

تحلیل ارتعاشات آزاد تیر هدفمند دوار باریک‌شونده دو طرفه با استفاده از تئوری اولر-برنولی و روش تبدیل دیفرانسیلی*

فرزاد ابراهیمی^(۱)سمانه دشتی^(۲)

چکیده در این مقاله ارتعاشات آزاد تیر هدفمند دوار باریک‌شونده دو طرفه بررسی شده است. تحلیل ارتعاشات تیر با استفاده از تئوری اولر-برنولی انجام شده است. فرض می‌شود خواص تیر در راستای ضخامت آن با استفاده از تابع توانی تغییر می‌کند. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپایون استخراج شده است. فرکانس‌های طبیعی تیر با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی به دست آمده و اثر ضرایب باریک‌شوندگی، پارامترهای بی‌بعد سرعت دورانی، شعاع هاب و شاخص جزء حجمی بر فرکانس طبیعی تیر مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل در قالب چندین جدول و شکل ارائه شده و برای صحت‌سنجی، با نتایج کارهای گذشته مقایسه شده است. مقایسه انجام‌شده نشان‌دهنده این واقعیت است که فرکانس‌های طبیعی تیر اولر-برنولی دوار باریک‌شونده دو طرفه ساخته شده از مواد هدفمند با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی با دقت بالایی حاصل می‌شود. به علاوه نتایج حاصل نشان می‌دهد پارامترهای سرعت دورانی، ضریب باریک‌شوندگی ارتعاشی و شاخص جزء حجمی اثر مهمی بر فرکانس طبیعی این‌گونه تیرها دارند. اثر پارامتر شعاع هاب و ضریب باریک‌شوندگی عرضی نیز قابل چشم‌پوشی می‌باشد.

واژه های کلیدی ارتعاشات آزاد، مواد هدفمند، روش تبدیل دیفرانسیلی، تیر اولر-برنولی باریک‌شونده.

Free Vibration Analysis of Functionally Graded Rotating Double Tapered Beam by using Euler-bernoulli Beam Theory and Differential Transform Method

F. Ebrahimi

S. Dashti

Abstract In this study, the free vibration analysis of a functionally graded rotating double tapered beam is performed. The analysis is based on Euler-Bernoulli beam theory. The Material properties of the beam vary continuously in the thickness direction according to the power-law function. The governing differential equation of motion is derived using the Hamilton's principle. Natural frequencies are obtained using differential transformation (DTM) technique. The effects of the taper ratios, nondimensional rotational speed, nondimensional hub radius and material volume fraction index on the natural frequencies are discussed. Numerical results are tabulated in several tables and figures. To verify the present analysis, the results of this study are compared with the available results from the existing literature. It is shown that the natural frequencies of a functionally graded rotating double tapered Euler-Bernoulli beam can be obtained with high accuracy by using DTM. It was observed that nondimensional rotational speed, height taper ratio and power-law exponent significantly affect the natural frequency. The effects of hub radius and breadth taper ratio on the natural frequencies are negligible.

Key Words Free vibration, Functionally Graded material, Differential Transform Method, Tapered Euler- Bernoulli beam.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۲/۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۱۰/۲۲ می‌باشد.

(۱) نویسنده مسئول: استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره). febrahimi@ikiu.eng.ac.ir

(۲) دانشجوی کارشناسی مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره).

مقدمه

کامپوزیت‌های لایه‌ای به علت مزایای قابل توجه، کاربرد وسیعی در سازه‌های عمرانی مکانیکی و فضایی دارند. با این وجود مجزا بودن لایه‌های مختلف سبب می‌شود در سطح تماس این لایه‌ها شاهد تغییرات ناگهانی در خواص مواد و پیامدهای نامطلوب آن همانند ایجاد ترک یا جدایی لایه‌ها باشیم. برای مقابله با این نقصان دسته‌ای از کامپوزیت‌ها به نام «مواد هدفمند» (Functionally graded materials) مورد استفاده قرار می‌گیرند. ایده مواد هدفمند برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ در ژاپن مطرح شد. در این مواد یا سازه‌های ساخته شده از این مواد، خواص ماده نسبت به مکان به صورتی تغییر می‌کند که کل سازه خواص مطلوب را داشته باشد. نوع متداول مواد هدفمند به صورت کامپوزیتی از فلز در ماتریسی از سرامیک می‌باشد. چنین ماده‌ای می‌تواند وظایف ظاهراً ناسازگاری هم چون مقاومت حرارتی و خوردگی بسیار بالای سرامیک‌ها از یک سو و استحکام، سفتی و قابلیت ماشین‌کاری بالای فلزات از سوی دیگر را بدون ایجاد نایکنواختی و یا تمرکز تنش به صورت یک جا دارا باشد. در مواد هدفمند، تغییرات پیوسته مواد و خواص آن می‌تواند در یک جهت یا در تمامی جهات باشد اما معمولاً برای سادگی تغییرات در یک جهت معین فرض می‌شود. گذار از یک ماده به ماده دیگر معمولاً با استفاده از یک سری توانی بیان می‌شود. به دلیل وجود چنین خواصی مواد هدفمند در بخش‌های گوناگون مهندسی هم چون صنایع فضایی، هوایی، دفاع، بیوپزشکی و ساخت اتومبیل‌ها به کار رفته‌اند و اخیراً در ابزارهای مورد استفاده در فرآیندهای گداخت هسته‌ای همانند راکتورهای هسته‌ای نیز به کار گرفته شده‌اند. به دلیل توسعه استفاده از این مواد در دهه اخیر، تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌های ساخته شده از مواد هدفمند مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. بررسی پیشینه پژوهش در مورد مواد هدفمند

نشان می‌دهد که بیشتر پژوهش‌های انجام شده در این زمینه مربوط به صفحات و پوسته‌ها است و تحقیقات کمتری در زمینه تیرهای ساخته شده از این مواد صورت گرفته است. اسنیکر [1] تحلیل الاستیسیته را برای تیرهای اولر-برنولی ساخته شده از مواد هدفمند که در معرض بار عرضی استاتیکی قرار دارند با فرض این که مدول یانگ در ضخامت تیر به صورت نمایی تغییر می‌کند به دست آورد. سیمسک [2] تحلیل استاتیکی تیرهای هدفمند را تحت توزیع بار یکنواخت با روش ریتز به دست آورد. ایشان در این بررسی تغییرات خواص مواد را در ضخامت تیر به صورت توانی در نظر گرفت و تأثیر این تغییرات را در جابه‌جایی و تنش تیر نشان داد. یادقود و تسکین [3] ارتعاشات آزاد یک تیر ساخته شده از مواد هدفمند دارای تکیه‌گاه ساده را با استفاده از تئوری اولر-برنولی و تئوری‌های تغییرشکل برشی مراتب بالا بررسی کردند و در این مطالعه تغییرات مدول یانگ را در ضخامت تیر به صورت نمایی و توانی در نظر گرفتند و فرکانس طبیعی و شکل مدهای مربوط به این تیر را با ضرایب لاغری متفاوت به دست آوردند. سیمسک [4] ارتعاشات غیرخطی تیر تیموشنکو ساخته شده از مواد هدفمند را که تحت اثر بار محرک هارمونیک قرار دارد بررسی کرد. او در این مطالعه تغییرات خواص مواد را در ضخامت تیر به صورت توانی در نظر گرفت و اثر جابه‌جایی‌های بزرگ، تغییر خواص مواد، سرعت جرم متحرک و فرکانس تحریک را روی جابه‌جایی تیر، ممان خمشی و تنش آن آزمود. ایشان هم چنین [5] فرکانس‌های اولیه تیرهای هدفمند را با استفاده از تئوری‌های مراتب بالا به دست آورد. سینا و همکاران [6] برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند از یک تئوری جدید که با تئوری سنتی تیرها (تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول) متفاوت است استفاده کردند. آن‌ها معادلات حاکم بر حرکت را

مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک با استفاده از روش المان محدود به دست آوردند. بازونه و همکاران [16] ویژگی‌های تیرهای تیموشنکوی باریک‌شونده دوار را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند. هونگ و همکاران [17] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی ساخته شده از مواد هدفمند محوری با سطح مقطع غیریکنواخت را مورد مطالعه قرار دادند.

روش تبدیل دیفرانسیلی (Differential transform method) که روشی مبتنی بر بسط سری تیلور است یکی از ابزارهای ریاضیاتی کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. این روش ابتدا در سال ۱۹۸۶ توسط زوو [18] در مسائل مهندسی مطرح شد و برای حل مسائل مقدار اولیه خطی و غیرخطی در تحلیل مدارهای الکتریکی به کار رفت. استفاده از این روش برای تحلیل ارتعاشات تیرها در تحقیقات زیر مشاهده شد.

ملیک و دنگ [19] این روش را در تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای اولر-برنولی به کار بردند. بررسی ویژگی‌های دینامیکی تیرهای باریک‌شونده دوار همانند فرکانس‌های طبیعی اهمیت ویژه‌ای در طراحی‌های مهندسی شامل ماشین‌های دوار، پره‌های هلیکوپتر و بازوهای مکانیکی ربات دارد، در نتیجه تحلیل تیرهای باریک‌شونده دوار مورد توجه زیادی قرار گرفته است. ازدمیرو کایا [20] فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر دوار باریک‌شونده اولر-برنولی را با روش تبدیل دیفرانسیلی به دست آوردند. کایا و ازگوموس [21] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی چرخان باریک‌شونده دو طرفه را با روش تبدیل دیفرانسیلی مورد بررسی قرار دادند. بانرژئی [22] ارتعاشات آزاد تیرهای با سطح مقطع یکنواخت و نیز باریک‌شونده را تحت نیروی گریز از مرکز و با استفاده از روش ماتریس سفتی مطالعه کرد. عطارانژاد و شهبها [23] روش تبدیل دیفرانسیلی را در تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای اولر-برنولی دوار غیرمنشوری به کار بردند. پایون و سمپایو

با استفاده اصل همیلتون استخراج کردند و اثر شرایط مرزی، جزء حجمی و تغییرشکل برشی را بر فرکانس طبیعی تیر بررسی نمودند. لی [7] یک رویکرد جدید را برای بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی تیرهای اولر-برنولی و تیموشنکو ساخته شده از مواد هدفمند معرفی کرد. سیمسک و کوکاترک [8] ویژگی‌های ارتعاشات آزاد و اجباری تیر اولر-برنولی هدفمند را تحت بارگذاری هارمونیک متحرک مورد بررسی قرار دادند. الشربگی و همکاران [9] از روش المان محدود برای تعیین مشخصات ارتعاشات آزاد تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند محوری (Axially FG beams) استفاده کرد. زونگ و یو [10] حل تحلیلی یک تیر یک سرگیردار ساخته شده از مواد هدفمند را با تغییرات دلخواه در توزیع خواص ماده مبنی بر تئوری الاستیسیته دوبعدی به دست آوردند. اخیراً دانشمهر و همکاران [11] ارتعاشات تیر اولر-برنولی ساخته شده از مواد هدفمند را که تحت بارگذاری عرضی قرار دارد بررسی کردند. کادولی و همکاران [12] رفتار استاتیکی تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌بالا و روش اجزای محدود مورد مطالعه قرار دادند. مطالعات پیشین روی تیرهای یکپارچه صورت گرفت. تیرهای غیرمنشوری به دلیل محاسن خود از نظر زیبایی، مقاومت و بهینه‌سازی وزن سازه دارای کاربردهای فراوانی در مهندسی می‌باشند. اثر باریک‌شوندگی بر فرکانس طبیعی تیر در مطالعات زیر مورد بررسی قرار گرفته است:

بازونه [13] اثر باریک‌شوندگی را بر فرکانس طبیعی تیرهای باریک‌شونده دوار بررسی کرد. زنگ و برت [14] ارتعاشات میله‌های باریک‌شونده (Tapered) را با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی بررسی کردند. شهبها و همکاران [15] ارتعاشات آزاد و تحلیل پایداری تیر باریک‌شونده تیموشنکو ساخته شده از مواد هدفمند با تغییر خواص در راستای محوری را تحت شرایط

باد، پروانه کشتی و هواپیماها دارند. گاهی در صنعت با مواردی مواجه می‌شویم که قسمت‌های گوناگون سازه باید بارگذاری و شرایط متفاوتی را تحمل کنند برای مثال بخشی از سازه باید سهم بالایی از شوک حرارتی را تحمل نماید. در این گونه موارد استفاده از مواد هدفمند در طراحی تیرهای باریک‌شونده دوار بسیار سودمند است. با توجه به این‌که در زمینه تیرهای هدفمند غیرمنشوری مطالعات انجام شده دارای محدودیت می‌باشد، مطالعه اخیر روی تیرهای هدفمند دوار باریک‌شونده دوطرفه و با استفاده از تئوری اولر-برنولی انجام شده است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده است. در مقالات پیشین برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرها از روش‌های تحلیلی و عددی استفاده شده است. در این میان به هنگام استفاده از روش‌هایی هم‌چون روش المان محدود نیازمند گسسته‌سازی سیستم می‌باشیم. علاوه بر این در اعمال روش‌های تقریبی همانند روش ریتز و گلرکین گاهی نمی‌توان تمامی مقادیر ویژه و تابع‌های ویژه را محاسبه کرد. روش سنتی حل مسائل توسط سری تیلور نیز نیازمند محاسبات نمادین می‌باشد و زمان زیادی را برای حل مسائل صرف می‌کند. علاوه بر این حل معادلات مرتبه بالا با استفاده از این روش دشوار می‌باشد. روش تبدیل دیفرانسیلی که در این مقاله به کار گرفته شده است، روشی نیمه‌تحلیلی مبتنی بر سری تیلور می‌باشد که توانسته است بر تمامی مشکلات ذکر شده غلبه نماید. این روش بدون نیاز به خطی‌سازی و گسسته‌سازی به معادلات دیفرانسیل جزئی اعمال می‌شود و آن را به مجموعه‌ای از معادلات جبری تبدیل می‌کند. این روش حجم محاسبات را تا حد زیادی کاهش می‌دهد و پاسخ را با دقت و سرعت هم‌گرایی بالا به دست می‌آورد. بدین ترتیب با استفاده از این روش فرکانس‌های طبیعی تیر مورد بررسی به دست آمده است. اثر پارامترهای مختلفی هم‌چون شعاع هاب η ، سرعت دورانی Ω ، ضرایب باریک‌شوندگی عرضی و

[24] ویژگی‌های دینامیکی تیرهای چرخان ساخته شده از مواد هدفمند را بررسی کردند. شهبا و راجاسکران [25] ارتعاشات آزاد و پایداری تیرهای اولر-برنولی باریک‌شونده ساخته شده از مواد هدفمند را که در آنها تغییرات خواص مواد در راستای محور تیر می‌باشد، با روش تبدیل دیفرانسیلی تحلیل کردند. در سال‌های اخیر راجاسکران [26] ارتعاشات آزاد تیر دوار باریک‌شونده ساخته شده از مواد هدفمند محوری را با استفاده از تئوری تیموشنکو و روش تبدیل دیفرانسیلی بررسی کرد و نشان داد این روش در تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای باریک‌شونده روشی کارآمد می‌باشد. سادونگ و همکاران [27] پاسخ ارتعاشی تیرهای دارای قیود الاستیکی را که از مواد هدفمند با توزیع توانی ساخته شده‌اند و در سطح مقطع خود دارای پله می‌باشند با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی به دست آوردند. نگویان و گان [28] تغییر شکل خمشی تیر باریک‌شونده ساخته شده از مواد هدفمند را که دارای بارگذاری در انتها می‌باشد و تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت تیر توسط تابع توانی بیان می‌شود، به دست آوردند. انگویان [29] پاسخ تیر یک‌سر گیردار باریک‌شونده ساخته شده از مواد هدفمند محوری را به جابه‌جایی بزرگ با استفاده از روش المان محدود به دست آورد و اثر ضرایب باریک‌شوندگی و نسبت لاغری را بر پاسخ تیر بررسی کرد. پرادهان و چاکراورتی [30] ارتعاشات آزاد تیرهای اولر-برنولی و تیموشنکوی ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از روش ریلی-ریتز بررسی کردند. هم‌چنین ایشان [31] اثر تئوری‌های تغییر شکل برشی را بر فرکانس طبیعی تیر با استفاده از روش ریلی-ریتز بررسی کردند.

همان‌گونه که ذکر شد تیرهای باریک‌شونده به دلیل داشتن محاسنی هم‌چون زیبایی و بهینه‌سازی وزن سازه همراه با داشتن استحکام مناسب کاربردهای فراوانی در سازه‌های مکانیکی و عمرانی همانند پره‌های توربین

یانگ E ، چگالی ρ ، ضریب پواسن ν و مدول برشی G به صورت پیوسته در راستای ضخامت تیر تغییر می‌کند. با استفاده از قاعده اختلاط، خواص مؤثر ماده P_f به صورت زیر بیان می‌شود.

$$P_f = P_c V_c + P_m V_m \quad (1)$$

در این معادله P_c ، P_m ، V_c و V_m ، خواص مؤثر و کسر حجمی سرامیک و فلز هستند که به صورت رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$V_c + V_m = 1 \quad (2)$$

رابطه کسر حجمی سرامیک به صورت زیر است:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (3)$$

n شاخص جزء حجمی و متغیری نامنفی است و پروفیل تغییرات ماده در ضخامت تیر را نشان می‌دهد که از طریق آزمایش به دست می‌آید. با توجه به روابط (۱-۳) خواص مؤثر ماده هدفمند به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$P_f(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + P_m \quad (4)$$

مطابق رابطه (۴) زمانی که $z = -h/2$:

$$E = E_m, \nu = \nu_m, G = G_m, \rho = \rho_m$$

زمانی که $z = h/2$:

$$E = E_c, \nu = \nu_c, G = G_c, \rho = \rho_c$$

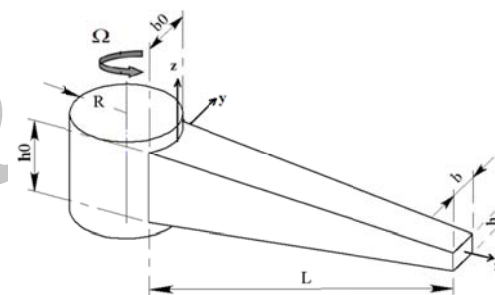
به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت

همان‌گونه که ذکر شد مطابق شکل (۱) در دستگاه

ارتفاعی α ، β و شاخص جزء حجمی n بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر بررسی شده است. نتایج حاصل با نتایج کارهای گذشته مقایسه شده و تطابق قابل قبولی حاصل شده است.

مواد هدفمند

مطابق شکل (۱) تیر یک سرگردار ساخته شده از ماده هدفمند با طول L در نقطه O بر روی یک طوقه (hub) دوار به شعاع R سوار شده است. طوقه با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محور خود دوران می‌کند. ضخامت تیر از مقدار h_0 در ابتدا تا h در سر آزاد و عرض تیر از مقدار b_0 تا b به صورت خطی باریک می‌شود.



شکل ۱ مدل فرض شده برای قرارگیری دستگاه مختصات روی تیر

در دستگاه مختصات راستگرد کارتزین محور x منطبق بر صفحه میانی تیر، محور z در جهت ضخامت تیر و موازی با محور دوران (منطبق بر آن نمی‌باشد) و محور y در جهت عرض در نظر گرفته شده است. فرضیات مورد استفاده به قرار زیر است:

- مقاطع تیر قبیل از خمش و پس از آن صفحه و عمود بر محور خشی باقی می‌مانند.
- تیر از مواد هدفمند به صورت ترکیبی از سرامیک و فلز ساخته شده و تغییرات خواص در راستای ضخامت (محور z) است و برای تعیین نحوه تغییرات از مدل توانی استفاده شده است.
- خواص مؤثر ماده تشکیل دهنده تیر همانند مدول

$$B = \int_A \rho(z) dA \quad (9)$$

با استفاده از اصل همپلتون داریم:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (10)$$

در این رابطه δ نماد تغییرات می باشد. با جایگذاری معادلات (۸ و ۵) در معادله (۱۰) و انتگرال گیری از آن معادله حاکم بر تیر به دست می آید.

$$B \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial w}{\partial x} \right) = Pw \quad (11)$$

Pw نیروی اعمالی در واحد طول تیر است و در این مطالعه چون ارتعاشات آزاد مورد بررسی قرار می گیرد مقدار آن صفر در نظر گرفته می شود. شرایط مرزی مورد استفاده در تحلیل تیر اولر- برنولی یک سرگیردار به صورت زیر است.

$$x = 0, w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$x = L, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (13)$$

با فرض نوسان هارمونیک ساده برای تیر w به صورت زیر نوشته می شود.

$$w(x, t) = \bar{w}(x) e^{i\omega t} \quad (14)$$

با جای گذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۱۱) به معادله زیر خواهیم رسید.

$$-\omega^2 B \bar{w} + \frac{d^2}{dx^2} \left(A \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(F \frac{d\bar{w}}{dx} \right) = 0 \quad (15)$$

مختصات راستگرد کارتیزین محور x منطبق بر صفحه میانی تیر، محور z در جهت ضخامت تیر و موازی با محور دوران (منطبق بر آن نمی باشد) و محور y در جهت عرض در نظر گرفته شده است. مطابق این فرضیات انرژی جنبشی و انرژی کرنش با استفاده از فرض هدگس و داول [32] قابل محاسبه است. براساس این فرض، به دلیل غالب بودن ϵ_{xx} بر ϵ_{yy} و ϵ_{zz} در محاسبه انرژی کرنش از ترم های ϵ_{yy} و ϵ_{zz} صرف نظر می شود. به علاوه به دلیل نادیده گرفتن اثر برش در تئوری اولر- برنولی از کرنش های برشی نیز صرف نظر می شود و بدین ترتیب انرژی کرنش به صورت زیر محاسبه می شود:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} A W^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} F(x) W^2 dx \quad (5)$$

در این رابطه w نشان دهنده جابه جایی عرضی تیر، علامت ' نشانگر دیفرانسیل بر حسب x و $F(x)$ نیز نیروی گریز از مرکز در فاصله x از پایه تیر می باشد. در معادله (۵) A نشان دهنده صلیبیت خمشی تیر است و به صورت زیر تعریف می شود

$$A = \int_A E(z) z^2 dA \quad (6)$$

نیروی گریز از مرکز به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$F(x) = \int_x^L B \Omega^2 (R + x) dx \quad (7)$$

بدین ترتیب انرژی سیستیک تیر به صورت زیر محاسبه می شود.

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} B \dot{W}^2 dx \quad (8)$$

در رابطه بالا B اینرسی نرمال تیر است و به صورت زیر تعریف می شوند.

$$F(\xi) = B\Omega^2 L^2 \left[\frac{\alpha\beta}{4} + \gamma - \frac{1}{2}(\alpha\gamma + \beta\gamma - 1) - \frac{1}{3}(\alpha + \beta - \alpha\beta\gamma) - \xi\gamma + \frac{\xi^2}{2}(\alpha\gamma + \beta\gamma - 1) + \frac{\xi^3}{3}(\alpha + \beta - \alpha\beta\gamma) - \frac{\xi^4}{4}\alpha\beta \right] \quad (21)$$

با جای گذاری پارامترهای بی بعد و معادله (۲۱) در معادله (۱۵) معادله حرکت بی بعد زیر به دست می آید.

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[(1 - \alpha\xi)(1 - \beta\xi)^3 \frac{d^2 \tilde{w}}{d\xi^2} \right] - \mu^2 (1 - \alpha\xi)(1 - \beta\xi) \tilde{w} - \eta^2 \frac{d}{d\xi} \left\{ \left[\frac{\alpha\beta}{4} (1 - \xi^4) + \gamma(1 - \xi) + \frac{1}{2}(1 - \alpha\gamma - \beta\gamma)(1 - \xi^2) + \frac{1}{3}(-\alpha - \beta + \alpha\beta\gamma)(1 - \xi^3) \right] \frac{d\tilde{w}}{d\xi} \right\} = 0 \quad (22)$$

به کارگیری روش تبدیل دیفرانسیلی. به سبب مزایای ذکر شده برای روش تبدیل دیفرانسیلی با استفاده از اصول این روش که در جدول (۱) آمده است، معادلات حاکم و شرایط مرزی را به یک دستگاه جبری از معادلات کاهش می دهیم و به ترتیب زیر حل می کنیم. تبدیل دیفرانسیلی تابع $y(x)$ به صورت رابطه زیر تعریف می شود [33].

$$Y[k] = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} \quad (23)$$

تبدیل دیفرانسیلی معکوس $Y[k]$ نیز به صورت زیر تعریف می شود.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n Y[n] \quad (24)$$

که در روابط بالا $y(x)$ تابع اصلی و $Y[k]$ تابع تبدیل یافته است. با استفاده از روابط (۲۳ و ۲۴) داریم:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} \quad (25)$$

معادلات تیر باریک شونده و پارامترهای بی بعد. معادلات کلی برای تغییرات ارتفاع $h(x)$ عرض $b(x)$ مساحت $A(x)$ و ممان اینرسی سطح $I(x)$ که به صورت خطی بین دو صفحه تغییر می کند به صورت زیر می باشد.

$$b(x) = b_0 \left(1 - \alpha \frac{x}{L} \right)^m \quad (الف-۱۶)$$

$$h(x) = h_0 \left(1 - \beta \frac{x}{L} \right)^s \quad (ب-۱۶)$$

$$A(x) = A_0 \left(1 - \alpha \frac{x}{L} \right)^m \left(1 - \beta \frac{x}{L} \right)^s \quad (الف-۱۷)$$

$$I_y(x) = I_{y0} \left(1 - \alpha \frac{x}{L} \right)^m \left(1 - \beta \frac{x}{L} \right)^{3s} \quad (ب-۱۷)$$

در روابط بالا α ضریب باریک شوندگی عرضی و β ضریب باریک شوندگی ارتفاعی می باشد. مقادیر m و s به نوع باریک شوندگی تیر بستگی دارد در این مقاله برای مدل کردن باریک شوندگی خطی $m=1$ و $s=1$ در نظر گرفته شده است. زیر نویس (۰) مقادیر را در ابتدای تیر نشان می دهد بدین ترتیب:

$$A_0 = b_0 h_0 \quad (18)$$

$$I_{y0} = \frac{b_0 h_0^3}{12} \quad (19)$$

برای مقایسه نتایج مقاله حاضر با مراجع موجود از پارامترهای بی بعد که به صورت زیر تعریف می شوند استفاده می کنیم.

$$\gamma = \frac{R}{L}, \xi = \frac{x}{L}, \tilde{w} = \frac{\bar{w}}{L}, \eta^2 = \frac{BL^4 \Omega^2}{A}, \mu^2 = \frac{BL^4 \omega^2}{A} \quad (20)$$

در رابطه بالا γ پارامتر بی بعد شعاع هاب، ξ پارامتر بی بعد فاصله، η پارامتر بی بعد سرعت دورانی تیر، \tilde{w} پارامتر بی بعد تغییر شکل عرضی و μ پارامتر بی بعد فرکانس طبیعی تیر هستند. با جای گذاری معادلات (۱۶-۲۰) در معادله (۶) نیروی گریز از مرکز به صورت زیر به دست می آید.

جدول ۱ روابط اساسی روش تبدیل ديفرانسیلی

مطابق مرجع [33]

تابع تبدیل یافته	تابع اصلی
$Y[k] = \lambda \Phi[k]$	$y(x) = \lambda \varphi(x)$
$Y[k] = \Phi[k] \pm \theta[k]$	$y(x) = \varphi(x) \pm \theta(x)$
$Y[k] = (k+1)\Phi[k+1]$	$y(x) = \frac{d\varphi}{dx}$
$Y[k] = (k+1)(k+2)\Phi[k+2]$	$y(x) = \frac{d^2\varphi}{dx^2}$
$Y[k] = \sum_{l=0}^k \Phi[l]\theta[k-l]$	$y(x) = \varphi(x)\theta(x)$
$Y[k] = \delta[k-m] = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$	$y(x) = x^m$

اصول روش تبدیل ديفرانسیلی شرایط مرزی برای $x=0$ با استفاده از معادله (۲۳) و برای $x=1$ با استفاده از معادله (۲۵) به دست آمده است.

$$\xi = 0, \quad W[0]=W[1]=0 \quad (27)$$

$$\xi = 1, \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)W[k] = 0; \quad \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)W[k] = 0 \quad (28)$$

جدول ۲ روابط اساسی تبدیل ديفرانسیلی شرایط مرزی مطابق

مرجع [33]

X=1		X=0	
شرایط مرزی تبدیل یافته	شرایط مرزی اصلی	شرایط مرزی تبدیل یافته	شرایط مرزی اصلی
$\sum_{k=0}^{\infty} F[k] = 0$	$f(1)=0$	$F[0]=0$	$f(0)=0$
$\sum_{k=0}^{\infty} kF[k] = 0$	$\frac{df}{dx}(1) = 0$	$F[1]=0$	$\frac{df}{dx}(0) = 0$
$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F[k] = 0$	$\frac{d^2f}{dx^2}(1) = 0$	$F[2]=0$	$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 0$
$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F[k] = 0$	$\frac{d^3f}{dx^3}(1) = 0$	$F[3]=0$	$\frac{d^3f}{dx^3}(0) = 0$

در روابط (۲۶-۲۸) $W[k]$ فرم تبدیل یافته $W(\xi)$ می باشد و با استفاده از معادله (۲۶) مقادیر $W[k]$ برای $k = 4, 5, \dots$ به دست می آید. در واقع با جایگذاری مقادیر مختلف برای k در رابطه (۲۶) می توانیم مقادیر $W[k]$ را به دست آوریم. برای مثال با فرض مقادیر $n=0/5, \gamma=0, L/h=5, \eta=4$ مقادیر $W[k]$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} W[2] &= c_1 \\ W[3] &= c_2 \\ W[4] &= \frac{2d_2}{3} - \frac{4\alpha d_2}{9} + \frac{\alpha d_3}{2} - \frac{4\beta d_2}{9} + \frac{3\beta d_3}{2} - \frac{\beta^2 d_2}{2} - \frac{\alpha\beta d_2}{6} \end{aligned}$$

رابطه (۲۵) نشان دهنده این است که مفهوم تبدیل ديفرانسیلی از بسط سری تیلور استخراج شده است. در جدول (۱) روابط اصلی روش تبدیل ديفرانسیلی آمده است. با استفاده از جدول (۱) تبدیل ديفرانسیلی معادله (۲۲) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\alpha\beta}{4}(k+1)(k-2)\eta^2 - \alpha\beta\mu^2 \right] W[k-2] + \\ & \left[\frac{1}{3}(-\alpha - \beta + \alpha\beta\gamma)\eta^2(k-1)(k+1) + (\alpha + \beta)\mu^2 \right] W[k-1] + \left[\alpha\beta^3(k-1)k(k+1)(k+2) + \frac{1}{2}(-\alpha\gamma - \beta\gamma + 1)k(k+1)\eta^2 - \mu^2 \right] W[k] + [-\beta^2(3\alpha + \beta)(k+2)(k+1)^2k + (k+1)^2\gamma\eta^2] W[k+1] + \left\{ 3\beta(\alpha + \beta)(k+1)^2(k+2)^2 + \eta^2(k+1)(k+2) \left[\frac{1}{2}(-1 + \alpha\gamma + \beta\gamma) + \frac{1}{3}(\alpha + \beta - \beta\alpha\gamma) - \left(\frac{1}{4}\alpha\beta + \gamma \right) \right] \right\} W[k+2] - [(k+1)(k+2)^2(k+3)(\alpha + 3\beta)]W[k+3] + (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)W[k+4] = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

در روابط بالا $W(k)$ فرم تبدیل یافته $W(\xi)$ هستند. با استفاده از جدول (۲) تبدیل ديفرانسیلی شرایط مرزی هم به صورت زیر به دست می آید. لازم به ذکر است که شرایط مرزی تبدیل یافته در جدول (۲) طبق

تحلیل نتایج

در این بخش اثر پارامترهای مختلف، ضرایب باریک‌شوندگی α و β ، شاخص جزء حجمی n ، سرعت دورانی η و شعاع هاب γ بر فرکانس‌های طبیعی تیر بررسی شده، نتایج به‌دست آمده در قالب چندین جدول و شکل نشان داده شده است و برای صحت‌سنجی نتایج، نتایج حاصل از این بررسی با مقالات موجود مقایسه شده و تطبیق خوبی به‌دست آمده است. تیر مورد بررسی از آلومینیوم و آلومینا ساخته شده است. سطح بالایی سرامیک خالص و سطح پایینی فلز خالص می‌باشد و خواص آن در راستای عرض تیر (محور z) و بر طبق مدل توانی تغییر می‌کند. مشخصات مواد سازنده تیر مورد بررسی در این مقاله در جدول‌های شماره (۴ و ۳) ارائه شده است.

جدول ۳ خواص مواد سازنده

خواص	واحد	آلومینیوم (Al)	آلومینا (Al_2O_3)
E	GPa	۷۰	۳۸۰
ρ	Kg/m ³	۲۷۰۲	۳۹۶۰
ν	-	۰/۳	۰/۳

جدول ۴ خواص مواد مطابق مرجع [31]

خواص	واحد	آلومینیوم (Al)	آلومینا (Al_2O_3)
E	GPa	۷۰	۳۸۰
ρ	Kg/m ³	۲۷۰۰	۳۸۰۰
ν	-	۰/۲۳	۰/۲۳

در این مقاله پس از به‌دست آوردن فرکانس طبیعی تیر برای بی‌بعد کردن آن از رابطه زیر استفاده می‌شود. در رابطه زیر λ فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌باشد.

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (33)$$

در معادلات بالا $W[2]$ و $W[3]$ را به ترتیب برابر مقادیر ثابت c_1 ، c_2 فرض می‌کنیم. به همین ترتیب سایر مقادیر $W[k]$ برحسب c_1 و c_2 قابل محاسبه است. سپس مقادیر $W[k]$ را در معادلات شرایط مرزی (۲۷ و ۲۸) جایگزین می‌کنیم بدین ترتیب معادله‌ای به فرم زیر حاصل می‌شود.

$$M_{j1}^{(n)} c_1 + M_{j2}^{(n)} c_2 = 0, j = 1, 2, 3, n \quad (29)$$

چند جمله‌ای‌هایی برحسب ω معادل $M_{j1}^{(n)}$ و $M_{j2}^{(n)}$ n ام هستند. فرم ماتریسی معادله (۲۹) به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} M_{11}^{(n)} & M_{12}^{(n)} \\ M_{21}^{(n)} & M_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (30)$$

بنابراین مقادیر ویژه و در واقع فرکانس‌های طبیعی تیر با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} M_{11}^{(n)} & M_{12}^{(n)} \\ M_{21}^{(n)} & M_{22}^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

با حل معادله (۳۱)، مقادیر $\omega_i^{(n)}$ به‌دست می‌آیند که نشان‌دهنده فرکانس طبیعی n ام می‌باشد که در تکرار n ام به‌دست می‌آید. تعداد تکرار با توجه به رابطه زیر و مقدار ε مشخص می‌شود.

$$|\omega_i^{(n)} - \omega_i^{(n-1)}| < \varepsilon \quad (32)$$

بدین ترتیب که اگر اختلاف مقدار ω به‌دست آمده در دو مقدار k که نشان‌دهنده دو تکرار می‌باشد، از مقدار ε کوچک‌تر باشد آن مقدار ω به‌عنوان فرکانس طبیعی انتخاب می‌شود. در این مقاله $\varepsilon = 0/0001$ در نظر گرفته شده است که نشان می‌دهد دقت محاسبات ۴ رقم اعشار می‌باشد. بدین ترتیب مقادیر فرکانس‌های طبیعی تیر با استفاده از نرم‌افزار MATLAB و با رعایت الگوریتم تبدیل دیفرانسیلی به‌دست آمده است.

می‌شود. از بررسی جدول (۵) و شکل (۲) مشهود است که برای تحلیل ارتعاشات تیرهای هدفمند دوار باریک‌شونده روش تبدیل دیفرانسیلی روشی کارآمد و دارای سرعت هم‌گرایی بالا می‌باشد، علاوه بر این با توجه به بررسی‌های انجام شده سرعت هم‌گرایی به ضرایب باریک‌شوندگی و سرعت دورانی تیر وابسته است و با افزایش این پارامترها کاهش می‌یابد.

در جدول (۵) هم‌گرایی روش تبدیل دیفرانسیلی برای فرکانس‌های بابت اول تا چهارم تیر در حالتی که $\alpha=0.2, \beta=0.2, \eta=6, \gamma=0, n=0$ می‌باشد آمده است. لازم به ذکر است ضریب L/h نسبت طول به ارتفاع تیر می‌باشد. هم‌گرایی فرکانس طبیعی دوم در شکل (۲) نیز بررسی شده است. با توجه به جدول (۵) فرکانس طبیعی اول در تکرار ۳۶ فرکانس دوم در تکرار ۳۸ فرکانس سوم و چهارم در تکرار ۳۹ هم‌گرا

جدول ۵ بررسی هم‌گرایی فرکانس‌های بابت اول تا چهارم تیر دوار

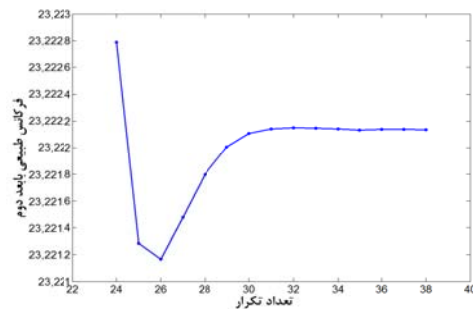
$$(L/h=5, \eta=6, \gamma=0, n=0, \beta=0.2, \alpha=0.2)$$

k	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
۲۴	۶۸۷۴/۵۹۹۸	۲۳۲۲۲/۷۸۷۶	۵۵۵۴۸/۲۱۴۲	-
۲۵	۶۸۷۴/۴۸۵۱	۲۳۲۲۱/۲۸۶۷	۵۵۵۴۹/۷۵۶۴	-
۲۶	۶۸۷۴/۴۶۸۱	۲۳۲۲۱/۱۶۵۷	۵۵۵۵۰/۱۱۴۶	-
۲۷	۶۸۷۴/۴۸۴۱	۲۳۲۲۱/۴۷۶۲	۵۵۵۴۹/۸۳۶۷	-
۲۸	۶۸۷۴/۵۱۱۹	۲۳۲۲۱/۷۹۸۴	۵۵۵۴۹/۵۲۴۸	-
۲۹	۶۸۷۴/۵۲۹۹	۲۳۲۲۲/۰۰۵۹	۵۵۵۴۹/۳۲۳۰	-
۳۰	۶۸۷۴/۵۳۸۸	۲۳۲۲۲/۱۰۶۷	۵۵۵۴۹/۲۱۷۱	-
۳۱	۶۸۷۴/۵۴۲۲	۲۳۲۲۲/۱۴۳۰	۵۵۵۴۹/۱۷۴۲	۱۰۳۷۸۶/۴۵۳۵
۳۲	۶۸۷۴/۵۴۲۹	۲۳۲۲۲/۱۴۹۷	۵۵۵۴۹/۱۶۲۴	۱۰۳۷۸۸/۴۳۸۱
۳۳	۶۸۷۴/۵۴۲۷	۲۳۲۲۲/۱۴۶۷	۵۵۵۴۹/۱۶۲۲	۱۰۳۷۸۸/۱۹۱۷
۳۴	۶۸۷۴/۵۴۲۴	۲۳۲۲۲/۱۴۲۷	۵۵۵۴۹/۱۶۴۶	۱۰۳۷۸۸/۰۹۶۴
۳۵	۶۸۷۴/۵۴۲۲	۲۳۲۲۲/۱۳۴۰	۵۵۵۴۹/۱۶۶۷	۱۰۳۷۸۸/۱۲۰۷
۳۶	۶۸۷۴/۵۴۲۰	۲۳۲۲۲/۱۳۸۶	۵۵۵۴۹/۱۶۷۹	۱۰۳۷۸۸/۱۳۰۴
۳۷	۶۸۷۴/۵۴۲۰	۲۳۲۲۲/۱۳۸۱	۵۵۵۴۹/۱۶۸۴	۱۰۳۷۸۸/۱۳۱۸
۳۸	۶۸۷۴/۵۴۲۰	۲۳۲۲۲/۱۳۷۹	۵۵۵۴۹/۱۶۸۶	۱۰۳۷۸۸/۱۳۲۴
۳۹	۶۸۷۴/۵۴۲۰	۲۳۲۲۲/۱۳۷۹	۵۵۵۴۹/۱۶۸۷	۱۰۳۷۸۸/۱۳۲۷

جدول ۷ مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد تیر یک سر گیردار مدرج

تابعی دوار ($L/h=20, \eta=0, \beta=0, \alpha=0$)

n	مقاله حاضر	مرجع [5]	مرجع [31]	اختلاف (%)
0	۱/۹۵۳۴	۱/۹۵۲۴۸	۱/۹۵۲۵	۰/۰۴
۰/۲	۱/۸۳۲۲	۱/۸۱۷۱۴	۱/۸۱۷۱	۰/۸
۰/۵	۱/۷۲۴۷	۱/۶۶۲۶۵	۱/۶۶۴۴	۳/۵۹
فلز کامل	۱/۰۲۱۴	۱/۰۱۴۴۹	-	۰/۶



شکل ۲ بررسی همگرایی فرکانس طبیعی دوم تیر باریک شونده دو طرفه دوار

تغییرات فرکانس‌های بی بعد اول تا سوم تیر هدفمند باریک شونده دو طرفه دوار با استفاده از تئوری اولر- برنولی در حالتی که $L/h=5, \eta=2, \gamma=0, \alpha=1, \beta=0$ می باشد، برحسب ترکیب مختلفی از ضرایب باریک شونده در جدول (۸) و شکل‌های (۴ و ۳) بررسی شده است. از بررسی داده‌های جدول (۸) مشهود است زمانی که ضریب باریک شونده عرضی و ارتفاعی (β و α) را افزایش می دهیم با توجه به این که این پارامتر باید از یک کوچک تر باشد، فرکانس طبیعی اول افزایش می یابد. برای مثال در حالتی که $\beta=0/2$ با افزایش α از ۰ به ۰/۶ شاهد ۲۲/۶٪ افزایش در فرکانس طبیعی خواهیم بود و در حالتی که $\alpha=0/2$ و β از ۰ به ۰/۶ افزایش می یابد فرکانس طبیعی ۹/۴۹٪ افزایش می یابد. شکل (۳- الف) مؤید این نتیجه می باشد. علاوه بر آن در فرکانس طبیعی اول افزایش ضریب باریک شونده عرضی (α) در مقایسه با افزایش ضریب باریک شونده ارتفاعی (β) اثر بیشتری بر فرکانس طبیعی تیر دارد. فرکانس دوم و سوم با افزایش ضریب باریک شونده عرضی افزایش می یابند اما در مقابل با افزایش ضریب باریک شونده ارتفاعی کاهش می یابند. برای بررسی این روند در فرکانس طبیعی سوم در حالتی که $\beta=0/4$ با افزایش α از ۰ به ۰/۶ شاهد ۳/۳۷٪ افزایش در فرکانس طبیعی خواهیم بود و در حالتی که $\alpha=0/4$ و β از ۰ به ۰/۶

صحیح گذاری نتایج. مقایسه نتایج به دست آمده با استفاده از روش نیمه تحلیلی تبدیل دیفرانسیلی با دو مرجع [5, 31] در جدول‌های (۷ و ۶) نشان دهنده انطباق قابل قبول این تحقیق با مقالات موجود است. برای مقایسه با مرجع [31] در جدول (۶) خواص مواد و درصد اختلاف به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\left(\frac{\text{مقاله حاضر} - \text{مقاله مرجع}}{\text{مقاله حاضر}} \right) \times 100 = \text{درصد اختلاف}$$

برای مقایسه با مرجع [31] در جدول (۶) پس از به دست آمدن فرکانس طبیعی آن را با استفاده از رابطه زیر بی بعد می کنیم.

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{I_1}{\int_{-h/2}^{h/2} E dz}}, \quad I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (34)$$

مقایسه‌های انجام شده در جدول (۷) با استفاده از خواص مواد در جدول (۳) و رابطه بی بعدکننده (۳۳) انجام شده است.

جدول ۶ مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد تیر یک سر گیردار دوار

($L/h=100, \eta=0, \beta=0, \alpha=0, n=0/3$)

مقاله حاضر	مرجع [31]	اختلاف (%)
۰/۹۹۳	۰/۹۷۷	۱/۶۱

این پارامتر در فرکانس‌های بالا قابل چشم پوشی است. شکل (۴) نیز نشان‌دهنده آن است که تغییرات ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی در فرکانس‌های بالاتر اثر بیشتری بر فرکانس طبیعی خواهد داشت. پارامترهای دیگری که بر فرکانس طبیعی اثر می‌گذارند، پارامترهای سرعت دورانی (η) و شاخص جزء حجمی (n) می‌باشند.

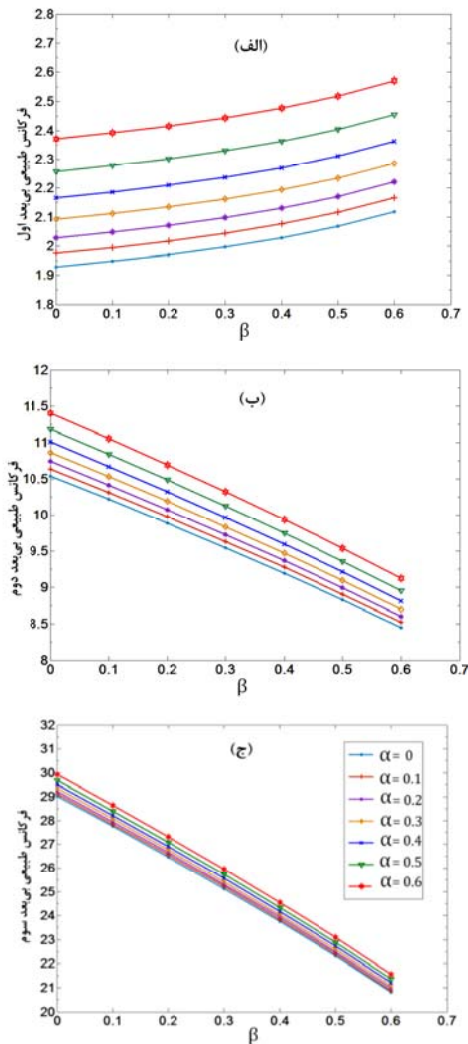
افزایش می‌یابد فرکانس طبیعی ۲۸/۱٪ کاهش می‌یابد. از بررسی شکل‌های (۳-ب و ج) نیز مشهود است حساسیت فرکانس دوم و سوم به ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی بیشتر است. بررسی کلی شکل‌های (۳-الف-ج) نشان می‌دهد در فرکانس‌های بالاتر تغییر ضریب باریک‌شوندگی عرضی اثر چندانی بر فرکانس طبیعی نخواهد داشت و به تعبیر دیگر اثر

جدول ۸. بررسی اثر ضرایب باریک‌شوندگی بر فرکانس‌های بی‌بعد اول تا سوم تیر ($\eta=2, h=5, n=1, \gamma=0$)

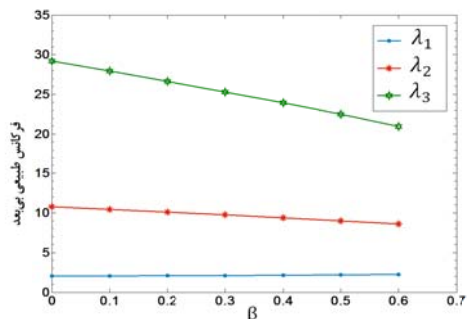
α							β	
۰/۶	۰/۵	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۰		
۲/۳۷۱۷	۲/۲۵۷۹	۲/۱۶۶۸	۲/۰۹۱۸	۲/۰۲۸۹	۱/۹۷۵۱	۱/۹۲۸۵	λ_1	۰
۱۱/۴۰۷۰	۱۱/۱۸۶۰	۱۱/۰۱۰۸	۱۰/۸۶۶۰	۱۰/۷۴۲۹	۱۰/۶۳۶۰	۱۰/۵۴۱۵	λ_2	
۲۹/۹۲۱۳	۲۹/۶۷۷۲	۲۹/۴۹۲۰	۲۹/۳۴۴۳	۲۹/۲۲۲۰	۲۹/۱۱۷۹	۲۹/۰۲۷۴	λ_3	
۲/۳۹۲۲	۲/۲۷۸۱	۲/۱۸۶۸	۲/۱۱۱۷	۲/۰۴۸۶	۱/۹۹۴۷	۱/۹۴۸۰	λ_1	۰/۱
۱۱/۰۵۵۹	۱۰/۸۴۲۳	۱۰/۶۷۲۹	۱۰/۵۳۳۱	۱۰/۴۱۴۳	۱۰/۳۱۱۱	۱۰/۲۱۹۹	λ_2	
۲۸/۶۳۵۱	۲۸/۳۹۸۲	۲۸/۲۱۷۹	۲۸/۰۷۳۷	۲۷/۹۵۴۰	۲۷/۸۵۱۹	۲۷/۷۶۲۹	λ_3	
۲/۴۱۵۹	۲/۳۰۱۶	۲/۲۱۰۱	۲/۱۳۴۸	۲/۰۷۱۵	۲/۰۱۷۴	۱/۹۷۰۵	λ_1	۰/۲
۱۰/۶۹۵۰	۱۰/۴۸۸۸	۱۰/۳۲۵۴	۱۰/۱۹۰۷	۱۰/۰۷۶۲	۹/۹۷۶۸	۹/۸۸۹۰	λ_2	
۲۷/۳۱۵۴	۲۷/۰۸۵۹	۲۶/۹۱۰۸	۲۶/۷۷۰۲	۲۶/۶۵۳۲	۲۶/۵۵۳۲	۲۶/۴۶۵۸	λ_3	
۲/۴۴۳۹	۲/۳۲۹۳	۲/۲۳۷۵	۲/۱۶۱۹	۲/۰۹۸۵	۲/۰۴۴۲	۱/۹۹۷۱	λ_1	۰/۳
۱۰/۳۲۳۰	۱۰/۱۲۴۳	۹/۹۶۷۱	۹/۸۳۷۴	۹/۷۲۷۳	۹/۶۳۱۸	۹/۵۴۷۴	λ_2	
۲۵/۹۵۶۵	۲۵/۷۳۴۷	۲۵/۵۶۴۹	۲۵/۴۲۸۲	۲۵/۳۱۴۱	۲۵/۲۱۶۳	۲۵/۱۳۰۸	λ_3	
۲/۴۷۷۵	۲/۳۶۲۵	۲/۲۷۰۴	۲/۱۹۴۶	۲/۱۳۰۸	۲/۰۷۶۳	۲/۰۲۸۹	λ_1	۰/۴
۹/۹۳۸۵	۹/۷۴۷۵	۹/۵۹۶۵	۹/۴۷۲۱	۹/۳۶۶۴	۹/۲۷۴۸	۹/۱۹۳۹	λ_2	
۲۴/۵۵۰۷	۲۴/۳۳۷۰	۲۴/۱۷۲۸	۲۴/۰۴۰۲	۲۳/۹۲۹۲	۲۳/۸۳۳۹	۲۳/۷۵۰۳	λ_3	
۲/۵۱۹۰	۲/۴۰۳۶	۲/۳۱۱۱	۲/۲۳۴۸	۲/۱۷۰۷	۲/۱۱۵۸	۲/۰۶۸۱	λ_1	۰/۵
۹/۵۴۰۰	۹/۳۵۶۸	۹/۲۱۲۱	۹/۰۹۳۰	۸/۹۹۱۹	۸/۹۰۴۳	۸/۸۲۶۹	λ_2	
۲۳/۰۸۷۸	۲۲/۸۸۲۶	۲۲/۷۲۴۳	۲۲/۵۹۶۱	۲۲/۴۸۸۵	۲۲/۳۹۵۸	۲۲/۳۱۴۴	λ_3	
۲/۵۷۱۷	۲/۴۵۵۷	۲/۳۶۲۷	۲/۲۸۶۰	۲/۲۲۱۴	۲/۱۶۶۰	۲/۱۱۷۹	λ_1	۰/۶
۹/۱۲۶۱	۸/۹۵۰۹	۸/۸۱۲۷	۸/۶۹۸۹	۸/۶۰۲۵	۸/۵۱۸۹	۸/۴۴۵۲	λ_2	
۲۱/۵۵۳۲	۲۱/۳۵۷۰	۲۱/۲۰۵۰	۲۱/۰۸۱۵	۲۰/۹۷۷۶	۲۰/۸۸۷۹	۲۰/۸۰۹۰	λ_3	

در جدول (۹) و شکل‌های (۶ و ۵) نحوه تغییر فرکانس‌های بی‌بعد اول تا چهارم برحسب تغییرات این دو پارامتر در حالتی که $(\alpha=0/1, \beta=0/1, \gamma=0)$ ، نشان داده شده است. با توجه به این‌که با افزایش شاخص جزء حجمی مدول الاستیسیته تیر کاهش می‌یابد و به تبع آن صلبیت خمشی و سفتی تیر کاهش می‌یابد، با افزایش این پارامتر شاهد کاهش تمامی فرکانس طبیعی تیر هدفمند با شیب تقریباً یکسان خواهیم بود. مطابق شکل (۵) بیشترین فرکانس طبیعی مربوط به حالت سرامیک $(n=0)$ و کمترین فرکانس طبیعی مربوط به حالت فلز کامل $(n=\infty)$ است. علاوه بر این، این شکل نشان می‌دهد با افزایش سرعت دورانی فرکانس طبیعی تیر افزایش می‌یابد دلیل این تغییرات متناسب بودن نیروی گریز از مرکز با سرعت دورانی است. شکل (۶) نشان‌دهنده حساسیت فرکانس‌های پایین‌تر به تغییرات سرعت دورانی می‌باشد با توجه به جدول (۹) نیز با افزایش سرعت دورانی از ۰ به ۱۰ درحالی‌که $n=1$ فرکانس اول $20.7/6\%$ و فرکانس چهارم $11/8\%$ افزایش می‌یابد. همان‌گونه که ذکر شد با افزایش سرعت دورانی بی‌بعد (η) فرکانس طبیعی بی‌بعد (λ) افزایش می‌یابد.

جدول (۱۰) و نمودار (۷) نشان‌دهنده تغییرات فرکانس طبیعی بابعده (ω) بر اثر تغییرات سرعت دورانی بابعده (Ω) می‌باشد. مشهود است این روند درمورد پارامترهای بابعده نیز صادق است. جدول (۱۱) و نمودار (۸) اثر پارامتر شعاع هاب را بر فرکانس طبیعی بی‌بعد نشان می‌دهد. با توجه به نمودار (۸) فرکانس طبیعی با افزایش شعاع هاب افزایش می‌یابد و این امر به دلیل ارتباط مستقیم نیروی گریز از مرکز با پارامتر شعاع هاب می‌باشد. از آنجا که این نیرو با هر دو پارامتر شعاع هاب و سرعت دورانی متناسب است، با افزایش هم زمان این دو پارامتر فرکانس طبیعی افزایش چشم‌گیری خواهد داشت. برای مثال در حالتی که $\eta=4$ و γ از ۰ به ۱ افزایش پیدا کند، فرکانس اول



شکل ۳ بررسی اثر ضرایب باریک‌شوندگی بر فرکانس‌های بی‌بعد اول تا سوم تیر هدفمند دوار $(\eta=2, L/h=5, n=1, \gamma=0)$



شکل ۴ بررسی اثر ضرایب باریک‌شوندگی ارتفاعی بر فرکانس‌های بی‌بعد اول تا سوم تیر هدفمند دوار

$$\alpha=0/2, \gamma=0, n=1, L/h=5, \eta=2$$

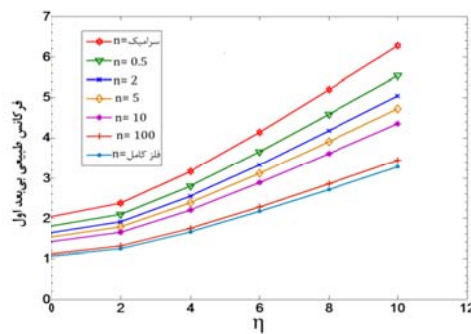
۱.۶٪ افزایش می‌یابد اما با افزایش هم زمان η از ۲ به ۶ و γ از ۰ به ۱ فرکانس طبیعی اول λ_1 افزایش می‌یابد. در جدول (۱۲) نیز اثر شعاع هاب R بر فرکانس طبیعی با بعد نشان داده شده است. نتایج به دست آمده نشان دهنده افزایش فرکانس طبیعی با بعد با افزایش شعاع هاب با بعد می‌باشد.

جدول ۹ بررسی اثر افزایش سرعت دورانی (η) و شاخص جزء حجمی (n) بر فرکانس طبیعی تیر هدفمند دوار

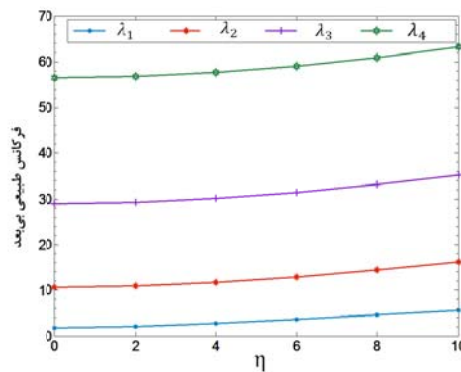
$$(L/h=10, \gamma=0, \beta=0.1, \alpha=0.1)$$

η							n
۱۰	۸	۶	۴	۲	۰		
۶/۲۷۹۰	۵/۱۹۹۹	۴/۱۴۹۷	۳/۱۷۰۰	۲/۳۷۷۵	۲/۰۴۱۰	λ_1	۰
۱۸/۳۰۹۴	۱۶/۳۱۹۴	۱۴/۵۷۹۸	۱۳/۱۹۵۳	۱۲/۲۸۹۸	۱۱/۹۷۲۹	λ_2	
۳۹/۹۱۳۲	۳۷/۵۴۹۰	۳۵/۵۹۰۴	۳۴/۱۱۵۸	۳۳/۱۹۶۷	۳۲/۸۸۴۱	λ_3	
۷۱/۶۵۲۴	۶۹/۰۴۵۰	۶۶/۹۳۷۴	۶۵/۳۸۵۰	۶۴/۴۳۳۵	۶۴/۱۱۲۸	λ_4	
۵/۸۸۹۳	۴/۸۷۷۱	۳/۸۹۲۱	۲/۹۷۳۳	۲/۲۲۹۹	۱/۹۱۴۳	λ_1	۰.۲
۱۷/۱۷۲۹	۱۵/۳۰۶۵	۱۳/۶۷۴۸	۱۲/۳۷۶۲	۱۱/۵۲۷۰	۱۱/۲۲۹۷	λ_2	
۳۷/۴۳۵۸	۳۵/۲۱۸۳	۳۳/۳۸۱۳	۳۱/۹۹۸۲	۳۱/۱۳۶۱	۳۰/۸۴۲۹	λ_3	
۶۷/۲۰۴۹	۶۴/۷۵۹۳	۶۲/۷۸۲۵	۶۱/۳۲۶۵	۶۰/۴۳۴۰	۶۰/۱۳۳۲	λ_4	
۵/۵۴۳۸	۴/۵۹۱۱	۳/۶۶۳۸	۲/۷۹۸۹	۲/۰۹۹۱	۱/۸۰۲۱	λ_1	۰.۵
۱۶/۱۶۵۷	۱۴/۴۰۸۷	۱۲/۸۷۲۷	۱۱/۶۵۰۳	۱۰/۸۵۰۹	۱۰/۵۷۱۱	λ_2	
۳۵/۲۴۰۰	۳۳/۱۵۲۶	۳۱/۴۲۳۳	۳۰/۱۲۱۴	۲۹/۳۰۹۹	۲۹/۰۲۳۹	λ_3	
۶۳/۲۶۳۰	۶۰/۹۶۰۹	۵۹/۱۰۰۱	۵۷/۷۲۹۵	۵۶/۸۸۹۳	۵۶/۶۰۶۲	λ_4	
۵/۳۶۸۰	۴/۳۶۲۷	۳/۴۸۱۶	۲/۶۵۹۷	۱/۹۹۴۷	۱/۷۱۲۴	λ_1	۱
۱۵/۳۶۱۵	۱۳/۶۹۱۹	۱۲/۲۳۲۴	۱۱/۰۷۰۸	۱۰/۳۱۱۱	۱۰/۰۴۵۲	λ_2	
۳۳/۴۸۷۰	۳۱/۵۰۳۴	۲۹/۸۶۰۲	۲۸/۶۲۳۰	۲۷/۸۵۱۹	۲۷/۵۸۹۶	λ_3	
۶۰/۱۱۶۱	۵۷/۹۲۸۵	۵۶/۱۶۰۲	۵۴/۸۵۷۸	۵۴/۰۵۹۴	۵۳/۷۹۰۳	λ_4	
۵/۰۵۳۳	۴/۱۸۴۹	۳/۳۳۹۶	۲/۵۵۱۲	۱/۹۱۳۴	۱/۶۴۲۶	λ_1	۲
۱۴/۷۳۵۴	۱۳/۱۳۳۸	۱۱/۷۳۳۸	۱۰/۶۱۹۵	۹/۸۹۰۸	۹/۶۳۵۸	λ_2	
۳۲/۱۲۲۱	۳۰/۲۱۹۳	۲۸/۶۴۳۱	۲۷/۴۵۶۳	۲۶/۷۱۶۶	۲۶/۴۶۵۰	λ_3	
۵۷/۶۶۵۷	۵۵/۵۶۷۲	۵۳/۸۷۱۰	۵۲/۶۲۱۷	۵۱/۸۵۵۹	۵۱/۵۹۷۸	λ_4	
۴/۷۳۰۳	۳/۹۱۷۴	۳/۱۲۶۲	۲/۳۸۸۲	۱/۷۹۱۱	۱/۵۳۷۶	λ_1	۵
۱۳/۷۹۳۴	۱۲/۲۹۴۳	۱۰/۹۸۳۷	۹/۹۴۰۷	۹/۲۵۸۵	۹/۰۱۹۸	λ_2	
۳۰/۰۶۸۷	۲۸/۲۸۷۶	۲۶/۸۱۲۱	۲۵/۷۰۱۲	۲۵/۰۰۸۷	۲۴/۷۷۳۳	λ_3	
۵۳/۹۷۹۴	۵۲/۰۱۵۱	۵۰/۴۲۷۴	۴۹/۲۵۷۹	۴۸/۵۴۱۰	۴۸/۲۹۹۴	λ_4	
۴/۳۶۶۵	۳/۶۱۶۱	۲/۸۸۵۸	۲/۲۰۴۵	۱/۶۵۳۳	۱/۴۱۹۴	λ_1	۱۰
۱۲/۷۳۲۷	۱۱/۳۴۸۹	۱۰/۱۳۹۱	۹/۱۷۶۳	۸/۵۴۶۶	۸/۳۲۶۲	λ_2	
۲۷/۷۵۶۵	۲۶/۱۱۲۴	۲۴/۷۵۰۳	۲۳/۷۲۴۹	۲۳/۰۸۵۷	۲۲/۸۶۸۳	λ_3	
۴۹/۸۲۸۶	۴۸/۰۱۵۴	۴۶/۵۴۹۷	۴۵/۴۷۰۲	۴۴/۸۰۸۴	۴۴/۵۸۵۴	λ_4	
۳/۶۱۸۳	۲/۹۹۶۵	۲/۳۹۱۳	۱/۸۲۶۷	۱/۳۷۰۰	۱/۱۷۶۲	λ_1	۵۰
۱۰/۵۵۰۹	۹/۴۰۴۱	۸/۴۰۱۶	۷/۶۰۳۸	۷/۰۸۲۰	۶/۸۹۹۴	λ_2	
۲۳/۰۰۰۱	۲۱/۶۳۷۷	۲۰/۵۰۹۱	۱۹/۶۵۹۳	۱۹/۱۲۹۷	۱۸/۹۴۹۶	λ_3	

۴۱/۲۸۹۹	۳۹/۷۸۷۴	۳۸/۵۷۲۹	۳۷/۶۷۸۳	۳۷/۱۳۰۰	۳۶/۹۴۵۲	λ_4	۱۰۰
۳/۴۵۴۷	۲/۸۶۱۰	۲/۲۸۳۲	۱/۷۴۴۲	۱/۳۰۸۱	۱/۱۲۳۰	λ_1	
۱۰/۰۷۴۰	۸/۹۷۹۱	۸/۰۲۱۹	۷/۲۶۰۱	۶/۷۶۱۹	۶/۵۸۷۶	λ_2	
۲۱/۹۶۰۵	۲۰/۶۵۹۷	۱۹/۵۸۲۱	۱۸/۷۷۰۷	۱۸/۲۶۵۰	۱۸/۰۹۳۰	λ_3	
۳۹/۴۲۳۶	۳۷/۹۸۹۰	۳۶/۸۲۹۴	۳۵/۹۷۵۳	۳۵/۴۵۱۷	۳۵/۲۷۵۳	λ_4	
۳/۲۸۳۲	۲/۷۱۹۰	۲/۱۶۹۸	۱/۶۵۷۶	۱/۲۴۳۲	۱/۰۶۷۲	λ_1	فلز کامل
۹/۵۷۳۹	۸/۵۳۳۳	۷/۶۲۳۷	۶/۸۹۹۷	۶/۴۲۶۳	۶/۲۶۰۶	λ_2	
۲۰/۸۷۰۳	۱۹/۶۳۴۱	۱۸/۶۱۰۰	۱۷/۸۳۸۹	۱۷/۳۵۸۳	۱۷/۱۹۴۹	λ_3	
۳۷/۴۶۶۶	۳۶/۱۰۳۲	۳۵/۰۰۱۱	۳۴/۱۸۹۴	۳۳/۶۹۱۸	۳۳/۵۲۴۱	λ_4	



شکل ۵ بررسی اثر افزایش سرعت دورانی (η) و شاخص جزء حجمی (n) بر فرکانس بی بعد اول تیر هدفمند دوار ($L/h=1.0, \gamma=0, \beta=0.1, \alpha=0.1$)

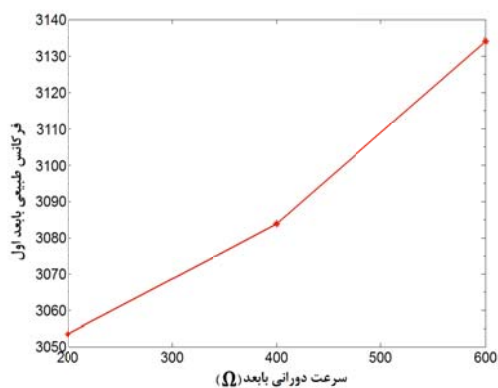


شکل ۶ بررسی اثر افزایش سرعت دورانی (η) بر فرکانس اول تا چهارم تیر هدفمند دوار ($n=0.5, L/h=1.0, \gamma=0, \beta=0.1, \alpha=0.1$)

جدول ۱۰ بررسی اثر سرعت دورانی بایعد (Ω) بر فرکانس طبیعی بایعد (ω)

$$(\gamma=0.2, n=1, \beta=0.2, \alpha=0.3)$$

	$\Omega=200$	$\Omega=400$	$\Omega=600$
ω_1	۳۰۵۳/۳۹۷۹	۳۰۸۳/۸۹۲۳	۳۱۳۴/۰۲۶۹
ω_2	۱۶۱۹۷/۰۲۹۱	۱۶۲۲۴/۴۱۳۱	۱۶۲۶۹/۹۵۱۸
ω_3	۴۳۲۰۹/۴۴۷۸	۴۳۲۳۶/۳۲۹۶	۴۳۲۸۱/۰۹۲۷



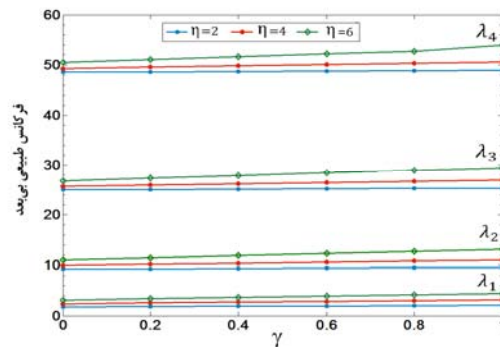
شکل ۷ بررسی اثر سرعت دورانی بایعد (Ω) بر فرکانس طبیعی بایعد تیر هدفمند دوار

$$(\gamma=0/2, n=1, \beta=0/2, \alpha=0/3)$$

جدول ۱۱ بررسی اثر شعاع هاب بی بعد بر فرکانس طبیعی بی بعد تیر هدفمند دوار

$$(L/h=10, \beta=0/1, \alpha=0/1, n=5)$$

γ						η
۱	۰/۸	۰/۶	۰/۴	۰/۲	۰	
۲/۰۷۸۵	۲/۰۲۴۳	۱/۹۶۸۷	۱/۹۱۱۳	۱/۸۵۲۲	۱/۷۹۱۱	λ_1
۹/۵۶۷۸	۹/۵۰۶۸	۹/۴۴۵۳	۹/۳۸۳۵	۹/۳۲۱۲	۹/۲۵۸۵	λ_2
۲۵/۳۳۳۴	۲۵/۲۶۸۹	۲۵/۲۰۴۱	۲۵/۱۳۹۲	۲۵/۰۷۴۱	۲۵/۰۰۸۷	λ_3
۴۸/۸۸۳۴	۴۸/۸۱۵۲	۴۸/۷۴۶۸	۴۸/۶۷۸۳	۴۸/۶۰۹۷	۴۸/۵۴۱۰	λ_4
۳/۱۷۷۳	۳/۰۳۶۴	۲/۸۸۴	۲/۷۳۲۱	۲/۵۶۶۱	۲/۳۸۸۲	λ_1
۱۱/۰۴۶۰	۱۰/۸۳۴۵	۱۰/۶۱۸۵	۱۰/۳۹۷۸	۱۰/۱۷۲۰	۹/۹۴۰۷	λ_2
۲۶/۹۳۵۶	۲۶/۶۹۴۰	۲۶/۴۴۹۹	۲۶/۲۰۳۱	۲۵/۹۵۳۶	۲۵/۷۰۱۲	λ_3
۵۰/۵۸۸۸	۵۰/۳۲۶۰	۵۰/۰۶۱۵	۴۹/۷۹۵۴	۴۹/۵۲۷۵	۴۹/۲۵۷۹	λ_4
۴/۴۲۰۱	۴/۱۹۴۳	۳/۹۵۵۲	۳/۷۰۰۱	۳/۴۲۵۵	۳/۱۲۶۲	λ_1
۱۳/۱۳۳۶	۱۲/۷۳۴۸	۱۲/۳۲۲۱	۱۱/۸۹۴۰	۱۱/۴۴۸۵	۱۰/۹۸۳۷	λ_2
۲۹/۳۸۸۶	۲۸/۸۹۴۹	۲۸/۳۹۱۱	۲۷/۸۷۶۴	۲۷/۳۵۰۳	۲۶/۸۱۲۱	λ_3
۵۳/۲۹۰۹	۵۲/۷۳۳۲	۵۲/۱۶۸۳	۵۱/۵۹۵۸	۵۱/۰۱۵۶	۵۰/۴۲۷۴	λ_4



شکل ۸ بررسی اثر شعاع هاب بر فرکانس طبیعی تیر هدفمند دوار

جدول ۱۲ بررسی اثر شعاع هاب بابت (R) بر فرکانس طبیعی بابت (ω) تیر هدفمند دوار

$$(\eta=2, n=1, \beta=0.3, \alpha=0.3)$$

	R= ۵	R= ۱۰	R= ۱۵
ω_1	۶۵۲۶/۳۶۳۴	۸۵۰۶/۱۵۰۱	۱۰۰۹۲/۷۲۷۲
ω_2	۱۹۹۲۸/۵۹۷۶	۲۳۱۶۰/۱۱۴۷	۲۵۹۷۴/۱۱۳۸
ω_3	۴۵۶۸۵/۹۸۰۸	۴۹۵۴۶/۹۱۷۰	۵۳۰۹۳/۴۷۳۱

نتیجه گیری

سبب افزایش فرکانس طبیعی اول می شود و فرکانس اول نسبت به تغییرات ضریب باریک‌شوندگی عرضی حساس تر است. در فرکانس‌های بالاتر افزایش ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی سبب کاهش فرکانس طبیعی می شود و افزایش ضریب باریک‌شوندگی عرضی سبب افزایش فرکانس طبیعی خواهد شد و حساسیت فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات ضریب باریک‌شوندگی ارتفاعی در فرکانس‌های بالاتر بیشتر است.

- با افزایش شاخص جزء حجمی فرکانس طبیعی کاهش می یابد. با تغییر مقدار شاخص جزء حجمی می توان مدول الاستیسیته و خواص ارتعاشاتی تیر هدفمند را تغییر داد.
- افزایش شعاع هاب باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود اما اثر محسوسی بر آن ندارد.
- افزایش سرعت دورانی باعث افزایش فرکانس

در این مقاله از روش تبدیل دیفرانسیلی و تئوری اولر-برنولی برای بررسی رفتار ارتعاشی تیر باریک‌شونده دوطرفه ساخته شده از مواد هدفمند استفاده شد و با استفاده از این روش، فرکانس‌های طبیعی آن به دست آمد. اثر پارامترهای شعاع هاب γ ، سرعت دورانی η ، ضرایب باریک‌شوندگی عرضی و ارتفاعی α و β و شاخص جزء حجمی n بر فرکانس‌های طبیعی تیر نیز بررسی شد. نتایج حاصل با نتایج کارهای گذشته مقایسه شد و تطابق قابل قبولی به دست آمد. نتایج به دست آمده نشان دهنده موارد زیر می باشد.

- روش تبدیل دیفرانسیلی روشی کارآمد و با سرعت هم‌گرایی بالا برای تحلیل ارتعاشات تیرهای دوار باریک‌شونده ساخته شده از مواد هدفمند می باشد.
- افزایش ضریب باریک‌شوندگی عرضی و ارتفاعی

و سرعت دورانی اثر چشم‌گیری بر فرکانس طبیعی دارد.

طبیعی می‌شود و حساسیت فرکانس‌های طبیعی پایین‌تر به تغییرات پارامتر سرعت دورانی بیشتر می‌باشد. علاوه بر این افزایش هم‌زمان شعاع هاب

مراجع

1. Sankar, B.V., "An elasticity solution for functionally graded beams", *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 689–696, (2001).
2. Şimşek, M. "Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method", *Int. J. Eng. Appl. Sci.*, Vol. 1, pp.1-11, (2009).
3. Aydogdu M. and Taskin, V., "Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges", *Material and Design*, Vol. 28, No. 5, pp. 1651-1656, (2007).
4. Şimşek, M., "Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, pp. 2532-2546, (2010).
5. Şimşek, M., "Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Beams by Using Different Higher-Order Beam Theories", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 240, No. 4, pp. 697-705, (2010).
6. Sina, S.A., Navazi, H.M and Hadadpour, H., "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams", *Material and Design*, Vol. 30, No. 3, pp.741-747, (2009)
7. Li, X-F. "A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, No. 4, pp. 1210-1229, (2008).
8. Şimşek, M. and T. Kocatürk. "Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load", *Composite Structures*, Vol. 90, No. 4, pp. 465-473, (2009).
9. Alshorbagy, A.E., Altaher, M.A. and Mahmoud, F.F., "Free vibration characteristics of a functionally graded beam using finite element method", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 1, pp. 412-425, (2011).
10. Zhong Z. and Yu T., "Analytical solution of cantilever functionally graded beam", *Composites Science and Technology*, Vol. 67, No. 3-4, pp. 481-488, (2007).
11. Daneshmehr, A.R., Hadi, A., and Mehrian, S.N., "Investigation of Elastoplastic Functionally Graded Euler-Bernoulli Beam Subjected to Distributed Transverse Loading", *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, Vol. 2, No.10, pp. 10628-34, (2012).
12. Kadoli, R., Akhtar, K., and Ganesan, N., "Static analysis of functionally graded beam using higher order shear deformation theory", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 32, No. 12, pp. 2509-2525, (2008).
13. Bazoune, A., "Effect of tapering on natural frequencies of rotating beams", *Shock and Vibration*, Vol. 14, No. 3, pp. 169-179, (2007).
14. Zeng, H., and Bert, C.W., "Vibration analysis of a tapered bar by differential transformation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, pp. 737–739, (2001).

15. Shahba, A., Attarnejad, R., TavanaieMarvi, M., Hajilar, S., "Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions", *Composite Part B: Engineering*, Vol. 42, pp.801–808, (2011).
16. Bazoune, A., Khulief, Y.A. and Stephen, N.G., "Further results for modal characteristics of rotating tapered timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, pp. 157–174, (1999).
17. Huang, Y., Yang, L.E., Luo, Q.Z., "Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section", *Composite Part B: Engineering*, Vol. 42, pp. 801-8, (2013).
18. Zhou, J.K., "Differential Transformation and its application for Electrical Circuits", Huazhong University Press, Wuhan China, (1986), (in Chinese).
19. Malik, M. and Dang, H.H., "Vibration analysis of continuous system by differential transformation", *Appl Math Comput*, Vol. 96, pp. 17-26, (1998).
20. Ozdemir, O. and Kaya, M.O., "Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, pp. 413-420, (2006).
21. Ozgumus, O.O. and Kaya, M.O., "Flapwise bending vibration analysis of double tapered rotating Timoshenko beam", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 78, pp. 379-392, (2008).
22. Banerjee, J.R., "Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, pp. 857-875, (2000).
23. Attarnejad, R. and Shahba, A., "Application of differential transform method in free vibration Analysis of rotating non-prismatic beams", *World Appl. Sci. J.*, Vol. 5, pp. 441–448, (2008).
24. Piovan, M.T. and Sampaio, R., "A study on the dynamics of rotating beams with functionally graded properties", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 327, pp. 134-143, (2009).
25. Shahba, A. and Rajasekaran, S., "Free vibration and stability of Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded material", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 7, pp. 3094-3111, (2012).
26. Rajasekaran, S., "Free vibration of centrifugally stiffened axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation and quadrature methods", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, pp. 4440-4463, (2013).
27. Suddoung, K., Charoensuk, J., and Wattanasakulpong, N., "Vibration response of stepped FGM beams with elastically end constraints using differential transformation", *Applied Acoustics*, Vol. 77, pp. 20-28, (2014).
28. Nguyen, D.K., and Gan, B.S., "Large deflections of tapered functionally graded beams subjected to end forces", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 11, pp. 3054-3066, (2013).
29. Nguyen, D.K., "Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material", *Composite Part B: Engineering*, Vol. 55, pp. 298-305, (2013).
30. Pradhan, K.K. and Chakraverty, S., "Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh – Ritz method", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 51, pp. 175-184, (2013).
31. Pradhan, K.K., and Chakraverty, S., "Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 82, pp.149-160, (2014).

32. Hodges, D.H. and Dowell, E.H. "Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades", NASA TN D-7818, (1974).
33. Abdel-Halim Hassan, I.H., "On solving some eigenvalue-problems by using a differential transformation", *Appl. Math. Comput.*, Vol. 127, pp. 1–22, (2002).

Archive of SID