

ارائه‌ی تابع اغتشاش ترک جدید برای آنالیز ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار*

موسی رضائی^(۱) سعید لطفان^(۲) وحید عرب‌ملکی^(۳)

چکیده در این مقاله، مدل پیوسته‌ی جدید و کامل‌تری از ناحیه‌ی ترک برای مطالعه و آنالیز ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار اوپن-برنولی ارائه شده است. به این منظور، ترک به صورت یک اغتشاش پیوسته در میدان تنش و کرنش مدل شده که با کمک اصول مکانیک شکست به صورت تابع اغتشاش ترک ارائه شده است. در ادامه با کمک این تابع و به کارگیری اصل همپلتون معادله‌ی حرکت تیر ترک‌دار با ترک لبه باز به دست آمده است. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار با استفاده از حل معادله‌ی حرکت به روش گالرکین، استخراج شده است. سپس برای در نظر گرفتن اثر باز و بسته شونده‌ی ترک، سفتی تیر در محل ترک به صورت دوخطی مدل شده است. یکی از ویژگی‌های این روش، قابلیت اعمال آن به تیرهای ترک‌دار در تمامی شکل مودهای ارتعاشی می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که کاهش فرکانس‌های طبیعی برای ترک باز و بسته شونده کم‌تر از ترک باز می‌باشد. در پایان نتایج به دست آمده با نتایج تجربی موجود در مقاله‌های پیشین مقایسه شده است، این نتایج نشان می‌دهد که مدل ارائه شده نسبت به مدل‌های قبلی، بهبود یافته است و رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار را به‌ازای پارامترهای مختلف ترک با دقت بهتری پیش‌بینی می‌نماید.

واژه‌های کلیدی آنالیز ارتعاشی، تیر ترک‌دار، اصل همپلتون، تابع اغتشاش، مدل سفتی دوخطی.

Introducing a New Crack Disturbance Function for Transverse Vibration Analysis of a Cracked Beam

M. Rezaee S. Lotfan V. A. Maleki

Abstract In this paper, in order to analyze the transverse vibration of a uniform Bernoulli-Euler beam containing one single edge crack, a new continuous model is proposed for the cracked section. To this end, by using the fracture mechanics, the crack is modeled as a continuous disturbance in the stress and strain fields. By applying the Hamilton's principle, the equation of motion and the corresponding boundary conditions of the system are derived. The resulting equation is solved by the Galerkin method, and the natural frequencies and mode shapes are obtained. In order to consider the opening and closing effects of the crack, the stiffness at the crack location is modeled by a bilinear function. The results show that the changes in vibration frequencies for a breathing crack are smaller than ones caused by an open crack. The results have been validated by the experimental and theoretical data reported in the previous studies. There is a good agreement between the results obtained through the proposed method and those obtained from the reported experimental data. This agreement shows that present model is more accurate than the previous ones, and it can predict the vibration behavior of beams more precisely.

Key Words Vibration analysis, Cracked beam, Hamilton's principle, Disturbance function, Bilinear stiffness model.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۸/۲۹ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۹/۹ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده‌ی فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده‌ی فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

(۳) عضو هیأت علمی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ملکان، ملکان، ایران.

مقدمه

سازه‌های دینامیکی که تحت بارهای متناوب قرار می‌گیرند بخش مهمی را در ماشین آلات صنعتی تشکیل می‌دهند. یکی از مسایل مورد توجه محققان پدیده‌ی خستگی و رشد ترک ناشی از آن است. با توجه به این‌که ترک و رشد آن سبب خرابی و شکست در ماشین آلات صنعتی می‌شود، مطالعه و بررسی روش‌هایی که بتواند به‌سادگی و با دقت مناسبی پارامترهای ترک را پیش‌بینی کند، ضروری می‌باشد. مطالعات نشان می‌دهد که تحلیل ارتعاشی یکی از پرکاربردترین روش‌ها در این زمینه است.

وجود ترک در سازه‌ها باعث تغییر در رفتار دینامیکی از جمله فرکانس‌های طبیعی، شکل موده‌های ارتعاشی و ... می‌شود. محققان متعددی با استفاده از مدل‌های مختلف به بررسی اثر ترک بر رفتار ارتعاشی سازه‌های ترک‌دار پرداخته‌اند [1-10]. Doebling و همکاران [2] با ارائه‌ی یک دید کلی از اقدامات و روش‌های انجام شده در زمینه‌ی شناسایی ترک، بر اهمیت استفاده از مدل ریاضی برای تحلیل ارتعاشی سازه‌های ترک‌دار تأکید کرده‌اند. Chondros و Dimarogonas [11] با استفاده از تئوری پیوسته و اصلاح میدان تغییر مکان، تنش و کرنش در مجاورت ترک، معادله‌ی دیفرانسیل خطی حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را به‌دست آوردند. آن‌ها با استفاده از تئوری مکانیک شکست، تابع اغتشاش ترک بر میدان تنش را برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها استخراج نمودند و به بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک باز پرداختند. Barr و Christides [12,13] تئوری پیوسته ترک را برای بررسی رفتار ارتعاشی تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار مورد استفاده قرار دادند. آن‌ها اثر ترک را با کمک نتایج تجربی به‌صورت یک تابع اغتشاش نمایی که در میدان تنش عمودی اعمال می‌شود مدل نمودند. Shen و

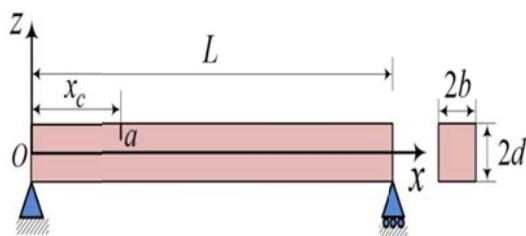
Pierre [14] مدل ارائه شده توسط Christides و Barr را مورد بازنگری قرار دادند و با در نظر گرفتن ترک لبه باز، معادلات دیفرانسیل جدیدی را برای مطالعه‌ی رفتار ارتعاشی تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار ارائه کردند. در مدل ترک باز، فرض می‌شود که ترک همواره به‌صورت باز باقی می‌ماند و می‌توان از مدل فنر خطی با سفتی ثابت استفاده نمود. اما در مورد ترک خستگی، از آنجایی که ترک در طول ارتعاش همواره باز و بسته می‌شود، بنابراین استفاده از مدل ترک لبه‌باز با خطای بیش‌تری همراه خواهد بود. Gudmundson [15] با بررسی این پدیده به این نتیجه رسید که استفاده از مدل ترک باز برای بررسی رفتار ترک خستگی می‌تواند منجر به نتایج نادرستی شود که مهم‌ترین آن پیش‌بینی عمق ترک خستگی کم‌تر از مقدار واقعی آن است. Friswell و Penny [16] رفتار غیر خطی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها دارای ترک باز و بسته شونده را در مود اول ارتعاشی توسط نوسانگر یک درجه آزادی با سفتی دوخطی مدل‌سازی کرده‌اند. Almeida و Gomes [17] ارتعاش تیر ترک‌دار را با در نظر گرفتن اثر نیروی برشی و اینرسی دورانی بررسی کردند و نشان دادند که این اثر در تیرهای ترک‌دار بلند قابل چشم‌پوشی است.

رضائی و عرب‌ملکی [۱۸] مدل پیوسته‌ای برای ترک در نظر گرفتند و با استفاده از تابع اغتشاش که در میدان‌های تغییر مکان، تنش و کرنش اعمال می‌شود به بررسی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از اصل Hu-Washizu معادله‌ی حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر را استخراج نمودند و برای تعیین باز یا بسته بودن ترک از انحنای منحنی خیز تیر در محل ترک استفاده نمودند. این نوع مدل بر خلاف مدل ترک لبه‌باز، باعث غیرخطی شدن معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی می‌شود. در مدل آن‌ها پارامترهای مجهول تابع اغتشاش به‌صورت تجربی و نیز با استفاده از نتایج

استفاده از سفتی دوخطی به صورت مدل ترک خستگی ارائه گردیده است. در نهایت صحت نتایج به دست آمده، با استفاده از نتایج تجربی موجود در مراجع به اثبات رسیده است. این نتایج نشان می‌دهد که مدل ارائه شده رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار را با دقت مناسبی پیش‌بینی می‌کند.

تابع اغتشاش ترک

تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید.



شکل ۱ هندسه تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار

در این شکل، a عمق ترک، b نصف پهناي تیر، d نصف ضخامت تیر، L طول تیر و x_c موقعیت ترک را نمایش می‌دهد. همچنین x در راستای محور طولی و z در راستای محور عرضی می‌باشد.

توزیع تنش و کرنش توسط Tada و همکاران [19] و Paris و Sih [20] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها به این نتیجه رسیده‌اند که توزیع تنش در یک تیر ترک‌دار به گونه‌ای است که در محل ترک مقدار تنش بیشینه می‌شود و با دور شدن از آن مقدار تنش با نسبت ریشه دوم فاصله از ترک، کاهش می‌یابد. این اثر ترک و رفتار تنش به صورت دقیق‌تر توسط تابع اغتشاش به صورت زیر مدل شده است [14] که در ادامه در میدان کرنش اعمال می‌شود:

$$\varphi(x, z) = \left[z - m\left(z + \frac{a}{2}\right)u(d - a - z) \right] e^{\frac{-\alpha}{d}|x - x_c|} \quad (1)$$

المان محدود به دست آمده است. این امر باعث محدودیت کاربرد روش ارائه شده برای انواع شرایط مرزی و تیر با سطح مقطع‌های متفاوت می‌شود.

هدف اصلی از پژوهش حاضر، ارائه‌ی مدل پیوسته‌ی جدیدی برای بررسی رفتار دینامیکی تیر اوپلر-برنولی ترک‌دار در غیاب میرایی است، طوری که بتواند با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار را به‌ازای بازه‌ی گسترده‌ای از پارامترهای ترک پیش‌بینی نماید. بدین منظور، ترک با استفاده از فرضیات واقع‌بینانه و روش کاملاً تحلیلی، به صورت تابع اغتشاش مدل شده است. برخلاف روش ارائه شده توسط Christides و Barr [12]، Pierre و Shen [14] و رضائی و عرب‌ملکی [۱۸] که برای به دست آوردن تابع اغتشاش ترک نیاز به روش تکمیلی دیگری از جمله استفاده از نتایج تجربی و نتایج المان محدود دارد، در روش ارائه شده در مقاله‌ی حاضر، تابع اغتشاش صرفاً با استفاده از روابط مکانیک شکست استخراج می‌شود. این تابع در میدان تنش اثر می‌کند به طوری که در محل ترک دارای مقدار بیشینه است و با دور شدن از آن به صورت نمایی کاهش می‌یابد. معادلات ارتعاشی حاکم بر تیر ترک‌دار که با اعمال تابع اغتشاش پیشنهادی به دست می‌آیند، پیچیدگی کم‌تری دارند و قابل تعمیم به انواع شرایط مرزی می‌باشند.

پس از مدل کردن ترک توسط تابع اغتشاش، معادله‌ی حرکت تیر ترک‌دار توسط اصل همیلتون برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها استخراج شده است. به منظور بررسی اثر پارامترهای ترک (موقعیت و عمق ترک) بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار، معادله‌ی حرکت به دست آمده با استفاده از روش گالرکین مورد تحلیل قرار گرفته و با حل مسأله مقدار ویژه‌ی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار به دست آمده است. سپس به منظور بررسی اثر باز و بسته شونده‌ی ترک، مدل ارائه شده‌ی ترک باز، با

خالص به صورت زیر می‌باشد [21]:

$$K_I = \frac{Md}{I} \sqrt{\pi a} \beta_I(\xi), \quad K_{II} = K_{III} = 0 \quad (6)$$

که در آن $\beta_I(\xi)$ تابعی از عمق نسبی ترک است و به صورت زیر می‌باشد:

$$\beta_I(\xi) = 1.12 - 1.4\xi + 7.33\xi^2 - 13.1\xi^3 + 14\xi^4 \quad (7)$$

این رابطه برای محدوده‌ی $0.6 < \xi$ صادق است. با قرار دادن روابط (۷-۵) در معادله‌ی (۶) و استفاده از رابطه‌ی (۳) و انجام عملیات ریاضی و انتگرال‌گیری، شیب اضافی ناشی از وجود ترک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta^* = \frac{Ma(1-\nu^2)}{EI} F(\xi) \quad (8)$$

که در آن عبارت بی‌بعد $F(\xi)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\xi) = 369.45\xi^9 - 768.22\xi^8 + 887.93\xi^7 - 622.69\xi^6 + 382.54\xi^5 - 187.99\xi^4 + 86.61\xi^3 - 19.7\xi^2 + 11.82\xi \quad (9)$$

با توجه به رابطه‌ی (۸) تنها با داشتن مشخصات مکانیکی و هندسی تیر و ترک، می‌توان شیب اضافی ناشی از ترک را بر حسب گشتاور خمشی به دست آورد. با توجه به این که برای فنر پیچشی رابطه‌ی بین تغییر مکان و ضریب سفتی به صورت $M = K_t \theta$ می‌باشد بنابراین ضریب سفتی فنر در محل ترک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_t = \frac{EI}{a(1-\nu^2)F(\xi)} \quad (10)$$

در معادله‌ی اخیر، m و α ضرایب تعیین‌کننده‌ی شکل تابع اغتشاش هستند. α متغیر بی‌بعد مثبتی است که نرخ کاهش تنش با دور شدن از محل ترک را نشان می‌دهد. همچنین $u(d-a-z)$ تابع پله واحد است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u(d-a-z) = \begin{cases} 1, & z < d-a \\ 0, & z \geq d-a \end{cases} \quad (2)$$

وجود ترک باعث تغییر در خیز و شیب تیر ترک‌دار می‌شود. اگر تیر تحت گشتاور خمشی M قرار گیرد، در این صورت شیب اضافی ناشی از وجود ترک طبق قضیه‌ی کاستیگلیانو به صورت زیر به دست می‌آید [21]:

$$\theta^* = \frac{\partial U_C}{\partial M} \quad (3)$$

که در آن U_C انرژی کرنشی ناشی از ترک می‌باشد. این انرژی با استفاده از معادله زیر به دست می‌آید [21]:

$$U_C = \int_{\text{crack}} J(\xi) d\xi \quad (3)$$

در این رابطه ξ عمق نسبی ترک می‌باشد. همچنین $J(\xi)$ نرخ انرژی کرنشی آزاد شده است و برای بارگذاری در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود [21]:

$$J(\xi) = \frac{1}{E^*} \left[\left(\sum_{i=1}^6 K_{IIi} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 K_{IIIi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2G} \left(\sum_{i=1}^6 K_{IIIi} \right)^2 \quad (5)$$

در معادله‌ی اخیر، G مدول برشی تیر است و $E^* = E/(1-\nu^2)$ می‌باشد. برای حالت کرنش صفحه‌ای برابر مدول یانگ، $E^* = E$ و برای حالت کرنش صفحه‌ای، $E^* = E/(1-\nu^2)$ خواهد بود که در آن ν نسبت پواسون می‌باشد. به‌علاوه K_I ، K_{II} و K_{III} ضرایب شدت تنش هستند. این ضرایب برای تیر ترک‌دار تحت خم

بنابراین مقدار شیب اضافی ناشی از وجود ترک را می‌توان از اختلاف شیب منحنی تیر در دو طرف محل ترک به صورت زیر به دست آورد:

$$|\theta_c(x_c^+) - \theta_c(x_c^-)| = \theta^* \quad (15)$$

از طرفی، بر اساس واقعیت در صورتی که عمق ترک به صفر میل کند، باید تابع اغتشاش نیز صفر شود؛ بنابراین:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \varphi(x, z) = 0 \quad (16)$$

با استفاده از حل دو معادله‌ی (۱۵ و ۱۶) می‌توان مقادیر m و α را برای ترک با عمق دلخواه a به دست آورد، در این صورت تابع اغتشاش به صورت کامل تعریف می‌شود.

استخراج معادله‌ی حاکم بر ارتعاش عرضی تیر ترک‌دار

Shen و Pierre مقدار تنش محوری تیر ترک‌دار را به صورت زیر بیان کرده‌اند [14]:

$$\sigma_x(x, z, t) = [-z + \varphi(x, z)]T(x, t) \quad (17)$$

در این رابطه $T(x, t)$ تابع مجهول تنش می‌باشد. بر این اساس و با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی برای تیر ترک‌دار، کرنش محوری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_x = [-z + \varphi(x, z)] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (18)$$

که در آن، $w(x, t)$ تغییر مکان تیر در راستای محور z می‌باشد. با اعمال تابع اغتشاش ترک بر میدان تنش و کرنش و استفاده از اصل همپلتون می‌توان معادله‌ی حاکم بر ارتعاش عرضی تیر ترک‌دار را به دست آورد. بدین منظور لازم است ابتدا توابع انرژی پتانسیل و

با متغیر در نظر گرفتن ممان اینرسی سطح مقطع تیر، $I(x)$ ، رابطه‌ی بین انحنای تیر و گشتاور خمشی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d^2 w_c}{dx^2} = \frac{M}{EI(x)} \quad (11)$$

در رابطه‌ی اخیر $w_c(x)$ خیز تیر ترک‌دار در راستای محور z می‌باشد. با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۱۱) خواهیم داشت:

$$\theta_c(x) = \frac{M}{E} \int \frac{1}{I(x)} dx + C \quad (12)$$

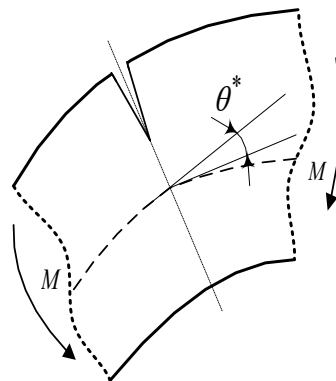
که در آن C ثابتی است که با استفاده از شرایط مرزی به دست می‌آید. برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها خواهیم داشت:

$$\theta_c(x) = \frac{M}{E} B(x) - \frac{M}{EL} \int_0^L B(x) dx \quad (13)$$

که در آن:

$$B(x) = \int \frac{1}{I(x)} dx \quad (14)$$

$\theta_c(x)$ تابع شیب منحنی تیر ترک‌دار می‌باشد که در محل ترک ناپیوسته است. این ناپیوستگی ناشی از اختلاف شیب منحنی تیر در دو طرف ترک می‌باشد که در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲ اختلاف شیب منحنی تیر ترک‌دار در محل ترک

در نظر می‌گیریم:

$$I(x) = \int_A [-z + \varphi(x, z)]^2 dA \quad (24)$$

با استفاده از روابط (۲۳ و ۲۴) معادلات حاکم بر ارتعاش عرضی تیر ترک‌دار به‌همراه شرایط مرزی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (26)$$

$$EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0 \quad (27)$$

رابطه‌ی (۲۵) معادله‌ی حرکت تیر ترک‌دار می‌باشد. در غیاب ترک، $I(x)$ بر اساس رابطه‌ی (۲۴) برابر با ممان اینرسی سطح برای تیر سالم می‌باشد و معادله‌ی حرکت (۲۵) به‌صورت فرم استاندارد معادله‌ی تیر اویلر-برنولی بیان می‌شود. با استفاده از روابط (۲۶ و ۲۷) شرایط مرزی برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, w = 0 \\ x = L \rightarrow I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, w = 0 \end{cases} \quad (28)$$

مسأله‌ی مقدار ویژه و استخراج

فرکانس‌های طبیعی

معادله‌ی حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار مطابق رابطه‌ی (۲۵) می‌باشد. این معادله دارای مقادیر ویژه‌ی حقیقی است ولی به‌صورت صریح قابل حل نیست. برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی از روش گالرکین استفاده خواهیم کرد. با استفاده از روش جداسازی

انرژی جنبشی به‌دست آید. انرژی جنبشی تیر تحت ارتعاشات عرضی با در نظر گرفتن حرکت تیر صرفاً در راستای محور z به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T = \iiint_V \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dV \quad (19)$$

در رابطه‌ی اخیر، ρ و dV به‌ترتیب معرف جرم واحد حجم تیر و المان حجمی تیر می‌باشد. انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} E (\epsilon_x)^2 dV \quad (20)$$

و با استفاده از رابطه‌ی (۱۸)، داریم:

$$U = \int_0^L \int_A \frac{1}{2} E [-z + \varphi(x, z)]^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dA dx \quad (21)$$

در این رابطه A سطح مقطع تیر می‌باشد و طبق اصل همیلتون می‌توان نوشت [22]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (22)$$

با جای‌گذاری روابط (۱۹ و ۲۱) در اصل همیلتون داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_A E [-z + \varphi(x, z)]^2 dA \right) \right] \delta w dx \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_A E [-z + \varphi(x, z)]^2 dA \right) \delta w \Big|_0^L \\ + \left(\int_A E [-z + \varphi(x, z)]^2 dA \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

ممان اینرسی سطح برای تیر ترک‌دار را به‌صورت زیر

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 \psi_j(x)}{dx^2} dx \quad (36)$$

ماتریس سفتی به دست آمده یک ماتریس متقارن است. در نتیجه، مسأله‌ی مقدار ویژه در رابطه‌ی (۳۲) دارای مقادیر ویژه‌ی حقیقی خواهد بود که این ویژگی یکی از مزیت‌های تئوری ارائه شده است و در مدل‌های مشابه دیده نمی‌شود.

ارائه مدل دو خطی

به منظور اعمال اثرات حاصل از باز و بسته شدن ترک، مدل ارائه شده در قسمت قبل توسط پارامتر کنترل γ به صورت مدل سفتی دو خطی ارائه گردیده است. این پارامتر به صورت زیر بیان می‌شود [۱۸]:

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=x_c} < 0 \\ 0, & \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=x_c} > 0 \end{cases} \quad (37)$$

زمانی که ترک باز باشد، $\gamma = 1$ می‌باشد و تابع اغتشاش در میدان‌های جابه‌جایی، تنش و کرنش اثر می‌کند و اگر ترک بسته شود، $\gamma = 0$ است و اثر تابع اغتشاش در معادلات از بین رفته و معادله‌ی حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر، به معادله تیر اویلر-برنولی استاندارد تبدیل می‌شود. برای تعیین باز یا بسته بودن ترک از علامت انحنای خیز تیر استفاده شده است. با استفاده از این پارامتر می‌توان خیز عرضی تیر را به صورت زیر فرض نمود:

$$w_i(x, t) = \gamma W_i^c(x) T_i(t) + (1 - \gamma) W_i^{nc}(x) T_i(t) \quad (38)$$

در رابطه‌ی فوق، W_i^c و W_i^{nc} به ترتیب معرف شکل مود ارتعاشی i ام تیر ترک‌دار و سالم و $T_i(t)$

متغیرها می‌توان پاسخ این معادله را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (29)$$

پاسخ زمانی تیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T(t) = C_1 \sin(\omega_n t + \Phi_0) \quad (30)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲۹) در معادله‌ی حرکت

تیر و استفاده از پاسخ زمانی (۳۰)، داریم:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right) = \lambda_n \rho A W(x) \quad (31)$$

که در آن $\sqrt{\lambda_n} = \omega_n$ فرکانس‌های طبیعی می‌باشند. برای استفاده از روش گالرکین، $W(x)$ به صورت ترکیبی از توابع شکل مود در نظر گرفته می‌شود:

$$W(x) = \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(x) \quad (32)$$

تابع شکل مود مناسب برای تیر با تکیه‌گاه‌های

ساده به صورت زیر است:

$$\psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (33)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۳۲) در معادله‌ی (۳۱) و

ضرب $\psi_m(x)$ در دو طرف معادله و انتگرال‌گیری از آن در طول تیر، مسأله‌ی مقدار ویژه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\det(k - \lambda_n m) = 0 \quad (34)$$

که در آن m و k به ترتیب ماتریس جرم و سفتی هستند و مؤلفه‌های آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (35)$$

بنابراین با در نظر گرفتن هر مود ارتعاشی، معادله‌ی (۴۰) را می‌توان به فرم یک معادله‌ی دو خطی به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_i(t)}{dt^2} + (\omega_i^c)^2 T_i(t) &= 0, & \gamma &= 1 \\ \frac{d^2 T_i(t)}{dt^2} + (\omega_i^{nc})^2 T_i(t) &= 0, & \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

که در آن فرکانس‌های طبیعی ω_i^c و ω_i^{nc} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_i^c = \sqrt{\frac{k_i^c}{m_i}}, \quad \omega_i^{nc} = \sqrt{\frac{k_i^{nc}}{m_i}} \quad (44)$$

Douka و همکاران [23] نشان دادند که برای ارتعاشات آزاد و نامیرای تیر ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده، فرکانس‌های طبیعی را می‌توان با استفاده از مدل دو خطی به صورت زیر به دست آورد [24]:

$$\omega_b = \frac{2\omega_i^c \omega_i^{nc}}{\omega_i^c + \omega_i^{nc}} \quad (45)$$

نکته‌ای که باید ذکر شود این است که در پژوهش‌های پیشین، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار در دو حالت ترک کاملاً باز و ترک کاملاً بسته از تست‌های تجربی به دست می‌آید در حالی که در تحقیق حاضر، نیاز به انجام تست‌های تجربی نیست و یک روش تحلیلی با در نظر گرفتن یک تابع اغتشاش برای این منظور ارائه شده است. مقادیر به دست آمده از رابطه‌ی (۴۵) فرکانس‌های طبیعی هستند که در آن اثر باز و بسته شدن ترک لحاظ شده است. در صورتی که مقادیر ویژه‌ی به دست آمده از رابطه‌ی (۳۴) بر اساس مدل ترک لبه باز می‌باشد.

معرف بخش زمانی متناظر می‌باشد. با جای‌گذاری $w_i(x, t)$ از رابطه‌ی (۳۸) در معادله‌ی (۲۵) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\gamma EI(x) T_i(t) \frac{\partial^2 W_i^c}{\partial x^2} + (1-\gamma) EI(x) T_i(t) \frac{\partial^2 W_i^{nc}}{\partial x^2} \right) \\ + \rho A \left\{ \gamma W_i^c(x) \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} + (1-\gamma) W_i^{nc}(x) \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

با ضرب دو طرف رابطه‌ی (۳۹) در عبارت $w_i(x, t)$ و انتگرال‌گیری از آن در طول تیر و استفاده از شرایط مرزی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، معادله‌ی حرکت تیر با مدل ترک باز و بسته شونده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_i \frac{d^2 T_i(t)}{dt^2} + k_i T_i(t) = 0 \quad (40)$$

با استفاده از معادله‌ی (۴۰) ارتعاشات تیر ترک‌دار در مود i ام را می‌توان با ارتعاشات نوسان‌گر یک درجه آزادی معادل گرفت که سفتی و جرم معادل آن با استفاده از روابط زیر به دست می‌آید:

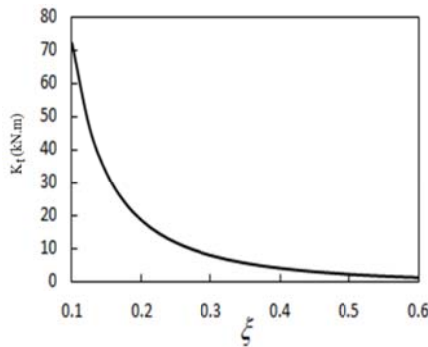
$$\begin{aligned} m_i &= \int_0^L \rho A W_i(x) W_i(x) dx \\ k_i &= \begin{cases} k_i^c, & \gamma = 1 \\ k_i^{nc}, & \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

در روابط اخیر، k_i^c و k_i^{nc} به ترتیب سفتی معادل تیر ترک‌دار در شرایط کاملاً باز و کاملاً بسته ترک است که به صورت زیر به دست می‌آید:

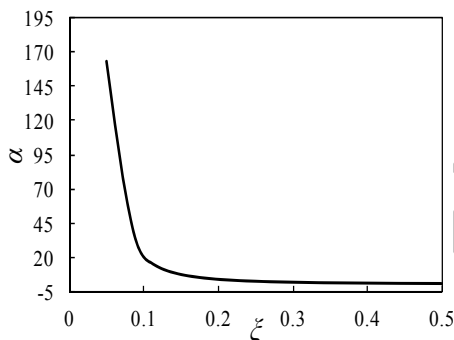
$$\begin{aligned} k_i^c &= \int_0^L EI(x) \frac{d^2 W_i^c}{dx^2} \frac{d^2 W_i^c}{dx^2} dx \\ k_i^{nc} &= \int_0^L EI(x) \frac{d^2 W_i^{nc}}{dx^2} \frac{d^2 W_i^{nc}}{dx^2} dx \end{aligned} \quad (42)$$

نتایج عددی

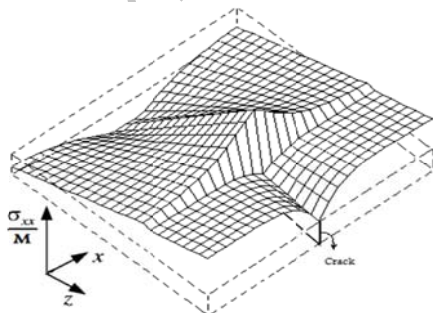
خواهد بود و عبارت $e^{-\frac{\alpha}{d}|x-x_c|}$ مقدار کم تری خواهد داشت. به عبارت دیگر با افزایش عمق ترک، مقدار α کاهش می یابد.



شکل ۳ تغییرات ضریب سفتی فنر پیچشی معادل محل ترک بر حسب عمق نسبی ترک برای تیر آلومینیومی



شکل ۴ تغییرات α ، نرخ کاهش تنش، بر حسب عمق نسبی ترک



شکل ۵ توزیع تنش در ناحیه ی ترک با عمق نسبی $\xi = 0.3$ و $\alpha = 1.49$ به ازای گشتاور خمشی واحد

به منظور مقایسه ی نتایج به دست آمده از مدل ارائه شده با نتایج حاصل از تست های تجربی موجود در ادبیات فن، دو نمونه تیر ترک دار با تکیه گاه های ساده در دو انتها را مورد بررسی قرار می دهیم. مشخصات این تیرها در جدول های زیر آورده شده است.

جدول ۱ ابعاد و مشخصات مکانیکی تیر آلومینیومی [24].

مدول یانگ	$E = 7.2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
جرم واحد حجم	$\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$
نسبت پواسون	$\nu = 0.333$
طول تیر	$L = 235 \text{ mm}$
سطح مقطع	$A = 7 \times 23 \text{ mm}^2$

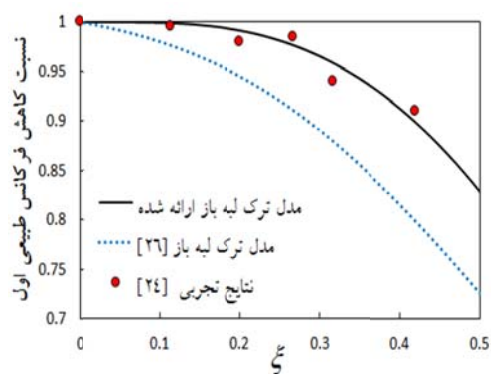
جدول ۲ ابعاد و مشخصات مکانیکی تیر فولادی [25].

مدول یانگ	$E = 2.16 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
جرم واحد حجم	$\rho = 7650 \text{ kg/m}^3$
نسبت پواسون	$\nu = 0.3$
طول تیر	$L = 400 \text{ mm}$
سطح مقطع	$A = 10 \times 10 \text{ mm}^2$

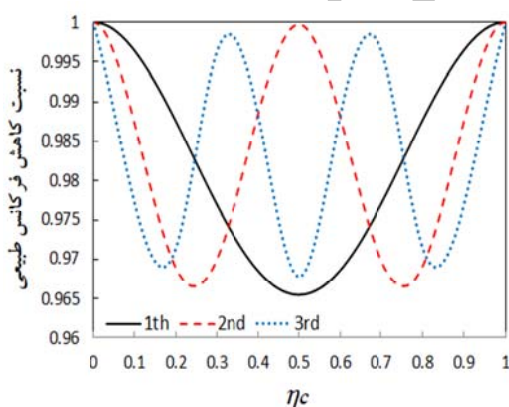
پارامترهای بی بعد ترک که در ادامه مورد استفاده قرار خواهد گرفت عبارتند از: $\xi = a/2d$ که نشان دهنده ی عمق نسبی ترک (نسبت عمق ترک به ضخامت تیر) و $\eta_c = x_c/L$ نشان دهنده ی موقعیت نسبی ترک (نسبت فاصله ی ترک از ابتدای تیر به طول تیر) می باشد.

تغییرات ضریب سفتی فنر پیچشی معادل در محل ترک بر حسب عمق نسبی ترک در شکل (۳) نشان داده شده است و مطابق آن، با افزایش عمق ترک سفتی معادل کاهش می یابد. هم چنین در شکل (۴) تغییرات نرخ کاهش تنش، α ، بر حسب عمق نسبی ترک نشان داده شده است. مطابق واقعیت هر چه عمق ترک کم باشد، اثر آن در میدان تنش و رفتار ارتعاشی تیر ناچیز

است. هم‌چنان‌که از این شکل مشخص است اثر ترک با نزدیک شدن ترک به نقطه‌ی گره‌ی کاهش می‌یابد. از آن‌جا که تنش در نقاط گره‌ی کم‌ترین مقدار را دارد، فرار گرفتن ترک در نقاط گره‌ی باعث کم‌ترین افت در نسبت فرکانسی می‌شود. از طرفی، کاهش فرکانس طبیعی در محل‌هایی با بیش‌ترین انحنای و بیش‌ترین میزان تنش در مود ارتعاشی مورد نظر، به مقدار قابل توجهی می‌رسد.



شکل ۶ نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول بر حسب عمق نسبی ترک برای تیر آلومینیومی با تکیه‌گاه ساده در دو انتها و مقایسه آن با نتایج تجربی [24] و مدل ارائه شده در مرجع [26]، به‌ازای موقعیت نسبی ترک $\xi = 0.5$



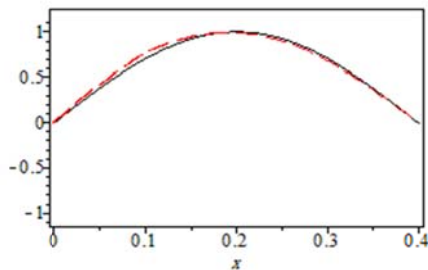
شکل ۷ نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول (—)، نسبت کاهش فرکانس طبیعی دوم (---) و نسبت کاهش فرکانس طبیعی سوم (.....) بر حسب موقعیت نسبی ترک به‌ازای عمق نسبی $\xi = 0.3$ برای تیر ترک‌دار آلومینیومی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

در شکل (۵)، توزیع تنش به‌ازای گشتاور خمشی واحد در همسایگی ترک نشان داده شده است. در این شکل x در راستای محور طولی تیر و z در راستای حرکت عرضی آن می‌باشد. بر اساس این توزیع، مقدار تنش در نوک ترک بیشینه است و با دور شدن از محل ترک، به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد.

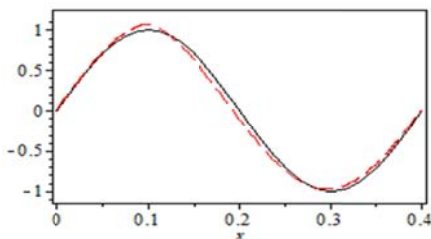
در این مقاله، تابع اغتشاش پیشنهادی به دو حالت از ترک، ۱- ترکی که در حین ارتعاش تیر همواره باز باقی می‌ماند و ۲- ترکی که در حین ارتعاش تیر باز و بسته می‌شود، اعمال شده است که در متن مقاله از آن‌ها به ترتیب با عناوین «مدل ترک لبه باز» و «مدل ترک باز و بسته شونده» یاد شده است. بنابراین مدل ترک لبه باز که با اعمال تابع اغتشاش ارائه شده استخراج شده است با مدل‌های مرسوم خطی ترک باز که در ادبیات فن از آن‌ها نیز تحت عنوان «مدل ترک لبه باز» یاد می‌شود کاملاً متفاوت است. در ادامه قبل از بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی تیر ترک‌دار، ابتدا صحت مدل ارائه شده را با استفاده از نتایج حاصل از تست‌های تجربی که در مرجع [24] برای تیر ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها ارائه شده است بررسی می‌کنیم.

در شکل (۶) منحنی تغییرات نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول بر حسب عمق نسبی ترک برای ترک با موقعیت نسبی $\eta_c = 0.5$ ، با استفاده از تئوری پیشنهادی محاسبه شده است و به‌همراه نتایج مدل ارائه شده در مرجع [26] و نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود در مرجع [24] ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که به‌ازای موقعیت مشخص ترک با افزایش عمق ترک، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. بر اساس این مقایسه حداکثر خطا بین نتایج تجربی و مدل ارائه شده ۲٪ می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی از دقت بالایی برخوردار است.

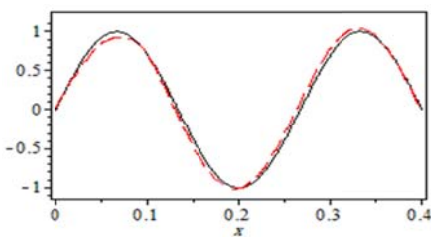
در شکل (۷)، اثر موقعیت ترک به‌ازای عمق مشخصی از آن برای تیر آلومینیومی نشان داده شده



الف- شکل مود اول ارتعاشی

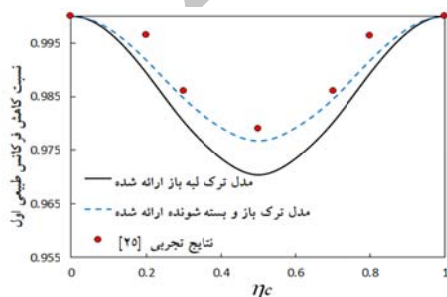


ب- شکل مود دوم ارتعاشی



ج- شکل مود سوم ارتعاشی

شکل ۹ شکل مودهای اول، دوم و سوم ارتعاشی تیر فولادی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها برای تیر سالم (—) و تیر ترک‌دار (---) به‌ازای ترک با عمق نسبی $\xi = 0.4$ و موقعیت نسبی $\eta_c = 0.25$

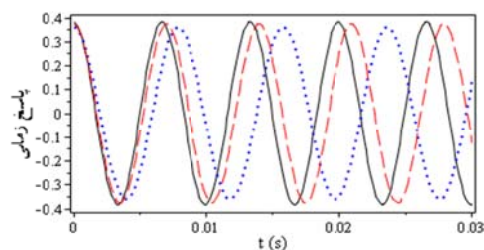


شکل ۱۰ نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول در برابر موقعیت نسبی ترک برای تیر فولادی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها و ترک با عمق نسبی $\xi = 0.3$

در شکل (۸) پاسخ نامیرای ارتعاشات آزاد تیر فولادی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به‌ازای ترک در موقعیت نسبی $\eta_c = 0.5$ نشان داده شده است. این پاسخ در شکل مود ارتعاشی اول برای دو عمق متفاوت ترک با پاسخ تیر سالم مقایسه شده است. با توجه به این‌که تیر ترک‌دار فرکانس کم‌تری نسبت به تیر سالم دارد پاسخ تیر ترک‌دار دوره‌ی تناوب بیشتری خواهد داشت و با افزایش عمق ترک دوره‌ی تناوب پاسخ بیشتر خواهد شد.

شکل مودهای ارتعاشی تیر ترک‌دار و شکل مودهای ارتعاشی تیر سالم، در شکل (۹) نشان داده شده است. بر اساس این نمودارها شیب اضافی ناشی از ترک، سبب ایجاد شکستگی در نمودار شکل مود ارتعاشی تیر ترک‌دار می‌شود.

یکی از مشخصه‌های اصلی رفتار غیرخطی پاسخ ارتعاشی سازه‌های ترک‌دار با مدل ترک باز و بسته شونده، تغییر در فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشد. مطالعات نشان می‌دهد که وجود ترک باعث کاهش در فرکانس‌های طبیعی سازه‌های ترک‌دار می‌شود و با توجه به این‌که سفتی معادل متناظر با مدل ترک باز کم‌تر از سفتی معادل مدل ترک باز و بسته شونده می‌باشد بنابراین اثر ترک باز بر کاهش فرکانس‌های طبیعی بیشتر از مدل ترک باز و بسته شونده می‌باشد. در شکل (۱۰) منحنی تغییرات نسبت کاهش فرکانس طبیعی اول برحسب موقعیت نسبی ترک با مدل ترک باز و نیز مدل ترک باز و بسته شونده ارائه شده است.



شکل ۸ پاسخ آزاد ارتعاشات نامیرای تیر فولادی در مود اول ارتعاشی برای تیر سالم (—)، تیر ترک‌دار با موقعیت ترک در $\eta_c = 0.5$ و عمق نسبی ترک $\xi = 0.35$ (---) و تیر ترک‌دار با موقعیت ترک در $\eta_c = 0.5$ و عمق نسبی ترک $\xi = 0.5$ (.....)

به صورت تابع اغتشاش ترک مدل سازی شد. یکی از مزیت های عمده‌ی این مدل نسبت به مدل های مشابه پیشین، عدم نیاز به استفاده از نتایج تجربی یا نتایج حاصل از روش المان محدود برای محاسبه‌ی ثابت های مجهول به کار رفته در تابع اغتشاش ترک می باشد. نتایج نشان می دهد که اثر ترک با نزدیک بودن موقعیت ترک به نقاط گره‌ی کاهش می یابد و به ازای ترک واقع در موقعیت های متناظر با بیش ترین انحنا، شدت کاهش فرکانس های طبیعی افزایش می یابد. به علاوه، کاهش نسبت فرکانسی در مدل باز و بسته شونده ترک کم تر از کاهش نسبت فرکانسی در مدل ترک باز می باشد. در نهایت نتایج حاصل از اعمال مدل ارائه شده با نتایج حاصل از تست های تجربی موجود در ادبیات فن مقایسه شد. مقایسه نتایج نشان می دهد که مدل جدید ارائه شده ضمن رفع پیچیدگی های مدل های اخیر، نسبت به مدل های مشابه پیشین بهبود یافته است و رفتار ارتعاشی تیر ترک دار را با دقت بیشتری به ازای پارامترهای ترک پیش بینی می نماید.

سفتی معادل تیر با ترک باز کم تر از سفتی تیر سالم می باشد بنابراین سفتی معادل تیر با ترک باز و بسته شونده بیش تر از سفتی تیر با ترک باز خواهد بود؛ چرا که در مدل ترک باز و بسته شونده، در بخشی از زمان ارتعاش، سفتی معادل تیر با سفتی تیر سالم یکسان می شود. این مسأله باعث افزایش فرکانس طبیعی حاصل از مدل ترک باز و بسته شونده می شود. این واقعیت از شکل (۱۰) قابل استنتاج است. همچنین مشاهده می شود که نتایج حاصل از مدل پیشنهادی در پژوهش حاضر برای ترک باز و بسته شونده تطابق خوبی با نتایج تست های تجربی ارائه شده در مرجع [25] دارد.

نتیجه گیری

در پژوهش حاضر رفتار ارتعاش عرضی تیر ترک دار با مدل پیوسته مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور ناحیه‌ی ترک با استفاده از اصول مکانیک شکست

مراجع

1. Dimarogonas, A.D., "Vibration of cracked structures: a state of the art review", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55, pp. 831-857, (1996).
2. Doebling, S.W., Farrar, C.R. and Prime, M.B., "A summary review of vibration-based damage identification methods", The Shock and Vibration Digest. Vol. 30, pp. 91-105, (1998).
3. Ming-Hung Hsu, "Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 194, pp. 1-17, (2005).
4. Wauer, J., "On the dynamics of cracked rotors: a literature survey", Applied Mechanics Reviews, Vol. 43, pp. 13-17, (1990).
5. Wauer, J., "Modelling and formulation of equations of motion for cracked rotating shafts", International Journal of Solids and Structures, Vol. 26, pp. 901-914, (1990).
6. Hai-Ping Lin, "Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack", Engineering Structures, Vol. 26, pp. 427-436, (2004).
7. Sorrenito, S., Marchesiello, S. and Piombo, B.A.D., "A new analytical technique for vibration

- analysis of non-proportionally damped beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 265, pp. 765-782, (2003).
8. Carneiro, S.H.S. and Inman, D.J., "Comments on the free vibration of beams with a single-edge crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 244, pp. 729-737, (2001).
 9. Zheng, T. and Ji, T., "An approximate method for determining the static deflection and natural frequency of a cracked beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 2654-2670, (2012).
 10. Chondros, T.G. and Dimarogonas, A.D., "Identification of cracks in welded joints of complex structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, pp. 531-538, (1980).
 11. Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, J., "A consistent bar vibration theory", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 200, pp. 303-313, (1997).
 12. Christides, S. and Barr, A.D.S., "One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 26, pp. 639-648, (1984).
 13. Christides, S. and Barr, A.D.S., "Torsional vibration of cracked beams of noncircular cross-section", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 28, pp. 473-490, (1986).
 14. Shen, M.H.H. and Pierre, C., "Free vibrations of beams with a single-edge crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 170, pp. 237-259, (1994).
 15. Gudmundson, P., "The dynamic behavior of slender structures with cross-sectional cracks", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 31, pp. 329-345, (1983).
 16. Friswell, M.I. and Penny, J.E.T., "A simple nonlinear model of a cracked beam", *Proceeding of 10th International Modal Analysis Conference*, SEM society for Experimental Mechanics INC, pp. 516-521, (1992).
 17. Gomes, H.M. and Almeida, F.J.F., "An analytical dynamic model for single-cracked beams including bending, axial stiffness, rotational inertia, shear deformation and coupling effects", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 38, pp. 938-948, (2014).
۱۸. رضائی، موسی و عرب‌ملکی، وحید، «ارائه‌ی مدل غیرخطی جدید برای بررسی رفتار ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار با ترک خستگی»، نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک، سال بیست و دوم، شماره دو، (۱۳۹۰).
19. Tada, H., Paris, P.C. and Irvin, G.R., "The stress analysis of cracks handbook", Hellertown, Pennsylvania: Del Research Crop, (1985).
 20. Paris, P.C. and Sih, G.C., "Stress analysis of cracks", *Fracture toughness testing*, ASME STP381, pp. 30-82, (1965).
 21. Gdoutos, E.E., "Fracture mechanics: an introduction", Vol. 123, Springer, (2005).
 22. Rao, S.S., "Vibration of continuous systems", John Wiley & Sons, University of Miami, (1976).
 23. Douka, E. and Hadjileontiadis, L.J., "Time-frequency analysis of the free vibration response of a beam with a breathing crack", *NDT&E International*, Vol. 38, pp. 3-10, (2005).
 24. Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, J., "Vibration of a beam with a breathing crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 239, pp. 57-67, (2001).
 25. Han-Ik Yoon, In-Soo Son and Sung-Jin Ahn, "Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beam with double cracks", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 21, pp. 476-485, (2007).

26. Rezaee, M. and Hassannejad, R., "Free vibration analysis of simply supported beam with breathing crack using perturbation method", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 23, No. 5, (2010).

Archive of SID