

مدل سازی عددی ویسکوالاستیسیته ی خطی در نرم افزار روش اجزای محدود برای استفاده

در مدل سازی فیزیک های چندگانه *

(یادداشت پژوهشی)

جعفر اسکندری جم^(۲)مجتبی حقیقی یزدی^(۱)

چکیده در این مقاله، قابلیت ایجاد یک مدل ویسکوالاستیک خطی در یک نرم افزار روش اجزای محدود (COMSOL Multiphysics) مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم بر رفتار ویسکوالاستیسیته خطی برای حالت های تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای ارائه شده است. درستی این معادلات و نحوه ی کاربرد آنها در قالب یک مثال مهندسی مورد بررسی و تأیید قرار گرفته اند. از آنجایی که معادلات ارائه شده قابل استفاده در مدل سازی فیزیک های چندگانه می باشد، می توان از مدل ارائه شده در مدل سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی به صورت کوپل شده با فیزیک های دیگر نیز استفاده کرد.

واژه های کلیدی روش عددی، مدل سازی اجزای محدود، ویسکوالاستیک خطی، مدل رئولوژیک، فیزیک های چندگانه.

Numerical Modeling of Linear Viscoelasticity in a Finite Element Method Software Package to be used for Modeling of Multiphysics

M. Haghghi-Yazdi

J. Eskandari Jam

Abstract In this paper, the capabilities of modeling linear viscoelasticity in a finite element method software package (COMSOL Multiphysics) are investigated. The governing equations of linear viscoelasticity have been developed for 2D cases of plane stress and plane strain. These equations have been verified by solving a related engineering example. Since the developed equations are suitable for modeling of multiphysics mechanisms, the presented model can also be used for modeling of the linear viscoelasticity coupled with other multiphysics phenomena.

Key Words Numerical Method, Finite Element Modeling, Linear Viscoelasticity, Rheological Model, Multiphysics.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۵/۲۵ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۸/۱۱ می باشد.

(۱) نویسنده ی مسئول: استادیار، دانشکده ی مهندسی مکانیک، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران.

(۲) استاد، پژوهشکده ی کامپوزیت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران.

مقدمه

نرم‌افزار امکان مدل‌سازی مدل‌های مکانیکی و به‌خصوص فیزیک‌های کوپل شده به راحتی فراهم است، لازم است تا مدل ویسکوالاستیک خطی موجود در این نرم‌افزار نیز توسعه‌ی بیشتری یابد تا قابلیت مدل‌سازی فیزیک‌های چندگانه شامل پدیده‌های رفتاری ویسکوالاستیک فراهم گردد.

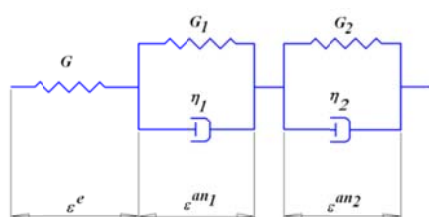
به همین منظور قابلیت مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی در یک پلیمر شیشه‌ای با استفاده از مدل‌های تعمیم‌یافته‌ی ماکسول و کلونین-وویت در این پژوهش توسعه یافته است. مدل‌سازی توسط مازول معادله‌ی دیفرانسیل جزئی (PDE) در نرم‌افزار کامسول ایجاد شده است و بنابراین می‌تواند به راحتی به مسایلی که در آن‌ها مکانیک سازه‌ای با دیگر فیزیک‌ها کوپل می‌باشد، تعمیم داده شود. یک نمونه از این گونه فیزیک‌های کوپل شده پدیده‌ی انتقال گاز درون لوله‌های پلیمری است، که در آن فیزیک‌های سه‌گانه‌ی مکانیک سازه‌ای، نفوذ جرم و رسانش حرارتی دخیل هستند [5-8]. در این پژوهش قابلیت مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی در نرم‌افزار اجزای محدود کامسول با استفاده از مدل‌های رئولوژیک تعمیم‌یافته‌ی ماکسول و کلونین-وویت افزایش داده شده است. این قابلیت در قالب حل مثالی نیز به نمایش در آمده است.

مدل‌های رئولوژیک تعمیم یافته‌ی ماکسول و کلونین-وویت هم‌چنین می‌توانند برای مشخصه‌سازی مدول (modulus) و نرمی (compliance) یک ماده‌ی پلیمری در آزمایش‌ها خزش و رها شدن تنش مورد استفاده قرار گیرند. اما مدولی که از مدل ماکسول حاصل می‌شود به‌طور مستقیم قابل تبدیل به نرمی در مدل کلونین-وویت نمی‌باشد. این عبارت برای عکس این حالت نیز صادق است. به‌عبارتی نرمی حاصل از آزمایش‌ها مستقیماً قابل تبدیل به مدول نمی‌باشد. از آنجایی که در برخی از مطالعات لازم است که چنین تبدیلی بین پارامترهای مدول و نرمی انجام شود،

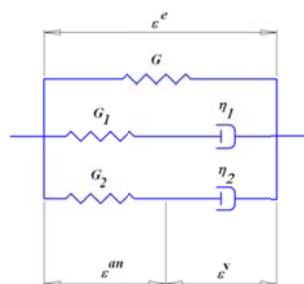
رفتار ویسکوالاستیک مواد به‌دلیل کاربرد فراوانی که در صنایع مختلف داراست، موضوع پژوهش بسیاری از محققان قرار گرفته است. در میان این گونه مواد، پلیمرهای شیشه‌ای نمونه‌ی بارز و آشنایی هستند که دارای رفتار ویسکوالاستیک می‌باشند؛ به‌عبارتی رفتار وابسته به زمان و دما از خود نشان می‌دهند. معمولاً مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی در این نوع مواد با استفاده از مدل‌های ویسکوالاستیک که معروف به مدل‌های رئولوژیک می‌باشند، انجام می‌پذیرد. این مدل‌ها عموماً از تعدادی فنر خطی و سیلندر-پیستون تشکیل شده‌اند که به‌صورت موازی و یا سری به‌هم متصل می‌شوند. در بین مدل‌های موجود، دو مدل بسیار معروف به نام مدل‌های ماکسول و کلونین-وویت می‌باشد. این مدل‌ها در نرم‌افزارهای اجزای محدودی هم‌چون آباکوس (ABAQUS) برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک به‌کار گرفته می‌شوند (به‌عنوان مثال [1]).

در نرم‌افزاری مانند نرم‌افزار کامسول (COMSOL Multiphysics) [2] نیز مطالعاتی در زمینه‌ی مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک مواد صورت گرفته است. به‌عنوان مثال، موراوک و لتزتر [3] به مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی در مواد بیولوژیکی پرداخته‌اند. ایشان با استفاده از نرم‌افزار کامسول توانستند مدل ویسکوالاستیک را برای آزمایش‌های خزش و رها شدن تنش ایجاد کنند و درستی آن را مورد تأیید قرار دهند. هم‌چنین ماروالوا [4] از قابلیت نرم‌افزار کامسول در مدل‌سازی تنش ویسکوالاستیک یک نوع لاستیک در کرنش‌های بزرگ بهره برد. با وجود این، با توجه به مدل‌های رئولوژیک مختلف موجود برای مشخصه‌سازی رفتار ویسکوالاستیک مواد (مانند مدل تعمیم یافته‌ی کلونین-وویت و ماکسول)، هنوز مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک مواد در این نرم‌افزار به‌طور کامل توسعه نیافته‌اند. از آنجایی که در این

یک فنر الاستیک خطی به صورت سری به هم متصل می‌شوند. در مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول نیز دو المان اولیه‌ی مدل ماکسول با یک فنر الاستیک خطی متصل می‌گردد. در هر کدام از این مدل‌های تعمیم یافته بسته به رفتار ویسکوالاستیک ماده مورد نظر می‌توان تعداد المان‌های اولیه کلویین- وویت و ماکسول را افزایش داد.



شکل ۱ نمایش نمادین مدل تعمیم یافته کلویین- وویت



شکل ۲ نمایش نمادین مدل تعمیم یافته ماکسول

در پژوهش حاضر، همان گونه که از شکل‌های (۱ و ۲) بر می‌آید، دو المان اولیه‌ی کلویین- وویت و ماکسول به ترتیب برای ایجاد مدل‌های تعمیم یافته‌ی کلویین- وویت و ماکسول استفاده شده است. این انتخاب به دلیل بهتر مدل نمودن رفتار ویسکوالاستیک ماده‌ی پلیمری مورد استفاده در مثال مهندسی این پژوهش است.

برای استخراج معادلات حاکم توسط مدل‌های تعمیم یافته‌ی کلویین- وویت و ماکسول فرض می‌شود که تنش کلی‌ای برابر با σ به مدل اعمال شده و باعث ایجاد کرنش کلی ε در آن می‌شود. اعمال این تنش

محققانی [9] در این زمینه روش‌های گوناگونی مانند روش‌های عددی ارائه نموده‌اند. اما در این پژوهش نشان داده شده است که با ایجاد یک مدل اجزای محدود می‌توان یکی از پارامترهای مدول یا نرمی را در صورت داشتن پارامتر دیگر پیش‌بینی نمود.

در ادامه‌ی این مقاله، بخشی جهت معرفی تئوری مورد استفاده در مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی و روابط حاکم مربوطه ارائه می‌گردد. سپس با استفاده از نرم‌افزار کامسول مثالی برای نشان دادن قابلیت استفاده از این مدل‌های رئولوژیکی برای تحلیل رفتار ویسکوالاستیک خطی مواد مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه نحوه‌ی تبدیل بین پارامترهای مدول و نرمی ارائه می‌شود. در نهایت، در بخش پایانی مقاله که مربوط به نتایج می‌باشد، نتایج حاصل از تحلیل عددی مثال مذکور و هم‌چنین تبدیل بین مدول و نرمی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تئوری و معادلات حاکم

رفتار ویسکوالاستیک در موادی مانند مواد پلیمری می‌تواند توسط دو مدل رئولوژیکی معروف تحت نام‌های مدل کلویین- وویت و مدل ماکسول مدل شود. این مدل‌های اولیه هرچند در مطالعه‌ی رفتارشناسی مواد ویسکوالاستیک مفید می‌باشند، اما پدیده‌های مکانیکی‌ای مانند خزش و رها شدن تنش را به‌طور کاملاً صحیحی نمی‌توانند مدل نمایند. از این رو، به‌منظور رفع این نقیصه با استفاده از این دو مدل ساده مدل‌های دیگری ارائه شده‌اند که عمدتاً شامل ترکیبی از این مدل‌های اولیه با تعدادی فنر و سیلندر- پیستون به صورت موازی و یا سری می‌باشند. دو مدل معروف با نام‌های مدل تعمیم یافته‌ی کلویین- وویت (شکل ۱) و مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول (شکل ۲) از این دسته مدل‌های رئولوژیکی می‌باشند. در مدل تعمیم یافته‌ی کلویین- وویت، دو المان اولیه مدل کلویین- وویت با

باعث ایجاد تنش‌ها و کرنش‌هایی در فنرها و دمپرها می‌شود. این کرنش‌ها به کرنش‌های (۱ و ۲) نیز نمایش داده شده‌اند. این کرنش‌ها به کرنش الاستیک (ϵ^e) ، کرنش غیر الاستیک (ϵ^{an}) و کرنش ویسکوالاستیک (ϵ^v) تقسیم می‌شوند. تنش‌ها و کرنش‌های ایجاد شده در این دو مدل مطابق روابط زیر به هم مربوط می‌شوند:

وضعیت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای نوشته شوند. این معادلات که می‌توانند در مدلسازی رفتار ویسکوالاستیک خطی یک ماده مورد استفاده قرار گیرند، در پیوست الف ارائه شده‌اند.

معرفی نرم‌افزار کامسول

در این پژوهش از نرم‌افزار کامسول برای مدلسازی مسأله‌ی مورد نظر استفاده شده است. لذا پیش از طرح مسأله، به معرفی مختصر این نرم‌افزار و چگونگی استفاده از آن پرداخته می‌شود.

نرم‌افزار کامسول نرم‌افزار قدرتمندی است که براساس زبان برنامه‌نویسی متلب (MATLAB) بنا شده است. این نرم‌افزار که از ابتدا با نام فملب (FEMLAB) معرفی شد [10]، در سال ۱۹۹۸ ایجاد شد و در سال ۲۰۰۵ به صورت کنونی اش درآمد. این نرم‌افزار که به عنوان وسیله‌ای محاسباتی برای معادلات دیفرانسیل جزئی عمل می‌کند، امکان تغییرات معادلات را فراهم می‌سازد. قابلیت مدلسازی فیزیک‌های چندگانه‌ی نرم‌افزار می‌تواند با در بر گرفتن مسائل پیچیده نیز گسترش داده شود. هم‌چنین نرم‌افزار، کدهای ام-فایل (m-file) مربوط به نرم‌افزار متلب را نیز تولید می‌نماید که خود موجب آسان‌تر شدن برنامه‌نویسی می‌گردد. نرم‌افزار کامسول از روش اجزای محدود به عنوان ابزاری برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده می‌کند. در واقع این معادلات را به مجموعه‌ای از ماتریس سفتی و بردار بارگذاری تعریف شده در روش اجزای محدود تبدیل می‌کند و سپس معادلات را در محدوده‌ی زیر دامنه‌های کوچکتر یا همان المان‌های محدود، حل می‌نماید. از لحاظ ریاضی نرم‌افزار کامسول با استفاده از مفاهیم اجزای محدود، یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی را به شکل ضعیف آن تبدیل می‌سازد که در آن توابع پایه‌ای لاگرانژ (یا توابع شکل) برای نمایندگی متغیرهای میدان

مدل تعمیم یافته‌ی کلونین-وویت:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e + \underline{\underline{\epsilon}}^{an_1} + \underline{\underline{\epsilon}}^{an_2} \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{an_1} = \underline{\underline{\epsilon}}^{v_1} \quad (2)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{an_2} = \underline{\underline{\epsilon}}^{v_2} \quad (3)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e = \underline{\underline{\sigma}}^{an_1} + \underline{\underline{\sigma}}^{v_1} = \underline{\underline{\sigma}}^{an_2} + \underline{\underline{\sigma}}^{v_2} \quad (4)$$

مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e = \underline{\underline{\epsilon}}^{an_1} + \underline{\underline{\epsilon}}^{v_1} = \underline{\underline{\epsilon}}^{an_2} + \underline{\underline{\epsilon}}^{v_2} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e + \underline{\underline{\sigma}}^{an_1} + \underline{\underline{\sigma}}^{an_2} \quad (6)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{an_1} = \underline{\underline{\sigma}}^{v_1} \quad (7)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{an_2} = \underline{\underline{\sigma}}^{v_2} \quad (8)$$

معادلات حاکم برای یک ماده‌ی ویسکوالاستیک که از دو مدل تعمیم یافته‌ی کلونین-وویت و ماکسول تبعیت می‌کنند، می‌توانند در حالت صفحه‌ای برای دو

فرم عمومی PDE

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = F \quad (10)$$

که در آن Γ و F توابع متغیر وابسته به u و مشتقات مکانی آن بر روی دامنه‌ی محاسباتی Ω می‌باشند. ضرایب موجود در معادلات (۱۰ و ۹) به گونه‌ای انتخاب شدند که منجر به معادلات حاکم بر رفتار ویسکوالاستیک خطی (ارائه شده در پیوست الف) گردند.

مدل‌سازی

به منظور پیاده‌سازی معادلات در جهت مدل‌سازی ویسکوالاستیسیته‌ی خطی، مثالی مهندسی شامل یک لوله‌ی تحت فشار در نظر گرفته می‌شود. این مسأله، نمونه‌ای مناسب از یک هندسه با مرزهای منحنی شکل است که می‌تواند در حالات مختلف مدل شود. شکل شبکه‌بندی شده‌ی لوله و شرایط مرزی اعمالی به آن در شکل (۳) به نمایش در آمده است. به علت تقارن مدل، تنها یک چهارم لوله مورد تحلیل قرار گرفته است.

در این مسأله فرض می‌شود که لوله از ماده‌ی پلیمری PC/ABS ساخته شده است که در نتیجه دارای رفتار ویسکوالاستیک می‌باشد. بنابراین رفتار چنین ماده‌ای می‌تواند توسط مدل‌های تعمیم یافته‌ی کلوین-وویت و ماکسول (شکل‌های ۱ و ۲) مدل گردد. جزئیات مدل‌سازی برای مدل تعمیم یافته‌ی کلوین - وویت در حالت کرنش صفحه‌ای در پیوست ب آمده است. دیگر مدل‌ها نیز با توجه به روش ارائه شده، قابل اجرا کردن در نرم‌افزار می‌باشند.

پس از ایجاد مدل با استفاده از این معادلات، یک تحلیل گذرا بر روی لوله‌ی مورد نظر در مسأله (شکل ۳) انجام شد. در این تحلیل فرض بر آن شد که ماده‌ای که لوله از آن ساخته شده است، دارای الگوی رفتاری مدل تعمیم یافته‌ی کلوین-وویت و مدل تعمیم یافته‌ی

به صورت ناپیوسته بر روی دامنه مورد استفاده قرار می‌گیرند. سپس از این گونه توابع ناپیوسته انتگرال‌گیری می‌شود تا به جواب مسأله ختم شود [11].

ماژول معادلات دیفرانسیل جزئی. نرم‌افزار کامسول، ماژول‌های متفاوتی برای مدل کردن فیزیک‌هایی مانند مکانیک سازه‌ای، انتقال حرارت، نفوذ جرم و غیره دارد. یکی از این ماژول‌ها، ماژول معادلات دیفرانسیل جزئی است که در جهت مدل‌سازی براساس معادلات استفاده می‌شود. به کار بردن ماژول معادلات دیفرانسیل جزئی در نرم‌افزار، مدل‌سازی دستگاه پیچیده‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی را آسان‌تر می‌سازد و این به دلیل مزیت‌های متعددی است که نرم‌افزار دارد؛ از قبیل در دسترس بودن منبع کد نرم‌افزار، آسانی اصلاح آن و عدم نیاز به نوشتن کد برای تعریف المان جدید توسط کاربر (UEL). ماژول معادلات دیفرانسیل جزئی در این نرم‌افزار، سه فرم از معادلات دیفرانسیل جزئی را در اختیار کاربران قرار می‌دهد: فرم ضریبی (coefficient form)، فرم عمومی (general form)، و فرم ضعیف [12]. از آنجایی که در این مقاله از فرم‌های ضریبی و عمومی استفاده شده است، این دو فرم در مسأله‌ی مورد نظر در این مقاله به اختصار در زیر معرفی می‌شوند:

فرم ضریبی PDE

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u = f \quad (9)$$

که در آن u متغیر مستقل روی دامنه‌ی محاسباتی که با Ω در نرم‌افزار کامسول نمایش داده می‌شود، می‌باشد.

$$E = E_e + E_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + E_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) + D_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right] \quad (12)$$

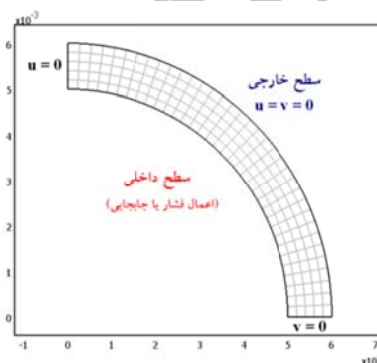
که در آن D نشان دهنده ی نرمی و E بیانگر مدول می باشد. اندیس های ۱ و ۲ که در این روابط به کار گرفته شده اند، به دو شاخه از دو مدل رئولوژیک (شکل های ۱ و ۲) مرتبط می باشند.

پنج پارامتر در مدول حاصل از مدل تعمیم یافته ی ماکسول (رابطه ی ۱۲) وجود دارد که عبارتند از $E_e, E_1, E_2, \tau_1, \tau_2$. این پارامترها را می توان از برازش یک منحنی به داده های آزمایشگاهی حاصل از تست های رهاشدن تنش به دست آورد. این کار توسط محققان دیگری در همین زمینه این کار را انجام داده اند [14]. به عنوان مثال، مدول یک قطعه ی آزمایشگاهی در دمای 65°C به صورت زیر می باشد [14]:

$$E[\text{GPa}] = 1.033 + 0.851 \exp\left(-\frac{t}{3023}\right) + 0.273 \exp\left(-\frac{t}{260}\right) \quad (13)$$

به منظور یافتن مقادیر پنج پارامتر مدل تعمیم یافته ی کلونین-وویت ($E_e, D_1, D_2, \tau_1, \tau_2$) که معادل مدول بالا نیز می باشند، یک تحلیل دوبرعده ای بر روی یک صفحه ی مستطیلی و با استفاده از مدل تعمیم یافته ی ماکسول انجام می شود. برای شبیه سازی بارگذاری خزشی یک تنش تک محوری ثابت بر صفحه اعمال می گردد. چنانچه مقدار تنش تک محوری اعمالی بر صفحه برابر با واحد در نظر گرفته شود، کرنش به دست آمده از تحلیل، معادل نرمی ماده خواهد بود. سپس نقاط داده های کرنش به معادله ی نرمی، معادله ی (۱۱)، برازش داده می شود تا فرمولی حاصل شود.

ماکسول باشد. این تحلیل در دو حالت تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای انجام شد و شرایط مرزی و بارگذاری به این گونه بود که سطح خارجی لوله ثابت در نظر گرفته شد و سطح داخلی آن تحت تأثیر دو نوع بارگذاری قرار گرفت. بارگذاری اول شامل اعمال یک تغییر مکان شعاعی ثابت نسبت به زمان و برابر با 0.1 mm بود که شرایط بارگذاری رها شدن تنش را فراهم می نمود و بارگذاری دوم عبارت بود از اعمال فشار داخلی ثابتی نسبت به زمان و برابر با 1 MPa که شرایط بارگذاری خزشی را ایجاد می کرد.



شکل ۳ هندسه و شرایط مرزی یک چهارم از لوله d مدل شده

تبدیل مدول و نرمی به یکدیگر

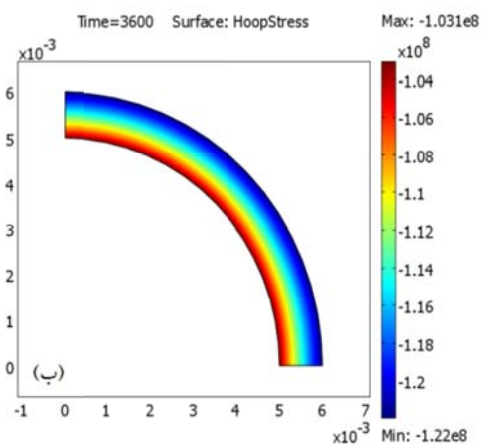
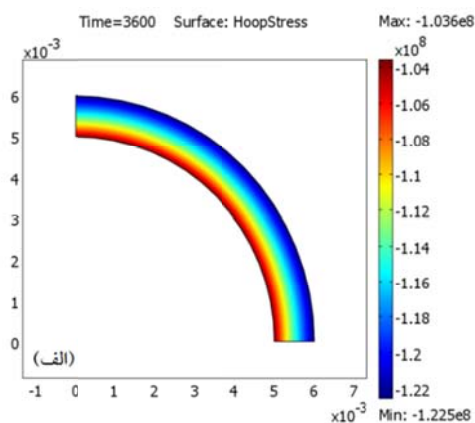
معمولاً برای استفاده در یک مدل نرم افزار اجزای محدود، نرمی و مدول مواد ویسکوالاستیک را به صورت سری پرونی (Prony) بیان می کنند. این گونه نحوه ی بیان این دو پارامتر نسبت به گونه های دیگر ارائه پارامترها هم چون مدل Kohlrausch-Williams-Watts (KWW) دارای کاربرد بهتری در مدل سازی اجزای محدود می باشد [13]. در این صورت نرمی و مدول مرتبط با مدل تعمیم یافته ی کلونین-وویت و مدل تعمیم یافته ی ماکسول (شکل های ۱ و ۲) به صورت زیر می باشند:

$$D = D_e + D_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right] \quad (11)$$

نتایج و بحث بر روی آن‌ها

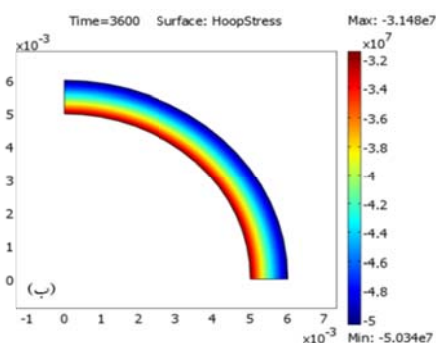
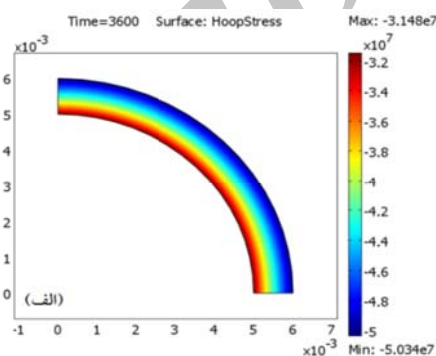
تحلیل عددی. یک تحلیل گذرا در نرم‌افزار کامسول انجام شد و نتایج حاصل با نتایج به دست آمده از تحلیل‌های مشابه ایجاد شده در نرم‌افزارهای دیگر مانند آباکوس مورد مقایسه قرار گرفت. شکل‌های (۵ و ۴) تغییرات تنش محیطی را که از تحلیل‌های رها شدن تنش در لوله برای حالات تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به دست آمده است، نمایش می‌دهند. این تحلیل‌ها در نرم‌افزار کامسول انجام شده است.

حاصل از به‌کارگیری دو مدل رئولوژیک مختلف در نرم‌افزار کامسول یکسان می‌باشد.



شکل ۵ تغییرات تنش محیطی حاصل از تحلیل کرنش صفحه‌ای در نرم‌افزار کامسول با استفاده از (الف) مدل تعمیم یافته کلین - ویت و (ب) مدل تعمیم یافته ماکسول

به طریق مشابه، نتایج حاصل از تحلیل‌های خزشی در قالب تغییرات کرنش شعاعی در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای در شکل‌های (۷ و ۶) ارائه شده‌اند. اختلاف حد بالا و پایین کرنش شعاعی نیز در جدول (۲) ارائه شده است. از مقایسه‌ی مقادیر کرنش شعاعی حاصل از به‌کارگیری دو مدل رئولوژیک نیز به این نتیجه می‌رسیم که حداکثر اختلاف در حدود ۰/۲٪ است و بنابراین به‌کارگیری هر دو مدل رئولوژیک در نرم‌افزار کامسول، نتایج یکسانی خواهد داشت.



شکل ۴ تغییرات تنش محیطی حاصل از تحلیل تنش صفحه‌ای در نرم‌افزار کامسول با استفاده از (الف) مدل تعمیم یافته کلین - ویت و (ب) مدل تعمیم یافته ماکسول

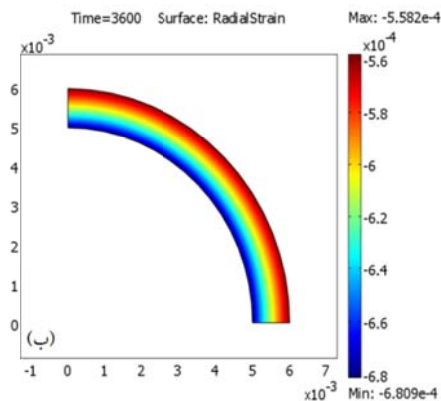
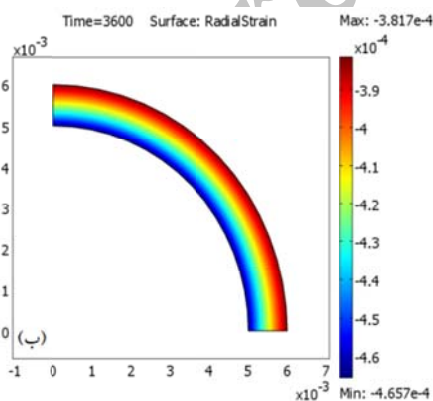
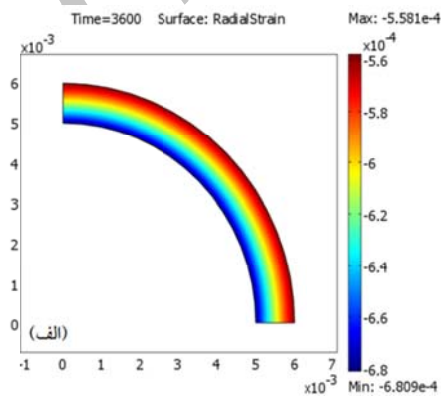
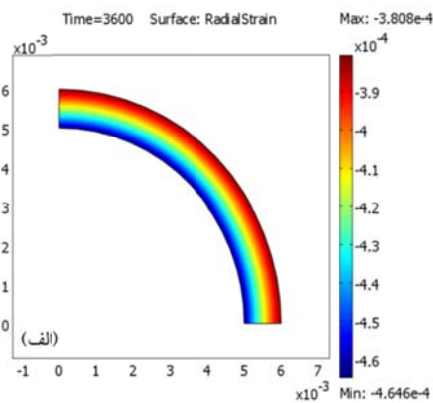
مقایسه‌ی حد بالا و پایین تنش محیطی در شکل‌های (۵ و ۴) در جدول (۱) ارائه شده است و اختلاف مقادیر حاصل از به‌کارگیری هر دو مدل رئولوژیک بر حسب درصد بیان شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اختلاف این مقادیر ناچیز است (حدود ۰/۵٪) و در نتیجه نتایج توزیع تنش محیطی

جدول ۱ مقایسه ی مقادیر تنش محیطی بر حسب مگاپاسکال حاصل از تحلیل های نرم افزار کامسول و آباکوس

کرنش صفحه ای			تنش صفحه ای			
اختلاف:	-103.6	K-V	اختلاف:	-31.48	K-V*	حد بالا
0.5%	-103.1	M	0.0%	-31.48	M**	
اختلاف:	-122.5	K-V	اختلاف:	-50.34	K-V	حد پایین
0.4%	-122.0	M	0.0%	-50.34	M	
اختلاف با کامسول:			اختلاف با کامسول:			
0.5%	-103.1		0.0%	-31.49		حد بالا
اختلاف با کامسول:			اختلاف با کامسول:			
0.4%	-122.0		0.1%	-50.38		حد پایین

*K-V: Kelvin-Voigt (مدل تعمیم یافته ی کلونین - وویت)

**M: Maxwell (مدل تعمیم یافته ی ماکسول)



شکل ۷ تغییرات کرنش شعاعی حاصل از تحلیل کرنش صفحه ای در نرم افزار کامسول با استفاده از مدل تعمیم یافته ی کلونین - وویت و (ب) مدل تعمیم یافته ی ماکسول

شکل ۶ تغییرات کرنش شعاعی حاصل از تحلیل تنش صفحه ای در نرم افزار کامسول با استفاده از مدل تعمیم یافته ی کلونین - وویت و (ب) مدل تعمیم یافته ی ماکسول

جدول ۲ مقایسه مقادیر کرنش شعاعی حاصل از تحلیل‌های نرم‌افزار کامسول و آباکوس

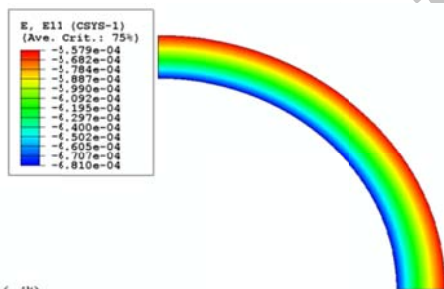
کرنش صفحه‌ای		تنش صفحه‌ای		حد بالا	حد پایین
اختلاف: 0.24%	-0.3808 K-V -0.3817 M	اختلاف: 0.02%	-0.5581 K-V* -0.5582 M**		
اختلاف: 0.24%	-0.4646 K-V -0.4657 M	اختلاف: 0.00%	-0.6809 K-V -0.6809 M		
اختلاف با کامسول: 0.18%	-0.3815	اختلاف با کامسول: 0.05%	-0.5579	حد بالا	آباکوس
اختلاف با کامسول: 0.24%	-0.4657	اختلاف با کامسول: 0.01%	-0.6810	حد پایین	

*K-V: Kelvin-Voigt (مدل تعمیم‌یافته‌ی کلوین - وویت)

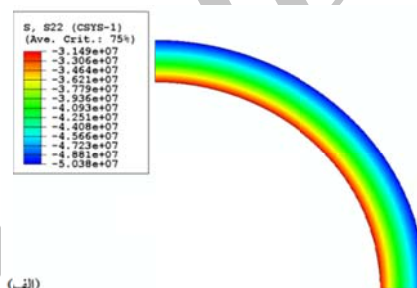
**M: Maxwell (مدل تعمیم‌یافته‌ی ماکسول)

حاصل از این دو نرم‌افزار در جدول‌های (۱ و ۲) به صورت درصد بیان گردیده است که نشان‌دهنده‌ی حداکثر اختلاف ۰/۵٪ است. از آنجایی که مدل ویسکوالاستیسیته در نرم‌افزار آباکوس قبلاً مورد تأیید قرار گرفته است، مقایسه‌ی انجام شده نیز صحت مدل‌سازی با معادلات دیفرانسیل جزئی در نرم‌افزار کامسول را برای رفتار ویسکوالاستیک خطی نشان

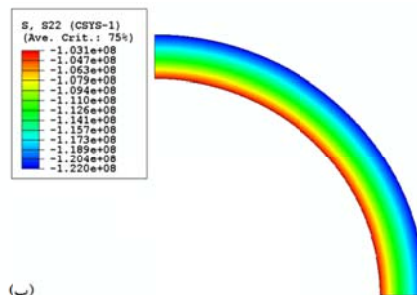
می‌دهد.



(الف)

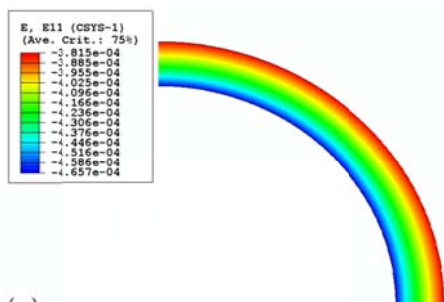


(ب)



(پ)

شکل ۸ تغییرات تنش محیطی حاصل از تحلیل (الف) تنش صفحه‌ای و (ب) کرنش صفحه‌ای در نرم‌افزار آباکوس



(ب)

شکل ۹ تغییرات کرنش شعاعی حاصل از تحلیل (الف) تنش صفحه‌ای و (ب) کرنش صفحه‌ای در نرم‌افزار آباکوس

به‌منظور مقایسه‌ی نتایج حاصل، نتایج به‌دست آمده از تحلیل‌های متناظر در نرم‌افزار اجزای محدود ABAQUS در شکل‌های (۸ و ۹) نشان داده شده‌اند. همان گونه که از شکل‌های (۸-۹) دیده می‌شود، تطابق خیلی خوبی بین نتایج حاصل از تحلیل‌های نرم‌افزار کامسول با نتایج تحلیل‌های متناظر در نرم‌افزار آباکوس وجود دارد. هم‌چنین اختلاف حدود بالا و پایین مقادیر تنش محیطی و کرنش شعاعی

گیرد. هم چنین نرمی حاصل در رابطه ی بالا با رابطه ای که با مدول طبق رابطه ی زیر [15] دارد، مورد تأیید قرار گرفت:

$$\int_0^t E(t)D(t-\tau)d\tau = t \quad (17)$$

مشاهده شد که پارامترهای به دست آمده برای نرمی (رابطه ۱۶) در معادله ی (۱۷) صدق می کند.

نتیجه گیری

در این پژوهش رفتار ویسکوالاستیک خطی توسط مدل ارائه شده در نرم افزار کامسول مدل گردید. در معادلات به کار رفته در مدل پیشنهادی، از دو مدل رئولوژیک معروف به نام مدل تعمیم یافته ی کلوین-وویت و مدل تعمیم یافته ی ماکسول استفاده شد و معادلات برای دو حالت تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای ارائه گردید. مدل ارائه شده برای نشان دادن رفتار ماده که از نتایج تست های آزمایشگاهی تحت بارگذاری خزشی یا رها شدن تنش به دست می آید، به کار می رود. مدل پیشنهادی در این کار پژوهشی هم چنین می تواند برای به دست آوردن مدول یا نرمی یک ماده ویسکوالاستیک در حالی که داده های آزمایشگاهی تنها برای یکی از حالات بارگذاری (خزش یا رها شدن تنش) در دسترس است، به کار رود. کاربرد مهم دیگر رویکرد ارائه شده در این پژوهش، در تحلیل رفتار ویسکوالاستیک خطی است در مسأله ای که فیزیک مکانیک سازه ای (که در برگرنده رفتار ویسکوالاستیک ماده است) با فیزیک های چندگانه دیگری نیز کوپل شده باشد. این امکان وجود دارد که معادلات ویسکوالاستیک ارائه شده در این مطالعه را با معادلات حاکم بر فیزیک های دیگر ترکیب نمود.

همان گونه که در مقدمه نیز آورده شد، مدل ویسکوالاستیک ارائه شده در این پژوهش قابل استفاده در مدل سازی فیزیک های چندگانه نیز می باشد. به عنوان مثال، در مسایل شامل فیزیک های کوپل مکانیک سازه ای و رسانش حرارتی (مانند سازه هایی که در آنها مقدار تنش حرارتی قابل توجه است)، معادلات حاکم بر رفتار مکانیک سازه ای یک ماده ویسکوالاستیک به صورت زیر می باشد:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda^e \left[\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e) \right] \underline{\underline{I}} + 2\mu^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e - (3\lambda^e + 2\mu^e)(\alpha_T^e \Delta T) \underline{\underline{I}} \quad (14)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{ani}} = \lambda^{\text{ani}} \left[\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{ani}}) \right] \underline{\underline{I}} + 2\mu^{\text{ani}} \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{ani}} - (3\lambda^{\text{ani}} + 2\mu^{\text{ani}})(\alpha_T^{\text{ani}} \Delta T) \underline{\underline{I}} \quad (15)$$

با دقت در معادلات (۱۴ و ۱۵) مشاهده می شود که تغییرات دما به صورت کرنش حرارتی $(\alpha_T \Delta T)$ در این معادلات ظاهر می شود. مدل سازی این معادله نیز با اصلاح معادلات ویسکوالاستیک ارائه شده در این مقاله قابل انجام است.

تبدیل بین مدول و نرمی. با استفاده از مدل تعمیم یافته ی ماکسول در تحلیل بر روی یک ورق دارای رفتار ویسکوالاستیک، نقاط کرنش به دست آمد. سپس با برازش نقاط حاصل بر معادله ی نرمی (معادله ی ۱۱)، رابطه ای به صورت زیر حاصل شد:

$$D \left[\frac{1}{\text{GPa}} \right] = 0.464 + 0.444 \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{t}{5547} \right) \right\} + 0.061 \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{t}{296} \right) \right\} \quad (16)$$

رابطه ی بالا می تواند برای مدل سازی نرمی یک نمونه ی پلیمری در دمای 65°C همراه با به کارگیری مدل تعمیم یافته ی کلوین-وویت مورد استفاده قرار

مراجع

1. Gasser, T. C. and Forsell, C., "The Numerical Implementation of Invariant-based Viscoelastic Formulations at Finite Strains. An Anisotropic Model for the Passive Myocardium", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200(49-52), pp. 3637-3645, (2011).
2. COMSOL Multiphysics 4.0a, COMSOL Inc., (2005).
3. Moravec, F. and Letzelter, N., "On the Modeling of the Linear Viscoelastic Behaviour of Biological Materials Using Comsol Multiphysics", *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 175-184, (2007).
4. Marvalova, B., "Application of COMSOL Multiphysics 3.2 to Finite Strain Viscoelasticity of an Elastomeric Solid", *Proceedings of the COMSOL Users Conference*, Prague, October, (2006).
5. Rambert, G., Grandidier, J.-C. and Cangemi, L., "A Modelling of the Coupled Thermo-diffuso-Elastic Linear Behaviour. Application to Explosive Decompression of Polymers", *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP*, Vol. 58(5), pp. 571-591, (2003).
6. Rambert, G. and Grandidier, J.-C., "An Approach to the Coupled Behaviour of Polymers Subjected to a Thermo-Mechanical Loading in a Gaseous Environment", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 24, pp. 151-168, (2005).
7. Rambert, G., Jugla, G. and Grandidier, J.-C., "A Modelling of the Direct Couplings between Heat Transfer, Mass Transport, Chemical Reactions and Mechanical Behaviour. Numerical Implementation to Explosive Decomposition", *Composites: Part A*, Vol. 37, pp. 571-584, (2006).
8. Rambert, G., Grandidier, J.-C. and Aifantis, E.C., "On the Direct Interactions between Heat Transfer, Mass Transport and Chemical Processes within Gradient Elasticity", *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 26(1), pp. 68-87, (2007).
9. Sorvari, J. and Malinen, M., "Numerical Interconversion between Linear Viscoelastic Material Functions with Regularization", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 1291-1303, (2007).
10. Wilkes, J.O., "Fluid Mechanics for Chemical Engineers with Microfluidics and CFD", 2nd Edition, Prentice Hall, N. J., (2005).
11. Zimmerman, W.B.J., "Multiphysics Modelling with Finite Element Methods", World Scientific Pub., London, Hackensack, N.J., (2006).
12. COMSOL Multiphysics User's Guide, COMSOL Multiphysics 4.0a Documentation, (2010).
13. Taylor, R.L., Pister, K.S. and Goudreau, G.L., "Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2(1), pp. 45-59, (1970).
14. Haghighi-Yazdi, M. and Lee-Sullivan, P., "Stress Relaxation of a Polycarbonate Blend after Hygrothermal Aging", *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 17, pp. 171-193, (2013).
15. Guo, Y. and Bradshaw, R.D., "Isothermal Physical Aging Characterization of Polyether-Ether-Ketone (PEEK) and Polyphenylene Sulfide (PPS) Films by Creep and Stress", *Mechanics of Time-Dependent Materials*, Vol. 11(1), pp. 61-89, (2007).

پیوست الف

مدل تعمیم یافته‌ی کلونین- وویت

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^{an1} + \varepsilon_z^{an2} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad \text{(الف-۱)}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x^e = \varepsilon_x - \varepsilon_x^{an1} - \varepsilon_x^{an2} \\ \varepsilon_y^e = \varepsilon_y - \varepsilon_y^{an1} - \varepsilon_y^{an2} \\ \varepsilon_z^e = \frac{\frac{2}{3}G - K}{\frac{4}{3}G + K} (\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e), \text{ تنش صفحه ای,} \\ \varepsilon_z^e = 0, \text{ کرنش صفحه ای,} \\ \varepsilon_{xy}^e = \varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xy}^{an1} - \varepsilon_{xy}^{an2} \end{cases} \quad \text{(الف-۲)}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x^e = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_{vol}^e}{3} \\ \varepsilon_y^e = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_{vol}^e}{3} \\ \varepsilon_z^e = \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_{vol}^e}{3} \\ \varepsilon_{vol}^e = \varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e \end{cases} \quad \text{(الف-۳)}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = 2Ge_x^e + Ke_{vol}^e \\ \sigma_y = 2Ge_y^e + Ke_{vol}^e \\ \sigma_z = 2Ge_z^e + Ke_{vol}^e \\ \sigma_{xy} = 2Ge_{xy}^e \end{cases} \quad \text{(الف-۴)}$$

$$\begin{cases} \sigma_x^{an1} = \left(\frac{4}{3}G_i + K_i \right) \varepsilon_x^{an1} + \left(K_i - \frac{2}{3}G_i \right) (\varepsilon_y^{an1} + \varepsilon_z^{an1}) \\ \sigma_y^{an1} = \left(\frac{4}{3}G_i + K_i \right) \varepsilon_y^{an1} + \left(K_i - \frac{2}{3}G_i \right) (\varepsilon_x^{an1} + \varepsilon_z^{an1}) \\ \sigma_z^{an1} = \left(\frac{4}{3}G_i + K_i \right) \varepsilon_z^{an1} + \left(K_i - \frac{2}{3}G_i \right) (\varepsilon_x^{an1} + \varepsilon_y^{an1}) \\ \sigma_{xy}^{an1} = 2G_i \varepsilon_{xy}^{an1}, i = 1, 2 \text{ (بدون قرارداد جمع)} \end{cases} \quad \text{(الف-۵)}$$

$$\begin{cases} \sigma_x^{vi} = \frac{\eta_i}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x^{an1} + \nu(\varepsilon_y^{an1} + \varepsilon_z^{an1})] \\ \sigma_y^{vi} = \frac{\eta_i}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y^{an1} + \nu(\varepsilon_x^{an1} + \varepsilon_z^{an1})] \\ \sigma_z^{vi} = \frac{\eta_i}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z^{an1} + \nu(\varepsilon_x^{an1} + \varepsilon_y^{an1})] \\ \sigma_{xy}^{vi} = 2G_i \tau_i \varepsilon_{xy}^{vi}, i = 1, 2 \text{ (بدون قرارداد جمع)} \end{cases} \quad \text{(الف-۶)}$$

مدل تعمیم یافته‌ی ماکسول

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_z = \frac{-\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \sigma_{qz}}{\lambda + 2G}, \text{ تنش صفحه ای} \\ \varepsilon_z = 0, \text{ کرنش صفحه ای} \end{array} \right. \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (\text{الف-۷})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_x = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_{vol}}{3} \\ e_y = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_{vol}}{3} \\ e_z = \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_{vol}}{3} \\ \varepsilon_{vol} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \end{array} \right. \quad (\text{الف-۸})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 2Ge_x + K\varepsilon_{vol} + \sigma_{qx} \\ \sigma_y = 2Ge_y + K\varepsilon_{vol} + \sigma_{qy} \\ \sigma_z = 2Ge_z + K\varepsilon_{vol} + \sigma_{qz} \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} + \sigma_{qxy} \end{array} \right. \quad (\text{الف-۹})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{x_i}^e = q_{x_i} - \frac{q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}}{3} \\ q_{y_i}^e = q_{y_i} - \frac{q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}}{3} \\ q_{z_i}^e = q_{z_i} - \frac{q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}}{3} \\ (i = 1, 2 \text{ بدون قرارداد جمع}) \end{array} \right. \quad (\text{الف-۱۰})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{q_x} = 2G_i q_{x_i}^e + K_i (q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}) \\ \sigma_{q_y} = 2G_i q_{y_i}^e + K_i (q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}) \\ \sigma_{q_z} = 2G_i q_{z_i}^e + K_i (q_{x_i} + q_{y_i} + q_{z_i}) \\ \sigma_{q_{xy}} = 2G_i q_{xy_i}^e, i = 1, 2 \text{ (با قرارداد جمع)} \end{array} \right. \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_{x_i} + \frac{1}{\tau_i} q_{x_i} = \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{q}_{y_i} + \frac{1}{\tau_i} q_{y_i} = \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{q}_{z_i} + \frac{1}{\tau_i} q_{z_i} = \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{q}_{xy_i} + \frac{1}{\tau_i} q_{xy_i} = \dot{\varepsilon}_{xy} \\ (i = 1, 2 \text{ بدون قرارداد جمع}) \end{array} \right. \quad (\text{الف-۱۲})$$

پیوست ب

جزئیات مدل سازی با استفاده از مدل تعمیم یافته ی کلونین - وویت در حالت کرنش صفحه ای

مدل تعمیم یافته کلونین - وویت در نظر گرفته شده در این پژوهش، دارای یک فنر خطی و دو المان کلونین - وویت می باشد که به صورت سری به هم متصل شده اند (شکل ۱). بنابراین، تنش کلی مدل برابر با تنش فنر خطی و هم چنین تنش در هر کدام از المان های کلونین - وویت (معادله ی ۴)، و کرنش کلی مدل برابر با مجموع کرنش های فنر خطی و دو المان کلونین - وویت (معادله ی ۱) می باشد. به منظور مدل سازی مدل تعمیم یافته در نرم افزار، یک فرم عمومی معادلات دیفرانسیل جزئی برای مدل کردن تنش - کرنش کلی مدل در نظر گرفته شد و برای هر کدام از المان های کلونین - وویت از فرم ضریبی معادلات دیفرانسیل جزئی بهره گرفته شد.

فرم عمومی معادلات دیفرانسیل جزئی

با توجه به معادله ی فرم عمومی معادلات دیفرانسیل جزئی (معادله ی ۱۰) متغیر وابسته برابر با جابه جایی های کلی مدل؛ یعنی u و v ، قرار داده شد و ضرایب معادله به صورت زیر تعریف شد:

$$e_a = d_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۱})$$

$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{ب-۲})$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\sigma_x & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & -\sigma_y \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۳})$$

اگر این ضرایب در معادله ی (۱۰) قرار داده شود، دستگاه معادلات تعادل جسم در حالت صفحه ای حاصل می شوند:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{ب-۴})$$

که در آن σ_x ، σ_y و σ_{xy} برابر با تنش های متناظر در فنر خطی مدل تعمیم یافته (با مدول برشی G) قرار داده می شود:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x^e + (K - \frac{2}{3}G)(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y^e + (K - \frac{2}{3}G)(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z^e + (K - \frac{2}{3}G)(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}^e \end{cases} \quad (\text{ب-۵})$$

که در آن ε_x^e ، ε_y^e ، ε_z^e و ε_{xy}^e کرنش های فنر خطی در مدل تعمیم یافته می باشند که توسط روابط (الف-۲) به کرنش کلی (۴) و کرنش های دو المان کلونین - وویت (ε^{an1} و ε^{an2}) مرتبط می شوند.

فرم ضریبی معادلات دیفرانسیل جزئی

برای هر کدام از المان‌های کلونین - وویت در مدل تعمیم یافته، یک فرم ضریبی معادلات دیفرانسیل جزئی ایجاد شد که در آن متغیرهای وابسته، کرنش در این المان‌ها؛ یعنی ε_x^{ani} ، ε_y^{ani} ، ε_z^{ani} و ε_{xy}^{ani} ($i=1,2$)، در نظر گرفته می‌شود. ضرایب فرم ضریبی PDE در معادله‌ی (۹) نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$e_a, c, \alpha, \gamma, \beta = 0 \quad (6-ب)$$

$$d_a = \begin{bmatrix} \tau_i(2G_i)(1+\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_i(2G_i)(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_i(2G_i)(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_i(2G_i) \end{bmatrix} \quad (7-ب)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 2G_i(1+\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G_i(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G_i(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_i \end{bmatrix} \quad (8-ب)$$

$$f = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (9-ب)$$

بنابراین با تعریف پارامترهای معادلات (الف - ۱ تا ۴) و استفاده از متغیرهای کرنش فنر خطی (ε^e) و کرنش‌های دو المان کلونین - وویت (ε^{ani}) در معادلات دیفرانسیل جزئی، این دو فرم عمومی و ضریبی معادلات به هم مرتبط می‌شوند و در مجموع مدل تعمیم یافته‌ی کلونین - وویت ساخته می‌شود.