

تحلیل نظری و تجربی پس کماتش حرارتی ستون‌ها*

(یادداشت پژوهشی)

حامد باقریان^(۱)حمید اختراعی طوسی^(۲)

چکیده بسیاری از سازه‌های مکانیکی در محیط‌هایی با اختلاف دمای زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند. تغییر دما، تنش‌ها و تغییرشکل‌های قابل ملاحظه‌ای ایجاد می‌کند. در مواردی که سازه مکانیکی از عناصر لاغر یا به عبارتی از تیرها تشکیل شده باشد، یکی از مشکلات عمده ناشی از افزایش دما، وقوع پدیده کماتش حرارتی خواهد بود. تناوم افزایش دما پس از وقوع کماتش، همچنان تنش و تغییرشکل‌های حاکم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در راستای مطالعه آثار پس از کماتش حرارتی، ضمن معرفی روش تحلیل پس کماتش حرارتی براساس نظریه تغییرشکل کوچک تیرها، شیوه تحلیل یک تیر دوسرهمفصل هنگام افزایش دمای یکنواخت و در حضور بار عرضی گسترده با استفاده از رویکرد تغییرشکل بزرگ معرفی می‌شود. اعتبار نتایج حاصل از روش تغییرشکل بزرگ توسط مقایسه نتایج با روش‌هایی چون تغییرشکل کوچک، مدل‌سازی خطی و غیرخطی در محیط نرم‌افزار آباکوس (ABAQUS) و آزمایش تجربی ارزیابی می‌گردد. در این راستا ضمن معرفی ساختار طراحی شده برای انجام آزمایش، نتایج حاصل از مقایسه تحلیل پس کماتش طبق نظریه تغییرشکل بزرگ با سایر روش‌های تحلیلی و تجربی ارائه می‌گردد. نمودارهای توزیع تغییرمکان عرضی تیر تحت مقادیر متفاوت بار به روش‌های مختلف و نیز نمودارهای تأثیر دما بر تغییرمکان میانه تیر معرفی می‌گردد. پس از جمع‌بندی نتایج در مورد شیوه مناسب تحلیل، اظهار نظر می‌شود.

واژه‌های کلیدی تغییرشکل بزرگ، پس کماتش حرارتی، روش اختلاف تریبی، نرم‌افزار آباکوس.

Theoretical and Experimental Thermal Post Buckling Analysis of Columns

H. Bagheriyan

H. Ekhteraei Toussi

Abstract Many of the mechanical structures are employed in high temperature conditions. Any variation of temperature may cause considerable side effects such as the creation of thermal stress or deformation. When a structure is composed of slender members such as beams or columns, one of the main problems concerning the rise of temperature is the incidence of thermal buckling. The continuing rise of temperature beyond the onset of thermal buckling level, continually affects the dominant forces and deformations. To study the post buckling phenomenon, following the introduction of different small deformation methods of thermal buckling analysis, a through large deformation scheme is developed to analyze the buckling of a simply supported column. For the case of large deformation analysis the validity of the results is evaluated by comparing with the results obtained by using of the small deformation theory, the linear and nonlinear simulations of ABAQUS software as well as the experimental data. The results characterize the deflection of a beam with uniformly distributed load by different solution techniques as well as the effect of temperature on the mid span deflection of a post buckled beam. Based on the obtained results, the validity of different methods is evaluated.

Key Words Large Deformation, Post- Thermal Buckling, Differential Quadrature Method, ABAQUS

* تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۶/۱۴ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۹/۱۱ می‌باشد.

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) نویسنده مسئول: دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد. ekhteraee@um.ac.ir

مقدمه

نخست محسوب می‌شود. تا آن‌جا که بررسی مؤلفان نشان می‌دهد، تاکنون به‌طور اختصاصی تحقیقی در زمینه کاربرد نظریه تغییرشکل‌های بزرگ برای مطالعه پس‌کمانش حرارتی تیرها منتشر نشده است. بنابراین به‌منظور بررسی تاریخچه این پژوهش به‌طور مجزا پیشینه تحقیق در مسائل کمانش حرارتی و مسائل تغییرشکل بزرگ معرفی می‌شود.

تیرهایی که تحت بار فشاری ناپایدار می‌گردند، به‌عبارت دیگر ستون‌ها برای اولین بار در اوایل قرن ۱۸ توسط اولر مورد مطالعه قرار گرفتند. در سال‌های اخیر توجه زیادی به مطالعه پدیده کمانش حرارتی جلب شده است. از این نمونه می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. راتو و راجو [1,2] (Rao and Raju) به بررسی کمانش حرارتی صفحه‌ها و ستون‌ها پرداختند. گوس و انتمن [3] (Gauss and Antman) توصیف کلی در مورد ویژگی‌های حالت کمانش حرارتی غیرخطی تیر و صفحات الاستیک ارائه کردند. لی و دیگران [4] (Li *et al.*) پاسخ پس‌کمانش یک تیر الاستیک با دو تکیه‌گاه ساده، تحت افزایش دمای غیریکنواخت را بررسی نمودند. آکباس و کواتورک [5] (Kocaturk Akbas and hyper) آنالیز غیرخطی یک تیر با دو تکیه‌گاه ساده، ساخته شده از مواد هایپر الاستیک (Finite element method) را توسط روش اجزای محدود (Vaz et al.) [6] حل پرتوربیشن (perturbation) رفتار پس‌کمانش اولیه یک تیر نازک با دو انتهای ثابت را ارائه نمودند.

در تحلیل کمانش حرارتی اغلب مطالعه دو کمیت در کانون توجه قرار می‌گیرد. در حالی که اغلب، شناخت بار بحرانی سازه دارای اهمیت است، در برخی موارد نیز میزان تغییرشکل پس‌کمانشی برای طراح اهمیت دارد. از آن‌جا که انتظار می‌رود تغییرشکل‌های پس‌کمانش مقادیر بزرگی داشته باشد، در تحلیل از تئوری تغییرشکل بزرگ (Large Deformation Theory) استفاده خواهد شد. این تئوری اولین بار

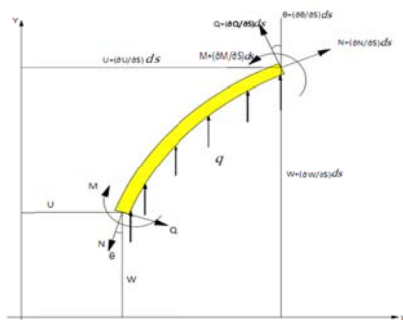
اعمال بار حرارتی در برخی از سازه‌ها اجتناب‌ناپذیر و در برخی دیگر تصادفی می‌باشد. برخی از سازه‌ها در طول دوره کاری، به دفعات تحت بارگذاری‌های حرارتی قرار می‌گیرند. تأثیر حرارت بر ساختار و عملکرد سازه‌هایی چون فضاپیماها، راکتورهای هسته‌ای و مبدل‌های حرارتی نمونه‌هایی از این نوع بارگذاری‌های حرارتی می‌باشند. از طرفی ممکن است بار حرارتی به‌طور تصادفی به یک سازه اعمال گردد. از این نمونه نیز می‌توان به آتش‌سوزی در ساختمان‌ها و تأسیسات شهری و صنعتی اشاره کرد. بدون در نظر گرفتن اثرات بار حرارتی، طراحی یک سازه، کامل و ایمن نخواهد بود. یک دسته از اعضای مهم در میان سازه‌ها، تیر-ستون‌ها می‌باشند که در بسیاری از موارد خود بخش بزرگی از تشکیلات یک ساختار مرکب را تشکیل می‌دهند. از مهم‌ترین آثار حرارت در تیر-ستون‌ها، وقوع پدیده کمانش حرارتی (Thermal buckling) می‌باشد. چنان‌چه سازه‌ای را که دچار کمانش حرارتی شده است کماکان قابل استفاده تشخیص دهیم، مطالعه رفتار دما-تغییر مکان در دوره پس از کمانش که از آن تعبیر به پس‌کمانش می‌شود، حائز اهمیت است. ریل‌ها، خطوط انتقال نفت یا ترموستات‌های دوفلزی از جمله مواردی هستند که مطالعه آثار پس‌کمانش حرارتی در رفتار مکانیکی آنها دارای اهمیت است.

هنگامی که بارهای اعمالی روی یک عضو، تغییرشکل‌های بزرگ ایجاد نماید، کاربرد روش‌هایی مانند نظریه تغییرشکل کوچک یا روش‌های خطی، مناسب نیست و طراحی براساس این تئوری‌ها، طراحی مناسبی نمی‌باشد. در این حالت لازم است برای طراحی و تحلیل از روش‌هایی چون نظریه تغییرشکل بزرگ ارتجاعی استفاده نمود. برای مطالعه پس‌کمانش حرارتی تیر-ستون‌ها به‌کمک نظریه تغییرشکل بزرگ تیرها آشنایی با سابقه این قبیل مطالعات یک گام

مدل‌سازی تغییرشکل بزرگ تیرها معرفی خواهد شد. سپس برای بررسی صحت و اعتبار این رویکرد، نتایج حاصل از تحلیل یک تیر دوسرگیردار تحت بار یکنواخت عرضی با نتایج حاصل از روش‌هایی چون تغییرشکل کوچک و تحلیل خطی و غیرخطی نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌شود. روند تحلیل برای هر یک از روش‌های ذکر شده به تفصیل بیان می‌گردد. در مرحله بعد روش تغییرشکل بزرگ برای تحلیل تأثیر بارهای حرارتی به کار خواهد رفت. برای این منظور یک تیر دوسر مفصل که به طور هم‌زمان تحت بار یکنواخت عرضی و افزایش دمای یکنواخت قرار دارد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این مورد نیز نتایج حاصل از روش تغییرشکل بزرگ، شبیه‌سازی رایانه‌ای و روش آزمایش تجربی با یکدیگر مقایسه می‌گردند تا میزان صحت روش تغییرشکل بزرگ در بارگذاری‌های حرارتی معلوم شود.

معادلات حاکم

به منظور حفظ انسجام مطالب، در این بخش فرمول‌بندی معادلات حاکم بر تغییرشکل بزرگ تیرها که از مرجع [14] اقتباس گردیده است، معرفی می‌شود. مطابق شکل (۱) یک المان از تیری با تغییرشکل بزرگ به صورت یک منحنی به طول ds در نظر گرفته می‌شود. در این تصویر u تغییر مکان تیر در راستای محور x و w تغییر مکان تیر در راستای محور y ، θ زاویه راستای تیر و محور y پس از تغییر شکل و θ_0 مقدار این زاویه پیش از تغییر شکل می‌باشد.



شکل ۱ المان منحنی شکل با طول ds

به طور گسترده توسط هاگز [7] (Hodges) برای تحلیل تغییرشکل رتور کشتی به کار گرفته شد. هاگز و هنانت (Hinnant and Hodges) [8] به بررسی و آنالیز نتایج تجربی حاصل از یک تیر تحت تغییرشکل بزرگ پرداختند. بخشی از آزمایشی که توسط آنان ترتیب داده شده بود شامل مطالعه یک تیر یک‌سرگیردار بود که به انتهای آن یک جرم متصل گردیده بود. آن‌ها با احتساب آثار تغییرشکل بزرگ و با استفاده از روش انرژی، شکل دقیق‌تری از تغییرشکل تیر را پیش‌بینی نمودند. مطالعه دیگری با این رویکرد توسط لوئیس و موناسا [9] (Monasa and Lewis) انجام شده است. آن‌ها اثرات غیرخطی را تنها در انحناهای تیر در نظر گرفتند و از معادله (۱) به شرح زیر برای معرفی رابطه میان انحنا و خیز در طول تیر استفاده کردند.

$$\kappa = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

از دیگر مطالعات بر روی تغییرشکل بزرگ تیرها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

ونگ [10] (Wang) به حل تعدادی مسائل تغییرشکل بزرگ تیر الاستیک خطی توسط روش پرتوریشن پرداخت. لوئیس و موناسا (Lewis and Monasa) [11] مسائل تغییرشکل بزرگ در تیرهای یکسر گیردار الاستیک غیرخطی را به روش عددی حل نمودند. بیونگ و دیگران [12] (Byoung et al.) با استفاده از روش رانج-کوتا (Raung-Kutta) به بررسی تغییرشکل بزرگ یک تیر الاستیک خطی با سطح مقطع متغیر پرداختند. بیکر [13] (Baker) منحنی ارتجاعی تغییرشکل بزرگ یک تیر الاستیک خطی با توزیع بار دل‌خواه را با استفاده از معادلات حاکم اولر برنولی یافت. این‌ها مواردی چند از مطالعات انجام شده در زمینه تغییرشکل بزرگ تیرها تحت بار مکانیکی بود که به طور نمونه بدان اشاره شد.

در این مقاله ابتدا یکی از نظریه‌های رایج

$$\eta \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} - \cos\theta \right) - \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2\theta}{ds^2} \sin\theta \right) + q = 0 \quad (11)$$

که $\eta = \frac{AL^2}{EI}$ می‌باشد. در این روابط A سطح مقطع تیر، L طول تیر و I گشتاور دوم سطح مقطع است. حل هم‌زمان معادلات حاکمه (۹-۱۱) با در نظر گرفتن شرایط مرزی موجود، منجر به یافتن w و θ در نقاط مختلف تیر می‌شود. معادله حاصل غیرخطی و غیرهمگن است. برای پاسخ‌یابی این معادله باید از روش‌های عددی کمک گرفت. یک روش موثر و دارای میزان دقت بالا، روش موسوم به اختلاف تریبعی یا (Differential Quadrature Method: DQM) [5] است. این روش در بخش بعد به اجمال معرفی می‌شود.

روش اختلاف تریبعی

روش اختلاف تریبعی یک روش برای مجزاسازی و حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. در این روش، مشتق تابع نسبت به یک متغیر توسط ترکیبی از مقادیر تابع در تعدادی نقطه خاص جایگزین می‌گردد. اگر n تعداد نقاط ویژه در دامنه مورد بررسی باشد، طبق قانون اختلاف تریبعی، مشتق مرتبه N یک تابع دل‌خواه مانند $f(x)$ در نقطه $x=x_i$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود [15]:

$$\frac{d^N f(x_i)}{dx^N} = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(N)} f(x_k) \quad i=1, \dots, n \quad (12)$$

در معادله فوق، در محدوده مورد بررسی مقادیر A_{ik} یعنی ضرایب وزن، به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$A_{ij}^1 = \frac{\prod(x_i)}{(x_i - x_j) \prod(x_i)} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \text{ and } i \neq j \quad (13)$$

$$A_{ij}^{(k)} = k \left[A_{ii}^{(k-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(k-1)}}{x_i - x_j} \right] \quad 2 \leq k \leq n-1 \quad (14)$$

$$A_{ii}^{(m)} = -\sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(m)} \quad m = 1, \dots, n-1 \quad (15)$$

شرایط تعادل استاتیکی برای این المان، دسته معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial}{\partial s} (N \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial s} (Q \cos\theta) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (N \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial s} (Q \sin\theta) + q = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} - Q = 0 \quad (4)$$

که در آن M گشتاور خمشی، N نیروی محوری، Q نیروی برشی می‌باشد. برای سهولت نسبت کشیدگی R به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \frac{N}{EA} + 1 \quad (5)$$

لذا با توجه به هندسه تغییرشکل داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = R \cos\theta \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = R \sin\theta \quad (7)$$

هم‌چنین با چشم‌پوشی از آثار نیروی برشی، رابطه گشتاور M و زاویه راستای تیر با محور قائم یعنی زاویه θ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$M = EI \frac{d\theta}{ds} \quad Q = EI \frac{d^2\theta}{ds^2} \quad (8)$$

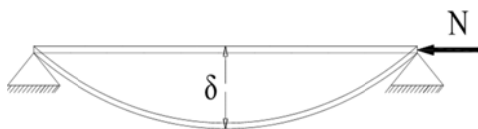
از مقایسه روابط (۶ و ۷)، یک معادله حاکمه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{du}{ds} = \frac{dw}{ds} \tan\theta \quad (9)$$

از ادغام روابط (۸ و ۹)، مقدار Q برحسب θ و از ادغام روابط (۵) با روابط (۶ و ۷) مقدار N به دست می‌آید. از قرار دادن این مقادیر در روابط (۲ و ۳) دو معادله حاکمه دیگر به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\eta \frac{d}{ds} \left(\frac{du}{ds} - \sin\theta \right) - \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2\theta}{ds^2} \cos\theta \right) = 0 \quad (10)$$

مطالعه با دیدگاه تغییرشکل کوچک. برای مطالعه از دیدگاه تغییرشکل کوچک مطابق شکل (۲) فرض می شود تیر دوسر مفصلی تحت افزایش دمای یکنواخت قرار گیرد. در این حالت ثابت بودن موقعیت تکیه گاهها موجب ایجاد نیروی محوری فشاری در تیر می گردد. مقدار این نیرو برابر است با $N = E \alpha A \Delta T$ که در این رابطه α ضریب انبساط حرارتی، A سطح مقطع، E ضریب ارتجاعی و ΔT افزایش دما می باشد. با افزایش دما، نیروی محوری مورد نظر نیز افزایش می یابد تا مقدار آن به میزان لازم برای کمانش برسد. طبق رابطه اولر برای بار بحرانی تیرها، در چنین تیری دمای لازم برای وقوع کمانش برابر $\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 I}{L^2 A \alpha}$ است که در آن L طول اولیه تیر و I گشتاور دوم سطح می باشد.



شکل ۲ کمانش تیر دو سر مفصل تحت اثر بار محوری

با افزایش دما به میزانی بالاتر از دمای بحرانی و به پیروی از آن، افزایش نیروی محوری تا بیش از نیروی بحرانی، شرایط پس کمانش ایجاد می شود. در این محدوده خیز تیر با دو رویکرد متفاوت تغییرشکل های کوچک و بزرگ بررسی می شود. طبق نظریه تغییرشکل کوچک در این حالت خیز تیر تحت بار عرضی از معادله زیر که با نام معادله تیر- ستون [14] شناخته می شود، پیروی می کند:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + N \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad (21)$$

که در آن w تغییر مکان تیر در راستای قائم، N بار محوری و F_y بار گسترده است. در حالت پس کمانش حرارتی یعنی زمانی که $\Delta T \geq \Delta T_{cr}$ باشد، در غیاب بار عرضی پاسخ معادله (۲۱) یعنی منحنی خیز تیر

که $\Pi(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)$ می باشد. در شکل ماتریسی می توان رابطه بازگشتی زیر را برای تعیین توابع وزن استفاده نمود.

$$[A^{(r)}] = [A^{(1)}][A^{(r-1)}] = [A^{(r-1)}][A^{(1)}] \quad (16)$$

نقاط ویژه ای که در روابط (۱۳ و ۱۲) با متغیر اندیسی x_i مشخص شده اند همان ریشه های چندجمله ای چبیشف-لوباتو (Chebychev- Lobatto) می باشند که از رابطه زیر به دست می آیند.

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2i-1}{2n} \pi \right) L \right] \quad (17)$$

$$i=2, \dots, n-1 \quad x_1=0 \quad x_n=L$$

با جایگزین نمودن مشتقات به روش اختلاف تریبیعی، معادلات (۹-۱۱) به صورت زیر تبدیل می گردد:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} U_k = \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} W_k \right) \tan \theta_i \quad (18)$$

$$\eta \left[\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} \left(\sum_{j=1}^n A_{kj}^{(1)} U_j - \sin \theta_k \right) - \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} \left(\sum_{j=1}^n A_{kj}^{(2)} \theta_j \right) \cos \theta_k \right] = 0 \quad (19)$$

$$\eta \left[\sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} \left(\sum_{j=1}^n A_{kj}^{(1)} W_j - \cos \theta_k \right) + \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(1)} \left(\sum_{j=1}^n A_{kj}^{(2)} \theta_j \right) \sin \theta_k \right] + q = 0 \quad (20)$$

که در آن، $i=2, \dots, n-1$ می باشد. اکنون با فرض آن که حل عددی معادلات به روش DQM بسط داده شود روند تحلیل کمانش حرارتی در تیرهای تحت افزایش دمای یکنواخت توسط تئوری تغییرشکل کوچک و تئوری تغیر شکل بزرگ معرفی می شود.

مدل سازی پدیده کمانش حرارتی

در این بخش با دو رویکرد متفاوت تغییرشکل کوچک و بزرگ مسأله کمانش حرارتی تیر- ستون ها بررسی می شود.

تکیه‌گاه تیر مانند شکل (۳) یک تکیه‌گاه غلتکی با قابلیت تغییر مکان افقی باشد. در این صورت اعمال یک تغییر مکان افقی موجب فشرده‌گی تیر و ایجاد آثار کمانشی مشابه عوارض ناشی از افزایش دما خواهد بود.

حال اگر مدل ریاضی مورد استفاده امکان ایجاد ارتباط میان میزان تغییر مکان تکیه‌گاه غلتکی و تغییر طول تیر را داشته باشد از آنجا که رابطه میان دما و تغییر طول تیر نیز ساده و به صورت رابطه زیر در دسترس است می‌توان رابطه میان دما و تغییر مکان افقی تکیه‌گاهی را به دست آورد.

$$\Delta s = L \alpha \Delta T \quad (25)$$

در رابطه (۲۵) Δs افزایش طول تیر، L طول اولیه، α ضریب انبساط حرارتی و ΔT افزایش دمای تیر است. در صورت در اختیار داشتن منحنی تغییر شکل تیر، یافتن میزان افزایش طول تیر با استفاده از رابطه (۲۲) میسر است. با داشتن مقدار Δs و با استفاده از معادله (۲۵) می‌توان دمای معادل را یافت. مدل ریاضی معرفی شده در روابط (۴-۲) و روش اختلاف تریبیعی معرفی شده در بخش قبل امکان محاسبه رابطه میان تغییر مکان تکیه‌گاه مفصلی (به عنوان یک شرط کرانی)، شکل تیر و به پیروی از آن محاسبه تغییر طول تیر را فراهم نموده است. بدین ترتیب با معادل قرار دادن تغییر طول ناشی از تغییر مکان مرز با تغییر طول قرینه ناشی از افزایش دما می‌توان مفهوم افزایش دما را جایگزین خیز مفصلی کرد و از روی آن عوارض ناشی از تأثیر دما بر شکل تیر را مطالعه نمود.

تحلیل به وسیله نرم افزار ABAQUS

در این مقاله به منظور بررسی صحت نتایج و اعتبارسنجی نتایج مدل تحلیلی ارائه شده هم‌زمان از دو

مانند شکل (۲) به صورت تابع سینوسی $w = \delta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ خواهد بود. در این حالت با احتساب افزایش طول ناشی از انبساط حرارتی، با توجه به الگوی تغییر شکل تیر، با قرار دادن $w = \delta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ در رابطه محاسبه طول یک منحنی، طول تیر به صورت زیر حاصل می‌گردد.

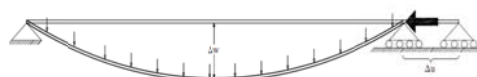
$$s = \int_0^L \sqrt{1 + w'^2} dx \quad (22)$$

$$= \int_0^L \sqrt{1 + \left[\frac{\delta \pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2} dx \quad (23)$$

که به کمک آن خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{2L}{\pi} \sqrt{\alpha \Delta T + \frac{(\alpha \Delta T)^2}{2}} \quad (24)$$

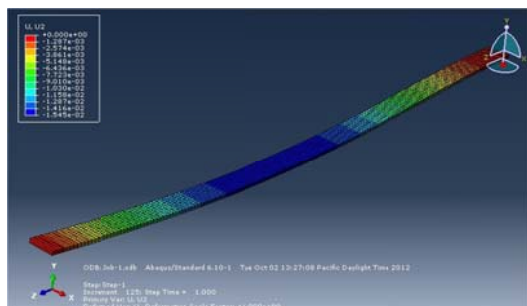
کمیت δ مقدار بیشینه خیز در میانه تیر را مشخص می‌کند. در یک مدل‌سازی مبتنی بر فرض تغییر شکل بزرگ استفاده از الگوی سینوسی برای منحنی پس‌کمانش تیر مصداق نخواهد داشت. در این مقاله روشی که در ادامه پیشنهاد شده است برای انجام این مدل‌سازی به کار رفته است.



شکل ۳ جایگزینی اثر افزایش دمای تیر دو سر مفصل توسط تغییر مکان تکیه‌گاه

مطالعه با دیدگاه تغییر شکل بزرگ. فرض می‌کنیم مطابق شکل (۲) تیری توسط دو تکیه‌گاه مفصلی با فاصله ثابت مهار شده باشد. در اثر افزایش دمای یکنواخت، طول تیر افزایش می‌یابد. در این حالت تیر خمیده می‌شود و په تکیه‌گاه‌ها نیرو وارد می‌کند. تکیه‌گاه‌ها نیز متقابلاً تیر را تحت فشار قرار می‌دهند. اکنون فرض می‌کنیم در غیاب تغییرات دما، یکی از دو

عمودی میانه تیر از ۳۰۰۰ مش به بعد ثابت شده است. بنابراین عدد ۳۰۰۰ تعداد مش بهینه را مشخص می‌کند. در این حالت مطابق شکل (۵) یک نمونه توزیع تغییر مکان در مش بندی بهینه ملاحظه می‌شود.



شکل ۵ نمونه تحلیل با مش بندی بهینه در نرم افزار آباکوس

نتایج

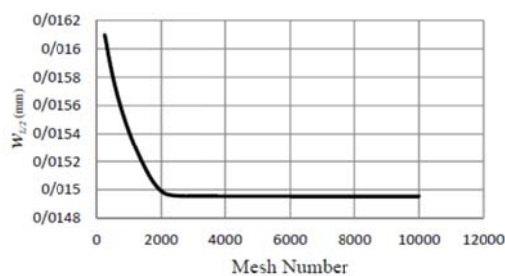
در این قسمت ابتدا به بررسی اعتبار روش تغییر شکل بزرگ پرداخته می‌شود. برای این منظور در غیاب تأثیر حرارت، نتایج حاصل از تحلیل تیر دوسرگیردار تحت بار گسترده به روش تغییر شکل بزرگ با نتایج حاصل از روش‌هایی چون تحلیل تغییر شکل کوچک و شبیه سازی خطی و غیرخطی توسط نرم افزار آباکوس مقایسه می‌گردد. در مرحله بعد، پس از کسب اطمینان از توانایی شیوه‌های تحلیلی به بیان نتایج حاصل از تحلیل تیر دو سر مفصل تحت بارگذاری ترکیبی حرارتی - مکانیکی با استفاده از روش‌های متفاوت پرداخته خواهد شد. بدین منظور یک تیر دوسرگیردار تحت بار گسترده عرضی q در نظر گرفته می‌شود. تغییر مکان عمودی w در نقاط مختلف تیر با خواص به شرح جدول (۲) برای بارهای $N=100$ و $q=1000$ با روش‌های متفاوت اندازه گیری و با یکدیگر مقایسه می‌شود.

روش آزمون تجربی و مدل سازی در نرم افزار ABAQUS استفاده گردیده است. المان مورد استفاده از نوع المان‌های solid است و خواص حرارتی آن مطابق جدول (۱) می‌باشد.

جدول ۱ خواص حرارتی فولاد [16]

ضریب انبساط طولی $(\frac{1}{^{\circ}C})$	ظرفیت گرمایی ویژه $(\frac{J}{kg.^{\circ}K})$	ضریب هدایت $(\frac{W}{m.^{\circ}K})$
$\alpha=11,7 \times 10^{-6}$	$C=447$	$K=80,2$

در تحلیل حرارتی از تئوری الاستیسیته خطی و غیرخطی استفاده شده است. در ارتباط با تحلیل نرم افزاری یکی از مسائل با اهمیت، یافتن تعداد مش بهینه برای تحلیل دقیق و مناسب می‌باشد. برای این منظور مقدار خیز ماکزیمم به ازای تعداد مش‌های مختلف محاسبه می‌شود. چنانچه با افزایش تعداد مش‌ها خیز محاسبه شده تغییر نکند تعداد مش مورد استفاده مناسب خواهد بود. در این تحقیق مقدار تغییر مکان عمودی در افزایش دمای $180^{\circ}C$ در مش بندی‌های مختلف به دست آمده و شکل (۴) رسم گردیده است.

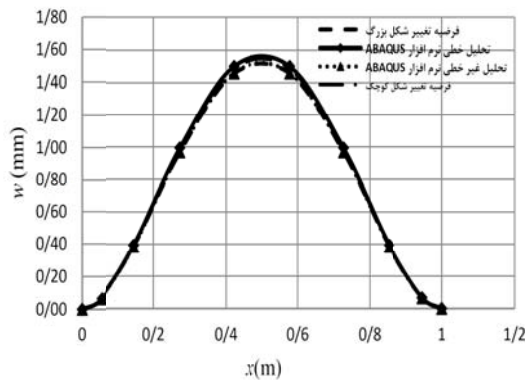


شکل ۴ تغییر مکان عمودی میانه تیر در مقابل تعداد مش به ازای افزایش دمای $180^{\circ}C$

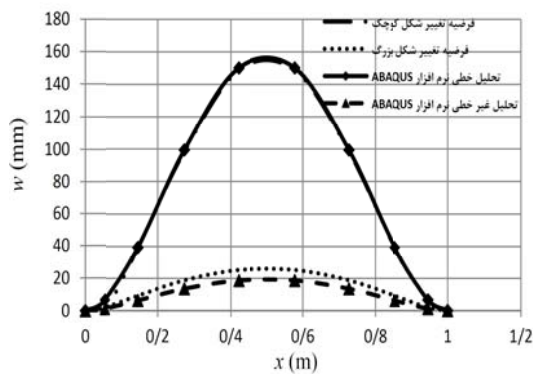
همان گونه که از نمودار پیداست مقادیر تغییر مکان

جدول ۲ خواص فیزیکی و مکانیکی تیر دوسر گیردار

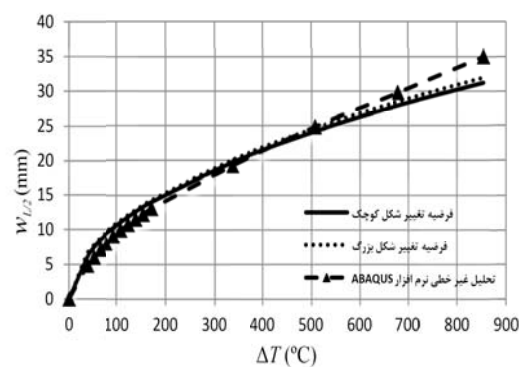
گشتاور اینرسی (m^4)	سطح مقطع (m^2)	طول (m)	مدول الاستیسیته (Pa)	ضریب پواسون	بار گسترده (N/m)
10^{-10}	10^{-4}	۱	200×10^9	$0,3$	۱۰۰ و ۱۰۰۰



شکل ۶ تغییر مکان عمودی (w) در نقاط مختلف طول تیر (x)، به‌ازای $q=100\text{N}$



شکل ۷ تغییر مکان عمودی (w) در نقاط مختلف طول تیر (x)، به‌ازای $q=10\text{kN}$



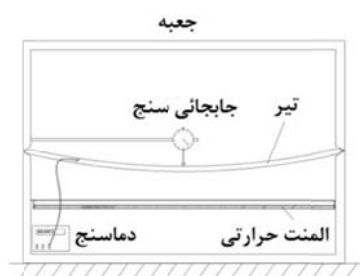
شکل ۸ تغییر مکان عمودی میانه تیر $w_{L/2}$ در اثر افزایش دما ΔT

در شکل (۸) تغییر مکان عمودی میانه تیر در اثر افزایش دمای یکنواخت یک تیر دوسر مفصل، حاصل از سه روش تغییر شکل کوچک، تغییر شکل بزرگ و

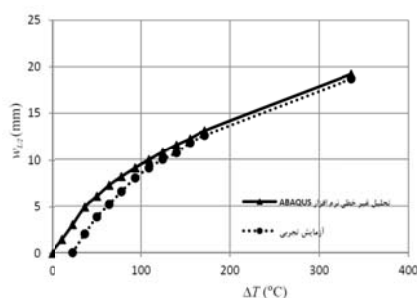
در شکل (۶) مقادیر تغییر مکان عمودی تیر w ، در نقاط مختلف آن در تئوری‌های تغییر شکل بزرگ، تغییر شکل کوچک، تحلیل خطی و غیرخطی نرم‌افزار آباکوس در بار $q=100\text{N}$ ارائه گردیده است. همان‌گونه که از نمودار مشخص است، به‌دلیل کوچک بودن مقدار بار جانبی، تغییر مکان حاصل از تمامی روش‌ها بسیار نزدیک به یکدیگر می‌باشد.

در شکل (۷) مقادیر تغییر مکان عمودی تیر در بار $q=10\text{kN}$ در نقاط مختلف و براساس تئوری‌های متفاوت مقایسه گردیده است. همان‌گونه که از این نمودار پیداست تغییر مکان عمودی در دو روش تغییر شکل کوچک و تحلیل خطی نرم‌افزار آباکوس دارای مقادیری شش مرتبه بزرگ‌تر از دو روش دیگر است. لازم به تأکید است که به‌طور معمول به‌دلیل اعمال قیود تحلیلی کمتر، تغییر مکان‌های حاصل از روش تغییر مکان کوچک، بیشتر از تغییر مکان‌های حاصل از روش تغییر مکان بزرگ هستند. این مقایسه حاکی از آن است که هر چند در بارهای کوچک اختلاف چندانی میان روش‌های مورد نظر مشاهده نمی‌شود، اما با افزایش میزان بار، اختلاف در جواب‌ها افزایش می‌یابد. از آن‌جا که دقت نتایج حاصل از روش‌های غیرخطی بیشتر است، این اختلاف شدید نشان‌دهنده عدم پاسخ‌گویی روش‌های خطی در تغییر شکل‌های بزرگ می‌باشد.

اکنون با به‌کارگیری روش‌هایی چون تحلیل تیرها بر پایه نظریه تغییر شکل کوچک و نظریه تغییر شکل بزرگ، شبیه‌سازی خطی و غیرخطی در محیط نرم‌افزار آباکوس و روش تجربی، نتایج حاصل از بارگذاری ترکیبی حرارتی و مکانیکی روی تیر دو سر مفصلی با مشخصات فیزیکی و مکانیکی مطابق جدول (۱) بررسی خواهد شد. نتایج به‌صورت مقادیر تغییر مکان عمودی وسط تیر $w_{L/2}$ ، در برابر افزایش دما ΔT ارائه شده است.



شکل ۹ مدل تیر دوسرمفصل در آزمایش تجربی

شکل ۱۰ تغییر مکان عمودی میانه تیر $W_{L/2}$ در اثر افزایش دما ΔT

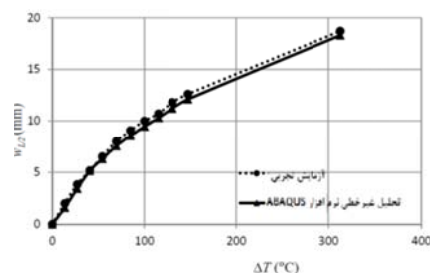
نمودار (۱۰) به مقایسه تغییر مکان عمودی میانه تیر دوسرمفصل در دو روش تحلیل غیرخطی نرم افزار آباکوس و آزمایش تجربی می پردازد. همان گونه که مشاهده می گردد ترسیمه مربوط به آزمایش تجربی از مبدأ مختصات نمی گذرد. در واقع شروع کمانش در این روش تقریباً از افزایش دمای معادل 24°C می باشد. دلیل این رخداد به اختلاف میان شرایط واقعی و نظری باز می گردد. در شرایط واقعی اتصال مفصلی دارای مقدار قابل ملاحظه ای لقی یا عدم انطباق است. در شروع آزمایش با افزایش دمای نمونه و همراه با آن افزایش طول تیر، تا زمان درگیر شدن تیر داخل قاب، امکان ایجاد نیروی داخلی در تیر، کمانش و بروز شرایط پس کمانش وجود ندارد. از این رو منحنی دما- تغییر مکان در شکل (۱۲) با تأخیر شروع شده است. برای مقایسه بهتر نتایج با وجودی که در تحلیل، اثر انبساط حرارتی قاب نیز لحاظ شده بود، لازم بود نمودار آزمایش تجربی به میزان 24°C به سمت چپ انتقال داده شود تا هر دو منحنی از یک مبدأ آغاز شده باشند. تنها در این صورت مقایسه نمودارهای تحلیلی و تجربی می توانست مفید و معنادار باشد.

تحلیل غیرخطی نرم افزار آباکوس ارائه شده است. همان گونه که از نمودار پیداست مقادیر تغییر مکان و روند تغییرات در سه روش بسیار نزدیک به هم می باشند.

به موازات اتخاذ رویکردهای متفاوت تحلیلی برای مدل سازی و محاسبه خیز جانبی پس کمانشی، برای اعتباربخشی به نتایج، تأثیر دما بر خیز جانبی به صورت تجربی نیز مطالعه شده است. اکنون روند تجربی آزمون کمانش حرارتی تیر-ستون مورد بررسی معرفی شده و نتایج حاصل از آن با تحلیل های نظری مقایسه می گردد.

در مدل تجربی، تیری با مشخصات فیزیکی معرفی شده در جدول (۱) در یک قاب چوبی با ضریب انبساط حرارتی $4.4 \mu\text{m}/^{\circ}\text{C}$ که مقدار آن در برابر ضریب انبساط حرارتی فولاد $11.7 \mu\text{m}/^{\circ}\text{C}$ کوچک است، قرار داده می شود. گرمایش تیر توسط المنت های حرارتی که در فاصله ای مناسب از تیر قرار گرفته است تأمین می گردد. به علت ضخامت کم تیر می توان فرض کرد که دمای تیر به طور یکنواخت در همه جوانب آن توزیع شده است. برای اندازه گیری دمای تیر از یک دماسنج دیجیتال استفاده شده است. کمیت مورد بررسی در این آزمایش تغییر مکان عمودی در وسط تیر است که برای اندازه گیری آن از ساعت اندازه گیری استفاده شده است. نمودار تجهیزات به کار رفته در آزمایش را می توان در شکل (۹) مشاهده کرد.

نکته مورد اهمیت در آزمایش این است که دمای قاب چوبی نیز به همراه دمای تیر بالا می رود. حال اگر این عامل در تحلیل نتایج در نظر گرفته نشود موجب خطا می گردد. لذا لازم است میزان تغییر دمای قاب در فرمول بندی وارد شود. برای این منظور با احتساب اثر دما در انبساط قاب چوبی، یک دمای معادل برای تیر فلزی به صورت $\Delta T_{\text{eq}} = \left(1 - \frac{\alpha_w}{2\alpha_s}\right) \Delta T_s$ به دست می آید.



شکل ۱۱ تغییر مکان عمودی میانه تیر $w_{L/2}$ در اثر افزایش دما ΔT

در شکل (۱۱) هر دو نمودار از مبدأ مختصات می‌گذرد. در این حالت ملاحظه می‌شود مقادیر تغییر مکان مربوط به روش آزمایش تجربی با نتایج حاصل از روش تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس دارای هم‌خوانی می‌باشد. اختلاف اندک بین دو نمودار که در حد متعارف آزمون‌های مکانیکی است به انحراف شرایط هندسی و مادی نمونه آزمون از شرایط فرضی مورد استفاده در تحلیل غیرخطی نرم‌افزار آباکوس وابسته است. در دو شکل (۱۰ و ۱۱) مقایسه نتایج تا افزایش دمای حدوداً 330°C انجام گرفته است. علت این امر وجود محدودیت در افزایش دمای تجهیزات مورد استفاده بوده است. در واقع در این روش به علت چوبی بودن قاب نگه‌دارنده، افزایش دما دارای محدودیت بوده است.

بر اساس نتایج حاصل از تحلیل‌های نظری و عملی ملاحظه می‌شود در تمام موارد نمودار خیز جانبی در مقابل دما دارای پیوستگی می‌باشد. درحقیقت هنگام کمانش طبق مدل نظری بایستی در دمای بحرانی یک پرش ناگهانی در خیز جانبی روی دهد. اما به طوری که در شکل (۸) ملاحظه می‌شود خیز جانبی طبق مدل‌های تغییر شکل کوچک، تغییر شکل بزرگ و تحلیل نرم‌افزاری، مشابه نتایج تجربی یک رابطه پیوسته با دما را از خود نشان می‌دهد. این رفتار با واقعیت رویداد پدیده کمانش هماهنگی دارد. درحقیقت هم‌چنان که در مراجعی مانند [16] نشان داده شده، هنگام کمانش به دلیل حضور خفیف عواملی از قبیل ناصافی ستون،

خارج از مرکزیت بار محوری یا وجود بار جانبی (مثلاً وزن تیر-ستون در شکل ۳)، کمانش به صورت ناگهانی روی نمی‌دهد بلکه به شکل یک رویداد تدریجی (با افزایش بار یا دما) ظاهر می‌شود. به‌طور مشابه در تحلیل عددی این اختلاف با شرایط ایده‌آل از طریق خطاهای عددی پاسخ را به شرایط واقعی نزدیک‌تر می‌نماید. بدین ترتیب ملاحظه می‌شود عوامل خطا در تحلیل محاسباتی و شیوه کاربرد نظریه‌های تغییر شکل کوچک و بزرگ برای تحلیل کمانش حرارتی، همگی در جهتی تأثیر می‌نمایند که مشابه روند واقعی، کمانش به صورت رویدادی تدریجی و پایدار ظاهر می‌شود. در حقیقت به دلیل بزرگ بودن کرنش‌های حرارتی در فلزات، برای هندسه مورد تحلیل دمای کمانش که از رابطه $\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 I}{L^2 A \alpha}$ حاصل می‌شود مقدار اندکی و برابر $3/37^{\circ}\text{C}$ به دست می‌آید. این نکته معرف آنست که شکل‌های (۸ و ۱۱) به‌طور عمده روند تغییر خیز جانبی پس از کمانش را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر اگر کمانش نوعی ناپایداری تلقی شود بایستی در خیزهای متناظر با دمای کمتر از این مقدار خیز جانبی هم‌چنان صفر در نظر گرفته شود. از سوی دیگر مقادیر عددی خیز در شکل‌های (۸ و ۱۱) حاکی از آن است که با وجود عبور دما از حد کمانش، خیز ایجاد شده مقدار اندکی است که قابل مقایسه با 500 میلی‌متر طول تیر نیست. به عبارت دیگر خیز جانبی به اندازه‌ای که بتوان کاربرد نظریه تغییر شکل بزرگ را موجه دانست، بزرگ نیست. این ویژگی نزدیکی نتایج حاصل از تحلیل بر پایه نظریه‌های کوچک و بزرگ را توجیه می‌نماید. در بخش بعد بر مبنای نتایج معرفی شده در این قسمت در مورد رویکرد مناسب تحلیل اظهار نظر می‌شود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله دو موضوع اصلی مورد بررسی قرار

می شود حتی در بیشترین دماها میزان خیز تنها کسر ناچیزی از طول تیر بوده است. به عبارت دیگر با فرض ثابت ماندن فاصله و نوع تکیه گاه ها، کماتش حرارتی به طور ذاتی موجب تغییر شکل کوچک می شود. بدین سبب جای تعجب نخواهد بود که مدل های تغییر شکل بزرگ و کوچک هم سان رفتار نموده اند.

فهرست علائم

A	سطح مقطع
C	گرمای ویژه
E	مدول الاستیسیته
I	گشتاور اینرسی
K	ضریب رسانش حرارتی
L	طول اولیه تیر
M	گشتاور خمشی
N	بار محوری
N_{cr}	بار بحرانی کماتش
q	بار گسترده
Q	نیروی برشی
R	نسبت کشیدگی محوری
s	طول نهایی تیر
T	دما
T_0	دمای اولیه
T_{cr}	دمای بحرانی کماتش
T_{eq}	دمای معادل
T_s	دمای معادل تیر
u	تغییر مکان افقی
w	تغییر مکان عمودی
$w_{L/2}$	تغییر مکان عمودی وسط تیر
X	فاصله از ابتدای تیر در حالت اولیه
\bar{X}	فاصله از ابتدای تیر در حالت تغییر شکل یافته x
α	ضریب انبساط حرارتی
α_s	ضریب انبساط حرارتی فولاد
α_w	ضریب انبساط حرارتی چوب
δ	تغییر مکان عمودی وسط تیر

گرفت. در ابتدا به بیان تئوری تغییر شکل بزرگ و اعتبارسنجی این نظریه در تحلیل تیرهای تحت بارگذاری مکانیکی پرداخته شد. اعتبارسنجی روش بسط داده شده بر مبنای نظریه تغییر شکل بزرگ از طریق مقایسه نتایج کاربرد آن در تحلیل تیر دوسر گیردار تحت بار گسترده عرضی با نتایج حاصل از روش هایی چون تغییر شکل کوچک و تحلیل خطی و غیرخطی نرم افزار آباکوس انجام گرفت. همان گونه که مشاهده گردید نزدیکی نتایج حاصل میان رویکردهای مختلف نشان دهنده معتبر بودن روش تغییر شکل بزرگ و حصول دقتی نزدیک به تحلیل غیرخطی نرم افزار آباکوس بوده است. قابل توجه است که تحلیل غیرخطی نرم افزار آباکوس مبتنی بر دیدگاه تغییر شکل بزرگ الاستیسیته می باشد که در میان تئوری های تحلیلی از دقت بیشتری برخوردار است. مرحله اول یعنی اعتبارسنجی تئوری تغییر شکل بزرگ تیر در بارگذاری مکانیکی مقدمه ای بود برای مرحله اصلی که بررسی اعتبار روش تغییر شکل بزرگ در تحلیل پس کماتش حرارتی تیرها می باشد. بدین منظور تیری با دو تکیه گاه مفصلی ثابت، تحت بار گسترده عرضی و افزایش دمای یکنواخت مورد تحلیل قرار گرفت. روش های بررسی شامل روش تغییر شکل کوچک، روش تحلیل خطی و غیرخطی نرم افزار آباکوس و روش آزمایش تجربی بوده است. نتایج حاصل از روش های مختلف با یکدیگر مقایسه گردید تا اعتبار روش تغییر شکل بزرگ در تحلیل های حرارتی نیز معلوم گردد. مقایسه نتایج نشان داد که روش های تغییر شکل بزرگ، تحلیل غیرخطی آباکوس و تغییر شکل کوچک در تحلیل کماتش حرارتی دارای دقت مشابه با یکدیگر می باشند. ملاحظه می شود برای محاسبه خیز کماتش در یک محدوده گسترده از تغییرات دما، اگرچه روش تغییر شکل کوچک بسیار ساده تر و کوتاه تر از دو روش تغییر شکل بزرگ و تحلیل غیرخطی نرم افزار آباکوس می باشد ولی دقتی مشابه با این دو روش دارد. در واقع ریشه این رفتار به مقدار تغییر شکل های حرارتی باز می گردد. به طوری که از نمودارهای (۱۱ و ۸) ملاحظه

	زاویه بردار عمود بر سطح مقطع تیر و محور عمود	Δ	عملگر تفاضلی
θ_0	پیش از تغییر شکل	η	ضریب سطح مقطع بی‌بعد
κ	انحنای تیر		زاویه بردار عمود بر سطح مقطع تیر و محور عمود
ν	ضریب پواسون	θ	پس از تغییر شکل
σ	تنش		

مراجع

1. Raju, K.K. and Rao, G.V., "Thermal post-buckling of thin simply supported orthotropic square plate", *Computers and Structures*, Vol. 12, pp. 149-154, (1989).
2. Raju, K.K. and Rao, G.V., "Finite element analysis of thermal post-buckling of tapered columns", *Computers and Structures*, Vol. 19(4), pp. 617-620, (1984).
3. Gauss, R.C. and Antman, S.S., "Large thermal buckling of non-uniform beam and plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20(11), pp. 979-1000, (1984).
4. Li, S.R., Cheng, C.J. and Zhou, Y.H., "Thermal post-buckling of an elastic beam subjected to a transversely non-uniform temperature rising", *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)*, Vol. 24(5), pp. 514-520, (2003).
5. Kocaturk, T. and Akbas, S.D., "Post-buckling analysis of a simply supported beam under uniform thermal loading", *Scientific Research and Essays*, Vol. 6(4), pp. 1135-1142, (2011).
6. Vaz, M.A., Cyrino, J.C.R. and Neves, A.C., "Initial thermo-mechanical post-buckling of beams with temperature-dependent physical properties", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45(3), pp. 256-262, (2010).
7. Hodges, D.H., "Proper definition of curvature in nonlinear beam kinematics", *AIAA Journal*, Vol. 22, pp. 1825-1827, (1984).
8. Hinnant, H.E. and Hodges, D.H., "Nonlinear analysis of a cantilever beam", *AIAA Journal*, Vol. 26, pp. 1421-1727, (1988).
9. Monasa, F. and Lewis G. "Large deflections of cantilever beams of nonlinear materials", *International Journal of Computers and Structures*, Vol. 14(5), pp. 357-360, (1981).
10. Wang, C.Y., "Large deflection of an inclined cantilever with an end load", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 16(2), pp. 155-164, (1981).
11. Lewis, G. and Monasa, F., "Large deflection of cantilever beam of non-linear materials of the Ludwick type subjected to an end moment", *Journal of Non-Linear Mechanics*, 17(1), pp. 1-6, (1982).
12. Byoung, K.L., Wilson, J.F. and Oh, S.J., "Elastica of cantilevered beams with variable cross sections", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 28(5), pp. 579-589, (1993).
13. Baker, G., "On the large deflection of non-prismatic cantilevers with a finite depth", *Computers and Structures*, Vol. 46(2), pp. 365-370, (1993).
14. Saha, G. and Banu, S., "Buckling load of a beam-column for different end conditions using multi-segment integration technique", *ARP Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 2, pp. 27-33, (2007).
15. Hu, Y.J., Yang, J. and Kitipornchai, S., "Pull-in analysis of electrostatically actuated curved microbeams with large deformation", *Smart Material and Structures*, Vol. 19, pp. 1-9, (2010).
16. Beer, F.P., Johnston, E.R. and DeWolf, J.T., "Strength of Materials, 3rd Edition", McGraw Hill, USA, (2002).