

**حل تحلیلی کمانش ورق‌های ساندویچی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک در دو حالت مدار باز و بسته\***محمدعلی قاسم‌آبادیان<sup>(۱)</sup>علیرضا سعیدی<sup>(۲)</sup>

**چکیده** در مقاله حاضر، بر پایه تئوری کلاسیک ورق، کمانش ورق‌های مستطیلی هدفمند کوپله شده با لایه‌های پیزوالکتریک تحلیل شده است. با فرض اینکه توزیع عرضی تابع پتانسیل الکتریکی ترکیبی از دو تابع خطی و درجه دوم باشد، معادلات تعادل برای تحلیل کمانش ورق با لایه‌های پیزوالکتریک حاصل شد. معادله ماکسول و همه شرایط مرزی شامل شرایط روی سطوح بالا و پایین ورق برای مدار باز و بسته و شرایط مرزی لوی ارضا شدند. نتایج نشان داد که بار بحرانی کمانش در حالت مدار باز بیشتر از مدار بسته است. همچنین بار بحرانی کمانش با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک افزایش می‌یابد.

**واژه‌های کلیدی** کمانش، پیزوالکتریک، ورق مستطیلی، مدار باز، مدار بسته، ماده هدفمند.

### Analytical Solution for Buckling of FGM Plates with Integrated Piezoelectric Layers under Open and Closed Circuit Conditions

M.A. Ghasemabadian

A.R. Saidi

**Abstract** In the present paper, based on the classical plate theory, buckling analysis of piezoelectric coupled FGM rectangular plates is investigated. By assuming the transverse distribution of electric potential to be a combination of a parabolic and a linear function of thickness, the equilibrium equations for buckling analysis of plate with surface bonded piezoelectric layers are established. The Maxwell's equation and all boundary conditions including the conditions on the top and bottom surfaces of the plate for closed and open circuited and Levy type of boundary conditions are satisfied. Numerical results show that, the critical buckling load for open circuit is more than that of closed circuit. Furthermore, the critical buckling loads increase by increasing the thickness of piezoelectric layers.

**Key Words** Buckling, piezoelectric, rectangular plate, open circuit, closed circuit, functionally graded material.

\* تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۸/۲۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۷/۷ می‌باشد.

(۱) دانشجوی دکتری، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) نویسنده مسئول: استاد، گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان. saidi@mail.uk.ac.ir

## مقدمه

پیشرفت‌های اخیر در زمینه علم مواد، گستره وسیعی از مواد را در اختیار محققان برای انتخاب مواد مورد نیازشان با توجه به ویژگی‌های مورد نظر قرار داده است؛ به طوری که اطلاع از ویژگی‌های ماده مورد نیاز و ویژگی‌های مواد موجود، انتخابی درست و مطمئن را تضمین می‌کند. از سوی دیگر تحلیل سازه‌های ساخته شده از این مواد اهمیتی دو چندان دارد، آن چنان که بخش قابل توجهی از تلاش و توجه محققان، به آنالیز و تحلیل این مواد در سازه‌های پر کاربرد معطوف شده است. مواد هدفمند و پیزوالکتریک دو دسته از این مواد هستند که به علت ویژگی‌های منحصر به فردشان علی‌رغم نو بودن آنها، تاکنون مورد بررسی تعداد زیادی از پژوهشگران بوده‌اند.

جواهری و اسلامی در تحلیل کماتش ورق‌های ساخته شده از مواد هدفمند، کماتش ورق تحت بارگذاری‌های حرارتی [1] و مکانیکی [2] را براساس تئوری کلاسیک با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده بررسی کردند. آنها [3] هم‌چنین کماتش حرارتی ورق ضخیم را براساس تئوری برشی مرتبه سوم با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده انجام دادند و درجه حرارت بحرانی کماتش را به صورت حل دقیق به دست آوردند. وو [4] کماتش ورق تحت بارگذاری حرارتی را برای شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده براساس تئوری برشی مرتبه اول بررسی کرد. شریعت و اسلامی [5] تحلیل کماتش ورق تحت بارگذاری مکانیکی را براساس تئوری برشی مرتبه اول ارائه دادند. آنها [6] هم‌چنین حل بسته بار بحرانی کماتش را برای ورق با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و براساس تئوری برشی مرتبه سوم برای ماده هدفمند با تغییرات خطی و بارگذاری مکانیکی و حرارتی، ارائه دادند. فریرا [7] و همکارانش براساس تئوری برشی مرتبه سوم و استفاده از روش بدون المان، تغییرشکل استاتیکی ورق‌های مستطیلی ضخیم تحت بارگذاری

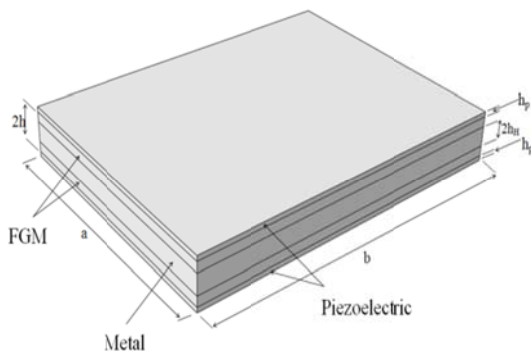
عرضی و شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده را به دست آوردند. محمدی و همکاران، کماتش ورق‌های تحت بارگذاری مکانیکی یکنواخت را براساس تئوری-های کلاسیک [8] و برشی مرتبه اول [9] انجام دادند.

هم‌چنین بداغی و سعیدی [10] نیز با در نظر گرفتن شرایط مرزی لوی و بر پایه تئوری مرتبه سوم برشی تحلیل کماتش ورق مستطیلی را ارائه دادند. تحلیل جامعی از مواد هدفمند متقارن نسبت به صفحه میانی ورق به کارهای زنکور [11] بر می‌گردد. کیانی و همکاران [12] نیز براساس تئوری مرتبه اول برشی کماتش ورق مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند متقارن بر روی بستر الاستیک را ارائه دادند.

در زمینه مطالعات مربوط به کماتش ورق‌های پیزوالکتریک، چاندراشخرا و باتیا [13]، براساس تئوری مرتبه اول برشی کنترل فعال کماتش ورق کامپوزیت با مدل‌سازی اجزای محدود را انجام دادند. باترا و جنگ [14] تأثیر شکل و اندازه محرک‌های پیزوسرامیک را بر افزایش اندازه بار کماتش بررسی کردند. وارلیس و ساراوونز [15] نیز پاسخ پیش کماتش و پس کماتش ورق‌های کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک به عنوان محرک و حسگر را بررسی کردند. تحلیل دینامیکی کماتش ورق‌های چند لایه با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بارهای الکترومکانیکی و حرارتی در دو حالت خواص مستقل [16] و وابسته به دما [17] توسط شریعت انجام شد. تحلیل سه بعدی کماتش حرارتی ورق‌های پیزوالکتریک کامپوزیت با روش لایه محدود نیز توسط لی و اخرس [18] انجام پذیرفت. در زمینه کارهای تحلیلی، یانگ [19]، معادلات مربوط به کماتش ورق خالص پیزوالکتریک را به دست آورد. شن [20] پس کماتش حرارتی ورق مستطیلی لایه‌ای با محرک‌های پیزوالکتریک را برای شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و تحت بارهای حرارتی و الکتریکی ارائه داد. علاوه بر آن وی [21] مقایسه‌ای بین تحلیل پس کماتش فشاری در محیط حرارتی و

## هندسه ورق

ورق مستطیلی نشان داده شده در شکل (۱) به ابعاد  $a$  و  $b$  و ضخامت کلی  $H$  را در نظر بگیرید. جنس هسته مرکزی ورق مورد بررسی فلز خالص به ضخامت  $2h_m$  می‌باشد که در بالا و پایین آن ماده هدفمندی که نسبت به صفحه میانی ورق دارای تقارن می‌باشد در نظر گرفته شده است. در بالا و پایین ورق نیز لایه‌های پیزوالکتریک به ضخامت  $h_p$  قرار گرفته‌اند.



شکل ۱. مختصات ورق پنج لایه

تغییرات خواص در ماده هدفمند در راستای ضخامت به صورت زیر می‌باشد [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} E^t(z) = E_c + (E_m - E_c) \left( \frac{-z+h}{h-h_m} \right)^n \\ \quad h_m \leq z \leq h \\ E^b(z) = E_c + (E_m - E_c) \left( \frac{z+h}{h-h_m} \right)^n \\ \quad -h \leq z \leq -h_m \\ E^m = E_m \\ \quad -h_m \leq z \leq h_m \end{array} \right. \quad (1)$$

که در آن  $E(z)$  مدول الاستیسیته ورق در راستای ضخامت آن می‌باشد. زیرنویس‌های  $m$  و  $c$  به ترتیب به قسمت فلزی و سرامیکی ورق اشاره دارند. پارامتر

پس کمانش تحت افزایش دمای محدود برای ورق کامپوزیت با لایه‌های تکیه‌گاه ساده و لایه‌های پیزوالکتریک بر پایه تئوری مرتبه سوم ارائه داد. تحلیل پس کمانش ورق‌های لایه‌ای با محرک‌های پیزوالکتریک تحت شرایط بارگذاری پیچیده حرارتی مکانیکی الکتریکی نیز توسط وی [22, 23] انجام شد. کاپویرا و آجاری [24] با استفاده از تئوری زیگزاگ، کمانش ورق‌های پیزوالکتریک هیبریدی را بررسی کردند. با استفاده از فرمول‌های فضای حالت، کمانش ورق لایه‌ای مستطیلی پیزوالکتریک توسط کیم و لی [25] انجام پذیرفت.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود هیچ‌گونه حل تحلیلی برای آنالیز کمانش ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک، مبتنی بر ارضای حالت مدار باز و بسته و هم‌چنین ارضای معادله ماکسول، حتی برای ورق‌های با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده وجود ندارد. به دلیل اهمیت مطالعه رفتار کمانشی ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند و پیزوالکتریک، در این مقاله، برای اولین بار حل تحلیلی برای یافتن بار بحرانی کمانش ورق‌های نازک چند لایه ساندویچی هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک تحت شرایط مرزی لوی و حالت مدار باز و بسته الکتریکی ارائه شده است.

معادلات تعادل و پایداری براساس ویژگی‌های ماده هدفمند متقارن نسبت به وسط ضخامت ورق و هم‌چنین معادله ماکسول در حوزه متغیرهای الکتریکی، استخراج شده‌اند. معادلات حاکم بر پایداری ورق ذکر شده، تحت بارگذاری ثابت درون صفحه‌ای به کمک یک روش تحلیلی حل شده است. با اعمال شرایط مرزی گوناگون متقارن و نامتقارن لوی و صفر قرار دادن دترمینان ضرایب مجهول، مقادیر ویژه‌ای به دست می‌آید که کمترین آن‌ها بار کمانش بحرانی می‌باشد.

تنش بر روی لایه پیزوالکتریک می‌باشد.

### میدان‌های الکتریکی و مکانیکی

بر اساس تئوری کلاسیک ورق، میدان تغییر مکان به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [8]:

$$\begin{Bmatrix} u_1(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  به ترتیب مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  در هر نقطه از صفحه به فاصله  $z$  از صفحه میانی ورق هستند.  $u$ ،  $v$  و  $w$  متغیرهای  $x$  و  $y$  هستند و اندیس (,) بیانگر مشتق‌گیری نسبت به مختصات کارتیزین مربوط می‌باشد.

مؤلفه‌های کرنش با استفاده از فرضیات فون کارمن برای روابط غیرخطی کرنش تغییر مکان و هم‌چنین میدان پتانسیل الکتریکی که در راستای ضخامت ورق به صورت مرتبه دوم از مؤلفه تغییر مکان عرضی فرض می‌شود به صورت زیر نوشته می‌شوند [8, 27]:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{xx} \\ \bar{\epsilon}_{yy} \\ \bar{\epsilon}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + w_{,x}^2/2 \\ v_{,y} + w_{,y}^2/2 \\ u_{,x} + v_{,y} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \phi(x, y) + Az + B & h \leq z \leq h+h_p \\ \left[ 1 - \left( \frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \phi(x, y) + A'z + B' & -h-h_p \leq z \leq -h \end{cases} \quad (6.2)$$

$n$  نشان دهنده اندیس ماده هدفمند می‌باشد که تغییر در آن باعث تغییر خواص ماده می‌شود. با توجه به کم بودن تغییرات ضریب پواسون این کمیت ثابت فرض می‌شود. بالانویس‌های  $t$ ،  $b$  و  $m$  به ترتیب به لایه‌های بالا، پایین و هسته در ماده هدفمند اشاره دارند. مقارن بودن ماده هدفمند نسبت به صفحه میانی بدان معناست که ماده هدفمند در مرز با لایه فلز دارای ویژگی فلز و در مرز با ماده پیزوالکتریک، سرامیک می‌باشد. از آن‌جا که ماده هدفمند همسان‌گرد است میدان تنش آن به صورت زیر می‌باشد [26]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(z)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & \frac{E(z)}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

از سوی دیگر اثر متقابل بین میدان‌های الکتریکی و مکانیکی در مواد پیزوالکتریک با روابط خطی زیر بیان می‌شوند [26]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^p \\ \sigma_{yy}^p \\ \sigma_{xy}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^E & \bar{C}_{12}^E & 0 \\ \bar{C}_{12}^E & \bar{C}_{11}^E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\bar{C}_{11}^E - \bar{C}_{12}^E) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Xi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Xi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \Xi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

که در آن  $\{E\}$ ،  $\{D\}$ ،  $[\Xi]$ ،  $[C]$  و  $[e]$  به ترتیب بردار میدان الکتریکی، بردار تغییر مکان الکتریکی، ماتریس گذردهی دی الکتریک، ماتریس ثوابت الاستیک لایه پیزوالکتریک و ماتریس کوپلینگ خواص الکتریکی و مکانیکی می‌باشند. بالانویس  $p$  هم بیانگر اثر این میدان

با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل سه معادله حاکم بر ورق به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \delta u: N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ \delta v: N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0 \\ \delta w: (N_{xx}w_{,x} + N_{xy}w_{,y} + M_{xx,x} + M_{xy,y})_{,x} \\ + (N_{xy}w_{,x} + N_{yy}w_{,y} + M_{xy,x} + M_{yy,y})_{,y} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن (N, M) متجه‌های تنش به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{xy}, N_{yy}) &= \int_{-h-h_p}^{h+h_p} (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}) dz \\ (M_{xx}, M_{xy}, M_{yy}) &= \int_{-h-h_p}^{h+h_p} (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}) z dz \end{aligned} \quad (11)$$

با جای‌گذاری (۶ و ۳ و ۲) در (۱۱)، متجه‌های تنش برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان حاصل می‌شوند:

$$N_{xx} = A_{11}^T (u_{,x} + \frac{w^2}{2}) + A_{22}^T (v_{,y} + \frac{w^2}{2}) \quad (12-الف)$$

$$N_{yy} = A_{22}^T (u_{,x} + \frac{w^2}{2}) + A_{11}^T (v_{,y} + \frac{w^2}{2}) \quad (12-ب)$$

$$N_{xy} = A_{11}^T (u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}) \quad (12-ج)$$

$$M_{xx} = -D_{11}^T w_{,xx} - D_{22}^T w_{,yy} + X^T \phi \quad (12-د)$$

$$M_{yy} = -D_{22}^T w_{,xx} - D_{11}^T w_{,yy} + X^T \phi \quad (12-ه)$$

$$M_{xy} = -2D_{12}^T w_{,xy} \quad (12-و)$$

که ثابت ذکر شده در معادلات (۱۲) در پیوست آورده شده‌اند با در نظر گرفتن معیار همسایگی [8] معادلات تعادل به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_{xx,x}^1 + N_{xy,y}^1 &= 0 \\ N_{xy,x}^1 + N_{yy,y}^1 &= 0 \\ N_{xx}^0 w_{,xx}^1 + 2N_{xy}^0 w_{,xy}^1 + N_{yy}^0 w_{,yy}^1 \\ + M_{xx}^1_{,xx} + 2M_{xy}^1_{,xy} + M_{yy}^1_{,yy} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

اگر هر دو سطح هر لایه پیزوالکتریک دارای ولتاژ صفر باشند آن‌گاه شرط الکتریکی مدار بسته و میدان پتانسیل الکتریکی حاکم بر ورق برای این شرط به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شوند [27]:

$$\phi \Big|_{z=\pm h} = \phi \Big|_{z=\pm(h+h_p)} = 0 \quad (7.1)$$

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \phi(x, y) & h \leq z \leq h+h_p \\ \left[ 1 - \left( \frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] \phi(x, y) & -h-h_p \leq z \leq -h \end{cases} \quad (7.2)$$

و در صورتی که سطح داخلی لایه پیزوالکتریک دارای ولتاژ صفر و سطح خارجی عایق باشد شرط الکتریکی مدار باز برقرار است و میدان پتانسیل الکتریکی مربوط به آن به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi \Big|_{z=\pm h} = 0 \quad (8.1)$$

$$D_z \Big|_{z=\pm(h+h_p)} = 0 \quad (8.2)$$

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 + \frac{4(z-h)}{h_p} \right] \phi(x, y) \\ + \frac{\bar{\epsilon}_{31}}{\bar{\epsilon}_{33}} [\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + (\kappa_{xx} + \kappa_{yy})(h+h_p)](z-h) & h \leq z \leq h+h_p \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2} \right)^2 - \frac{4(z-h)}{h_p} \right] \phi(x, y) \\ + \frac{\bar{\epsilon}_{31}}{\bar{\epsilon}_{33}} [\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} - (\kappa_{xx} + \kappa_{yy})(h+h_p)](z+h) & -h-h_p \leq z \leq -h \end{cases} \quad (8.3)$$

میدان الکتریکی نیز به صورت قرینه بردار گرادیان میدان پتانسیل الکتریکی تعریف می‌شود [27]:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (9)$$

متغیرهای الکتریکی باید معادله ماکسول را ارضا نماید:

$$\int_h^{h+h_p} \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dz + \int_{-h}^{-h-h_p} \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (17)$$

که برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Theta_1 \nabla^2 \phi^1 + \Theta_2 \nabla^4 w^1 + \Theta_3 \nabla^2 w^1 + \Theta_4 \phi^1 = 0 \quad (18)$$

معادلات (۱۶ و ۱۸) دو معادله حاکم بر ورق برحسب  $w$  و  $\phi$  می‌باشند. برای حل این معادلات از معادله (۱۸)،  $\nabla^2 \phi$  به دست می‌آید و با جای گذاری در (۱۶) و ساده‌سازی جبری معادله‌ای برحسب  $w$  به دست می‌آید:

$$m_1 \nabla^6 w + m_2 \nabla^2 w + m_3 \nabla^2 (N_{xx}^0 w_{,xx}^1 + 2N_{xy}^0 w_{,xy}^1 + N_{yy}^0 w_{,yy}^1) + N_{xx}^0 w_{,xx}^1 + 2N_{xy}^0 w_{,xy}^1 + N_{yy}^0 w_{,yy}^1 = 0 \quad (19)$$

که ضرایب  $m_i$  در پیوست آورده شده‌اند.

### شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی

برای ورق مورد نظر فرض می‌شود که دو لبه ورق در راستای  $y$  (یعنی  $x=0, x=a$ ) تکیه‌گاه ساده می‌باشد و در ضمن این دو لبه از نظر الکتریکی به زمین وصل شده‌اند و دارای پتانسیل صفر می‌باشند. دو لبه دیگر در راستای  $x$  دارای شرایط مرزی دل‌خواه هستند (یعنی تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد). با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل کل شرایط مرزی مکانیکی به صورت زیر حاصل می‌شود: (در سراسر این متن حروف  $F, S$  و  $C$  به ترتیب بیانگر تکیه‌گاه آزاد، ساده و گیردار می‌باشند)

که در آن بالانویس‌های ۱ و ۰ به ترتیب مربوط به وضعیت تعادل ورق و وضعیت همسایگی آن می‌باشد و  $(N_{xx}^0, N_{xy}^0, N_{yy}^0)$  می‌توانند با نیروهای پیش کمانش حاصل از شرایط تعادل جایگزین شوند.

با قرار دادن متجه‌های نیرو و ممان در (۱۳)، معادلات تعادل برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} A_{11}^T u_{,xx}^1 + A_{22}^T v_{,xy}^1 + A_{11}^T (u_{,yy}^1 + v_{,xy}^1) &= 0 \\ A_{11}^T (u_{,xy}^1 + v_{,xx}^1) + A_{22}^T u_{,xy}^1 + A_{11}^T v_{,yy}^1 &= 0 \\ N_{xx}^0 w_{,xx}^1 + 2N_{xy}^0 w_{,xy}^1 + N_{yy}^0 w_{,yy}^1 & \\ -D_{11}^T w_{,xxx}^1 - 2D_{22}^T w_{,xxy}^1 - D_{11}^T w_{,yyy}^1 & \\ -4D_{12}^T w_{,xxy}^1 + X^T (\phi_{,xx}^1 + \phi_{,yy}^1) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

باید توجه داشت از آنجا که ماده هدفمند و پیزوالکتریک در نظر گرفته شده، نسبت به صفحه میانی ورق دارای تقارن هستند، دو معادله اول (۱۴) که برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان درون صفحه‌ای  $u$  و  $v$  هستند از معادله سوم که برحسب مؤلفه تغییر مکان عرضی  $w$  و تابع پتانسیل  $\phi$  می‌باشند جدا می‌شوند و در فرآیند یافتن بار کمانش بحرانی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. با کمی دقت در ضرایب معادله (۱۴) می‌توان رابطه زیر را یافت:

$$D_{11}^T = D_{22}^T + 2D_{12}^T \quad (15)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان معادله آخر (۱۴) را به صورت زیر نوشت:

$$N_{xx}^0 w_{,xx}^1 + 2N_{xy}^0 w_{,xy}^1 + N_{yy}^0 w_{,yy}^1 - D_{11}^T \nabla^4 w^1 + X^T \nabla^2 \phi^1 = 0 \quad (16)$$

از سوی دیگر ماده پیزوالکتریک در حوزه

که ورق در دو لبه در راستای  $y$  تکیه گاه گیردار است، تغییر مکان عرضی ورق  $w$  با سری زیر می تواند بیان شود:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (25)$$

با قرار دادن (۲۵) در (۱۹) معادله دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} & \eta_1 \frac{d^6}{dy^6} f(y) \\ & + [-3\eta_1 \beta^2 + \eta_3 N_{yy}^0 + \eta_2] \frac{d^4}{dy^4} f(y) \\ & + [3\eta_1 \beta^4 - 2\eta_2 \beta^2 + N_{yy}^0 \\ & - \eta_3 \beta^2 (N_{xx}^0 + N_{yy}^0)] \frac{d^2}{dy^2} f(y) \\ & + (\eta_2 \beta^4 - \eta_1 \beta^6 - N_{xx}^0 \beta^2 + \eta_3 N_{xx}^0 \beta^4) f(y) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن  $\beta = \frac{m\pi x}{a}$  است. حل کلی معادله بالا به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} f(y) = & C_1 \sinh(\lambda_1 y) + C_2 \cosh(\lambda_1 y) \\ & + C_3 \sinh(\lambda_2 y) + C_4 \cosh(\lambda_2 y) \\ & + C_5 \sinh(\lambda_3 y) + C_6 \cosh(\lambda_3 y) \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن  $C_i (i = 1, \dots, 6)$  ثوابت مجهول هستند.  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  نیز در [8] داده شده اند. به این نکته باید توجه کرد که حل عمومی معادله (۲۷) برای مقادیر حقیقی  $\lambda_i$  معتبر هستند و برای مقادیر موهومی آن باید  $\sin$  و  $\cos$  به ترتیب جایگزین  $\sinh$  و  $\cosh$  شوند. با در نظر گرفتن دو شرط مرزی مکانیکی و یک شرط مرزی الکتریکی روی لبه های ورق، مجموعه ای از معادلات جبری همگن حاصل می شوند که بار بحرانی کماتش با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب  $C_i$  به دست می آید.

تکیه گاه ساده:

$$w = M_{yy} = 0 \quad (20)$$

تکیه گاه گیردار

$$w = w_{,y} = 0 \quad (21)$$

تکیه گاه آزاد

$$V_y + (N_{xy}^0 w_{,y}^1 + N_{yy}^0 w_{,y}^1) = M_{yy} = 0 \quad (22)$$

که در آن  $V_y = 2M_{xy,x}^1 + M_{yy,y}^1$  می باشد.

علاوه بر شرایط مرزی فوق فرض می شود که دو لبه ورق در راستای  $y$  عایق الکتریکی می باشند بنابراین معادله بقای شار الکتریکی منجر به شرط مرزی زیر می شود:

$$\int_h^{h+h_p} D_y(x,y,z) dz + \int_{-h-h_p}^{-h} D_y(x,y,z) dz = 0 \quad (23)$$

### تحلیل کماتش

در این مطالعه ورق مستطیلی با طول  $a$  و عرض  $b$  تحت نیروهای درون صفحه ای در نظر گرفته شده است. نیروهای پیش کماتش با استفاده از شرایط تعادل به صورت زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} N_{xx}^0 &= \zeta_1 P_1 \\ N_{yy}^0 &= \zeta_2 P_1 \\ N_{xy}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن  $P_1$  نیرو بر واحد طول می باشد و  $\zeta_1$  و  $\zeta_2$  پارامترهای نیرو هستند که به ترتیب شرایط بارگذاری در راستای محور  $x$  و  $y$  را توصیف می کنند.  $R = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}$  نیز نسبت نیروست که برای مقادیر ۰، ۱ و ۱- به ترتیب بیانگر بارگذاری تک محوره، دو محوره فشاری و دو محوره فشاری کششی می باشد. از آن جا

## بحث و بررسی نتایج عددی

70GPa و 380GPa در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون در کل ضخامت ثابت و برابر  $\nu=0.3$  انتخاب شده است. در همه ترسیمه‌ها، بار بحرانی کماتش ورق مربعی به طول ضلع ۱ متر و ضخامت ورق هدفمند ۰.۰۱ متر برای حالت ۲-۱-۲ برحسب نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ماده هدفمند با اندیس ۲ در حالت مدار باز رسم شده است (مگر در مواردی که خلاف آن ذکر شده باشد).

در شکل (۲) تحت شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار-گیردار، تغییرات بار بحرانی کماتش برای شرایط مدار باز و بسته مورد مقایسه قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که در ضخامت معین لایه پیزوالکتریک، بار بحرانی کماتش برای مدار باز بیشتر از مدار بسته است. همچنین، با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک برای هر دو حالت مدار باز و بسته، بار بحرانی کماتش افزایش می‌یابد.

برای مواد پیزوالکتریک مختلف، بار بحرانی کماتش برحسب نسبت ضخامت پیزوالکتریک به ماده هدفمند، در شکل (۳) رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که بیشترین و کمترین مقدار بار بحرانی کماتش به ترتیب مربوط به PZT-5A و PZT-6B می‌باشد.

جهت بررسی صحت حل صورت گرفته، با ناچیز قرار دادن ضخامت لایه پیزوالکتریک و صفر قرار دادن اندیس ماده هدفمند، نتایج حاصل با نتایج موجود در تحلیل محمدی و همکاران [8] مقایسه گردید (جدول ۱). از سوی دیگر تنها با صفر قرار دادن ضخامت لایه پیزوالکتریک، حالت‌های گوناگون قرارگیری فلز و ماده هدفمند با نتایج موجود در تحلیل زنگور [11] مورد ارزیابی قرار گرفت (جدول ۲). همخوانی خوب مقادیر عددی ارائه شده در جدول‌های (۲ و ۱)، صحت تحلیل صورت گرفته را تأیید می‌نماید. برای ارائه نتایج عددی، از خواص PZT-4 که در جدول (۳) ذکر گردیده استفاده شده است. علاوه بر این برای تعیین نتایج عددی حالت ۱-۲-۱ در نظر گرفته شده است که به معنای آن است که ضخامت قسمت ماده هدفمند بالا و پایین برابر است و ضخامت لایه فلز دو برابر هر یک از آنهاست. همچنین حالت ۲-۱-۲ بدین معناست که ضخامت ماده هدفمند لایه بالا و پایین یکسان است و دو برابر ضخامت لایه فلز می‌باشد. مدول الاستیسیته قسمت فلز از جنس آلومینیوم با مدول 70GPa و مدول الاستیسیته فلز و سرامیک ماده هدفمند به ترتیب

جدول ۱ مقایسه نتایج حاصل با نتایج موجود در تحلیل محمدی و همکاران [8]

n	a/b	2h <sub>p</sub> /a	R			
			1	0	-1	
SSSC	0.5	[8]	1.84256	2.35369	3.22520	
		Closed	1.84370	2.35515	3.22720	
		Open	1.84400	2.35553	3.22772	
	1	[8]	0.91450	1.97146	3.22520	
		Closed	0.91506	1.97268	3.22720	
		Open	0.91521	1.97300	3.22772	
	1.5	[8]	0.77870	1.86533	3.22520	
		Closed	0.77918	1.86648	3.22720	
		Open	0.77931	1.86678	3.22772	
	SSSF	0.5	[8]	1.36347	1.49598	1.61262
			Closed	1.36432	1.49691	1.61361
			Open	1.36445	1.49711	1.61385
1		[8]	0.36238	0.48137	0.66578	
		Closed	0.36261	0.48167	0.66620	



SCSF	1.5	Open	0.36264	0.48172	0.66628
		[8]	0.17213	0.29459	0.75284
	0.5	Closed	0.17224	0.29478	0.75331
		Open	0.17225	0.29480	0.75340
	1	[8]	1.37663	1.53290	1.66765
		Closed	1.37749	1.53385	1.66868
	1.5	Open	1.37763	1.53405	1.66893
		[8]	0.39275	0.56755	0.85305
	1.5	Closed	0.39200	0.56790	0.85358
		Open	0.39302	0.56796	0.85369
	1.5	[8]	0.21682	0.44346	0.98636
		Closed	0.21696	0.44374	0.98697
		Open	0.21697	0.44377	0.98710

جدول ۲ مقایسه نتایج حاصل با نتایج موجود در تحلیل زنگور [11]

$n$		$P_{cr}$			
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1
0	[11]	6.86896	6.86896	6.86896	6.86896
	Open	6.86593	6.86593	6.86593	6.86593
	Closed	6.86571	6.86571	6.86571	6.86571
0.5	[11]	3.82699	4.12798	4.39032	4.80762
	Open	3.82577	4.12659	4.38877	4.80582
	Closed	3.82555	4.12637	4.38855	4.80561
1	[11]	2.66624	3.01366	3.34075	3.89203
	Open	2.66572	3.01294	3.33983	3.89078
	Closed	2.66550	3.01271	3.33961	3.89057
5	[11]	1.36540	1.55352	1.82866	2.42859
	Open	1.36565	1.55367	1.82864	2.42820
	Closed	1.36543	1.55344	1.82841	2.42798
10	[11]	1.28493	1.40170	1.62962	2.19111
	Open	1.28523	1.40194	1.62972	2.19087
	Closed	1.28501	1.40171	1.62949	2.19065

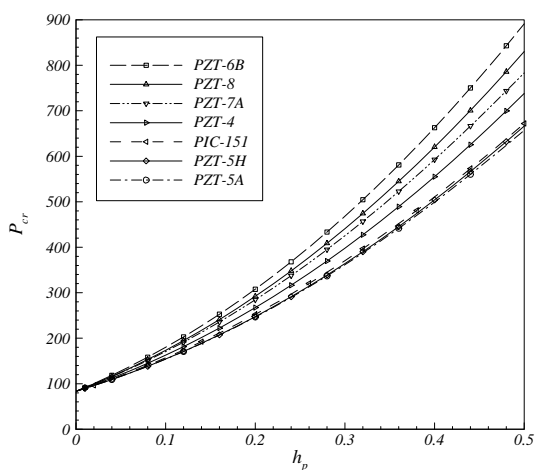
جدول ۳ خواص مواد مختلف پیزوالکتریک

materials	Elastic constants (GPa)					Electric constants (C/m <sup>2</sup> )			Dielectric constants (C/Vm)	
	$C_{11}^E$	$C_{33}^E$	$C_{55}^E$	$C_{12}^E$	$C_{13}^E$	$e_{33}$	$-e_{31}$	$e_{15}$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_{33}$
PZT-4	132	115	26	71	73	14.1	4.1	10.5	7.124e-9	5.841 e-9
PZT-5A	121	111	21.1	75.9	75.4	15.8	5.4	12.3	8.11 e-9	7.35 e-9
PZT-6B	168	163	35.5	84.7	84.2	7.10	0.9	4.60	3.60 e-9	3.42 e-9
PZT-7A	148	131	25.3	76.1	81.3	9.50	2.1	9.20	4.07 e-9	2.08 e-9
PZT-8	137	123	31.3	69.9	71.1	17.5	4.0	10.4	7.97 e-9	5.14 e-9

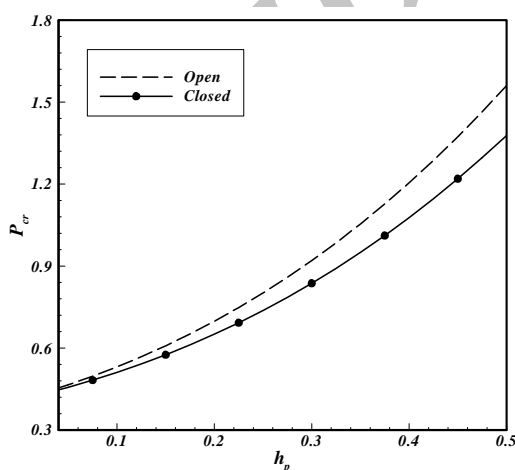
SCSC بیان کرد. در شکل (۶-الف و ب) بار بحرانی کماتش ورق برای توان‌های مختلف ماده هدفمند به ترتیب برای مدار بسته و باز رسم شده است همان‌گونه که مشخص است برای هر دو شرط مرزی الکتریکی، با افزایش اندیس ماده هدفمند، مقدار بار بحرانی کماتش افزایش می‌یابد.

هم‌چنین تغییرات بار بحرانی برای مقادیر کوچک اندیس ماده هدفمند در مقایسه با مقادیر بزرگ‌تر قابل ملاحظه می‌باشد.

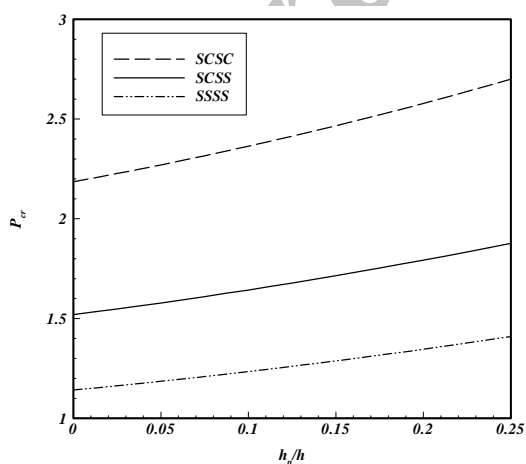
به منظور مقایسه اثر شرط مرزی مکانیکی بر روی بار بحرانی کماتش، اشکال (۴-الف و ب) و (۵-الف و ب) به ترتیب برای مدار بسته و باز رسم شده‌اند. با مقایسه این شکل‌ها مشخص می‌شود که برای هر دو حالت مدار باز و بسته قید قوی‌تر روی شرط مرزی منجر به بار بحرانی کماتش بیشتر می‌شود. این مطلب بدین معناست که می‌توان ترتیب صعودی بار بحرانی کماتش مرتبط با شرایط مرزی را به صورت SFSF، SFSS، SFSC، SSSS و SCSS



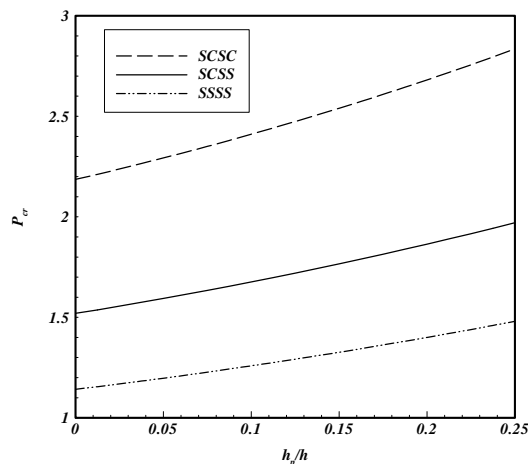
شکل ۳ بار بحرانی کماتش ورق SSSS بر حسب نسبت ضخامت



شکل ۴ بار بحرانی کماتش ورق SCSC بر حسب نسبت ضخامت

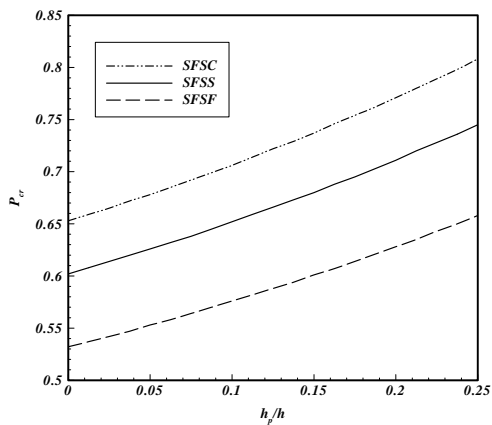


(ب)

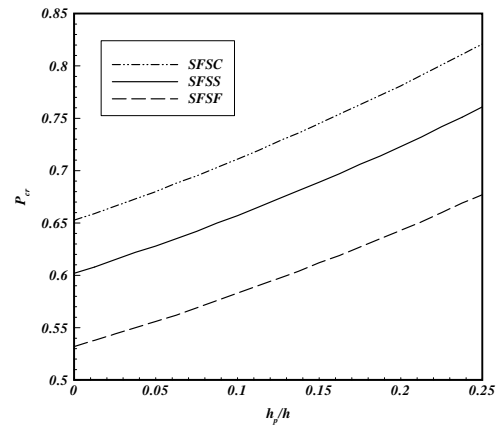


(الف)

شکل ۵ بار بحرانی کماتش بر حسب نسبت ضخامت (الف: مدار باز ب: مدار بسته)

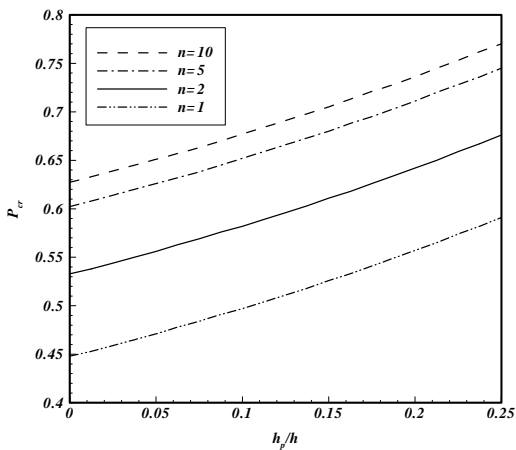


(ب)

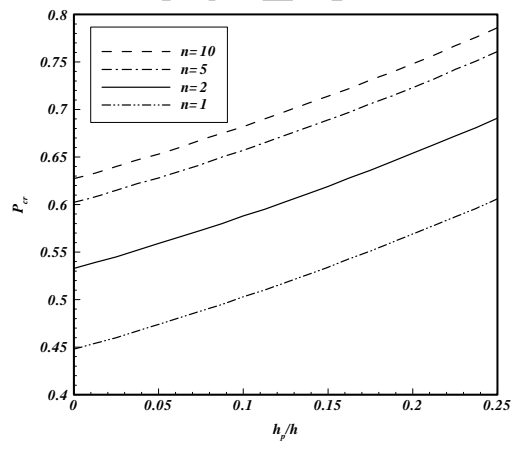


(الف)

شکل ۵ بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار باز، ب: مدار بسته)

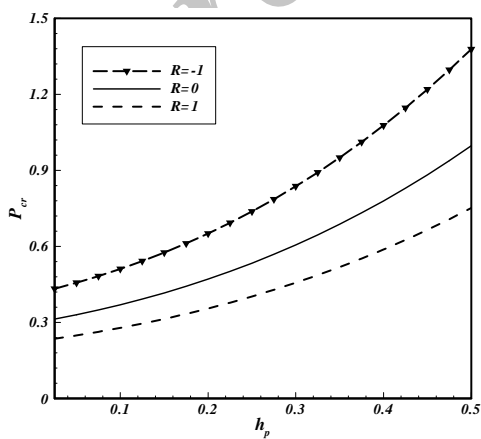


(ب)

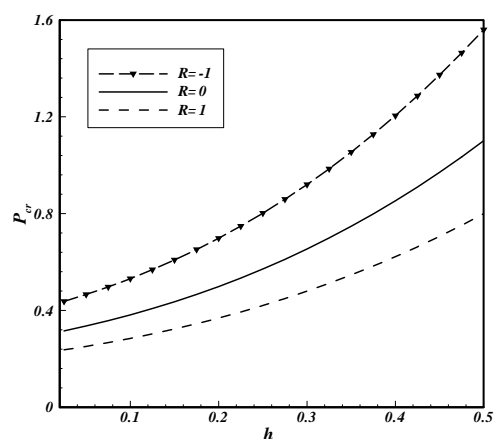


(الف)

شکل ۶ بار بحرانی کمانش ورق SCSC برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار باز، ب: مدار بسته)



(ب)



(الف)

شکل ۷ بار بحرانی کمانش ورق SCSC برحسب نسبت ضخامت (الف: مدار بسته، ب: مدار باز)

جدول ۴ بار بحرانی بدون بعد کماتش تکیه‌گاه گیردار- گیردار

n	R	$h_p/a$	$\frac{a}{b} = 0.5$	$\frac{a}{b} = 1$
0	0.2	Closed	18.9802	75.9206
		Open	18.8967	75.5866
	0.1	Closed	18.9779	75.9115
		Open	18.9550	75.8199
1	0.2	Closed	26.6219	106.4876
		Open	26.5048	106.0190
	0.1	Closed	26.6187	106.4747
		Open	26.5866	106.3463
1	0.2	Closed	14.6195	37.8050
		Open	14.5552	37.6386
	0.1	Closed	14.6178	37.8004
		Open	14.6002	37.7548
0	0.2	Closed	18.9798	75.9192
		Open	18.9069	75.6275
	0.1	Closed	18.9779	75.9113
		Open	18.9582	75.8328
2	0.2	Closed	26.6214	106.4856
		Open	26.5192	106.0764
	0.1	Closed	26.6186	106.4744
		Open	26.5911	106.3643
1	0.2	Closed	14.6193	37.8043
		Open	14.5631	37.6590
	0.1	Closed	14.6177	37.8003
		Open	14.6026	37.7612

جدول ۶ بار بحرانی بدون بعد کماتش تکیه‌گاه ساده- ساده

n	R	$h_p/a$	$\frac{a}{b} = 0.5$	$\frac{a}{b} = 1$
0	0.2	Closed	15.4320	39.5059
		Open	15.3556	39.3103
	0.1	Closed	15.4241	39.4857
		Open	15.4030	39.4316
1	0.2	Closed	20.5760	82.3039
		Open	20.4741	81.8964
	0.1	Closed	20.5655	82.2618
		Open	20.5373	82.1492
1	0.2	Closed	12.3456	19.7530
		Open	12.2845	19.6552
	0.1	Closed	12.3393	19.7429
		Open	12.3224	19.7158
0	0.2	Closed	15.4274	39.4941
		Open	15.3639	39.3316
	0.1	Closed	15.4224	39.4813
		Open	15.4056	39.4383
2	0.2	Closed	20.5699	82.2793
		Open	20.4852	81.9407
	0.1	Closed	20.5632	82.2526
		Open	20.5408	82.1631
1	0.2	Closed	12.3419	19.7471
		Open	12.2912	19.6658
	0.1	Closed	12.3379	19.7407
		Open	12.3245	19.7192

جدول ۵ بار بحرانی بدون بعد کماتش تکیه‌گاه گیر دار- ساده

n	R	$h_p/a$	$\frac{a}{b} = 0.5$	$\frac{a}{b} = 1$
0	0.2	Closed	16.9119	56.6616
		Open	16.8375	56.4123
	0.1	Closed	16.9098	56.6547
		Open	16.8894	56.5864
1	0.2	Closed	23.1738	92.7465
		Open	23.0719	92.2873
	0.1	Closed	23.1710	92.6990
		Open	23.1431	92.5722
1	0.2	Closed	13.2392	26.2835
		Open	13.1810	26.1679
	0.1	Closed	13.2376	26.2803
		Open	13.2217	26.2486
0	0.2	Closed	16.9115	56.6538
		Open	16.8466	56.4428
	0.1	Closed	16.9098	56.6546
		Open	16.8923	56.5960
2	0.2	Closed	23.1734	92.7188
		Open	23.0844	92.3372
	0.1	Closed	23.1709	92.6886
		Open	23.1470	92.5879
1	0.2	Closed	13.2390	26.2830
		Open	13.1881	26.1820
	0.1	Closed	13.2376	26.2802
		Open	13.2239	26.2531

جدول ۷ بار بحرانی بدون بعد کماتش تکیه‌گاه گیردار- آزاد

n	R	$h_p/a$	$\frac{a}{b} = 0.5$	$\frac{a}{b} = 1$
0	0.2	Closed	11.0211	16.3336
		Open	10.8627	15.9237
	0.1	Closed	11.0165	16.3213
		Open	10.9475	16.1279
1	0.2	Closed	11.9872	24.5347
		Open	11.8588	24.1594
	0.1	Closed	11.9835	24.5236
		Open	11.9306	24.3566
1	0.2	Closed	9.9044	11.3121
		Open	9.6513	10.8923
	0.1	Closed	9.8971	11.2994
		Open	9.7791	11.0945
0	0.2	Closed	11.0200	16.3304
		Open	10.8825	15.9739
	0.1	Closed	11.0160	16.3196
		Open	10.9571	16.1543
2	0.2	Closed	11.9864	24.5320
		Open	11.8747	24.2053
	0.1	Closed	11.9831	24.5223
		Open	11.9379	24.3794
1	0.2	Closed	9.9025	11.3087
		Open	9.6831	10.9432
	0.1	Closed	9.8961	11.2975
		Open	9.7954	11.1222

افزایش اندیس ماده هدفمند اشاره نمود.

جدول ۹ بار بحرانی بدون بعد کماتش تکیه‌گاه آزاد- آزاد

n	R	$h_p/a$	$\frac{a}{b} = 0.5$	$\frac{a}{b} = 1$
0		0.2	Closed 9.6074	9.4081
			Open 9.4928	9.2414
1		0.1	Closed 9.6107	9.4032
			Open 9.5576	9.3284
-1		0.2	Closed 9.6735	9.5027
			Open 9.5802	9.3632
	0.1	Closed 9.6762	9.4987	
		Open 9.6348	9.4376	
1		0.2	Closed 9.4057	9.2131
			Open 9.2194	8.9913
	0.1	Closed 9.4111	9.2067	
		Open 9.3190	9.1036	
0		0.2	Closed 9.6070	9.4069
			Open 9.5076	9.2622
2		0.1	Closed 9.6099	9.4026
			Open 9.5645	9.3387
-1		0.2	Closed 9.6732	9.5017
			Open 9.5922	9.3806
	0.1	Closed 9.6756	9.4982	
		Open 9.6401	9.4461	
1		0.2	Closed 9.4050	9.2115
			Open 9.2439	9.0191
	0.1	Closed 9.4097	9.2058	
		Open 9.3311	9.1178	

### نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر تحلیل کماتش ورق‌های هدفمند ساندویچی مستطیلی کویله با لایه‌های پیزوالکتریک با تئوری کلاسیک ورق و اعمال شرایط مرزی لوی و تحت شرایط الکتریکی مدار باز و بسته مورد بررسی قرار گرفته است. مطالعه انجام شده نشان داد که بار بحرانی کماتش در حالت مدار باز، در همه حالات بارگذاری و شرایط مرزی از مقدار مربوط به مدار بسته بیشتر است. هم‌چنین به‌عنوان نتیجه مهم دیگر می‌توان به افزایش بار بحرانی کماتش با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک اشاره کرد. کاهش بار بحرانی کماتش در اثر کاهش قیود مکانیکی بر روی مرزها و کاهش اندیس ماده هدفمند نیز از دیگر نتایج این مطالعه است.

به‌منظور مطالعه اثر شرایط بارگذاری بر روی بار

کوماتش بحرانی در دو حالت مدار بسته و باز شکل‌های

(۷- الف و ب) به‌ترتیب رسم شده است.

جدول ۸ بار بحرانی بدون بعد کماتش تکیه‌گاه ساده- آزاد

n	R	$h_p/a$	$\frac{a}{b} = 0.5$	$\frac{a}{b} = 1$
0		0.2	Closed 10.7549	13.8508
			Open 10.6110	13.5443
	0.1	Closed 10.7508	13.8417	
		Open 10.6890	13.6993	
1		0.2	Closed 11.5913	19.1486
			Open 11.4725	18.8552
-1		0.1	Closed 11.5879	19.1399
			Open 11.5395	19.0095
1		0.2	Closed 9.8086	10.4342
			Open 9.5744	10.0932
	0.1	Closed 9.8018	10.4240	
		Open 9.6938	10.2598	
0		0.2	Closed 10.7540	13.8485
			Open 10.6290	13.5820
	0.1	Closed 10.7503	13.8405	
		Open 10.6975	13.7188	
2		0.2	Closed 11.5905	19.1464
			Open 11.4873	18.8912
-1		0.1	Closed 11.5875	19.1388
			Open 11.5462	19.0274
1		0.2	Closed 9.8068	10.4315
			Open 9.6040	10.1350
	0.1	Closed 9.8009	10.4225	
		Open 9.7088	10.2822	

بیشترین و کمترین مقدار بار بحرانی کماتش برای

هر دو حالت مدار باز و بسته مربوط به بارگذاری دو

محوره فشاری-کششی و دو محوره فشاری می باشد.

در جداول (۹-۴) نیز بار بحرانی کماتش برای

شرایط مرزی متقارن و نامتقارن در حل لوی و شرایط

بارگذاری گوناگون آورده شده‌اند. از نتایج جداول ذکر

شده می‌توان به افزایش بار بحرانی کماتش با عواملی

همچون افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک، تغییر

شرط مرزی الکتریکی از حالت مدار بسته به حالت

مدار باز، قید قوی تر روی شرط مرزی مکانیکی،

## مراجع

- 1 Javaheri, R. and Eslami, M.R., "Thermal buckling of functionally graded plates", *AIAA Journal*, Vol. 40, pp. 162-169, (2002).
- 2 Javaheri, R. and Eslami, M.R., "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading", *Z Angew Math Mech (ZAMM)*, Vol. 82(4), pp. 277-283, (2002).
- 3 Javaheri, R. and Eslami, M.R., "Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory", *Journal of Thermal Stress*, Vol. 25, pp. 603-625, (2002).
- 4 Wu, L., "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate", *Composite Structures*, Vol. 64, pp. 211-218, (2004).
- 5 Shariat, S. and Eslami, M.R., "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading based on the first order plate theory", *Fifth international conference on composite science and technology*, Sharjah, UAE, (2005).
- 6 Shariat, S. and Eslami, M.R., "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads", *Composite Structures*, Vol. 78, pp. 433-439, (2005).
- 7 Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F. and Martins, P., "Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method", *Composite Structures*, Vol. 69, pp. 449-457, (2005).
- 8 Mohammadi, M., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E., "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates", *Applied Composite Materials*, Vol. 17, pp. 81-93, (2010).
- 9 Mohammadi, M., Saidi, A.R. and Jomehzadeh, E., "A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges", *Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, pp. 1831-1841, (2009).
- 10 Bodaghi, M. and Saidi, A.R., "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 3659-3673, (2010).
- 11 Zenkour, A.M., "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 5243-5258, (2005).
- 12 Kiani, Y. and Eslami, M.R., "Thermal buckling and post-buckling response of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on elastic foundation", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, pp. 891-905, (2012).
- 13 Chandrashekara, K. and Bhatia, K., "Active buckling control of smart composite plates- finite element analysis", *Smart Mater Struct*, Vol. 2, pp. 31-39, (1993).
- 14 Batra, R.C. and Geng, T.S., "Enhancement of the dynamic buckling load for a plate by using piezoceramic actuators", *Smart Mater Struct*, Vol. 10, pp. 925-933, (2001).
- 15 Varelis, D. and Saravanos, D.A., "Coupled buckling and postbuckling analysis of active laminated piezoelectric composite plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 1519-1538, (2004).
- 16 Shariyat, M., "Dynamic buckling of imperfect laminated plates with piezoelectric sensors and actuators subjected to thermo-electro-mechanical loadings, considering the temperature dependency of the material properties", *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 228-239, (2009).

- 17 Shariyat, M., "Vibration and dynamic buckling control of imperfect hybrid FGM plates with temperature-dependent material properties subjected to thermo-electro-mechanical loading conditions", *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 240–252, (2009).
- 18 Akhras, G. and Li, W.C., "Three-dimensional thermal buckling analysis of piezoelectric antisymmetric angle-ply laminates using finite layer method", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 31-38, (2010).
- 19 Yang, J.S., "Buckling of piezoelectric plate", *Applied Electromagnetics and mechanics*, Vol. 9, pp. 399-408, (1998).
- 20 Shen, H.S., "Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 6101–6121, (2005).
- 21 Shen, H.S., "A comparison of buckling and postbuckling behavior of FGM plates with piezoelectric fiber reinforced composite actuators", *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 375–384, (2009).
- 22 Shen, H.S., "Postbuckling of shear deformable laminated plates with piezoelectric actuators under complex loading conditions", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 7703-7721, (2001).
- 23 Shen, H.S., "Thermal postbuckling of shear-deformable laminated plates with piezoelectric actuators", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 1931-1943, (2001).
- 24 Kapuria, S. and Achary, G.G.S., "Nonlinear coupled zigzag theory for buckling of hybrid piezoelectric plates", *Composite Structures*, Vol. 74, pp. 253-264, (2006).
- 25 Kim, G.W. and Lee, K.Y., "Influence of weak interfaces on buckling of orthotropic piezoelectric rectangular laminates", *Composite Structures*, Vol. 82, pp. 290-294, (2008).
- 26 Liu, X., Wang, Q. and Quek, S.T., "Analytical solution for free vibration of piezoelectric coupled moderately thick circular plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2129–2151, (2002)
- 27 Wang, Q., Quek, S.T., Sun, C.T. and Liu, X., "Analysis of piezoelectric coupled circular plate", *Smart Mater. Struct.*, Vol. 10, pp. 229–239, (2001).

پیوست

ثوابت مربوط به ماده هدفمند

$$D_{12}^{ft} = \int_{h_H}^h \frac{E^t(z)}{2(1+v)} z^2 dz$$

$$D_{11}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{1-v^2} z^2 dz$$

$$D_{22}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{vE^b(z)}{1-v^2} z^2 dz$$

$$D_{12}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{2(1+v)} z^2 dz$$

ثوابت مربوط به لایه پیزوالکتریک

مدار باز

$$X_i^T = X_i^{pt} + X_i^{pb} \quad (i = 11, 22)$$

$$A_{11}^{pt} = \bar{C}_{11} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{E}_{33}}$$

$$A_{11}^{pb} = \bar{C}_{11} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{E}_{33}}$$

$$A_{22}^{pt} = \bar{C}_{12} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{E}_{33}}$$

$$A_{22}^{pb} = \bar{C}_{12} h_p + \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{\bar{E}_{33}}$$

$$A_{12}^{pt} = \frac{1}{2} (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}) h_p$$

$$A_{12}^{pb} = \frac{1}{2} (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}) h_p$$

$$D_{11}^{pt} = \frac{\bar{C}_{11}}{3} ((h+h_p)^3 - h^3) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{E}_{33}} (h+h_p) ((h+h_p)^2 - h^2)$$

$$D_{11}^{pb} = \frac{\bar{C}_{11}}{3} ((h+h_p)^3 - h^3) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{E}_{33}} (h+h_p) ((h+h_p)^2 - h^2)$$

$$D_{22}^{pt} = \frac{\bar{C}_{12}}{3} ((h+h_p)^3 - h^3) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{E}_{33}} (h+h_p) ((h+h_p)^2 - h^2)$$

$$D_{22}^{pb} = \frac{\bar{C}_{12}}{3} ((h+h_p)^3 - h^3) - \frac{\bar{e}_{31}^3 h_p}{2\bar{E}_{33}} (h+h_p) ((h+h_p)^2 - h^2)$$

$$D_{12}^{pt} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3} ((h+h_p)^3 - h^3)$$

$$D_{12}^{pb} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3} ((h+h_p)^3 - h^3)$$

$$X_{11}^{pt} = 4\bar{e}_{31}$$

$$X_{22}^{pt} = \frac{4}{3} \bar{e}_{31} (3h+h_p)$$

$$A_i^T = A_i^H + A_i^{ft} + A_i^{fb} + A_i^{pt} + A_i^{pb}$$

$$(i = 11, 12, 22)$$

$$A_{11}^H = \frac{2E_m h_H}{1-v^2}$$

$$A_{12}^H = \frac{E_m h_H}{1+v}$$

$$A_{22}^H = \frac{2vE_m h_H}{1-v^2}$$

$$A_{11}^{ft} = \int_{h_H}^h \frac{E^t(z)}{1-v^2} dz$$

$$A_{22}^{ft} = \int_{h_H}^h \frac{vE^t(z)}{1-v^2} dz$$

$$A_{12}^{ft} = \int_{h_H}^h \frac{E^t(z)}{2(1+v)} dz$$

$$A_{11}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{1-v^2} dz$$

$$A_{22}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{vE^b(z)}{1-v^2} dz$$

$$A_{12}^{fb} = \int_{-h}^{-h_H} \frac{E^b(z)}{2(1+v)} dz$$

$$D_{11}^H = \frac{2E_m h_H^3}{3(1-v^2)}$$

$$D_{22}^H = \frac{2vE_m h_H^3}{3(1-v^2)}$$

$$D_{12}^H = \frac{E_m h_H^3}{3(1+v)}$$

$$D_{11}^{ft} = \int_{h_H}^h \frac{E^t(z)}{1-v^2} z^2 dz$$

$$D_{22}^{ft} = \int_{h_H}^h \frac{vE^t(z)}{1-v^2} z^2 dz$$



مدار بسته

$$D_{12}^{pb} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3} \left( (h+h_p)^3 - h^3 \right)$$

$$D_{22}^{pt} = \frac{2\bar{C}_{12}}{3} \left( (h+h_p)^3 - h^3 \right)$$

$$X_{11}^{pt} = 0$$

$$X_{22}^{pt} = -\frac{2}{3} \bar{e}_{31} h_p$$

$$A_{11}^{pt} = \bar{C}_{11} h_p$$

$$A_{11}^{pb} = \bar{C}_{11} h_p$$

$$A_{22}^{pt} = \bar{C}_{12} h_p$$

$$A_{22}^{pb} = \bar{C}_{12} h_p$$

$$A_{12}^{pt} = \frac{1}{2} (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}) h_p$$

$$A_{12}^{pb} = \frac{1}{2} (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}) h_p$$

$$D_{11}^{pt} = \frac{\bar{C}_{11}}{3} \left( (h+h_p)^3 - h^3 \right)$$

$$D_{11}^{pb} = \frac{\bar{C}_{11}}{3} \left( (h+h_p)^3 - h^3 \right)$$

$$D_{22}^{pt} = \frac{\bar{C}_{12}}{3} \left( (h+h_p)^3 - h^3 \right)$$

$$D_{22}^{pb} = \frac{\bar{C}_{12}}{3} \left( (h+h_p)^3 - h^3 \right)$$

ضرایب معادله (۱۹)

$$m_1 = -\frac{X^T}{\Theta_4} \left[ \frac{\Theta_1 D_{11}^T}{X^T} + \Theta_2 \right]$$

$$m_2 = -\left( D_{11}^T + \frac{X^T}{\Theta_4} \Theta_3 \right)$$

$$m_3 = \frac{\Theta_1}{\Theta_4}$$

Archive of SID