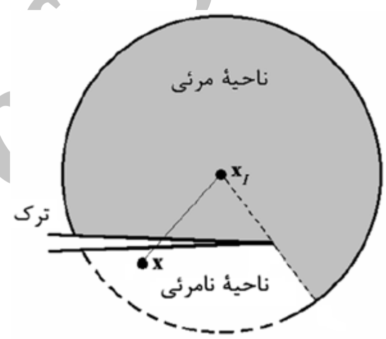
مدل‌سازی مسائل شکست در روش‌های بدون مش

حل مسائل مکانیک شکست بـا اسـتفاده از روش‌هـای بدون مش، نیازمند اضافه کردن تعدادی گره در نزدیکی ترک است، که باعث افزایش حجم محاسبات می‌شـود. یکـی از روش‌هـای معمـول بـرای رفـع ایـن مشـکل، توسعه‌ی توابع پایه است، کـه در مرجـع [41] پیشـنهاد شده است. با وجود سادگی ایـن روش، اسـتفاده از آن باعث افزایش تعداد توابع پایه و در نتیجه افزایش مدت زمان لازم برای محاسبه‌ی تابع شکل می‌شود.

از طرف دیگر، میدان تغییـر مکـان در طـول تـرک دارای ناپیوستگی است، در حالی که روش‌هـای بـدون مش همواره تابع شکل و مشتقات آن را به‌طور پیوسـته

و هموار نتیجه می‌دهند. یکی از روش‌های مناسب برای ایجاد این ناپیوستگی در طول ترک روش مشاهده‌ای (Visibility criteria) [42] است، که اولین بار به منظور مدل‌سازی ترک در روش المان آزاد گالرکین ارائه شد.

در این روش (مطابق شکل ۱) ترک به عنوان یک سطح کدر فرض می‌شود. پس از تعیین دامنه‌ی پوشش تابع وزن گره‌ی x_I، خطی که از نقطه‌ی دلخواه x به این گره می‌رسد یک پرتو نور فرض می‌شود. در صورتی که این پرتو به سطح ترک برخورد کند به گره‌ی x_I نمی‌رسد و لذا نقطه‌ی x از دامنه‌ی پوشش گره‌ی x_I حذف می‌شود.



شکل ۱ دامنه‌ی پوشش در روش مشاهده‌ای

به این ترتیب توابع وزن در نقاط دور از ترک بدون تغییر باقی می‌مانند و در نزدیکی ترک دچار ناپیوستگی می‌شوند و به تبع آن‌ها توابع شکل ناپیوسته می‌شود و در نتیجه میدان جابه‌جایی در امتداد ترک ناپیوسته می‌گردد. معیار مشاهده‌ای ضمن سادگی از دقت بالایی نیز برخوردار است. برای اطلاع بیش‌تر می‌توان به مرجع [42] مراجعه کرد. این روش بیش‌تر در تحلیل ترک، تحت بارگذاری استاتیکی مورد توجه بوده است، اما در مقاله حاضر، این روش برای تحلیل ترک دینامیکی با روش MLPG استفاده شده است.

روش تفاضل مرکزی

در این روش سرعت و شتاب در زمان t بر اساس جابه‌جایی در زمان‌های $t-\Delta t$ ، t و $t+\Delta t$ به‌دست می‌آید [35].

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{2\Delta t}(-\mathbf{u}_{t-\Delta t} + \mathbf{u}_{t+\Delta t}) \tag{۱۸}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{u}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t}) \tag{۱۹}$$

که Δt گام زمانی است.

روش نیومارک

در این روش، سرعت و شتاب در زمان t با استفاده از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + (1-\gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_t \tag{۲۰}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} + \left(1-\frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t} \tag{۲۱}$$

β و γ پارامترهای کنترل کنندهٔ پایداری و دقت پاسخ هستند و در صورت ارضای شرط زیر، پایداری روش نیومارک را تضمین می‌کنند [35].

$$4\beta - \frac{1}{2} \ge \gamma \ge \frac{1}{2} \tag{۲۲}$$

در این مقاله، $\beta = 0.25$ و $\gamma = 0.5$ فرض شده است.

محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش

پس از محاسبه‌ی میدان تنش و کرنش، از دو روش مستقیم و غیرمستقیم می‌توان ضرایب شدت تنش را برآورد نمود. در روش اول باید میدان تنش و جابه‌جایی اطراف نوک ترک بسیار دقیق محاسبه شوند. این روش بسیار زمان‌بر است، و از این‌رو کم‌تر به‌کار می‌رود. روش دوم استفاده از انتگرال‌های مستقل از

مسیر برای محاسبه‌ی غیرمستقیم ضرایب شدت تنش است. یکی از انتگرال‌های مستقل از مسیر، انتگرال J است که توسط رایس در سال ۱۹٦۸ برای محیط الاستیک همگن غیرخطی به‌صورت زیر ارائه شده است. [34]

$$J = \lim_{\Gamma_\varepsilon \to 0}\left\{\int_{\Gamma_0}\left(Wn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}\right)d\Gamma\right\} \qquad (۲۳)$$

که در این رابطه n مؤلفه‌ی بردار واحد عمود بر مسیر بسته‌ی Γ و W چگالی انرژی کرنشی هستند.

اگر چه روش انتگرال J، در بسیاری از مسائل روشی بسیار موفق و کارآمد و مرسوم می‌باشد اما این انتگرال برای مواد مدرج تابعی همیشه مستقل از مسیر نیست و تنها زمانی مستقل از مسیر است که گرادیان خواص با ترک زاویه‌ی ۹۰ درجه داشته باشد و در دیگر زوایای گرادیان خواص این انتگرال به مسیر وابسته است و نمی‌توان از آن استفاده نمود. به همین دلیل در این مقاله برای محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش به‌جای انتگرال J از شکل توسعه‌یافته‌ی آن (J*) استفاده شده است. رابطه‌ی J* برای بارگذاری استاتیکی در مرجع [34] و برای بارگذاری دینامیکی در مرجع [43] ارائه شده است. با فرض عدم تنش سطحی بر روی ترک، برای مودهای اول و دوم رابطه‌ی انتگرال J* به شکل زیر می‌باشد [43].

$$J_1^* = \int_{\Gamma_0} Wn_1 + \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}n_j d\Gamma - \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\Omega_0-\Omega_\varepsilon}(B_i - \rho\ddot{u}_i)\frac{\partial u_i}{\partial x_1}d\Omega \\ \displaystyle -\int_{\Omega_0-\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)\bigg|_{explicit} d\Omega\end{array}\right\} \qquad (۲٤)$$

$$J_2^* = \int_{\Gamma_0} Wn_2 + \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_2}n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_C^+}(W^+ - W^-)d\Gamma - \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\Omega_0-\Omega_\varepsilon}(B_i - \rho\ddot{u}_i)\frac{\partial u_i}{\partial x_2}d\Omega \\ \displaystyle -\int_{\Omega_0-\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)\bigg|_{explicit} d\Omega\end{array}\right\} \qquad (۲٥)$$

ضرایب شدت تنش به‌صورت زیر به انتگرال‌های J* وابسته می‌شود [44].

$$K_I = \left\{\frac{E_{tip}^* J_1^*}{2}\left[1 \pm \left(1 - \left(\frac{J_2^*}{J_1^*}\right)^2\right)^{0.5}\right]\right\}^{0.5} \qquad (۲٦)$$

$$K_{II} = \pm\left\{\frac{E_{tip}^* J_1^*}{2}\left[1 \mp \left(1 - \left(\frac{J_2^*}{J_1^*}\right)^2\right)^{0.5}\right]\right\}^{0.5} \qquad (۲۷)$$

که در رابطه‌ی فوق، E^*_{tip} مقدار مدول یانگ در محل نوک ترک است. بنا به اطلاعات نویسندگان تاکنون از انتگرال مستقل از مسیر J* در تحلیل ترک دینامیکی مواد مدرج تابعی با زاویه‌ی گرادیان خواص دلخواه استفاده نشده است. از این روی در این مقاله موفقیت این روش در این آنالیز نشان داده شده است.

ضریب شدت تنش مؤثر از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [45].

$$K_{eff} = \sqrt{K_I^2 + 2K_{II}^2} \qquad (۲۸)$$

ماده‌ی مدرج تابعی

ماده‌ی مدرج تابعی یک راه حل مناسب برای رفع مشکل مرز مشترک در استفاده از مواد مختلف در یک قطعه می‌باشد. برای مدل‌سازی این مواد می‌توان ضریب پواسون را ثابت و مدول الاستیک و چگالی را به شکل نمایی زیر فرض نمود [46].

$$\begin{array}{l} E(X) = E_1\exp(\beta X), \\ \zeta = \ln(E_2/E_1)/L, \quad E_1 = E(0) \\ E(x,y) = E_1\exp(\alpha x + \gamma y), \\ \alpha = \dfrac{\zeta}{\sqrt{1+\tan(\phi)^2}}, \quad \gamma = \dfrac{\zeta\tan(\phi)}{\sqrt{1+\tan(\phi)^2}} \\ \rho(X) = \rho_1\exp(\beta X) \\ \rho(x,y) = \rho_1\exp(\alpha x + \gamma y), \end{array} \qquad (۲۹)$$

که ζ ثابت ناهمگنی، φ زاویه‌ی گرادیان خواص با ترک، X جهت گرادیان خواص و x و y مختصات ثابت روی ورق هستند.

مسائل نمونه

ورق ترکدار همگن تحت بارگذاری دینامیکی. ورق همگن ترکدار مرکزی تحت بارگذاری کششی پله طبق شکل (۲- الف) با شرایط اولیه صفر و با مشخصاتی مطابق با [3, 6, 14] به‌صورت زیر فرض شده است.

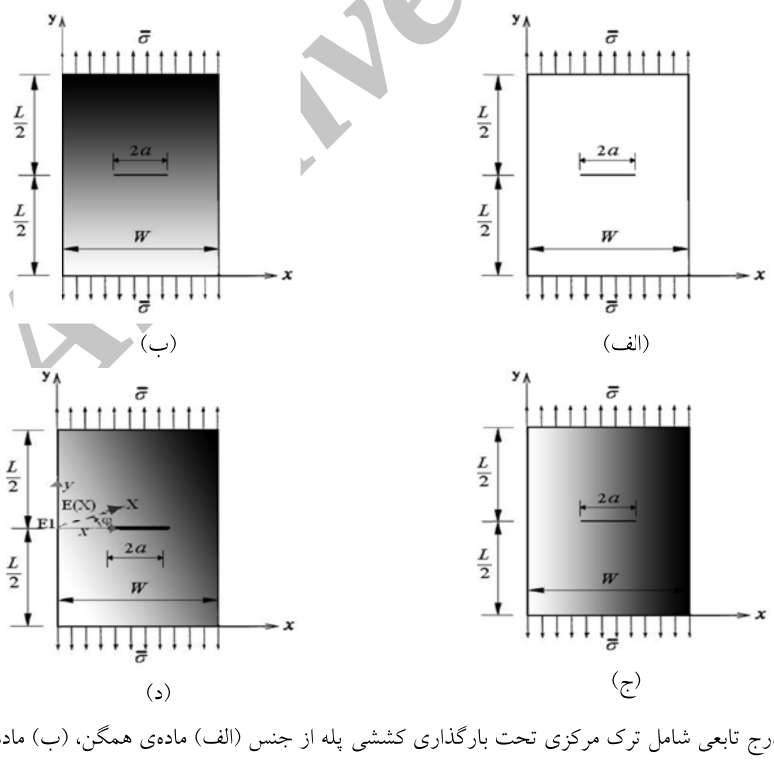
$$L=40(mm),\ W=104(mm),\ E=76\ (GPa),\ \nu=0.286,\ a=12(mm),\ \rho=2450\,(kg/m^3),$$
$$\bar{\sigma}=\sigma_0 H(t)(GPa)=\begin{cases}0.4 & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}(GPa)$$

برای مدل‌سازی این مسأله از روش MLPG با تقریب MLS و معیار مشاهده‌ای استفاده شده است. پس از شکسته شدن معادلات با استفاده از روش MLPG از هر دو روش تفاضل مرکزی و نیومارک برای حل زمانمند این معادلات بهره گرفته شده است. برای محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش از روش انتگرال J یا *J می‌توان استفاده کرد.

در این مقاله شبکه‌ی گره‌ها به‌صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است. در ابتدا تأثیر تغییرات شبکه‌ی گره‌ها و اندازه‌ی نواحی تربیع و پوشش بر دقت روش حاضر بررسی می‌شود. به این منظور خطای لگاریتمی در زمان ۱۱ میکرو ثانیه (نقطه حداکثر ضریب شدت تنش دینامیکی) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$e_r = \mathrm{Log}\left|\frac{K_I^{exact}(t)-K_I^{computed}(t)}{K_I^{exact}(t)}\right|_{t=11(\mu s)} \qquad (۳۰)$$

در رابطه‌ی فوق K_I^{exact} ضریب شدت تنش تحلیلی [3] و $K_I^{computed}$ ضریب شدت تنش دقیق محاسبه شده با استفاده از روش موجود می‌باشد.



شکل ۲ نوار مدرج تابعی شامل ترک مرکزی تحت بارگذاری کششی پله از جنس (الف) ماده‌ی همگن، (ب) ماده‌ی مدرج تابعی با گرادیان خواص عمود بر ترک، (ج) ماده‌ی مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک، (د) ماده‌ی مدرج تابعی با گرادیان خواص در زاویه دلخواه φ

در شکل (۳- الف) تغییرات خطا بر حسب تغییرات تعداد گره ارائه شده است. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود نمودار به‌صورت غیر یکنوا نزولی است که به معنای کاهش خطا با افزایش تعداد گره در ناحیه است که نتیجه‌ای قابل انتظار بود. از آن‌جایی که ٤٨٤ گره منظم دقت قابل قبولی ارائه کرده است در ادامه‌ی تحلیل از این شبکه گره استفاده می‌شود.

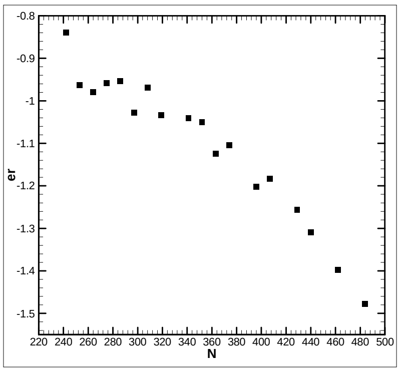
هر چند که در بسیاری از مراجع دامنه‌های تربیع و پوشش را به‌صورت مستطیلی فرض می‌کنند، اما در این مقاله از دامنه به شکل دایره استفاده شده است. استفاده از این نوع دامنه نه تنها باعث کدنویسی ساده‌تر می‌شود بلکه، باعث می‌شود به‌جای چهار پارامتر نامعین برای اندازه‌ی دامنه‌ها [35] (در مسائل دوبعدی) تنها دو پارامتر نامعین در ابتدای حل وجود داشته باشد.

در ادامه مشاهده می‌شود که استفاده از دامنه‌ی دایره‌ای دقت مطلوبی نیز ارائه نموده است.

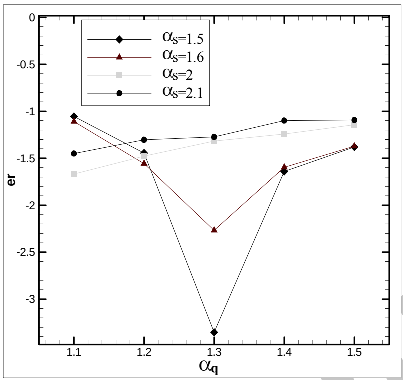
در اکثر مراجع مقدار ضریب دامنه‌ها را عددی بین ۱ تا ۳ پیشنهاد کرده‌اند. به‌منظور بررسی تأثیر اندازه‌ی دامنه‌ها بر میزان دقت، در شکل (۳- ب و ج) تغییرات خطا بر حسب تغییرات مقدار ضریب دامنه‌ی تربیع و پوشش نشان داده شده است.

با توجه به این شکل توصیه می‌شود که α_q عددی بین ۱/۲ تا ۱/٤ و α_s عددی بین ۱/۵ تا ۲/۳ انتخاب شوند. در این مقاله α_q و α_s به‌ترتیب ۱/۲ و ۲ فرض شده‌اند.

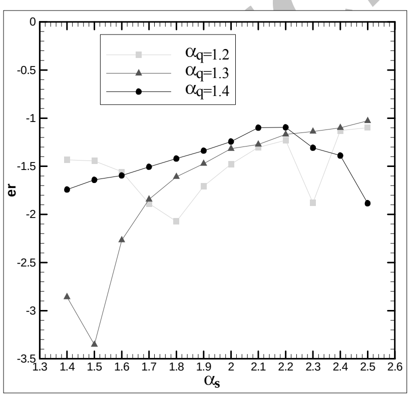
در شکل (٤) ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول بر حسب زمان با استفاده از روش‌های تفاضل مرکزی و نیومارک برای دو گام زمانی متفاوت با روش‌های موجود [3, 6, 14] مقایسه شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که هر چند در گام‌های زمانی بزرگ‌تر روش نیومارک کمی بهتر مسأله را مدل می‌کند اما با در نظر گرفتن گام زمانی به اندازه‌ی کافی کوچک هر دو روش به‌خوبی جواب مناسب و دقیق ارائه می‌کنند در این شکل با تغییر اندازه‌ی گام زمانی نحوه‌ی همگرایی برای هر دو روش کاملاً مشهود است.



(الف)

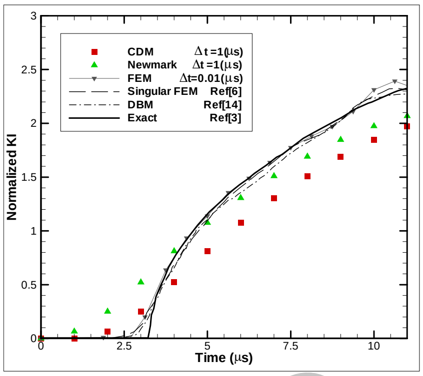


(ب)

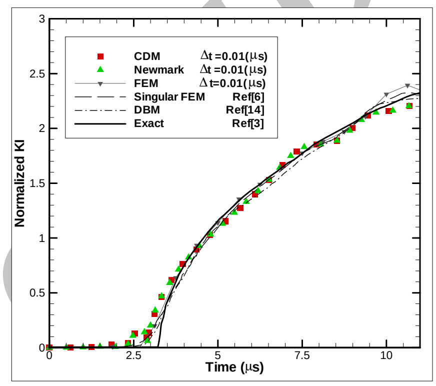


(ج)

شکل ۳ تغییرات خطا بر حسب (الف) تغییرات تعداد گره (N) (ب) تغییرات ضریب دامنه‌ی تربیع به‌ازای ضرایب ثابت دامنه‌ی پوشش، (ج) تغییرات ضریب دامنه پوشش به‌ازای ضرایب ثابت دامنه‌ی تربیع



(الف)

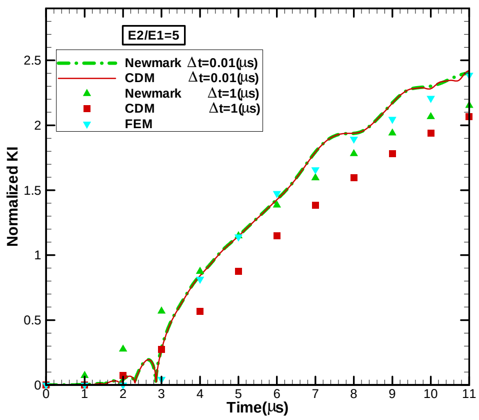


(ب)

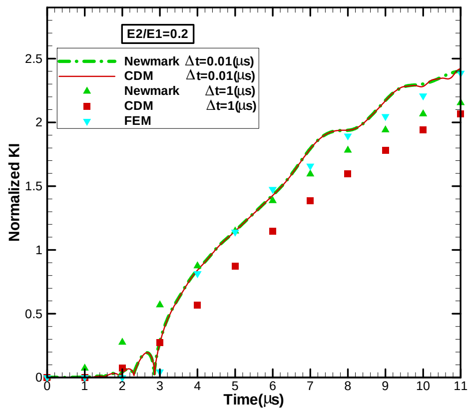
شکل ٤ ضریب شدت تنش دینامیکی بی‌بعد شده‌ی مود اول در ورق ترکدار مرکزی همگن (الف) گام زمانی ۱ میکرو ثانیه (ب) گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه

ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص عمود بر ترک تحت بارگذاری دینامیکی. ورق مدرج تابعی با گردیان خواص عمود بر ترک تحت بارگذاری کششی پله طبق شکل (۲- ب) با مشخصاتی مانند مسأله‌ی قبل با این تفاوت که مدول الاستیسیته و چگالی مطابق با رابطه‌ی (۲۹) فرض شده است. مدلسازی این مسأله کاملاً مشابه با مسأله‌ی قبل است و ضریب شدت تنش نیز از هر دو روش انتگرال J و J^* قابل محاسبه است. در شکل (۵) ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول برای دو پارامتر ناهمگنی ۵ و ۰.۲ بر حسب زمان رسم شده است. در این شکل

مشاهده می‌شود که در گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه پاسخ هر دو روش کاملاً با یکدیگر منطبق شده و انطباق مناسبی نیز با روش المان محدود (با ۱۷۷۲ المان و گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه) دارد. در این شکل نیز با تغییر اندازه‌ی گام زمانی نحوه‌ی همگرایی برای هر دو روش کاملاً مشهود است. در این شکل مشاهده می‌شود که مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد شده به‌ازای پارامترهای ناهمگنی ۵ و ۰/۲ یکسان می‌باشد که این موضوع به دلیل تقارن موجود در مسأله مورد انتظار بوده است.



(الف)



(ب)

شکل ۵ ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول بی‌بعد شده در ورق مدرج تابعی با گرادیان خواص عمود بر ترک به‌ازای نسبت ناهمگنی (الف) ۵، (ب) ۰.۲

ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک تحت بارگذاری دینامیکی. مشخصات و مدل‌سازی این مسأله نیز مشابه با مسأله‌ی قبل است با این تفاوت که گرادیان خواص در این مسأله در راستای ترک فرض شده است (شکل ۲–ج). در این مسأله انتگرال J وابسته به مسیر می‌باشد، در نتیجه برای یافتن ضریب شدت تنش از انتگرال J نمی‌توان استفاده کرد. به همین دلیل از انتگرال J^* استفاده شده است.

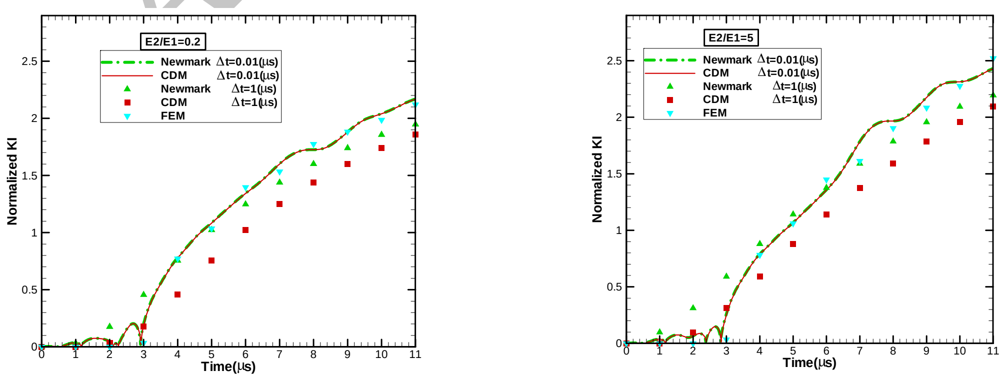
در شکل (٦) ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول برای دو پارامتر ناهمگنی ۵ و ۰/۲ بر حسب زمان رسم شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که در گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه پاسخ هر دو روش بر یکدیگر منطبق شده و انطباق مناسبی نیز با روش المان محدود (با ۱۷۷۲ المان و گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه) دارد.

اکنون پس از اطمینان از دقت مناسب روش تلفیقی حاضر (روش بدون مش محلی پتروف گالرکین، روش مشاهده‌ای، روش نیومارک و تفاضل مرکزی، روش انتگرال J^*)، از آن برای تحلیل ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص با زاویه‌ی دلخواه تحت بارگذاری دینامیکی استفاده می‌شود.

ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص تحت زاویه‌ی دلخواه نسبت به ترک تحت بارگذاری دینامیکی. مشخصات و مدل‌سازی این مسأله نیز مشابه با مسأله‌ی قبل می‌باشد با این تفاوت که زاویه‌ی گرادیان خواص نسبت به ترک به‌صورت دلخواه فرض شده است (شکل ۲–د). همان‌گونه که بیان شد یکی از مشکلات فراوری در مسائلی که گرادیان خواص بر مسیر ترک عمود نیستند، عدم استقلال انتگرال J نسبت به مسیر است. لذا برای رفع این مشکل در این مقاله از شکل اصلاح شده‌ی آن به نام انتگرال J^* برای محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش استفاده شده است.

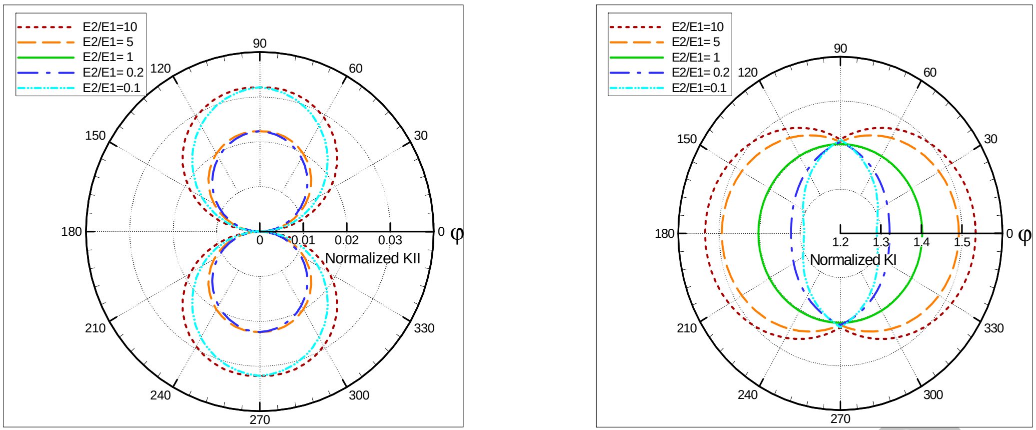
ابتدا ضریب شدت تنش استاتیکی مود اول و دوم در شکل (۷) و سپس ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول و دوم در زمان های ۸ و ۱۲ میکرو ثانیه به‌ترتیب در شکل (۹ و ۸) با تغییر زاویه‌ی گرادیان خواص برای نسبت‌های ناهمگنی مختلف با استفاده از هر دو روش نیومارک و تفاضل مرکزی رسم شده است. گام زمانی در این مسأله برای هر دو روش نیومارک و تفاضل مرکزی برابر ۰/۰۱ میکرو ثانیه فرض شده است.

با مقایسه‌ی شکل (۷–الف و ۸) مشاهده می‌شود که رفتار کلی ضرایب شدت تنش مود اول استاتیکی و دینامیکی در زمان‌های مختلف نسبت به تغییر زاویه‌ی گرادیان خواص یکسان می‌باشد. ضرایب شدت تنش دینامیکی مود دوم در زمان‌های مختلف رفتار یکسانی دارند اما رفتار آن‌ها با ضریب شدت تنش استاتیکی مود دوم کمی متفاوت است.



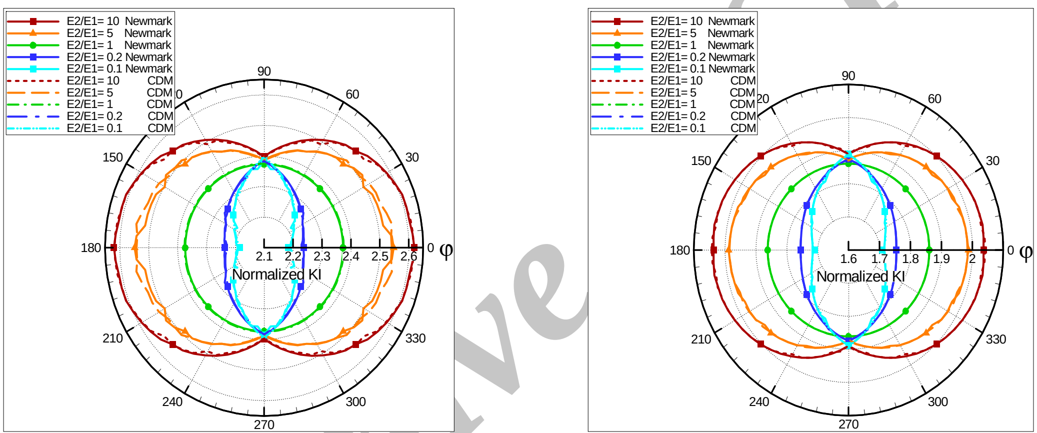
(ب)		(الف)

شکل ٦ ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول بی‌بعد شده در ورق مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک به‌ازای نسبت ناهمگنی (الف) ۵، (ب) ۰.۲



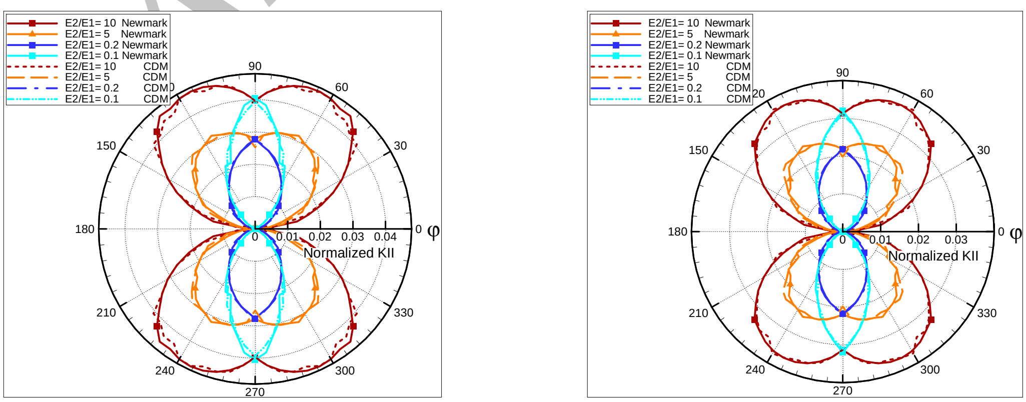
(ب) (الف)

شکل ۷ ضریب شدت تنش استاتیکی بی‌بعد شده (الف) مود اول، (ب)مود دوم



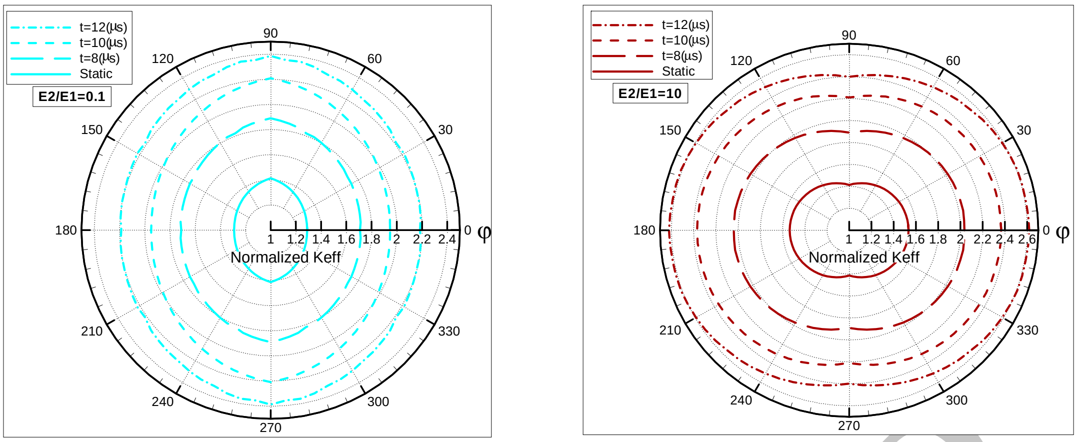
(ب) (الف)

شکل ۸ ضریب شدت تنش بی‌بعد شده‌ی دینامیکی مود اول بر حسب زاویه‌ی گرادیان خواص به‌ازای پارامتر ناهمگنی مختلف در زمان (الف) ۸ میکروثانیه، (ب) ۱۲میکروثانیه



(ب) (الف)

شکل ۹ ضریب شدت تنش بی‌بعد شده‌ی دینامیکی مود دوم بر حسب زاویه‌ی گرادیان خواص به‌ازای پارامتر ناهمگنی مختلف در زمان (الف) ۸ میکروثانیه، (ب) ۱۲میکروثانیه



(الف) (ب)

شکل ۱۰ ضریب شدت تنش مؤثر بی‌بعد بر حسب زاویه‌ی گرادیان خواص به‌ازای پارامتر ناهمگنی مختلف در زمان‌های مختلف به‌ازای پارامتر ناهمگنی(الف) ۱۰، (ب) ۰.۱

در شکل (۱۰) ضریب شدت تنش مؤثر بی‌بعد شده بر حسب زاویه‌ی گرادیان خواص به‌ازای پارامتر ناهمگنی ۱۰ و ۰/۱ در زمان‌های مختلف با روش نیومارک رسم شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که برای E2/E1>1 حداکثر ضریب شدت تنش مؤثر در زاویه‌ی گرادیان خواص صفر درجه و حداقل آن در ۹۰ درجه رخ می‌دهد و برای E2/E1<1 بالعکس حداکثر ضریب تنش مؤثر در زاویه‌ی گرادیان خواص ۹۰ درجه و حداقل آن در صفر درجه رخ می‌دهد. هم‌چنین در این شکل ترتیب بزرگی ضریب شدت تنش نسبت به زمان مشاهده می‌شود.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله تحلیل ترک مود ترکیبی ورق مدرج تابعی با استفاده از روش بدون مش محلی پتروف گالرکین انجام شده و تأثیر مقدار و زاویه‌ی گرادیان خواص بر ضرایب شدت تنش مود ترکیبی دینامیکی بررسی شده است. برای حل زمانمند معادلات شکسته شده توسط روش بدون مش، روش‌های نیومارک و تفاضل مرکزی به‌کار گرفته شده و از انتگرال *J که فرم توسعه یافته‌ی انتگرال J برای مواد ناهمگن است برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش مود اول و دوم دینامیکی استفاده شده است. برای مدل‌سازی ترک و ایجاد ناپیوستگی در میدان تغییر مکان از روش مشاهده‌ای استفاده شده است. ابتدا ورق ترکدار مرکزی همگن تحت بارگذاری دینامیکی تحلیل شده و ضریب شدت تنش دینامیکی محاسبه شده و با پاسخ سایر مراجع مقایسه گردیده است. سپس ضریب شدت تنش دینامیکی در ورق ترکدار مدرج تابعی با گرادیان خواص در راستای ترک و عمود بر ترک تحت بارگذاری دینامیکی محاسبه شده و نتایج به‌دست آمده با حل المان محدود مقایسه شده است. در نهایت ورق ترکدار مدرج تابعی با زاویه گرادیان خواص دلخواه تحت بارگذاری دینامیکی تحلیل شده و اثر مقدار و زاویه‌ی گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم در هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی بررسی و نتایج ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در مسائل اول تا سوم تطابق مطلوبی بین پاسخ‌های روش حاضر و روش‌های دیگر وجود دارد. برای گام زمانی ۰/۰۱ میکرو ثانیه هر دو روش نیومارک و تفاضل مرکزی به‌خوبی به حل

دقیق همگرا شده‌اند. در مسأله‌ی چهارم مشاهده می‌شود که رفتار ضریب شدت تنش مود اول استاتیکی و دینامیکی در زمان‌های مختلف نسبت به تغییر زاویه‌ی گرادیان خواص کاملاً شبیه یکدیگر است و برای $E_2/E_1>1$ حداکثر ضریب شدت تنش مؤثر در زاویه‌ی گرادیان خواص صفر درجه و حداقل آن در ۹۰ درجه رخ می‌دهد و برای $E_2/E_1<1$ بالعکس حداکثر ضریب تنش مؤثر در زاویه‌ی گرادیان خواص ۹۰ درجه و حداقل آن در صفر درجه رخ می‌دهد. رفتار ضریب شدت تنش مود دوم استاتیکی و دینامیکی نیز تا حدودی به یکدیگر شبیه است. در شکل (۷ تا ۹) مشاهده می‌شود که در زاویه‌ی ۹۰ درجه نمودارهای ضریب شدت تنش با گرادیان خواص مکمل مانند ۱۰ و ۰/۱ با یکدیگر تلاقی یافته‌اند که این موضوع با توجه به فیزیک مسأله مورد انتظار بود.

مراجع

1. Broek, D., "The Practical Use of Fracture Mechanics", Kluwer Academic Publishers, Southamptom, U.K., (1989).
2. Freund, L.B., "Energy flux into the tip of an extended crack in an elastic solid," J. Elasticity, Vol. 21, pp. 345-356, (1996).
3. Baker, B.R., "Dynamic Stresses Created by a Moving Crack." J. Appl. Mech., Vol. 29, pp. 449-545, (1962).
4. Chen, Y.M. and Wilkens, M.L., "Numerical Analysis of Dynamic Crack Problems, In Elastodynamic Crack Problems", Noordhoff Inter. Publng, the Netherlands, pp. 317–325, (1977).
5. Hua, Z.F., Tian-You, S.N. and Lan-Quao, T., "Composite materials dynamic fracture studies by generalized Shmuely difference algorithm." Eng. Fract. Mech., Vol. 54, pp. 869–77, (1996).
6. Nishioka, T., Atluri, S.N., "Numerical Modeling of Dynamic Crack Propagation in Finite Bodies by Moving Singular Elements", Part II. J. Appl. Mech., Vol. 47, pp. 577-582, (1980).
7. Nishioka, T., "Recent Developments in Computational Dynamic Fracture Mechanics, In Dynamic Fracture Mechanics", Comput. Mech. Publ., Southampton, UK, pp. 1–58, (1995)
8. Aberson, J.A., Anderson, J.M. and King, W.W., "Dynamic analysis of cracked structures using singularity finite elements", In: Sih GC, editor. Mech. of fract., Noordhoff Int Pub, Vol. 4, pp. 249–94, (1977).
9. Song, S.H. and Paulino, G.H., "Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method", Int. J. Solids and Struct., Vol. 43, pp. 4830–4866, (2006).
10. Nicholson, J.W., "Computation of dynamic stress intensity factors by the time domain boundary integral equation method", Analysis. Engng. Fract. Mech., Vol. 31, pp. 759-767, (1988).

11. Mettu, S.R. and Kim, K.S., "An application of the time domain boundary integral equation method to dynamic crack propagation", Engng Fract. mech, Vol. 39, pp. 769-782, (1991).
12. Dominguez, J., "Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 33, pp. 635-647, (1992).
13. Aliabadi, M.H. and Portela, A., "The dual boundary elemnt method", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 33, pp. 1269-1287, (1992).
14. Fedelinski, P., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., "The dual boundary method: J-integral for dynamic stress intensity factors.", Int. J F., Vol. 65, pp. 369-381, (1994).
15. Wen, P.H., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., "Cracks in Three Dimensions: A Dynamic Dual Boundary Element Analysis", Comput. Methods Appl. Mech.Engrg, Vol. 167, pp. 139–151, (1998).
16. Fedelenski, P. and Aliabadi, M.H., "The dual boundary element in dynamic fracture mechanics," Engng Anal. Bound. Elem., Vol. 12, pp. 203-210, (1993).
17. Albuquerque, E.L., Sollero, P. and Fedelinski, P., "Dual reciprocity boundary element method in Laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems", Comp. and Struct., Vol. 81, pp. 1703–1713, (2003).
18. Aliabadi, M.H., "Boundary element method in fracture mechanics", Appl. Mech. Rev., Vol.50, pp. 83-96, (1997).
19. Zhang, C.H. and Savaidis, A., "Time-domain BEM for dynamic crack analysis", Math. and Comp. in Simul., Vol. 35, pp. 17-40, (1999).
20. Zhang, C.H., "A 2D hypersingular time-domain traction BEM for transient elastodynamic crack analysis," Engng Anal. in BEM, Vol. 35, pp. 17-40, (2002).
21. Fedelinski, P., "Boundary element method in dynamic analysis of structures with cracks", Engng Anal. in BEM, Vol. 28, pp. 1135-1147, (2004).
22. Zhang, C.H. and sladek, V., "A frequency-domain BEM for 3D non-synchronous crack interaction analysis in elastic solids", Enging anal in BEM, Vol. 30,pp. 167-175, (2006).
23. Ferretti, E., "Crack Propagation Modeling by Remeshing Using the Cell Method (CM)" CMES, Vol. 4, pp. 51–72, (2003).
24. GUO, Y.J. and NAIRN, J.A. "Three-Dimensional Dynamic Fracture Analysis Using the Material Point Method", CMES, Vol. 1, No. 1, pp. 11-25, (2006).
25. Guo, Y.; Nairn, J.A., "Calculation of J integral and stress intensity factors using the material point method", CMES, Vol. 6, pp. 295–308, (2004).
26. Batra, R.C. and Ching, H.K. "Analysis of Elastodynamic Deformations near a Crack/Notch Tip by the meshless local Petrov- Galerkin (MLPG) method", CMES, Vol. 3, pp. 717–730, (2002).
27. Sladek, J., Sladek V. and Zhang, C., "The MLPG method for crack analysis in anisotropic

functionally graded mmaterials", SID, Vol. 1, pp. 131– 144, (2005).

28. Niino, M., Hirai, T. and Watanabe, R., "Functionally gradient material as barrier for space plane" J. Jpn. Son. Com. Mater., Vol. 13, pp. 257-264, (1987)
29. Banks-sills, L., Eliasi, R. and Berlin, Y. "Modeling of functionally graded materials in dynamic analysis", comp part B Enging: Part B, Vol. 33, pp. 7-15., (2002)
30. Jin, Z.H., Noda, N., "Crack tip singular fields in nonhomogeneous materials", J Appl Mech, Vol. 61, pp. 738-740, (1994).
31. Marur, P.R. and Tippur, H.h V., "Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient", Int J Solids and Struct, Vol. 37, pp. 5353-5370, (2000).
32. Tohgo, K., Sakaguchi, M. and Ishii, H., "Applicability of fracture mechanics in strength evaluation of functionally graded materials", JSME Int. J. Series A, Vol. 39(4), pp. 479-488, (1996).
33. Gu, P., Dao, M. and Asaro, R.J., "A simplified method for calculating the crack tip field of functionally graded materials using the domain integral", J Appl Mech, Vol. 66, pp. 101-108, (1999).
34. Chen, J., Wu, L. and Du, S., "A Modified J Integral for Functionally Graded Materials", Mech. Res. Commun., Vol. 27(3), pp. 301-306, (2000).
35. Liu, G.R. and Gu, Y.T, "An introduction to meshfree methods and their programming", Springer, (2005).
36. Atluri, S.N. and Zhu, T., "A new Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", Comp. Mech, Vol. 22, pp. 117-127, (1998).
37. Liu, K., Long, Sh. and Li, G., "A simple and less-costly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for dynamic fracture problem", Engng Anal. with Bound. Elem, Vol. 30 , pp. 72-76, (2006).
38. Qian, L.F. and Ching, H.K., "Static and dynamic analysis of 2-D functionally graded elasticity by using meshless local Petrov-Galerkin method", Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 27(4), pp. 491-503, (2004).
39. Sladek, J., Sladek, V., Zhang, Ch. and Tan, CH.-L., "Evaluation of fracture parameters for crack problems in FGM by a meshless method", Theo. Appl. mech., Vol. 44(3), pp. 603-636, (2006).
40. Abdollahifar, A. and Nami, M.R., "Investigating the effect of angle between the material gradation direction and crack on mixed-mode stress intensity factor of FGM plates using MLPG method". Modares Mech. Enging, in persian, Vol. 13(1), pp. 138-150, (2013).
41. Fleming, M., Chu, Y., Moran, B. and Belytschko, T., "Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields", Int. J. Num. Meth. in Engng, Vol. 40, pp. 1483-1504, (1997).
42. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu L., "Crack propagation by Element-free Galerkin methods"

Engineering Fracture Mechanics, Vol. 51, No. 2, pp. 295-315, (1995).

43. Abdollahifar, A. and Nami, M.R., "Determination of dynamic stress intensity factor in FGM plates by MLPG method", IJST, Trans. of Mech. Engng, Vol. 38($M1^+$), pp. 181-194, (2014).
44. Eischen, J.W., "Fracture of nonhomogeneous materials", Int. J. Fract., Vol. 34(1), pp. 3-22, (1987).
45. Lucht, T., "Finite element analysis of three-dimensional crack growth by the use of a boundary element sub model", Eng. Fract. Mech., Vol. 76, pp. 2148-2162, (2009).
46. Shukla, A., "Dynamic Fracture Mechanics", World Scientific Publishing Co., (2006).