

**بهبود تنش و برآورد خطا با استفاده از تعادل در هر ناحیه از تحلیل ایزوژئومتریک\***بهرز حسینی<sup>(۲)</sup>احمد گنجعلی<sup>(۱)</sup>

**چکیده** اولین روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در روش ایزوژئومتریک، بر پایه استفاده از خاصیت نقاط فوق همگرای گوسی بوده است. در این مقاله به بررسی روش برآورد خطای دیگری مبتنی بر ارضای معادلات تعادل در حل دو مثال الاستیسیته و هم‌چنین تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی در کارایی این برآوردکننده خطا پرداخته می‌شود. در این روش با استفاده از ارضای معادلات تعادل در هر ناحیه از فضای محاسباتی تحلیل ایزوژئومتریک یک سطح تنش بهبود یافته به دست می‌آید که نشان داده خواهد شد این سطح تنش نسبت به سطح تنش ایزوژئومتریک و سطح تنش بهبود یافته مبتنی بر نقاط فوق همگرا دارای دقت بیشتری خواهد بود. برای بررسی کارایی این برآوردکننده خطا به مدل‌سازی و تحلیل دو مسأله الاستیسیته دارای حل تحلیلی و مقایسه نتایج به دست آمده از این روش با روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا و نتایج دقیق پرداخته شده است. نتایج نشان‌دهنده کارایی بهتر این روش نسبت به روش بازیافت تنش بر پایه استفاده از خاصیت نقاط فوق همگرا است و بر این اساس می‌توان از این روش نیز به‌عنوان یک روش ساده و مؤثر دیگر برای بازیافت تنش و برآورد خطا در روش ایزوژئومتریک نام برد.

**واژه‌های کلیدی** تحلیل ایزوژئومتریک، برآورد خطا، بازیافت تنش، معادلات تعادل.

### Improvement of Stress and Error Estimation by Patch Equilibrium in Isogeometric Analysis

A. Ganjali

B. Hassani

**Abstract** A method for error estimation of isogeometric analysis of plane stress problems, based on stress recovery by using the super convergent properties of the Gauss points, was introduced. In this paper, a different approach for improvement of stresses based on the satisfaction of equilibrium equations by taking into consideration of two elasticity problems is followed and the effect of the number of the Gauss quadrature points is studied. In this approach, the equilibrium equations are satisfied for each patch of the isogeometric analysis model and it has been shown that the recovered stresses are more accurate than the previous method where the super-convergent properties were used. To demonstrate the performance and efficiency of the method a couple of elasticity problems are considered and the obtained results are compared with the previous method and exact solutions. The results indicate that the suggested method can be employed for error estimation and stress recovery in the isogeometrical analysis method.

**Key Words** Isogeometric Analysis, Error Estimation, Stress Recovery, Equilibrium Equations.

\* تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۴/۱۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۴/۸ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول: استادیار، گروه عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شاهرود، شاهرود، ایران. ahmad.ganjali@yahoo.com

(۲) استاد، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

## مقدمه

حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار یک سیستم یکی از مهم‌ترین مسائلی است که همواره در زمینه‌های علوم و مهندسی مورد بحث قرار داشته است. در حالت کلی این معادلات پیچیدگی‌های بسیار زیادی دارند و تنها با استفاده از روش‌های عددی قابل حل می‌باشند. در دهه‌های اخیر با توسعه روش‌های مختلف عددی مواجه بوده‌ایم که از جمله مهم‌ترین آنها می‌توان به روش‌های تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته روش‌های موسوم به روش‌های بدون مش اشاره کرد. از میان این روش‌ها، روش اجزای محدود به‌عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و توسعه یافته است. این روش در دهه ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت و امروزه با کاهش عیوب و ادغام آن با روش‌های تفاضل محدود و بدون مش بسیاری از مشکلات دانشمندان مکانیک محاسباتی را مرتفع ساخته است. اما، علی‌رغم این پیشرفت قابل ملاحظه هنوز هم نمی‌توان روشی را یافت که بتوان آنرا کامل و بدون نقص نامید. از جمله این نواقص و مشکلات می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسائلی با هندسه پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائلی با تغییرات شدید در خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه‌های مان‌ها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، اشاره نمود.

تقریباً یک دهه پس از شکل‌گیری روش اجزای محدود، بین سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰، به دلیل توسعه رایانه‌ها پیشرفت‌های چشم‌گیری در علم مدل‌سازی هندسه به‌کمک رایانه (Computer Aided Design) شکل گرفت. واضح است که تحلیل مسائل مهندسی بر مبنای هندسه استوار است و استفاده از این پیشرفت‌ها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل مهندسی در رفع نقایص آن نماید. اما به دلیل عدم هم‌زمانی پیدایش روش اجزای محدود و روش‌های طراحی به‌کمک

رایانه، این اتصال بین تحلیل مهندسی و طراحی به‌کمک رایانه به‌وجود نیامد.

از اولین تلاش‌هایی که برای ورود تکنیک‌های طراحی به‌کمک رایانه در تحلیل مهندسی صورت پذیرفت در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ و توسط کیگان و همکاران [1,2] و هولینگ و همکاران [3] انجام شد که در آن به‌جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود، از توابع پایه اسپلاین استفاده شده بود. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نریز (بی-اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت) (Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)) که از توسعه توابع اسپلاین به‌دست می‌آیند توسط هیوز و همکارانش تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتری نام گرفت [4]. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپلاین و نریز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آنها برای درون‌یابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود. به‌طور خلاصه از مزایای روش ایزوژئومتری در مقایسه با دیگر روش‌های عددی می‌توان به مواردی چون، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر، دقت قابل ملاحظه در اکتاف شرایط مرزی، عدم نیاز به شبکه‌بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در حین حل دچار تغییر می‌شود، کاهش قابل ملاحظه اندازه دستگاه معادلات، انعطاف‌پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و قابلیت استفاده از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرایب آنها خود تابعی متغیر می‌باشند اشاره کرد [5]. در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتری به‌سرعت در زمینه‌های مختلفی هم‌چون دینامیک سیالات، مکانیک سازه‌ها و یا الکترومغناطیس توسعه داده شده است. هم‌چنین در این زمینه کتابی به چاپ رسیده است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد [6].

خطا بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به‌شمار می‌رود و همواره باعث نگرانی محققان در قابلیت

تحلیل‌های عددی در این بخش به معرفی تعدادی از این روش‌ها در برآورد خطای تحلیل اجزای محدود پرداخته می‌شود.

از اولین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شده است، مقاله‌های ریچاردسون می‌باشد که در سال ۱۹۱۰ نوشته شده است. روش ریچاردسون در تخمین خطا از این حقیقت پیروی می‌کند که خطا در هر طرحی از تفاوت محدود، معمولاً به اندازه مش‌های مورد استفاده بستگی دارد [8]. کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ و توسط بابوشکا و رینولت آغاز شد [9, 10]. روش آنها که روش باقیمانده‌ای نام گرفت بر این اساس بود که با قرار دادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادله دیفرانسیل اولیه و محاسبه مانده آن و نیز محاسبه پرش میدان گرادیان در لبه‌المان‌ها، تخمینی از خطای حل اجزای محدود به دست می‌آید [9]. دسته دیگر از روش‌های برآورد خطا، روش‌های بازیافت تنش می‌باشد که طبق تحقیقاتی که بابوشکا در سال ۱۹۹۴ توسط آزمون وصله خود انجام داد، پی برده شد که این روش‌ها در مقایسه با روش‌های باقیمانده‌ای از دقت و هم‌گرایی بهتری برخوردار می‌باشند [11]. به‌طور کلی بازیافت تنش روشی به‌منظور بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش یا گرادیان میدان به دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش با استفاده از حل روش اجزای محدود، یک جواب نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقاط دلخواه روی دامنه محاسبه شده است که دقت بالاتری نسبت به حل اولیه اجزای محدود داشته است. به‌طور کلی این میدان تنش بهبود یافته، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^* = N\bar{\sigma}^* \quad (1)$$

که در آن  $\bar{\sigma}^*$  مقادیر گرهی این میدان و  $N$  توابع شکل مورد استفاده در المان‌ها است. با استفاده از این

اعتماد نتایج بوده است. استفاده از روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریک (Stress Recovery in Isogeometric analysis (SRI) اولین بار توسط حسینی و همکاران مورد استفاده قرار گرفت [1]. اساس روش SRI، مشابه روش SPR در اجزای محدود، برگرفته از خاصیت فوق هم‌گرایی تنش در نقاط انتگرال‌گیری گوسی است. در این روش با استفاده از نقاط فوق هم‌گرایی گوسی برای هر مؤلفه تنش، یک سطح بهبود یافته تشکیل می‌شود که برای برآورد خطای ایزوژئومتریک مورد استفاده قرار می‌گیرد [5]. بعد از آن توسط همان محققان، یک روش بر پایه ارضای معادلات تعادل معرفی شد که باعث برآورد بهتری از خطا در داخل و نواحی مرزی دامنه تحلیل ایزوژئومتریک شد و کارایی آن در برآورد خطای سه مسأله الاستیسیته مورد ارزیابی قرار گرفت [7]. در این پژوهش ضمن بررسی عملکرد این روش در برآورد خطای دو مسأله نمونه با شرایط انحنا در مرزهای هندسی، به بررسی تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی در کارایی این برآوردکننده خطا پرداخته شده است.

تیر طره دایره‌ای شکل و صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری دو مثال حل شده در این پژوهش می‌باشند. به‌منظور بررسی تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی نیز، نسبت نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی کل دامنه (شاخص تأثیر) با چهار، نه، شانزده، بیست و پنج و سی و شش نقطه گوسی برای دو مثال حل شده در این پژوهش و سه مثال مرجع [7] مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده از دو مثال حل شده در این پژوهش نیز نشان می‌دهد که برآورد خطا با استفاده از این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا، با دقت بهتری صورت می‌پذیرد.

### برآورد خطا در اجزای محدود

به‌منظور آشنایی با برخی از روش‌های تخمین خطای

$$a = A^{-1}b \quad (5)$$

در رابطه (5)،  $A$  و  $b$  به صورت زیر تعریف

می شوند:

$$A = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \quad (6)$$

$$b = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (7)$$

در این روابط،  $\sigma_h$  تنش به دست آمده از روش اجزای محدود،  $x_i$  و  $y_i$  مختصات نقاط فوق هم گرا یا نقاط بهینه تنش در هر ناحیه و  $n$  تعداد المان های موجود در هر ناحیه است.

بعد از آن نیز تکنیک های بسیار دیگری توسط محققین ابداع شد که در هر یک به نوعی به بهبود روش SPR پرداخته می شود. بدین منظور استفاده از قید معادلات تعادل برای بهبود کارایی روش SPR دنبال شد [15-21]. با توجه به عدم ارضای معادلات تعادل توسط تنش بازیافتی به دست آمده از روش SPR به ویژه در نزدیک مرزها، در این روش ها با استفاده از قید معادلات تعادل سعی بر بهبود کارایی برآورد کننده خطا شده است.

### فرمول بندی تحلیل ایزوژئومتریکی

به طور کلی در روش ایزوژئومتریکی، مقدار مجهول مسأله در حالت دوبعدی، (به طور مثال مؤلفه تغییر مکان جهت  $x$ ) به عنوان یک سطح نرَبو، طوری تعیین می شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مینا در هر نقطه از دامنه، بیان کننده مقدار مجهول مسأله در آن مکان باشد. در مسائل تنش و کرنش مسطح، اگر نقاط کنترلی را به گونه ای انتخاب کنیم که مؤلفه های اول و دوم مختصات این نقاط،  $(P_x, P_y)$ ، بتوانند هندسه مسأله را در صفحه  $xy$  برآورد کنند، در این صورت مؤلفه سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می کنیم که درون یابی بین این نقاط به وسیله توابع پایه ای نرَبز نشان

میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به صورت زیر تعریف می شود:

$$e_{\sigma}^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (2)$$

که در رابطه بالا  $\sigma_h$  تنش ناشی از اجزای محدود می باشد. روش های متعددی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد که از جمله ابتدایی ترین آنها می توان به روش میانگین گیری که توسط هینتن و کمپیل [12] در سال ۱۹۷۴ و روش تصویر  $L_2$  که توسط اودن و براچلی [13] در سال ۱۹۷۱ به کار برده شده است اشاره کرد. در سال ۱۹۹۲ روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق هم گرا SPR توسط زینکویچ و زو [14] ابداع شد و گام بسیار بلندی در بازیافت تنش برداشته شد. امروزه این روش به عنوان یکی از بهترین و مؤثرترین روش ها برای برآورد خطا در مسائل مهندسی به کار می رود. اساس این روش بر مبنای استفاده از نقاطی به نام نقاط فوق هم گرا است که در آنها تنش به دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می باشد. در این روش با برآزش یک میدان به صورت چند جمله ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی گروه المان های متصل به هر گره (ناحیه)، میدان گرادیان بهبود یافته تعیین می شود. این میدان به صورت زیر فرض می گردد:

$$\sigma_p^* = Pa \quad (3)$$

در رابطه فوق  $\sigma_p^*$ ، تنش بهبود یافته،  $P$  مجموعه تک جمله ای های حداکثر هم درجه با توابع شکل المان و  $a$  مقادیر ثابت مجهول هستند. با کمینه کردن تابع (۴) مقادیر مجهول مطابق رابطه (۵) به دست می آید [14].

$$F(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - p(x_i, y_i))^2 \quad (4)$$

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^T (DB) d\Omega ; \quad (10)$$

$$F_e = \int_{\Omega_e} R^T b d\Omega + \int_{\Gamma_e} R^T t d\Gamma$$

و در نهایت با حل معادله (۹) و مشخص شدن بردار  $P$  می توان مؤلفه های کرنش و تنش را به صورت زیر به دست آورد.

$$\varepsilon = BP ; \quad \sigma = DE \quad (11)$$

### تشریح روش بازیافت تنش با استفاده از قید معادلات تعادل

به طور کلی در این روش، مشابه روش هایی که به منظور بهبود میدان تنش اجزای محدود در مراجع [18, 21] ارائه شده است، با معادل قرار دادن نیروهای عمل کننده بر یک ناحیه از فضای محاسباتی به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی و میدان تنش بازیافتی، می توان برای هر مؤلفه تنش به یک سطح تنش بهبود یافته دست یافت.

همان طور که در بخش قبل بیان شد، رابطه سازی تحلیل ایزوژئومتریکی و نحوه به دست آمدن سطح جابه جایی به گونه ای است که با ارضای معادله تعادل در فضای تأثیر هر یک از المان های تحلیل ایزوژئومتریکی، تعادل در کل دامنه مدل سازی شده برقرار می شود. در صورت وجود تعادل در کل دامنه، هر ناحیه نریز از دامنه مدل سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی نیز در شرایط تعادل قرار دارد. به این ترتیب می توان فرم ضعیف معادله دیفرانسیل تعادل را برای یک ناحیه مجزا از کل دامنه مدل سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی، به صورت زیر بیان نمود:

$$\int_{\Omega_p} B^T (DBP) d\Omega - \int_{\Omega_p} R^T b d\Omega - \int_{\Gamma_p} R^T t d\Gamma + F_{\Omega-\Omega_p} = 0 \quad (12)$$

دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد. در حقیقت می توان رویه ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه  $xy$  نشان دهنده هندسه مسأله و ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحه  $xy$  نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد. بنابراین اگر تغییر مکان در جهت  $x$  و  $y$  را به ترتیب با  $u$  و  $v$  نشان دهیم، می توان تغییر مکان هر نقطه در داخل زیر دامنه نریز (ناحیه) را به صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درون یابی کرد.

$$u \approx \bar{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{u,i,j} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{v,i,j} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

در رابطه بالا  $P_{i,j}$  ها نمایشگر بردار مؤلفه های سوم مختصات نقاط کنترلی نریز، توابع پایه ای نریز و  $m$  و  $n$  تعداد نقاط کنترلی در جهت های  $x$  و  $y$  می باشند.

با توجه به رابطه (۸) مشاهده می شود که تنها پارامتر مجهول برای تعیین سطح تغییر مکان در جهت  $x$  و  $y$ ، بردار  $P$  می باشد. محدودیتی که بردار مؤلفه های سوم مختصات نقاط کنترلی نریز را مشخص می کند، ارضای معادله دیفرانسیل تعادل در فضای تأثیر هر المان نریز تحلیل ایزوژئومتریکی است؛ که در نهایت منجر به تشکیل معادله (۹) می شود.

$$KP = F \quad (9)$$

که در آن  $K$  ماتریس ضرایب (ماتریس سختی)،  $P$  مجهولات مسأله (مختصه سوم نقاط کنترلی) و  $F$  نیروهای خارجی وارد بر دامنه می باشند. حال با گسسته سازی دامنه،  $K$  و  $F$  به ترتیب از گردآوری ماتریس سختی و بردار نیروی هر المان از فضای پارامتری، مطابق با رابطه (۱۰) ساخته می شوند.

کل دامنه مدل سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی فرض کنیم، رابطه (۱۲) را می توان به صورت رابطه (۱۴) بیان نمود.

$$F_{\Omega} = \int_{\Omega_p} R^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} R^T t d\Gamma \quad (13)$$

$$\int_{\Omega_p} B^T (DBP) d\Omega = F_{\Omega} - F_{\Omega-\Omega_p} \quad (14)$$

حال در صورتی که  $f = F_{\Omega} - F_{\Omega-\Omega_p}$  را به عنوان کل نیروهای وارد شده بر ناحیه جدا شده در نظر بگیریم و معلوم فرض کنیم، می توان ناحیه جدا شده را به عنوان یک سیستم مجزا در نظر گرفت و معادله دیفرانسیل تعادل را به فرم زیر برای آن بیان نمود.

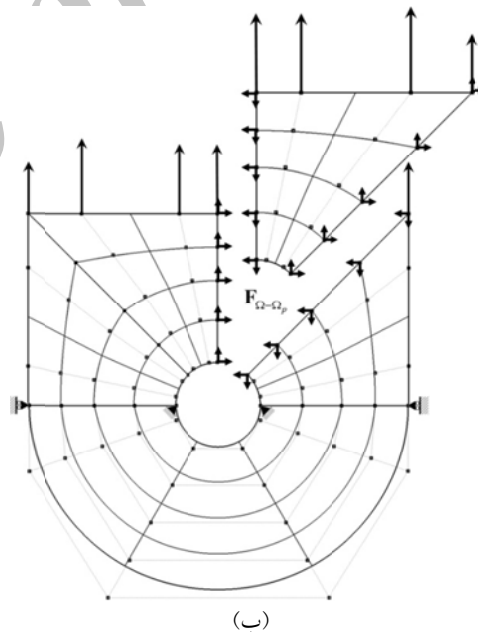
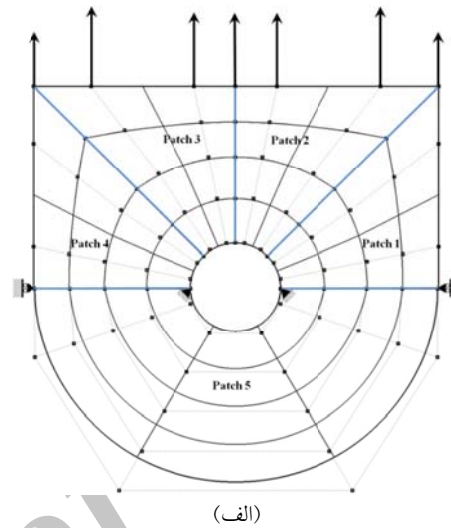
$$\int_{\Omega} B^T(\sigma) d\Omega = f = F_{\Omega} - F_{\Omega-\Omega_p} \quad (15)$$

که در آن  $\sigma$  میدان تنش دقیق حاکم بر مسأله می باشد. یا مقایسه روابط (۱۵ و ۱۴) می توان رابطه (۱۶) را نتیجه گرفت.

$$\int_{\Omega_p} B^T(\sigma) d\Omega = \int_{\Omega_p} B^T(DBP) d\Omega \quad (16)$$

رابطه (۱۶) محدودیتی است که به طور مستقیم بر میدان تنش دقیق حاکم بر مسأله وارد می شود. حال میدان تنش حاکم بر مسأله را، همانند سطوح مفروض برای جابه جایی، به صورت سطوح نریز با مختصه سوم مجهول نقاط کنترلی فرض می کنیم. بردار مختصات سوم نقاط کنترلی با استفاده از محدودیت معادله (۱۶) به دست خواهد آمد. واضح است که این سطوح تنش بازیافتی نسبت به سطوح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی دارای دقت بیشتری خواهند بود. زیرا همان طور که در معادله (۱۶) مشاهده می شود، این سطوح تنش بازیافتی با انتگرال گیری مستقیم به دست می آید و مرتبه آن نسبت به سطوح تنش به دست آمده

که در آن  $F_{\Omega-\Omega_p}$ ، مطابق شکل (۱)، نیروهای عمل و عکس العمل بین ناحیه جدا شده و کل دامنه مدل سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی می باشد.



شکل ۱ مدل سازی یک مسأله دوبعدی در روش ایزوژئومتریکی. الف) شبکه نقاط کنترلی، شبکه المان ها و شرایط مرزی دامنه مدل سازی شده با پنج ناحیه، ب) ناحیه جدا شده و نیروهای وارد بر آن

در صورتی که مطابق رابطه (۱۳)،  $F_{\Omega}$  را به عنوان نیروهای حجمی و سطحی وارد بر ناحیه جدا شده از

انرژی استفاده می‌شود. در این صورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|e\| = \|\bar{e}\| = \left[ \int_{\Omega} (\sigma^* - \bar{\sigma})^T D^{-1} (\sigma^* - \bar{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

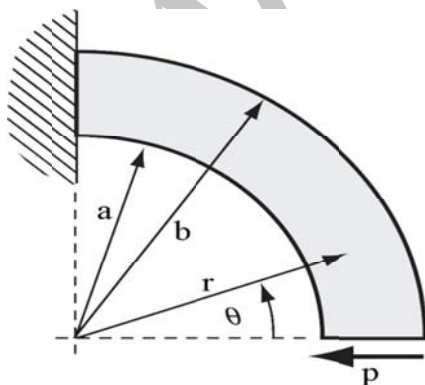
که در اینجا  $\sigma^*$  تنش بازیافتی و  $\bar{\sigma}$  تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد.

### تیر طره دایره‌ای شکل

در این بخش به مدل‌سازی یک تیر طره دایره‌ای شکل الاستیک در شرایط تنش مستوی، توسط تحلیل ایزوژئومتریکی و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل ۲). پارامترهای به کار برده شده در مدل‌سازی و تحلیل این مسأله به صورت زیر می‌باشد:

$$a=8, \quad b=10, \quad P=100, \quad E=2 \times 10^5, \quad \nu=0.3$$

تنش‌های دقیق این مسأله در دستگاه مختصات قطبی با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل (۴) به صورت روابط (۲۱-۱۹) در نظر گرفته شده است [23].



شکل ۲ تیر طره دایره‌ای شکل

از تحلیل ایزوژئومتریکی که از مشتق‌گیری میدان جابه‌جایی محاسبه می‌شود، بالاتر است.

با توجه به دقیق‌تر بودن سطح تنش بازیافتی نسبت به سطح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی می‌توان از آن به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتریکی استفاده نمود. روش کار این تخمین کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی برای هر المان، به صورت تقریبی به معیاری برای تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد.

در ادامه به منظور بررسی کارایی این تخمین کننده خطا، به مقایسه نرم خطای انرژی تقریبی به دست آمده از این روش و روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا و نرم خطای انرژی دقیق برای دو مسأله نمونه الاستیسیته پرداخته شده است.

### نرم خطای انرژی

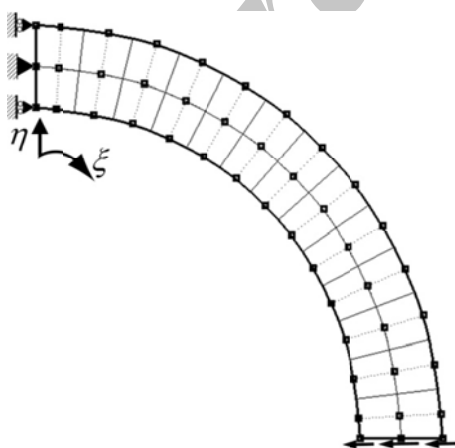
استفاده از معیارهایی مختلف برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروف‌ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به صورت زیر بیان می‌شود [22]:

$$\|e\| = \left[ \int_{\Omega} (\sigma - \bar{\sigma})^T D^{-1} (\sigma - \bar{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

در این رابطه  $\sigma$  مقدار دقیق بردار تنش،  $\bar{\sigma}$  تنش به دست آمده از حل تقریبی،  $D$  ماتریس الاستیسیته و  $\Omega$  دامنه المان می‌باشد. با توجه به این‌که در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسأله در دسترس نمی‌باشد، لذا به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته آن برای محاسبه نرم خطای

روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا است. هم‌چنین شاخص تأثیر به‌دست آمده از روش جدید ۰/۷۵ و از روش قدیمی ۰/۵۹ می‌باشد. که این افزایش در شاخص تأثیر نیز نشان دهنده کارایی بهتر روش پیشنهادی می‌باشد. شاخص تأثیر نسبت مجموع نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق می‌باشد که نشانگر میزان هم‌گرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا به‌شمار می‌رود. هنگامی یک محاسبه‌گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تأثیر به سمت یک میل نماید [22].

به‌عنوان نمونه در شکل (۵) و در مسیر  $x=0.04$ ، نحوه تغییرات تنش  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  به‌دست آمده از حل دقیق، تحلیل ایزوژئومتریکی و روش بازیافت تنش قدیمی و جدید ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات تنش به‌دست آمده از روش مبتنی بر ارضای معادلات تعادل نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا، دقیق‌تر است که نشان دهنده کارایی مطلوب روش ارائه شده در این پژوهش در تشکیل سطح تنش بهبود یافته می‌باشد.



شکل ۳ شبکه نقاط کنترلی، شبکه المان‌ها و شرایط مرزی مدل‌سازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی تیر طره دایره‌ای

$$\sigma_r = \frac{P}{N} \left( r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin \theta \quad (19)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{N} \left( 3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin \theta \quad (20)$$

$$\tau_{r,\theta} = -\frac{P}{N} \left( r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \cos \theta \quad (21)$$

در روابط بالا  $N$  به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

برای مدل‌سازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریکی از یک ناحیه و ۴۵ نقطه کنترلی استفاده شده است. هم‌چنین در جهت  $\xi$  و  $\eta$  به ترتیب از توابع شکل نرزی درجه دو و درجه یک و بردارهای گرهی به‌صورت زیر استفاده شده است.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.08, 0.15, 0.23, 0.31, 0.38, 0.46, \}$$

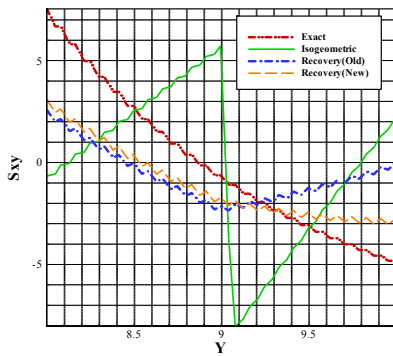
$$\eta = \{0.54, 0.61, 0.69, 0.77, 0.85, 0.92, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0.5, 1, 1\}$$

به‌منظور انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینه تنش نیز شانزده نقطه گوسی مورد استفاده قرار گرفته است.

در شکل (۳) آرایش المان‌ها و شبکه نقاط کنترلی به‌همراه شرایط مرزی اعمال شده در مدل‌سازی تیر طره دایره‌ای نمایش داده شده است. در شکل (۴) نحوه توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی به‌دست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش (روش جدید) و روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا (روش قدیمی) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی به‌دست آمده از روش جدید نسبت به روش قدیمی، به تغییرات نرم خطای دقیق نزدیک است که نشان دهنده کارایی بهتر تخمین کننده خطای پیشنهادی نسبت به



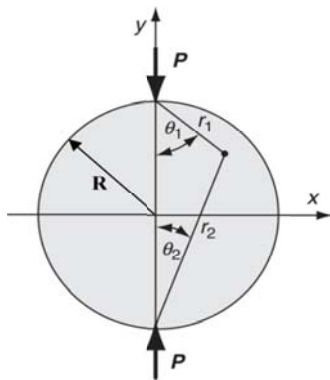


(ب)

شکل ۵ نمودار تغییرات تنش تیر طره دایره‌ای در مسیر  $X=0.4$ .

الف) نمودار تغییرات مؤلفه تنش  $\sigma_y$  (ب) نمودار تغییرات مؤلفه تنش

$$\tau_{xy}$$

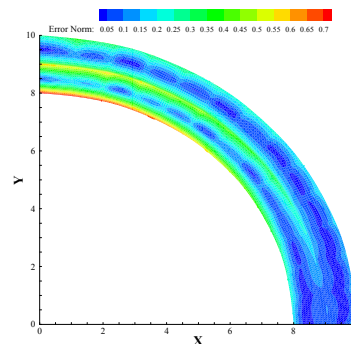


شکل ۶ صفحه دایره‌ای تحت نیروی فشاری متمرکز

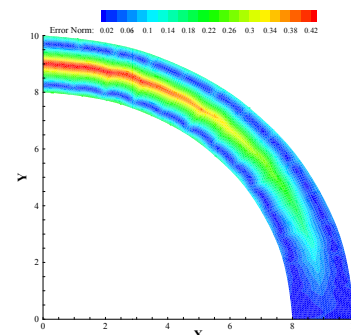
### صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری

در این مثال به بررسی رفتار تخمین کننده‌های خطا، در برآورد خطای به‌دست آمده از تحلیل مسأله دارای یک نقطه تکین با روش ایزوژئومتری می‌پردازیم. معمولاً مسائل با نقطه تکین، به‌علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی برای بررسی کارایی تخمین کننده‌های خطا به‌شمار نمی‌روند؛ اما هدف از این مثال، با توجه به این‌که زیر بار متمرکز به‌عنوان یک نقطه تکین، دارای خطای زیادی نسبت به سایر نقاط است، بررسی رفتار تخمین کننده‌های خطا در تعیین میزان نرم خطای انرژی زیر بار متمرکز و توزیع خطا در دیگر نقاط دامنه، مؤثر خواهد بود.

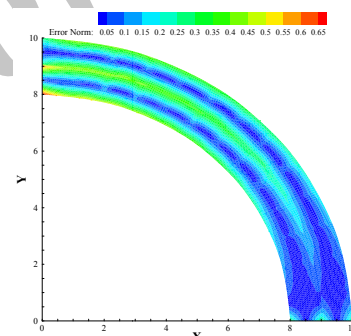
در شکل (۶) مشخصات صفحه دایره‌ای شکل



(الف)

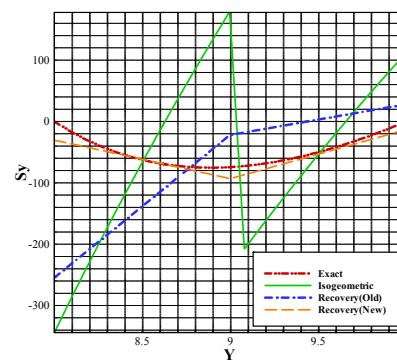


(ب)

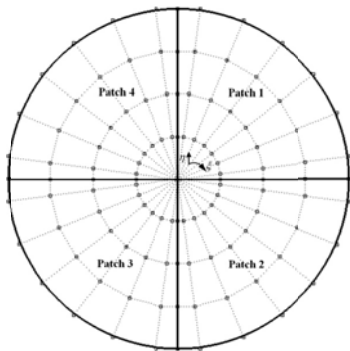


(ج)

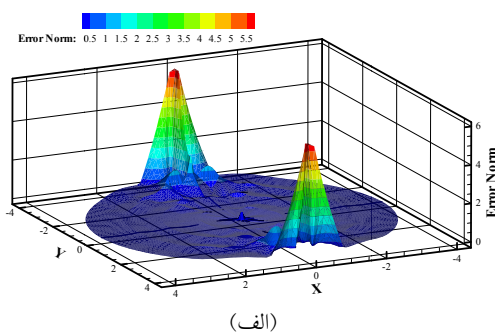
شکل ۴ نحوه توزیع نرم خطای انرژی تیر طره دایره‌ای. الف) نرم خطای انرژی دقیق، ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)، ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)



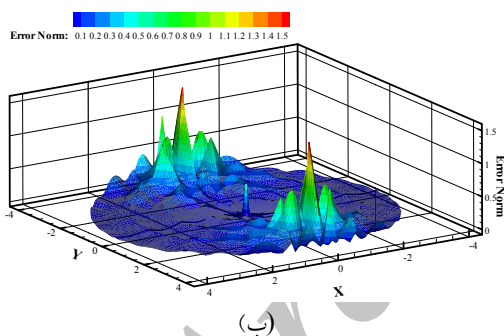
(الف)



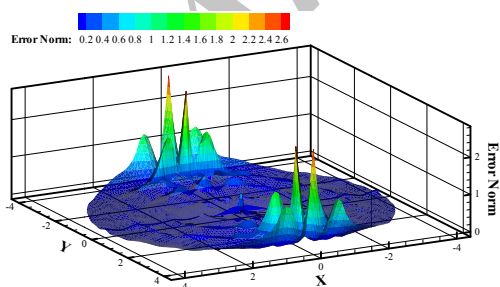
شکل ۷ شبکه نقاط کنترلی در مدل سازی صفحه دایره ای



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۸ نحوه توزیع نرم خطای انرژی صفحه دایره ای تحت بار متمرکز فشاری. (الف) نرم خطای انرژی دقیق، (ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)، (ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید).

تحت بار متمرکز قطری مشاهده می شود. پارامترهای به کار گرفته شده برای تحلیل این مسأله به صورت زیر می باشد.

$$R = 2, P = 100, E = 1000, \nu = 0.3$$

تنش های دقیق این مسأله با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل (۶) به صورت روابط (۲۲-۲۴) می باشد [23].

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \left[ \frac{(R-y)x^2}{r_1^4} + \frac{(R+y)x^2}{r_2^4} - \frac{1}{2R} \right] \quad (22)$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \left[ \frac{(R-y)^3}{r_1^4} + \frac{(R+y)^3}{r_2^4} - \frac{1}{2R} \right] \quad (23)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi} \left[ \frac{(R-y)^2 x}{r_1^4} - \frac{(R+y)^2 x}{r_2^4} \right] \quad (24)$$

در روابط بالا  $r_1$  و  $r_2$  به صورت زیر می باشند.

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (R-y)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (R+y)^2}$$

برای مدل سازی و تحلیل این مسأله به روش ایزوژئومتریکی از ۱۴۰ نقطه کنترلی و چهار ناحیه مشابه به شکل ربع دایره استفاده شده است (شکل ۷).

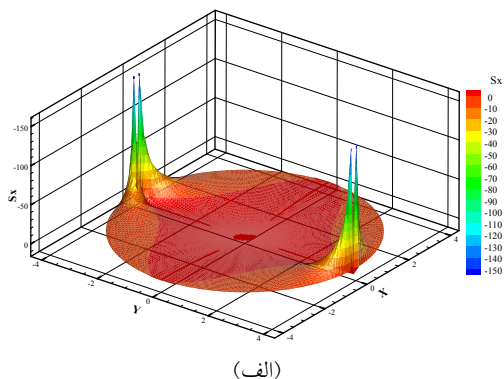
در جهت  $\xi$  و  $\eta$  هر ناحیه، به ترتیب از توابع شکل نرئز درجه دو و درجه یک و بردارهای گرهی به صورت زیر استفاده شده است.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.17, 0.33, 0.5, 0.67, 0.83, 1, 1, 1\},$$

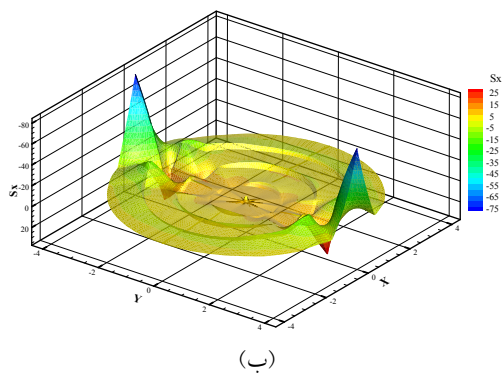
$$\eta = \{0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1\}$$

به منظور انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش نیز شانزده نقطه گوسی مورد استفاده قرار گرفته است.

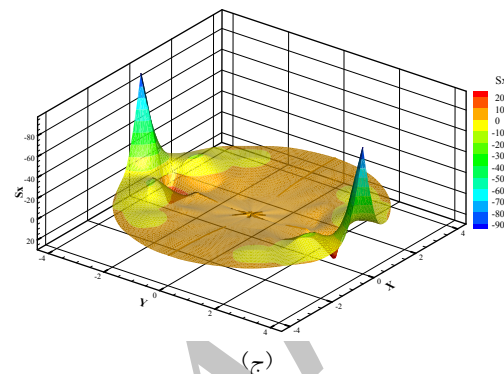
از این بررسی در جدول (۱) نشان داده شده است.



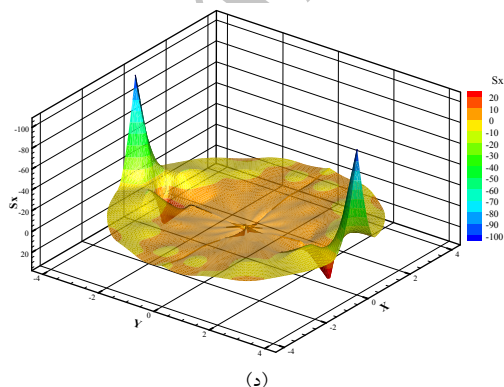
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۹ نحوه توزیع تنش  $\sigma_x$  صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) تنش دقیق، ب) تنش ایزوژنومتریک، ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)، د) تنش بهبودیافته (روش جدید).

در شکل (۸) نتایج به دست آمده از نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی تحلیل صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش تخمین خطای جدید کارایی بهتری نسبت به روش قدیمی در برآورد نرم خطا در زیر بار متمرکز و توزیع نرم خطای کل دامنه دارد.

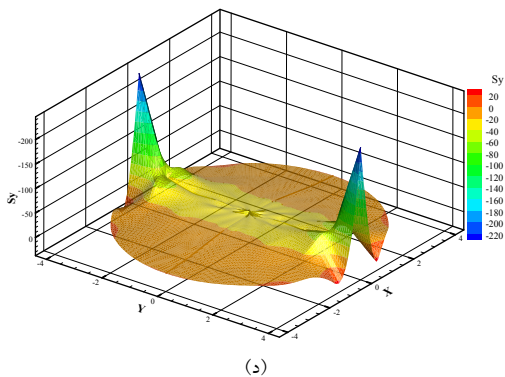
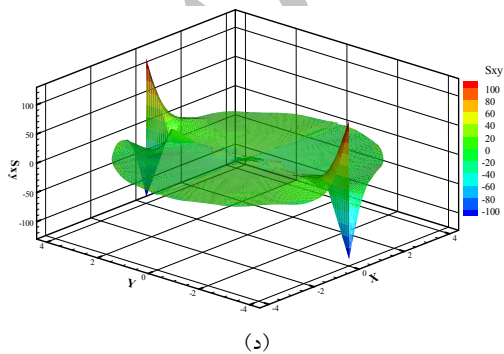
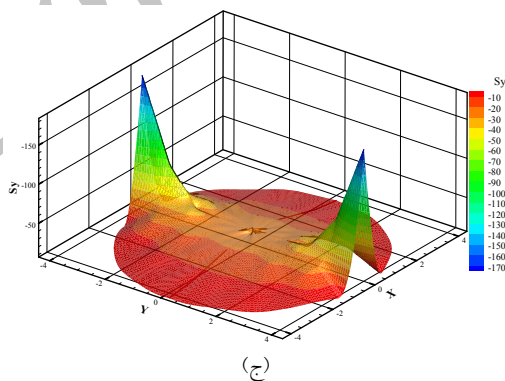
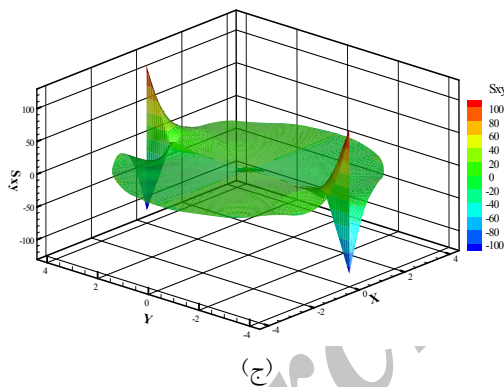
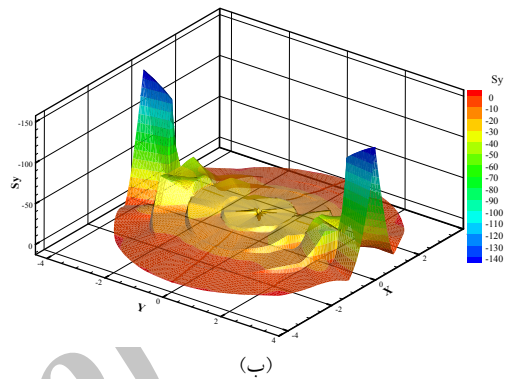
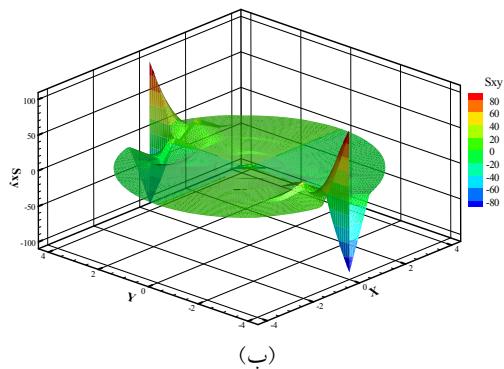
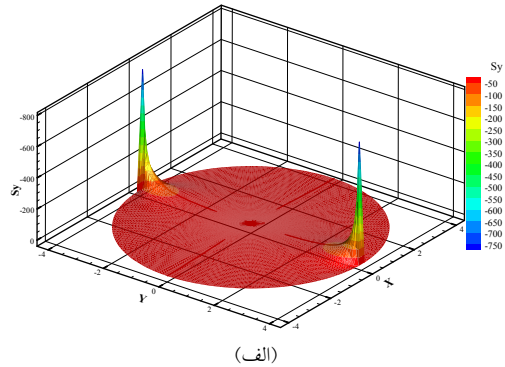
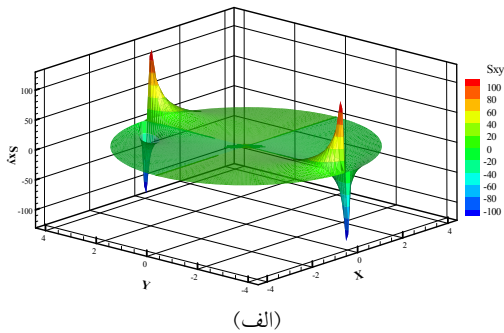
در این مثال نیز شاخص تأثیر تخمین کننده خطا از مقدار ۰/۴۵ برای روش قدیمی به مقدار ۰/۵۲ در روش جدید افزایش داشته است. که این افزایش شاخص تأثیر نیز نشان دهنده کارایی بهتر روش جدید نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا خواهد بود.

در شکل‌های (۹-۱۱) به مقایسه نحوه توزیع مؤلفه‌های تنش به دست آمده از تحلیل دقیق، تحلیل ایزوژنومتریک و تنش‌های بازیافتی به دست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش و روش قدیمی مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در مؤلفه‌های تنش  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$ ، روش جدید نسبت به روش قدیمی از توزیع تنش مناسب‌تری برخوردار می‌باشد. در مورد توزیع تنش مؤلفه  $\tau_{xy}$ ، هر دو روش توزیع مشابهی دارند اما همان‌طور که مشاهده می‌شود نسبت به توزیع تنش ایزوژنومتریک دقیق‌تر می‌باشند.

### بررسی تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی بر

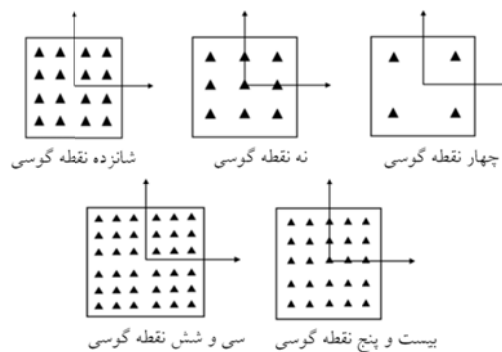
#### کارایی برآورد کننده خطا

در این بخش به بررسی اثر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی بر کارایی برآورد کننده خطا بر مبنای ارضای معادلات تعادل در روش ایزوژنومتریک برای دو مثال ارائه شده در این پژوهش و سه مثالی که در مرجع [7] ذکر شده است، پرداخته می‌شود. بدین منظور دامنه حل مسأله با پنج المان نرین با نقاط انتگرال‌گیری مختلف تحلیل شده و شاخص تأثیر برآورد کننده خطا در هر بخش مورد مقایسه قرار گرفته است. در شکل (۱۲) پنج المان نرین با چهار، نه، شانزده، بیست و پنج و سی و شش نقطه گوسی نشان داده شده است. نتایج حاصل



شکل ۱۱ نحوه توزیع تنش  $\tau_{xy}$  صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) تنش دقیق، ب) تنش ایزوژنومتریک، ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)، د) تنش بهبودیافته (روش جدید).

شکل ۱۰ نحوه توزیع تنش  $\sigma_y$  صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری. الف) تنش دقیق، ب) تنش ایزوژنومتریک، ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)، د) تنش بهبودیافته (روش جدید).



شکل ۱۲ همان‌های نریز با تعداد نقاط گوسی مختلف در فضای پارامتری

جدول ۱ مقادیر شاخص تأثیر برآوردکننده خطا برای نقاط گوسی مختلف

مسائل نمونه					تعداد نقاط انتگرال‌گیری به روش گوسی
صفحه ترکدار تحت کشش مرتبه $\xi = 1$ $\eta = 1$ توابع شکل	تیر طره تیموشنکو مرتبه $\xi = 1$ $\eta = 1$ توابع شکل	تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده مرتبه $\xi = 1$ $\eta = 1$ توابع شکل	صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری مرتبه $\xi = 2$ $\eta = 1$ توابع شکل	تیر طره دایره‌ای شکل مرتبه $\xi = 2$ $\eta = 1$ توابع شکل	
۰/۱۷۷	۰/۹۵	۰/۸۹	۰/۷۲	۰/۷۶	چهار
۰/۱۷۵	۰/۸۵	۰/۷۸	۰/۵۲	۰/۷۰	نه
۰/۱۸۱	۰/۹۳	۰/۸۵	۰/۵۲	۰/۷۵	شانزده
۰/۱۸۲	۰/۸۸	۰/۸۱	۰/۵۰	۰/۷۲	بیست و پنج
۰/۱۸۴	۰/۹۲	۰/۸۵	۰/۵۱	۰/۷۴	سی و شش

شاخص تأثیر و در نتیجه افزایش کارایی برآورد کننده خطا می‌شوند، ارتباطی نخواهد داشت.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی کارایی روش برآورد خطا مبتنی بر ارضای معادلات تعادل به منظور بهبود میدان تنش و برآورد خطای دو مثال نمونه در تحلیل ایزوژئومتریک و هم‌چنین تأثیر تعداد نقاط گوسی مختلف بر کارایی آن پرداخته شد. این برآورد کننده خطا، دومین روش از روش‌های مبتنی بر بازیافت تنش در برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک و بر پایه ارضای معادلات تعادل در هر ناحیه می‌باشد. ویژگی بارز این روش عدم نیاز به نقاط فوق هم‌گرا و استفاده

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از نتایج جدول (۱) استنباط می‌شود این است که تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی بر کارایی این برآورد کننده خطا بسیار ناچیز است و مقدار شاخص تأثیر برای تمام نقاط گوسی تقریباً با هم برابر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای تیر طره دایره‌شکل و صفحه دایره‌ای شکل تحت بار فشاری که دارای توابع پایه نریز با مرتبه یکسانی می‌باشند تعداد نقاط گوسی مختلفی بیشترین شاخص تأثیر برآورد کننده خطا را تولید کرده است. این ویژگی برای سه مثال دیگر نیز مشاهده می‌شود. بر این اساس نیز می‌توان بیان نمود که مرتبه توابع شکل مورد استفاده در تحلیل مسائل مختلف در این پژوهش با تعداد نقاط گوسی بهینه که منجر به بالاترین

کارایی بهتری نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا برخوردار است و می‌توان از آن به‌عنوان یک راه حل ساده و مهندسی دیگر برای برآورد خطا و بهبود میدان تنش به‌دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی نام برد. هم‌چنین نتایج نشان داد که تعداد مختلف نقاط انتگرال‌گیری به روش گوس تأثیر زیادی بر کارایی این برآوردکننده خطا نداشته و تقریباً در تمام موارد شاخص تأثیرهای یکسانی را به‌دست می‌دهد.

یکسان از توابع شکل نرَبز در تخمین جابه‌جایی و سطح تنش بهبود یافته است. با توجه به توزیع دقیق‌تر نرم خطای تقریبی حاصل از این روش و نرم خطای تقریبی به‌دست آمده از روش مبتنی بر نقاط فوق هم‌گرا در دو مسأله حل شده در این پژوهش، هم‌چنین افزایش شاخص تأثیر و نمایش بهتری از مؤلفه‌های تنش بهبود یافته به‌دست آمده از این روش، می‌توان بیان نمود که روش برآورد خطا مبتنی بر ارضای معادلات تعادل در این دو مثال نمونه نیز از

## مراجع

1. Kagan, P., Fischer, A. and Bar-Yoseph, P.Z., "New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 41, pp. 435-458, (1998).
2. Kagan, P., Fischer, A. and Bar-Yoseph, P.Z., "Mechanically based models: adaptive refinement for B-Spline finite element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, pp. 1145-1175, (2003).
3. Hollig, K., Reif, U. and Wipper, J., "Weighted extended B-Spline approximation of dirichlet problems", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 39, pp. 442-462, (2001).
4. Hughes, T.G.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135-4195, (2005).
5. Hassani, B., Ganjali, A. and Tavakkoli, M., "An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery", *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 31, pp. 101-109, (2012).
6. Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y., "Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA", John Wiley & Sons, (2009).
7. حسینی، بهروز، گنجعلی، احمد، «استفاده از نیروهای وارد بر وصله‌های تحلیل ایزوژئومتریکی جهت محاسبه تنش بهبود یافته و برآورد توزیع خطا»، مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، دوره ۲، شماره ۲، صفحه ۲۹-۱۳، (۱۳۹۱).
8. Richardson, L.F., "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 210, pp. 307-357, (1910).
9. Babuska, I. and Rheinboldt, C., "A-posteriori error estimates for the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 1597-1615, (1978).
10. Babuska, I. and Rheinboldt, C., "Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 17-18, pp. 519-540, (1979).
11. Babuska, I., Strouboulis, T., Upadhyay, C.S. and Gangaraj, S.K., "A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patchwise uniform

- grids of triangles", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 114, pp. 307-378, (1994).
12. Hinton, E. and Campbell, J., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 461-480, (1974).
  13. Oden, T.J. and Brauchli, J., "On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 317-325, (1971).
  14. Zienkiewicz, O.C., Zhu, Z., "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1331-1364, (1992).
  15. Wiberg, N-E., Abdulwahab, F., "Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 2703-2724, (1993).
  16. Wiberg, N-E., Abdulwahab, F. and Ziukas, S., "Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3417-3440, (1994).
  17. Blacker, T. and Belytschko, T., "Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolation enhancements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 517-536 (1994).
  18. Boroomand, B. and Zienkiewicz, O.C., "Recovery by equilibrium in patches (REP)", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 137-164, (1997).
  19. LO, S.H. and LEE, C.K., "On using different recovery procedures for the construction of smoothed stress in finite element method", *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 43, 1223-1252, (1998).
  20. Rodenas, J.J., Tur, M., Fuenmayor, F.J. and Vercher, A., "Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 70, pp. 705-727, (2007).
  21. Payen, D.J. and Bathe, K.J., "The use of nodal point forces to improve element stresses", *Computers and Structures*, Vol. 89, pp. 485-495, (2011).
  22. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z., "*The Finite Element Method*", 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, (2005).
  23. Sadd, M.H., "*ELASTICITY: Theory, Applications, and Numerics*", Elsevier Butterworth-Heinemann, (2005).