

### بررسی روش نگاشت نمایی یک چهارم گام برای تابع اولیه گیری از مومسانی وان- مایسز\*

نادر حاجی آقاجانپور<sup>(۱)</sup>      مهرزاد شریفیان<sup>(۲)</sup>      مهرداد شریفیان<sup>(۳)</sup>

**چکیده** به هنگام سازی تنش در تحلیل اجزای محدود ناخطی مواد، مهم ترین قسمت تحلیل می باشد، زیرا به طور قابل توجهی بر دقت پاسخ های به دست آمده اثرگذار است. با توجه به این که دقت و زمان دو عامل کلیدی در کارایی روش های تابع اولیه گیری هستند، بررسی دقت و عملکرد این روش ها اهمیت بسیاری دارد. در این پژوهش، الگوی مومسانی وان- مایسز با سخت شونده های خطی همگن و پویا در محدوده تغییر شکل های کوچک در نظر گرفته می شود. باید دانست در حل دستگاه معادله های دیفرانسیل مومسانی به روش نیمه ضمنی رویکرد رایج این گونه است که متغیرهای مورد نیاز تحلیل از میانه گام مومسانی برداشت شود. به منظور بررسی دقت در این پژوهش رابطه سازی ها به گونه ای انجام شده است که بتوان متغیرها را از یک چهارم گام مومسانی برداشت نمود. در پایان، با انجام آزمون های عددی، دقت پاسخ های به دست آمده از این حالت بررسی می شود و با حالت رایج مقایسه می گردد.

**واژه های کلیدی** به هنگام سازی تنش، روش نیمه ضمنی، مومسانی وان- مایسز، سخت شونده همگن، سخت شونده پویا.

### Verification of Quarter-step Exponential Map Method for Integration of Von-Mises Plasticity

N. Haji Aghajanpour      M. Sharifian      M. Sharifian

**Abstract** Updating stress in a nonlinear finite element analysis is the most important part as the precision of the stress-updating algorithm greatly affects the accuracy of the final solutions. The most important part of the analysis is the stress-updating. There are two key factors that have impact on the efficiency evaluation; those are the accuracy and time. Based on this point, investigating the accuracy of the integration methods becomes important. In this study, the von-Mises plasticity model along with the linear isotropic and kinematic hardening mechanisms is considered in the small strain realm. In solving the plasticity differential equations system through a semi-implicit method, the prevalent approach is picking up the variables from the middle of the plasticity step. In order to assess the accuracy, here, the relations are derived so that one can pick up the variables from the first quarter of the plasticity step. Finally, to determine the accuracy and comparing two aforementioned methods, the numerical tests are performed.

**Key Words** Stress updating; Semi-implicit method; Von-Mises plasticity; Isotropic hardening; Kinematic hardening.

\* تاریخ دریافت مقاله ۹۶/۳/۱۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۹/۱۸ می باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v30i1.64973

(۱) کارشناس ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان.

(۲) نویسنده مسئول: استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان. m.sharifian@qiet.ac.ir

(۳) استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان.

## مقدمه

روش‌های تابع‌اولیه‌گیری از معادله‌های دیفرانسیلی مومسانی شامل چهار گونه اصلی صریح، ضمنی، دقیق و نگاهت نمایی می‌باشند. روش‌های رانگ-کوتا از معروف‌ترین روش‌های صریح در تابع‌اولیه‌گیری می‌باشند. تابع‌اولیه‌گیری‌های ضمنی که بیشتر با عنوان روش‌های نگاهت بازگشتی شناخته می‌شوند، نخست با روش بازگشت شعاعی که توسط ویکلینز برای معیار تسلیم وان-مایسز مطلوب پیشنهاد شد، مطرح گردید [1]. در رابطه با روش‌های دقیق بایستی اشاره گردد با ثابت‌پنداشتن نرخ کرنش، نخستین حل بسته برای مصالح کشسان-مومسان مطلوب وان-مایسز توسط کریگ و کریگ [2] ارائه شد. پس از آن پژوهشگران دستاورد کریگ و کریگ را بهبود دادند. ریستینما و تریادینگ [3] در سال ۱۹۹۳ یک روش کلی استخراج نمودند که شامل همه روش‌های دقیق پیشین بود. در ادامه، زاو [4] نیز پژوهش‌هایی روی شیوه‌های دقیق انجام داد. باید دانست در روش‌های برپایه نگاهت نمایی تابع‌اولیه‌گیری در فضای تنش افزوده انجام می‌شود. با توجه به این‌که حجم محاسبات در تحلیل‌های ناخطی بسیار زیاد است؛ بنابراین انتخاب روش دقیق‌تر برای تحلیل می‌تواند زمان تحلیل را به شکل چشم‌گیری کاهش دهد و در زمان کمتری به دقت مورد نظر برسد. از میان روش‌های بیان‌شده، شیوه‌های برپایه نگاهت نمایی دقت بالاتری دارند، افزون بر آن، سازگاری مومسانی در بیشتر آنها وجود دارد. از سوی دیگر، ماهیت صریح روش‌های برپایه نگاهت نمایی کارایی بالاتر این روش‌ها را سبب می‌شود. ویژگی‌های یادشده، نویسندگان این مقاله را بر آن داشت که بررسی دقت روش‌های تابع‌اولیه‌گیری نمایی را در پیش گیرند.

پس از آن‌که هانگ و لیو [5] در سال ۱۹۹۹ فضای تنش افزوده را معرفی کردند، پژوهشگران معادله‌های

مربوط به مومسانی وان-مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی را به دستگاه معادله دیفرانسیل ناخطی  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$  تبدیل نمودند. در سال ۲۰۰۳ آوریکیو و ویگا [6] روش تابع‌اولیه‌گیری نمایی از این معادله دیفرانسیل را پیشنهاد نمودند. روش آنها ماهیت صریح داشت و ناسازگار با سطح تسلیم بود. در روش‌های سازگار با سطح تسلیم در انتهای هر گام بارگذاری، تنش‌های به‌هنگام‌شده به‌طور خودکار بر روی سطح تسلیم قرار می‌گیرد درحالی‌که در روش‌های ناسازگار بایستی تنش‌ها بر روی سطح تسلیم بازگردانده شوند. در سال ۲۰۰۴، لیو [7] دو روش تابع‌اولیه‌گیری نمایی صریح برای معیار تسلیم مومسان مطلوب دراکر-پراگر رابطه‌سازی نمود.

از جمله پژوهشگرانی که در زمینه تابع‌اولیه‌گیری نمایی از معادله‌های مومسانی فعالیت کرده‌اند، می‌توان به آرتیولی و همکارانش [8] اشاره نمود. آنها در سال ۲۰۰۵، شیوه نمایی برای مومسانی وان-مایسز را به حالت سازگار بهبود دادند، و در سال ۲۰۰۶ [9] یک شیوه نمایی صریح مرتبه دوم برای الگوی سخت‌شونده خطی وان-مایسز پیشنهاد دادند. آرتیولی و همکارانش [10] در سال ۲۰۰۷، شیوه به‌هنگام‌سازی نمایی تنش را برای مومسانی وان-مایسز با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای ناخطی آرمسترانگ و فردریک استخراج نمودند.

رضایی پزند و نصیرایی [11] در ادامه فعالیت‌های سال ۲۰۰۵ آرتیولی و همکارانش، شیوه نمایی برای مومسانی وان-مایسز را در سال ۲۰۰۷ به یک شیوه تابع‌اولیه‌گیری نمایی نیمه‌ضمنی با دقت مرتبه دو بهبود دادند. سپس، در سال ۲۰۰۸ [12]، دو شیوه تابع‌اولیه‌گیری نمایی نیمه‌ضمنی مرتبه دو را برای الگوی مومسان مطلوب دراکر-پراگر پیشنهاد دادند. رضایی پزند و همکارانش [13] در سال ۲۰۱۰ روش تابع‌اولیه‌گیری نمایی را برای مومسانی وان-مایسز با سخت‌شوندگی پویای ناخطی گسترش دادند و در سال

### رابطه‌های بنیادی

یک الگوی مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی در محدوده تغییر شکل‌های کوچک در نظر گرفته می‌شود. تنش کل و کرنش کل هر کدام به دو بخش انحرافی و حجمی جداسازی می‌شوند:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + p\mathbf{i}, \quad p = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\theta\mathbf{i}, \quad \theta = tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3)$$

معادله‌های وابسته به این الگو در ادامه آورده می‌شود:

$$p = K\theta \quad (4)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^p + \mathbf{e}^e \quad (5)$$

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^e = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha} \quad (7)$$

$$F = \|\boldsymbol{\Sigma}\| - R = 0 \quad (8)$$

$$R = R_0 + H_{iso}\gamma \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma}\mathbf{n} \quad (10)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\|\boldsymbol{\Sigma}\|} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{R} \quad (11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = H_{kin}\dot{\mathbf{e}}^p \quad (12)$$

که  $tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  عملگر اثر است  $\mathbf{i}$  بردار معادل با تانسور همانی مرتبه 2،  $\mathbf{s}$  تنش انحرافی،  $p$  تنش حجمی،  $\mathbf{e}$  کرنش انحرافی و  $\theta$  کرنش حجمی می‌باشد.  $K$  مدول بالک،  $\mathbf{e}^e$  بخش کشسان و  $\mathbf{e}^p$  بخش مومسان کرنش انحرافی،  $\boldsymbol{\Sigma}$  بردار تنش انتقالی (جابه‌جاشده)،  $\boldsymbol{\alpha}$  بخش انحرافی تنش بازگشتی،  $\mathbf{n}$

۲۰۱۱ یک روش تابع اولیه‌گیری نمایی برای مدل مومسانی چرخه‌ای ارائه کردند [14]. رضایی پزند و شریفیان [5] در سال ۲۰۱۱ یک روش تابع اولیه‌گیری با قابلیت کنترل خودکار خطا پیشنهاد نمودند. افزون‌بر آن، رضایی پزند و همکاران [16] در سال ۲۰۱۱ دو روش تابع اولیه‌گیری صریح برپایه نگاشت نمایی با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای پراگر ارائه دادند. سرانجام، رضایی پزند و همکاران [17] در سال ۲۰۱۳، دو روش تابع اولیه‌گیری نیمه‌ضمنی برپایه نگاشت نمایی و شیوه‌های اولر پیشرو و پسرو برای مومسانی دراکر- پراگر با سخت‌شوندگی درهم ناخطی رابطه‌سازی کردند.

همان‌گونه که بیان شد دقت روش تابع اولیه‌گیری در کارایی آن روش اثر به‌سزایی دارد. از طرفی در پژوهش‌های صورت‌گرفته در رابطه با روش نیمه‌ضمنی نگاشت نمایی رویکرد رایج چنین است که متغیرهای مورد نیاز تحلیل از وسط گام مومسانی برداشت شود. در این پژوهش بررسی می‌شود که برداشت متغیرها از یک چهارم گام مومسانی چه اثری بر دقت پاسخ‌ها و نرخ همگرایی به پاسخ دقیق می‌گذارد. برای این منظور روش نگاشت نمایی برای مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی همگن و پویای خطی به‌گونه‌ای رابطه‌سازی خواهد شد که بتوان شعاع سطح تسلیم را از یک چهارم گام مومسانی برداشت نمود.

در رابطه‌هایی که در این مقاله ارائه می‌شود تانسورهای مرتبه‌دو با برداری نُه مؤلفه‌ای جایگزین شده‌اند، همانند:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z] \quad (1)$$

البته باتوجه به این‌که شمار مؤلفه‌های مستقل، شش عدد می‌باشد؛ چنان‌چه استفاده از بردارهای شش مؤلفه‌ای موردنظر باشد، بایستی عملگر اثر و نرم اقلیدسی اصلاح گردند.

ضریب انتگرال گیری  $X^0$  به صورت تابعی از  $\gamma$  در نظر گرفته می شود:

$$X^0(\gamma) = \begin{cases} \left(1 + \frac{H_{iso}}{R_0} \gamma\right)^{\left(\frac{2G+H_{kin}+H_{iso}}{H_{iso}}\right)} & H_{iso} \neq 0 \\ \exp\left(\frac{2G+H_{kin}}{R_0} \gamma\right) & H_{iso} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

ماتریس  $\mathbb{A}$  برای معادله دیفرانسیل (۱۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbb{A}_e = \frac{2G}{R} \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{9 \times 9} & \mathbf{e}_{9 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 9} & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (18)$$

$$\mathbb{A}_p = \frac{2G}{R} \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{9 \times 9} & \mathbf{e}_{9 \times 1} \\ \mathbf{e}_{1 \times 9}^T & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (19)$$

در حضور سخت شونده گی پویا به تنهایی چون  $R$  ثابت است،  $\mathbb{A}$  تنها به  $\mathbf{e}$  وابسته است؛ اما در حضور سخت شونده گی همگن که  $R$  ثابت نمی باشد،  $\mathbb{A}$  به  $\mathbf{X}$  وابسته می شود که معادله (۱۴) را ناخطی می کند. چگونگی دستیابی به معادله  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X}$  در پیوست ارائه شده است.

چنانچه دو شرط زیر که از شرط های کان-تاکر (۱۳) نتیجه گرفته شده است، به صورت هم زمان برقرار شود، نمو در محدوده مومسان واقع است [4]:

$$(1) \text{ تنش جابه جاشده بایستی روی سطح تسلیم باشد:}$$

$$\|\Sigma\| = R \quad (20)$$

که با استفاده از رابطه های (۱۵ و ۱۶) می توان نوشت:

$$\|\mathbf{X}^s\| = X^0 \quad (21)$$

(۲) جهت رشد کرنش باید به سوی بیرون از سطح تسلیم باشد:

$$\Sigma^T \dot{\mathbf{e}} > 0 \quad (22)$$

که رابطه کنونی را می توان به صورت زیر بازنویسی

بردار عمود بر سطح تسلیم در نقطه تماس می باشد.  $R$  شعاع سطح تسلیم،  $R_0$  شعاع نخستین سطح تسلیم،  $H_{iso}$  ثابت ماده (ثابت سخت شونده گی همگن)،  $H_{kin}$  ثابت ماده (ثابت سخت شونده گی پویا)،  $\gamma$  یک کمیت عددی می باشد که  $\dot{\gamma}$  ضریب مومسانی را تعریف می کند. رابطه (۸) سطح تسلیم وان-مایسز را بیان می کند.  $\alpha$  مرکز سطح تسلیم در صفحه تنش انحرافی می باشد. رابطه (۹) قانون سخت شونده گی همگن خطی را نشان می دهد. رابطه (۱۲) بیانگر قانون سخت شونده گی پویای خطی پراگر می باشد.

سرانجام، شرط های بارگذاری- باربرداری کان-تاکر با رابطه های زیر ارائه می شود [6]:

$$\dot{\gamma} \geq 0, F \leq 0, \dot{\gamma}F = 0 \quad (13)$$

که  $\dot{\gamma} = 0$  رفتار کشسان و  $\dot{\gamma} > 0$  رفتار مومسان را نشان می دهد.

### رابطه های بنیادی در فضای تنش افزوده

معادله های مربوط به مومسانی وان-مایسز با سخت شونده گی درهم خطی را می توان به دستگاه معادله دیفرانسیل ناخطی زیر تبدیل نمود [6]:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X} \quad (14)$$

در رابطه بالا  $\mathbf{X}$  بردار تنش افزوده با  $n+1$  بُعد می باشد:

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X^0 \bar{\Sigma} \\ X^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}^s \\ X^0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

بردار تنش جابه جاشده بدون بُعد ( $\bar{\Sigma}$ ) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{\Sigma} = \frac{\Sigma}{R} \quad (16)$$

$$\bar{\mathbb{G}}_n = \begin{cases} \bar{\mathbb{G}}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} & \frac{2G}{R_n} \Delta \mathbf{e} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbb{G}}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{I} + (a_0 - 1) \Delta \hat{\mathbf{e}} \Delta \hat{\mathbf{e}}^T & b_0 \Delta \hat{\mathbf{e}} \\ b_0 \Delta \hat{\mathbf{e}}^T & a_0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (27)$$

$$(\mathbf{X}^s)^T \hat{\mathbf{e}} > 0 \quad (23)$$

عامل‌های مربوط به ماتریس نمایی  $\bar{\mathbb{G}}_n$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n, \quad \Delta \hat{\mathbf{e}} = \frac{\Delta \mathbf{e}}{\|\Delta \mathbf{e}\|} \quad (28)$$

$$a_0 = \cosh\left(\frac{2G}{R_n} \|\Delta \mathbf{e}\|\right), \quad b_0 = \sinh\left(\frac{2G}{R_n} \|\Delta \mathbf{e}\|\right) \quad (29)$$

نخست با پنداشت رفتار ارتجاعی یک مقدار نخستین آزمونی برای بردار تنش افزوده برآورد می‌گردد:

$$\mathbf{X}_{n+1}^{TR} = \bar{\mathbb{G}}_e \mathbf{X}_n \quad (30)$$

در صورت برقراری شرط زیر، حل آزمونی پذیرفته می‌شود و مقادیرهای متغیرها از روی حل آزمونی بالا برآورد می‌گردد:

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^{s,TR}\| \leq X_{n+1}^{0,TR} \quad (31)$$

اما در صورت برقرار نشدن شرط (31) حل آزمونی پذیرفته نمی‌شود و بخشی از گام، مومسان می‌باشد. به صورت معمول، این گام به دو قسمت کشسان کامل و کشسان-مومسان تقسیم می‌شود. مرز بین ناحیه کشسان کامل و ناحیه کشسان-مومسان را ثابت  $0 \leq \alpha \leq 1$  مشخص می‌کند:

$$\alpha = \frac{\sqrt{C^2 - DM} - C}{D} \quad (32)$$

$$C = \frac{2GX_n^0}{R_n} \mathbf{X}_n^s \Delta \mathbf{e}, \quad D = \left(\frac{2GX_n^0 \|\Delta \mathbf{e}\|}{R_n}\right)^2, \quad (33)$$

$$M = \|\mathbf{X}_n^s\|^2 - (X_n^0)^2 \quad (33)$$

### الگوریتم عددی به هنگام سازی تنش

در این بخش الگوریتم عددی به هنگام سازی تنش ارائه می‌گردد. الگوریتمی که در ادامه می‌آید با الگوریتم روش صریح نگاشت نمایی تفاوت دارد. در این الگوریتم در محاسبات به هنگام سازی تنش از شعاع سطح تسلیمی استفاده می‌گردد که از یک چهارم گام مومسانی برداشت شده است. رابطه سازی‌هایی که به این منظور صورت پذیرفته، در محاسبات مربوط به گام مومسانی به روشنی قابل مشاهده است.

در فرایند به هنگام سازی تنش، مقادیرهای متغیرها در زمان  $t = t_n$  و کرنش در زمان  $t = t_{n+1}$  معلوم می‌باشند. الگوریتم پیشنهادی بایستی با حل معادلات مومسانی، تنش را به هنگام کند و سایر متغیرها را محاسبه نماید. پاسخ معادله دیفرانسیل (14) با شرط نخستین زیر در ادامه آورده می‌شود. شایان ذکر است به صورت معمول در مسیرهای کرنش انتخابی، نرخ کرنش ثابت فرض می‌شود ( $\dot{\mathbf{e}} = \text{cte}$ ).

$$\mathbf{X}(0) = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_0^s \\ R_0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \exp(\mathbb{A} \cdot \Delta t) \mathbf{X}_n \quad (25)$$

باتوجه به این که در حضور سخت‌شوندگی همگن ( $H_{iso} \neq 0$ ) ماتریس  $\mathbb{A}$  در فاز مومسانی ثابت نیست، در این جا برای یافتن حل بسته،  $\mathbb{A}$  در طول هر گام زمانی ثابت پنداشت می‌شود:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \exp(\mathbb{A}_n \cdot \Delta t) \mathbf{X}_n = \bar{\mathbb{G}}_n \mathbf{X}_n \quad (26)$$

$$\mathbf{X}_{n+\alpha}^s = \mathbf{X}_n^s + \alpha \frac{2G}{R_n} X_n^0 \Delta \mathbf{e} \quad (40)$$

درحقیقت،  $\alpha \Delta \mathbf{e}$  بیانگر یک بخش کشسان کامل و  $(1 - \alpha) \Delta \mathbf{e}$  بیانگر یک بخش کشسان-مومسان کامل می باشد. در این صورت بردار تنش افزوده به شرح زیر به هنگام می گردد:

$$X_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)}^0 = \bar{b} \Delta \hat{\mathbf{e}}^T \left( \mathbf{X}_n^s + \alpha \frac{2G}{R_n} X_n^0 \Delta \mathbf{e} \right) + \bar{a} X_n^0 \quad (41)$$

که در آن:

$$\mathbf{X}_{n+\alpha} = \mathbb{G}_e \mathbf{X}_n \quad (34)$$

$$\bar{a} = \cosh(0.25\bar{g}) \quad (42)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{G}_p \mathbf{X}_{n+\alpha} \quad (35)$$

$$\bar{b} = \sinh(0.25\bar{g}) \quad (43)$$

و یا:

$$\bar{g} = \frac{2G}{R_n} (1 - \alpha) \|\Delta \mathbf{e}\| \quad (44)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{G}_e \mathbb{G}_p \mathbf{X}_n \quad (36)$$

شعاع در یک چهارم از گام کشسان-مومسان به صورت زیر به دست می آید:

ضریب  $\alpha$  برای ناحیه کشسان و  $(1 - \alpha)$  برای ناحیه کشسان-مومسان در رابطه (۲۷) اعمال می شود و  $\mathbb{G}_p$  و  $\mathbb{G}_e$  به صورت زیر محاسبه می گردد. آشکار است که  $\alpha = 0$  یک گام کشسان-مومسان را نشان می دهد،  $\mathbb{G}_e = \mathbb{I}$  و  $\mathbb{G}_p = \bar{\mathbb{G}}_p$

$$R_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)} = R_n \left( \frac{X_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)}^0}{X_n^0} \right)^\beta \quad (45)$$

به عبارت دیگر:

$$\mathbb{G}_n = \begin{cases} \mathbb{G}_e = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9 \times 9} & \alpha \frac{2G}{R_n} \Delta \mathbf{e} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{G}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{I} + (a_1 - 1) \Delta \hat{\mathbf{e}} \Delta \hat{\mathbf{e}}^T & b_1 \Delta \hat{\mathbf{e}} \\ b_1 \Delta \hat{\mathbf{e}}^T & a_1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (37)$$

$$R_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)} = R_n [\sinh(0.25\bar{g}) \left( \frac{\Delta \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{X}_n^s}{X_n^0} + \alpha \frac{2G}{R_n} \|\Delta \mathbf{e}\| \right) + \cosh(0.25\bar{g})]^\beta \quad (46)$$

ضریب  $\beta$  از رابطه زیر تعیین می شود:

باتوجه به این که در روش نیمه ضمنی بایستی شعاع برداشت شده از یک چهارم گام در محاسبات وارد شود، عامل های مربوط به ماتریس  $\mathbb{G}_n$  به صورت زیر به دست می آیند:

$$\beta = \frac{H_{iso}}{2G + H_{iso} + H_{kin}} \quad (47)$$

$$a_1 = \cosh(g), \quad b_1 = \sinh(g) \quad (38)$$

در پایان هر گام شعاع سطح تسلیم باید به هنگام شود که به کمک رابطه های (۹ و ۱۷) می توان به رابطه زیر رسید:

$$g = \frac{2G}{R_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)}} (1 - \alpha) \|\Delta \mathbf{e}\| \quad (39)$$

$$R_{n+1} = R_0 (X_{n+1}^0)^\beta \quad (48)$$

برای به دست آوردن شعاعی که از یک چهارم گام مومسانی به دست می آید  $(R_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)})$  به ترتیب زیر عمل می شود:

باتوجه به این که  $X^0$  یک متغیر تاریخچه ای نیست و به صورت معمول به منظور جلوگیری از سرریزشدگی عددی در آغاز هر گام یک در نظر گرفته می شود، شعاع

از یک چهارم گام مومسانی چه اثری بر دقت پاسخ‌ها می‌گذارد. برای رسیدن به این منظور دو تاریخچه بارگذاری کرنش معلوم در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱ و ۲)، سپس تنش‌های وابسته برای دو ماده زیر به هنگام می‌گردد [9].

در دو تاریخچه کرنش که در شکل‌های (۱ و ۲) آورده شده‌اند، سایر مؤلفه‌های کرنش صفر می‌باشند. عامل  $\epsilon_{y0}$  کرنش نخستین تسلیم را نشان می‌دهد  $(\epsilon_{y0} = \sqrt{\frac{3R_0}{2E}})$ .

ماده ۱:

$R_0 = 15 \text{ MPa}; E = 100 \text{ MPa}; \nu = 0.3; H_{kin} = 10 \text{ MPa}; H_{iso} = 10 \text{ MPa};$

ماده ۲:

$R_0 = 24.3 \text{ MPa}; E = 7000 \text{ MPa}; \nu = 0.3; H_{kin} = 0 \text{ MPa}; H_{iso} = 225 \text{ MPa};$

در گام  $n+1$  برحسب شعاع در گام  $n$  ام محاسبه شود:

$$R_{n+1} = R_0 (X_n^0)^\beta \left(\frac{X_{n+1}^0}{X_n^0}\right)^\beta = R_n \left(\frac{X_{n+1}^0}{X_n^0}\right)^\beta \quad (49)$$

در پایان تنش به هنگام می‌شود و مرکز سطح تسلیم به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\Sigma_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{X_{n+1}^0} \mathbf{X}_{n+1}^s \quad (50)$$

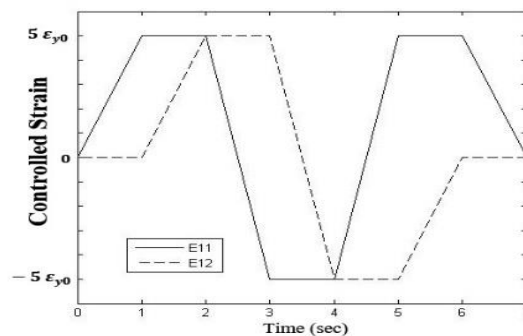
$$\alpha_{n+1} = \frac{H_{kin}}{2G+H_{kin}} (2G\mathbf{e}_{n+1} - \Sigma_{n+1}) \quad (51)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \Sigma_{n+1} + \alpha_{n+1} \quad (52)$$

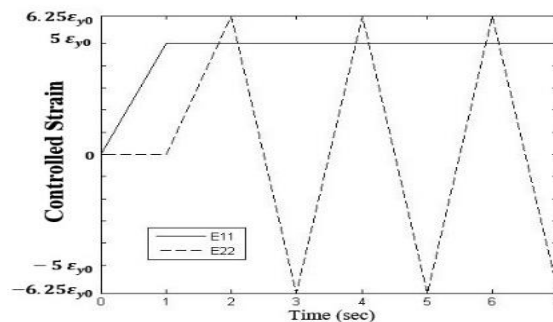
$$\sigma_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + K \cdot \theta_{n+1} \mathbf{i} \quad (53)$$

### آزمون‌های عددی

در این بخش ابتدا روش تابع اولیه گیری یک چهارم گام راستی آزمایی می‌شود سپس بررسی می‌شود که در فرایند به هنگام سازی تنش، برداشت شعاع سطح تسلیم

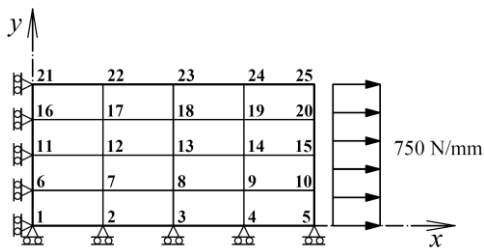


شکل ۱ تاریخچه بارگذاری کرنش ۱ (مسیر ۱)



شکل ۲ تاریخچه بارگذاری کرنش ۲ (مسیر ۲)

صفحه مورد نظر به طول 320 mm و عرض 160 mm و ضخامت یکه می باشد که باتوجه به تقارن می توان یک چهارم صفحه را تحلیل کرد (شکل ۳). بار وارد در یک نمو وارد می گردد و به اندازه کافی بزرگ می باشد تا مصالح وارد ناحیه مومسانی شوند. نتایج حاصل از تحلیل در جدول (۲) آورده شده است که شامل تغییر مکان های گرهی برای  $x$  گره های ۱ تا ۵ می باشد. یافته ها نشان می دهد که پاسخ های به دست آمده با روش یک چهارم گام و برنامه رایانه ای نوشته شده توسط نویسندگان، با پاسخ های به دست آمده با روش اولر پسرو و برنامه FEAP یکسان می باشد و درستی روش تابع اولیه گیری را در حل یک مسئله اجزای محدود نشان می دهد.



شکل ۳ یک چهارم صفحه مستطیلی زیر بار کششی

جدول ۲ مقایسه تغییر مکان های به دست آمده از تحلیل ها (mm)

شماره گره	پاسخ های به دست آمده از روش اجزای محدود	
	روش اولر پسرو	روش یک چهارم گام
1	0.0000	0.0000
2	0.2127	0.2127
3	0.4254	0.4254
4	0.6380	0.6380
5	0.8507	0.8507

بررسی دقت. باتوجه به این که حل دقیق برای این مسئله ها موجود نمی باشد پاسخ های به دست آمده از گام زمانی بسیار کوچک ( $\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{sec}$ )، به عنوان پاسخ های دقیق در نظر گرفته می شود. برای بررسی مناسب دقت نتیجه های به دست آمده، خطای نسبی تنش های به هنگام شده با رابطه زیر محاسبه می گردد:

راستی آزمایی روش یک چهارم گام. به منظور راستی آزمایی روش تابع اولیه گیری یک چهارم گام، تنش ها به وسیله این روش و روش نگاشت نمایی صریح با گام زمانی بسیار کوچک ( $\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{sec}$ ) به هنگام می شوند که باتوجه به اندازه گام بسیار کوچک انتخاب شده باید پاسخ های دو روش یکسان باشند. برای سنجش آسان تر پاسخ های به دست آمده، نرم اقلیدسی تنش ها محاسبه می شوند و سپس میانگین نرم تنش ها در کل مسیر محاسبه می شوند. نتیجه حاصل در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول ۱ مقایسه میانگین نرم تنش ها با روش صریح

مسئله مورد بررسی	میانگین نرم تنش در کل مسیر (MPa)	
	روش صریح	روش یک چهارم گام
ماده ۱ - مسیر ۱	106.6229	106.6229
ماده ۲ - مسیر ۱	143.3956	143.3956
ماده ۱ - مسیر ۲	161.2968	161.2968
ماده ۲ - مسیر ۲	226.3358	226.3358

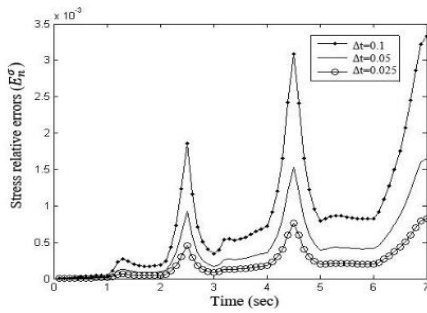
یافته های نشان داده شده در جدول (۱)، درستی روش یک چهارم گام رابطه سازی شده را نشان داده است. همچنین، برنامه نوشته شده برای روش پیشنهادی در یک برنامه اجزای محدود صریح نوشته شده توسط نویسندگان به کار می رود و حل به دست آمده برای یک مسئله مقدار مرزی با پاسخ های نرم افزار اجزای محدود FEAP که از شیوه اولر پسرو بهره می جوید سنجش می گردد. باید دانست روش های تابع اولیه گیری اولر پسرو، نمایی صریح و نیز روش پیشنهادی برای مومسانی وان- مایسز با سخت شوندگی پویای خطی دارای پاسخ های دقیق می باشند. بنابراین، برای یک نوع فولاد کربنی با مشخصه های مکانیکی زیر که تنها برای آن سخت شوندگی پویا در نظر گرفته می شود، یک صفحه مستطیلی زیر بار کششی تحلیل می گردد.

فولاد کربنی:

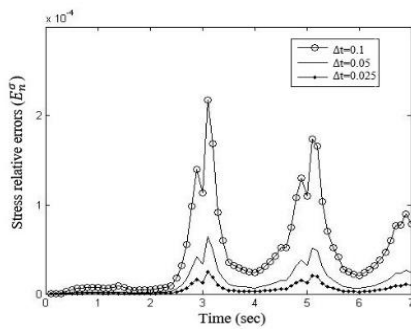
$$R_0 = 106 \text{ MPa}; E = 181330 \text{ MPa}; \nu = 0.302;$$

$$H_{\text{kin}} = 200000 \text{ MPa}; H_{\text{iso}} = 0 \text{ MPa};$$

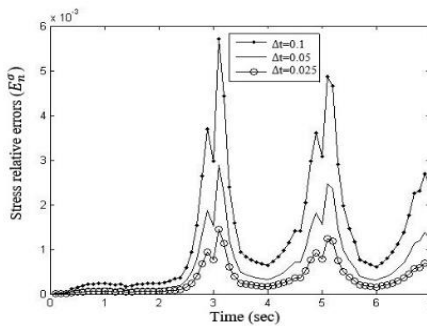




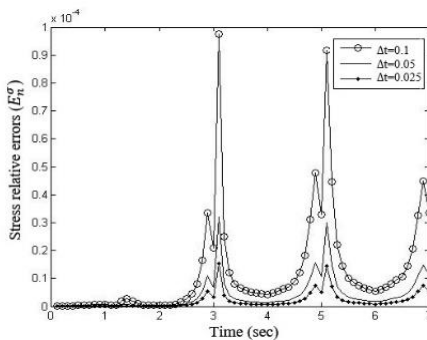
شکل ۷ خطای نسبی تنش  
(یک چهارم گام- ماده ۲- مسیر ۱)



شکل ۸ خطای نسبی تنش (وسط گام- ماده ۱- مسیر ۲)



شکل ۹ خطای نسبی تنش  
(یک چهارم گام- ماده ۱- مسیر ۲)

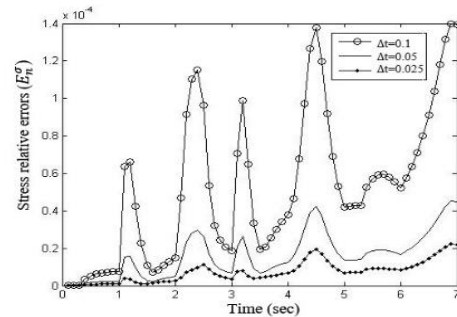


شکل ۱۰ خطای نسبی تنش (وسط گام- ماده ۲- مسیر ۲)

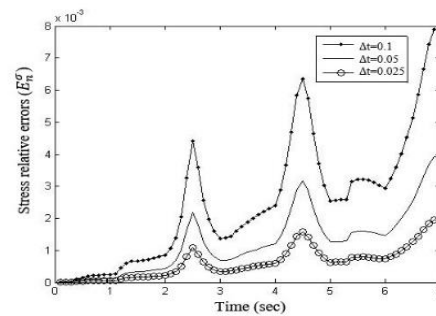
$$E_n^\sigma = \frac{\|\sigma_n - \bar{\sigma}_n\|}{\|\bar{\sigma}_n\|} \quad (54)$$

در رابطه بالا،  $\bar{\sigma}_n$  بردار تنش دقیق و  $\sigma_n$  بردار تنش به هنگام شده در لحظه  $t = t_n$  می باشد.

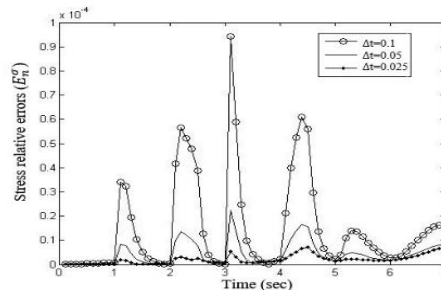
نمودار خطای نسبی برای حالتی که متغیرها از وسط گام مومسانی برداشت می شوند و همچنین برای حالتی که متغیرها از یک چهارم گام مومسانی برداشت می شوند برای گام های زمانی متفاوت در شکل های (۱۱-۴) رسم می شود. در زیر نویس شکل هایی که در ادامه می آیند منظور از m، ماده و p، مسیر می باشد.



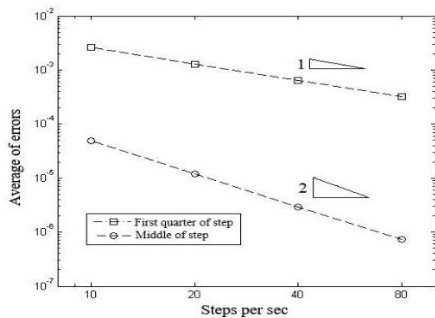
شکل ۴ خطای نسبی تنش (وسط گام- ماده ۱- مسیر ۱)



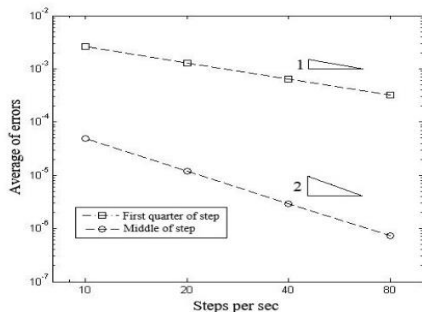
شکل ۵ خطای نسبی تنش  
(یک چهارم گام- ماده ۱- مسیر ۱)



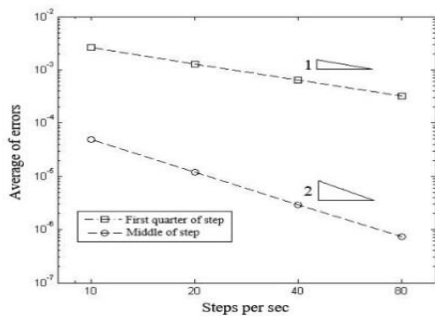
شکل ۶ خطای نسبی تنش  
(وسط گام- ماده ۲- مسیر ۱)



شکل ۱۳ میانگین خطای نسبی تنش در کل مسیر (ماده ۲- مسیر ۱)



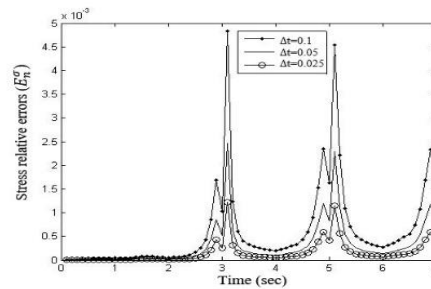
شکل ۱۴ میانگین خطای نسبی تنش در کل مسیر (ماده ۱- مسیر ۲)



شکل ۱۵ میانگین خطای نسبی تنش در کل مسیر (ماده ۲- مسیر ۲)

### نتیجه گیری

در این مقاله، به بررسی روش نگاشت‌نمایی نیمه‌ضمنی برای سخت‌شوندگی‌های درهم همگن و پویای خطی پرداخته شد. برای آن‌که بتوان شعاع را از یک‌چهارم گام مومسانی برداشت نمود، رابطه‌سازی لازم صورت



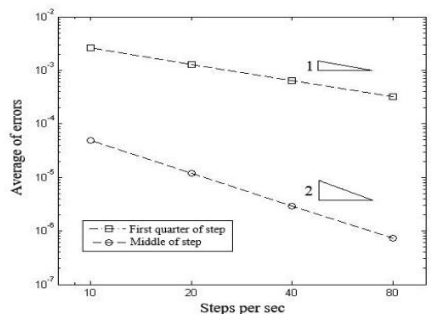
شکل ۱۱ خطای نسبی تنش (یک‌چهارم گام- ماده ۲- مسیر ۲)

همان‌گونه که شکل‌های (۱۱-۴) نشان می‌دهند، هم دقت پاسخ‌ها کمتر شده و هم نرخ هم‌گرایی پاسخ‌ها به پاسخ دقیق کاهش یافته است. به‌منظور بررسی بهتر نرخ هم‌گرایی، میانگین خطای نسبی در کل مسیر با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$E_T^\sigma = \frac{1}{N} \sum \frac{\|\sigma_n - \bar{\sigma}_n\|}{\|\bar{\sigma}_n\|} \quad (55)$$

میانگین خطای نسبی برای گام‌های زمانی متفاوت برای هر یک از حالت‌های برداشت متغیرها، جداگانه محاسبه شده، نمودارهای لگاریتمی آن رسم گردیده و در شکل‌های (۱۲-۱۵) ارائه شده است.

شکل‌های (۱۲-۱۵) به‌روشنی نشان می‌دهند که نرخ هم‌گرایی به پاسخ دقیق درحالتی که متغیرها از وسط گام مومسانی برداشت می‌شود از مرتبه ۲ و برای حالتی که متغیرها از یک‌چهارم گام برداشت می‌شود از مرتبه ۱ است. بنابراین نرخ هم‌گرایی نیز کاهش یافته است.



شکل ۱۲ میانگین خطای نسبی تنش در کل مسیر (ماده ۱- مسیر ۱)

تسلیم از میانه گام مومسانی برداشت می شود دقت پاسخ ها به صورت چشم گیری بیشتر از حالت دوم است که شعاع از یک چهارم گام مومسانی برداشت می شود. همچنین نرخ هم گرایی به پاسخ دقیق برای حالت اول از مرتبه ۲ و برای حالت دوم از مرتبه ۱ می باشد. پژوهش هایی که دقت روش های تابع اولیه گیری از معادله های بنیادی مومسانی را بررسی می کنند از این جهت دارای اهمیت هستند که در تابع اولیه گیری، هرچه دقت روش مورد استفاده افزایش یابد می توان از آن در تحلیل گام های زمانی بزرگ تری استفاده نمود. بنابراین هم چنان که دقت مورد نیاز برآورده می شود، زمان تحلیل کاهش می یابد که یکی از عامل های بسیار مهم در تحلیل و طراحی سازه ها است.

گرفت. آزمون های عددی به این صورت طرح گردید که دو مسیر بارگذاری کرنش معلوم در نظر گرفته شد سپس برای دو ماده پنداشت شده تنش ها به هنگام شدند. در آزمون های عددی، به هنگام سازی تنش در دو حالت صورت پذیرفت. در حالت اول شعاع و متغیرهای مومسانی از وسط گام مومسانی برداشت شد و در حالت دوم متغیرها از یک چهارم گام مومسانی برداشت گردید. در هر حالت، تنش های به هنگام شده برای گام های زمانی متفاوت با پاسخ های دقیق مقایسه گردید، خطای نسبی تنش محاسبه شد و در نمودارهایی ترسیم گردید. برپایه تحلیل های صورت گرفته می توان دریافت که در روش نیمه ضمنی برپایه نگاشت نمایی، در حالت اول که شعاع سطح

## مراجع

1. Wilkins, M.L., "Calculation of Elastic-plastic Flow", Method of Computational physics, Vol. 3, Academic press, (1964).
2. Kreig, R.D. and Kreig, D.B., "Accuracies of Numerical Solution for the Elastic-perfectly Plastic Model", *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 99, No. 4, pp. 510–515, (1977).
3. Ristinmaa, M. and Tryding, J., "Exact Integration of Constitutive Equations in Elastoplasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 15, pp. 2525–2544, (1993).
4. Szabó, L., "A Semi-analytical Integration Model for  $J_2$  Flow Theory of Plasticity with Linear Isotropic Hardening", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 27-29, pp. 2151–2166, (2009).
5. Hong, H-K. and Liu, C-S., "Internal Symmetry in Bilinear Elastoplasticity", *International Journal for Non-Linear Mechanics*, Vol. 34, No. 2, pp. 279–288, (1999).
6. Auricchio, F. and Beirão da Veiga, L., "On a New Integration Scheme for Von-Mises Plasticity with Linear Hardening", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, No. 10, pp. 1375-1396, (2003).
7. Liu, C.-S., "International Symmetry Groups for the Drucker-Prager Material Model of Plasticity and Numerical Integrating Methods", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 14, pp. 3771-3791, (2004).
8. Artioli, E., Auricchio, F. and Beirão da Veiga, L., "Integration Scheme for Von-Mises Plasticity Models based on Exponential Maps: Numerical Investigations and Theoretical Considerations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64, No. 9, pp. 1133-1165, (2005).
9. Artioli, E., Auricchio, F. and Beirão da Veiga, L., "A Novel 'Optimal' Exponential-based Integration Algorithm for Von-Mises Plasticity with Linear Hardening: Theoretical Analysis on yield

- Consistency, Accuracy, Convergence and Numerical Investigations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 4, pp. 449-498, (2006).
10. Artioli, E., Auricchio, F. and Beirão da Veiga, L., "Second-order Accurate Integration Algorithms for Von-Mises Plasticity with a Nonlinear Kinematic Hardening Mechanism", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 9, pp. 1827-1846, (2007).
  11. Rezaiee-Pajand, M. and Nasirai, C., "Accurate Integration Scheme for Von-Mises Plasticity with Mixed-Hardening based on Exponential Maps", *Engineering Computations*, Vol. 24, No. 6, pp. 608-635, (2007).
  12. Rezaiee-Pajand, M. and Nasirai, C., "On the Integration Scheme for Drucker-Prager's Elastoplastic Models based on Exponential Maps", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, No. 10, pp. 799-826, (2008).
  13. Rezaiee-Pajand, M., Nasirai, C. and Sharifian, M., "Application of Exponential-based Methods in Integrating the Constitutive Equations with Multi-component Nonlinear Kinematic Hardening", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 136, No. 12, pp. 1502-1518, (2010).
  14. Rezaiee-Pajand, M., Nasirai, C. and Sharifian, M., "Integration of Nonlinear Mixed Hardening Models", *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, Vol. 7, No. 3, pp. 266-305, (2011).
  15. Rezaiee-Pajand, M. and Sharifian, M., "A novel Formulation for Integrating Nonlinear Kinematic Hardening Drucker-Prager's Yield Condition", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 31, No. 1, pp. 163-178, (2011).
  16. Rezaiee-Pajand, M. Sharifian, M. and Sharifian, M., "Accurate and Approximate Integrations of Drucker-Prager Plasticity with Linear Isotropic and Kinematic Hardening", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 30, No. 3, pp. 345-361, (2011).
  17. Rezaiee-Pajand, M., Auricchio, F., Sharifian, M. and Sharifian, M., "Computational Plasticity of Mixed Hardening Pressure-dependency Constitutive Equations", *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 6, pp. 1699-1733, (2013).

پیوست

در این بخش چگونگی دست‌یابی به دستگاه رابطه زیر بیان می‌گردد [11]:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (56)$$

از ترکیب دو رابطه (۶ و ۷) و مشتق‌گیری نسبت به زمان رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\Sigma} + \dot{\alpha} + 2G\dot{e}^p = 2G\dot{e} \quad (57)$$

سپس، رابطه (۱۲) در (۵۷) قرار داده می‌شود:

$$\dot{\Sigma} + (2G + H_{kin})\dot{e}^p = 2G\dot{e} \quad (58)$$

و رابطه‌های (۱۰ و ۱۱) در رابطه بالا جایگذاری می‌گردد:

$$\dot{\Sigma} + (2G + H_{kin})\frac{\Sigma}{R}\dot{\gamma} = 2G\dot{e} \quad (59)$$

رابطه کنونی به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\dot{\Sigma} = 2G\dot{e} - (2G + H_{kin})\bar{\Sigma}\dot{\gamma} \quad (60)$$

از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق گرفته می‌شود، با جایگذاری رابطه (۹) در آن می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$\ddot{\Sigma} + \frac{2G+H_{iso}+H_{kin}}{R}\dot{\gamma}\bar{\Sigma} = \frac{2G}{R}\dot{e} \quad (61)$$

فاکتور تابع اولیه گیری  $X^0$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{d}{dt}(X^0\bar{\Sigma}) = \frac{2G}{R}X^0\dot{e} \quad (62)$$

در این رابطه، مشتق‌گیری نسبت به زمان انجام می‌شود و رابطه به دست آمده بر  $X^0$  تقسیم می‌گردد:

$$\dot{\Sigma} + \frac{\dot{X}^0}{X^0}\bar{\Sigma} = \frac{2G}{R}\dot{e} \quad (63)$$

مقایسه (۶۱ و ۶۳) و جایگذاری (۹) نتیجه زیر را در بردارد:

$$\frac{\dot{X}^0}{X^0} = \frac{2G+H_{iso}+H_{kin}}{R_0+H_{iso}\gamma}\dot{\gamma} \quad (64)$$

پاسخ معادله بالا با شرط اولیه  $X^0(0) = 1$  به صورت زیر خواهد بود:

$$X^0(\gamma) = \begin{cases} \left(1 + \frac{H_{iso}}{R_0}\gamma\right)^{\frac{(2G+H_{kin}+H_{iso})}{H_{iso}}} & H_{iso} \neq 0 \\ \exp\left(\frac{(2G+H_{kin})}{R_0}\gamma\right) & H_{iso} = 0 \end{cases} \quad (65)$$

باتوجه به تعریف بردار تنش افزوده در (۱۵) و رابطه (۶۲)، رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{\mathbf{X}}^s = \frac{2G}{R} X^0 \mathbf{e} \quad (66)$$

چون در محدوده کشسانی  $\dot{\gamma} = 0$  می باشد، با نگاهی به (۶۴):

$$\dot{X}^0 = 0 \quad (67)$$

در محدوده مومسانی که  $X^0$  ثابت نیست، (۶۳) را در  $\bar{\Sigma}^T$  ضرب نموده و رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{\Sigma}\|^2 + \frac{\dot{X}^0}{X^0} \|\bar{\Sigma}\|^2 = \frac{2G}{R} \mathbf{e}^T \bar{\Sigma} \quad (68)$$

از آنجا که  $\bar{\Sigma} = 1$  می باشد پس از ضرب  $X^0$  در (۶۸)، این رابطه به شکل زیر در می آید:

$$\dot{X}^0 = \frac{2G}{R} \mathbf{e}^T \mathbf{X}^s \quad (69)$$

چنانچه شکل فشرده  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$  در نظر گرفته شود، با نگاهی به رابطه های (۲۶-۲۹) ماتریس  $\mathbf{A}$  به راحتی محاسبه می گردد:

$$\mathbf{A}_e = \frac{2G}{R} \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{9 \times 9} & \mathbf{e}_{9 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 9} & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (70)$$

$$\mathbf{A}_p = \frac{2G}{R} \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{9 \times 9} & \mathbf{e}_{9 \times 1} \\ \mathbf{e}_{1 \times 9}^T & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (71)$$