

**تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی به وسیله حل معکوس\***پرویز ملک‌زاده<sup>(۳)</sup>محمد رضا گل‌بهار حقیقی<sup>(۲)</sup>مریم شمس<sup>(۱)</sup>

**چکیده** در این مقاله پارامترهای مکانی و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای و گسترده متغیر با زمان برای یک ورق مستطیلی مدرج تابعی به وسیله الگوریتم معکوس بر مبنای روش گرادیان مزدوج تخمین زده خواهد شد. این کار به وسیله اندازه‌گیری دما روی مرزهای ورق انجام می‌گیرد. فرض بر این است که هیچ اطلاع اولیه‌ای از مکان منبع و تابع شدت منبع حرارتی در دسترس نیست، بنابراین روند تخمین با یک حدس اولیه دلخواه آغاز می‌گردد. برای گسسته‌سازی معادلات حاکم از روش اجزای محدود برای مشتقات مکانی و روش کرنک نیکلسون برای گسسته‌سازی مشتقات زمانی استفاده گردیده است. در این مقاله برای اولین بار به تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی، پرداخته شده است. علاوه بر این در تخمین منبع حرارتی، هم منبع نقطه‌ای و هم منبع گسترده مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

**واژه‌های کلیدی** مواد مدرج تابعی، انتقال حرارت، روش گرادیان مزدوج، مسائل معکوس، منبع حرارتی.

### Simultaneous Estimation of Location and Strength of a Heat Source in a Functionally Graded Plate by Inverse analysis

M. Shamsa

M.R. Golbahar Haghighi

P. Malekzadeh

**Abstract** In this article, an inverse algorithm based on the conjugate gradient method is applied to estimate the unknown location and time-wise varying strength of the point and distributed heat source in functionally graded rectangular plate from the knowledge of temperature measurements taken from the boundaries of plate. It is assumed that no prior information is available on the functional form of time-wise variation of the heat source strength so estimation process starts with an arbitrary initial guess. The conjugate gradient method is employed for optimization process and the finite element method is applied to solve the governing differential equations. Results show that the estimation of location and strength of point heat source can be obtained with any arbitrary initial guesses.

**Key Words** Functionally Graded Materials, Heat Transfer, Conjugate Gradient Method, Inverse Problems, Heat Source.

\* تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۰/۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۵/۲ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.61392

(۱) کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر.

(۲) نویسنده مسئول: دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر golbahar@pgu.ac.ir

(۳) استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر.

## مقدمه

مواد هدفمند مواد غیرهمگنی می‌باشند که برای بهینه‌کردن تنش و مقاومت حرارتی و توزیع دما در اجزا و سازه‌هایی که در معرض حرارت بالا یا بار مکانیکی قرار گرفته‌اند مورد استفاده قرار می‌گیرند. مواد مدرج تابعی از انواع مواد پیشرفته با ریزساختار ناهمگن می‌باشند که نوع رایج آن ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به دست می‌آیند. تفاوت این مواد با مواد مرکب لایه‌ای سنتی در این است که در مواد لایه‌ای خواص مواد سازنده آنها به صورت لایه‌ای از یک لایه به لایه دیگر تغییر می‌کرد در صورتی که در مواد مدرج تابعی خواص به صورت پیوسته و تدریجی بر حسب متغیر مکانی (معمولاً در راستای ضخامت) تغییر می‌کنند و با توجه به نوع مواد به کاررفته و نحوه قرارگیری ذرات ماده در آنها، از مقاومت حرارتی و مکانیکی بالایی نسبت به سایر مواد برخوردار می‌باشند. این ویژگی‌ها سبب شده است که از این مواد در ساخت سازه‌ها و ماشین‌آلات خاص از جمله در صنایع فضایی که نیاز به اجزایی با وزن پایین و مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا می‌باشد، استفاده گردد. این مواد در ساخت صفحات و پوسته‌های مخازن راکتورها و توربین‌ها و دیگر اجزای ماشین‌ها نیز کاربرد بسیاری پیدا کرده‌اند؛ زیرا این قطعات توانایی بالایی در برابر شکست ناشی از کماتش حرارتی دارند.

در مسائل کلاسیک به طور معمول با داشتن شرایط اولیه و شرایط مرزی از یک مدل فیزیکی، به بررسی تأثیرات این شرایط بر میدان حل پرداخته می‌شود. برای مثال در صنایع پیشرفته ساخت نازل موشک، دانستن شار حرارتی وارد بر بدنه نازل از اهمیت فراوانی برخوردار است زیرا وجود شار حرارتی بالا در این ناحیه باعث زیاد شدن قطر گلوگاه نازل و در نتیجه

کاهش کارایی پيشران نازل می‌شود که در نهایت، این عوامل کارایی موتور را کاهش می‌دهند.

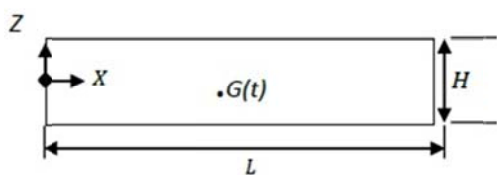
در برخی مسائل اندازه‌گیری مستقیم برخی مقادیر به روش تجربی، به دو دلیل امکان‌پذیر نمی‌باشد. اولاً در بعضی موارد دمای سطوح داخلی مورد اندازه‌گیری به اندازه‌ای بالاست که حسگرها قادر به تحمل و اندازه‌گیری نمی‌باشند (مثلاً وجود دمای بالای ۳۰۰۰ درجه سانتی‌گراد در موشک‌ها)، ثانیاً در بعضی از موارد، وسایل مورد استفاده برای اندازه‌گیری بسیار پیچیده و پرهزینه می‌باشند که شاید برآوردن هدف مورد نظر از آن سیستم مقرون به صرفه نباشد. از این رو در سال‌های اخیر تحقیقاتی بر روی مسائل انتقال حرارت انجام گرفته که نتایج آن منجر به ایجاد روشی جایگزین گردیده است. به طور کلی مسائل انتقال حرارت را می‌توان به دو دسته مستقیم و معکوس تقسیم‌بندی نمود. امروزه برای تعیین برخی از پارامترهای حرارتی، از روش‌های معکوس استفاده می‌شود. استفاده از روش‌های معکوس وقتی ارزشمند است که اندازه‌گیری مستقیم پارامترهای حرارتی غیرممکن و یا پرهزینه باشد. در مسائل انتقال حرارت با روش مستقیم (Direct heat transfer problems) هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه و همچنین خواص ترموفیزیکی معلوم است و هدف محاسبه توزیع دما در داخل ناحیه مورد بررسی با استفاده از حل معادلات حاکم می‌باشد؛ در حالی که در مسائل انتقال حرارت معکوس (Inverse heat transfer problems) تعدادی از این اطلاعات نامعلوم می‌باشند و هدف تخمین آنها با استفاده از دماهای اندازه‌گیری شده در مرزهای ناحیه مورد بررسی می‌باشد. در این روش حجم محاسبات تجربی مورد نیاز برای به دست آوردن کمیت‌های ترموفیزیکی نظیر منابع حرارتی، خواص حرارتی مواد، شرایط مرزی درگیر یا توزیع شارهای حرارتی به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

با مواد همگن را بررسی کردند. آنها از روش المان مرزی برای حل عددی معادلات استفاده نمودند. لفور و لی نیلوت [8] در سال ۲۰۰۲ مسئله گذرای تخمین معکوس منبع حرارتی ساکن و متحرک را در مواد همگن و به صورت دوبعدی و سه‌بعدی بررسی کردند. لفور و لی نیلوت [9] در سال ۲۰۰۲ مسئله تعیین منبع‌های حرارتی گذرای نقطه‌ای را در مواد همگن و در دو بعد بررسی کردند. در این مسئله از روش المان مرزی برای حل عددی معادلات استفاده گردیده است. لی نیلوت و همکاران [10] در سال ۲۰۰۴ از روش تخمین پارامتر برای حل معکوس مسئله منبع حرارتی نقطه‌ای استفاده کردند. آنها حوزه کاری را همگن و محل و شدت منبع حرارتی را ثابت در نظر گرفتند. زوکو و همکاران [11] در سال ۲۰۰۶ از یک روش شبیه‌سازی شبکه‌ای برای مشخص کردن ترم منبع حرارتی وابسته به زمان برای یک مسئله دوبعدی انتقال حرارت با مواد همگن استفاده کردند. لیو [12] در سال ۲۰۰۷ از روش پرتابی برای تخمین شدت یک منبع حرارتی صفحه‌ای در یک مسئله هدایت‌گذرای یک‌بعدی با مواد همگن استفاده کرد. لیو [13] در سال ۲۰۰۸ از الگوریتم ژنتیک اصلاح‌شده برای حل مسئله معکوس تخمین یک منبع حرارتی در یک بعد استفاده کرد. در این مسئله ماده مورد بررسی همگن و منبع حرارتی فقط به صورت تابعی از زمان در نظر گرفته شده است. لیانگ و همکاران [14] در سال ۲۰۰۸ یک روش عددی اساسی بدون شبکه را برای تخمین منبع‌های حرارتی بررسی کردند. آنها حوزه کاری را یک‌بعدی و همگن و منبع حرارتی را فقط به صورت تابعی از زمان تعریف کردند. نیلی احمدآبادی و همکاران [15] در سال ۲۰۰۹ روش حل‌های پایه‌ای را برای حل مسئله معکوس تخمین منبع حرارتی تابع مکان در یک مسئله یک‌بعدی با مواد همگن مورد بررسی قرار دادند. میرزویسزاک و کولدزیج [16] در سال ۲۰۱۰ موضوع کاربرد روش حل‌های اساسی و توابع اساسی شعاعی را

درزمینه تخمین منبع حرارتی به‌روش معکوس، سیلوانتو و اوزیسیک [1] در سال ۱۹۹۳ مسئله یک‌بعدی تخمین یک منبع حرارتی تابع زمان و مکان را در مواد همگن بررسی کردند. آنها شرایط مرزی را به صورت دو مرز عایق در نظر گرفتند و از روش گرادپانی مزدوج به همراه مسئله الحاقی برای حل مسئله معکوس استفاده کردند. پاسکوتی و پتیت [2] در سال ۱۹۹۴ مسئله معکوس انتقال حرارت‌گذاری دوبعدی را بوسیله روش المان مرزی بررسی کردند. آنها دما و شار حرارتی را در مواد همگن و در مرزهایی که دارای زوایای کمتر از ۱۸۰ درجه بود، تخمین زدند. یانگ [3] در سال ۱۹۹۷ از روش خطی خطای حداقل مربعات برای حل مسئله دوبعدی تخمین شدت یک منبع حرارتی خطی استفاده کرد. او ماده مورد بررسی را همگن و منبع حرارتی را به صورت تابعی از زمان و مکان در نظر گرفت. کرمی و همتیان [4] در سال ۲۰۰۰ روش المان مرزی را برای تخمین شدت یا محل منبع های حرارتی نقطه‌ای چندگانه در حالت پایا و برای مسائل دوبعدی، ارائه دادند. آنها برای حل مسئله معکوس یک الگوریتم به نام همسایه خوب پیشنهاد نمودند. البته با این روش نمی‌توان هم‌زمان محل و شدت منبع حرارتی را تعیین نمود. سو و همکاران [5] در سال ۲۰۰۱ مسئله تخمین معکوس یک منبع حرارتی را در مختصات استوانه‌ای بررسی کردند. آنها منبع تخمینی را در سه حالت تابع زمان، تابع شعاع و تابع زاویه، مورد بررسی قرار دادند. آنها جسم مورد بررسی را همگن در نظر گرفتند و برای حل مسئله معکوس از روش گرادپانی مزدوج استفاده نمودند. نرتشوسر و میلان [6] در سال ۲۰۰۱ مسئله معکوس و گذرای تخمین یک منبع حرارتی متحرک را در یک مدل سه‌بعدی همگن بررسی کردند. در این کار به منظور تخمین منبع از اصل برهم‌نهی استفاده گردیده است. لی نیلوت و لفور [7] در سال ۲۰۰۱ مسئله معکوس تخمین چند منبع حرارتی خطی در یک مسئله دوبعدی

## مدل ریاضی

مسئله مورد نظر یک مسئله انتقال حرارت هدایت دوبعدی در یک ورق نازک مدرج تابعی می باشد که در آن ظرفیت حرارتی، ضریب هدایت و چگالی به عنوان مفروضات مسئله مشخص است. در شکل (۱) هندسه ورق نشان داده شده است. ورق شامل یک منبع حرارتی می باشد که مکان آن ثابت می باشد، اما شدت آن با زمان تغییر می کند. هدف از حل این مسئله، تخمین هم زمان شدت و مکان منبع حرارتی با استفاده از اطلاعات دمای اندازه گیری شده بر حسب زمان در چند نقطه معلوم روی مرز می باشد. ضرورت استفاده از حل معکوس برای حل مسئله حاضر این است که بعضی مواقع امکان تعیین مستقیم مکان و شدت منبع حرارتی وجود ندارد. در مسئله حاضر فرض می شود که حسگرها یک اندازه گیری پیوسته انجام می دهند. بنابراین در معادلات بیان شده در مراحل بعد، دمای اندازه گیری شده توسط حسگرها به عنوان تابعی پیوسته از زمان در نظر گرفته می شود. برای تعیین شدت و مکان منبع حرارتی به وسیله برنامه کامپیوتری ابتدا چند حسگر حرارتی در نقاط مناسب قرار داده می شود. سپس کل بازه زمانی مسئله به زیربازه های کوچک تر تقسیم می شود پس از این که منبع حرارتی شروع به تولید انرژی کرد، تغییرات زمانی دمای نقاطی که حسگر در آنها قرار داده شده است در هر یک از زیربازه های زمانی، به وسیله حسگرها ثبت می شود. آن گاه شدت و مکان منبع حرارتی با استفاده از اطلاعات ثبت شده توسط حسگرها و به کمک حل عددی محاسبه می گردد.



شکل ۱ هندسه ورق

برای حل معکوس مسئله انتقال حرارت دوبعدی ناپایدار بررسی کردند. در این کار، ماده مورد بررسی همگن و منبع حرارتی به صورت تابعی از مکان تعریف شده است. گنگ و لین [17] در سال ۲۰۰۹ از روش تکرار متغیرها برای حل معکوس یک منبع حرارتی استفاده کردند. آنها ماده مورد بررسی را همگن و منبع حرارتی را به صورت تابعی از زمان و مکان در نظر گرفتند. این مسئله به صورت یک بعدی و شرایط مرزی آن به صورت تابعی از مکان بررسی گردید. گلبهار حقیقی و همکاران [18] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از حل معکوس، شار حرارتی را در یک ورق ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی تخمین زده اند. آنها برای حل مستقیم مسئله، از ممزوج کردن دو روش دیفرانسیل کوادریچر و اجزای محدود و برای حل مسئله معکوس از روش گرادیان مزدوج بهره جستند. محمدیون و رحیمی [19] در سال ۲۰۱۱ شار حرارتی نقطه ای را در یک سیستم دو لایه به دست آوردند. آنها برای حل مسئله از روش اختلاقی محدود و برای حل مسئله معکوس از روش گرادیان مزدوج استفاده نمودند. لی و همکاران [20, 21] در سال ۲۰۱۲ در پژوهشی، از حل معکوس برای تخمین شارهای حرارتی نامعلوم متغیر با زمان در سطح درونی و بیرونی یک استوانه توخالی دایروی ساخته شده از مواد هدفمند استفاده نموده اند. آنها از روش تبدیل لاپلاس و اختلاف محدود برای حل مسئله مستقیم و از روش گرادیان مزدوج برای حل مسئله معکوس بهره بردند. براساس اطلاعات نویسندگان، تاکنون در زمینه تخمین هم زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق هدفمند مدرج، پژوهشی صورت نپذیرفته است. لذا در این مقاله برای اولین بار به تخمین هم زمان مکان و شدت منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی، پرداخته شده است. علاوه بر این در تخمین منبع حرارتی، هم منبع نقطه ای و هم منبع گسترده مورد بررسی قرار گرفته اند.

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad (2-ب)$$

$$T = T_i \quad \text{on} \quad x = L, \quad z = H \quad (2-ج)$$

$$T(x, z, 0) = T_0(x, z) \quad (2-د)$$

در معادله (۱) پارامترهای  $T$ ،  $\rho(z)$  و  $c(z)$  به ترتیب دما، چگالی، ظرفیت گرمایی و ضریب هدایت ماده یک نقطه از ماده مدرج تابعی می‌باشد.  $G(t)$  نیز منبع حرارتی نقطه‌ای می‌باشد.

در مسئله مستقیم، منبع حرارتی برای زیربازه‌های زمانی مختلف حدس زده می‌شود و با فرض معلوم بودن منبع حرارتی و داشتن  $\rho(z)$  و  $c(z)$  و  $k(z)$ ، تنها مجهول در معادله (۱) میدان دمای  $T(x, y, t)$  می‌باشد. در این مقاله، از روش اجزای محدود برای گسسته‌سازی معادلات حاکم استفاده گردیده است. لذا با مش‌بندی ورق با استفاده از روش اجزای محدود با حل معادله (۱) و در نظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه در معادلات (۲)، توزیع دما در تمام نقاط ورق به دست می‌آید.

با حل معادله (۱) به روش عددی و در نظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه، میدان دمای  $T(x, y, t)$  بر روی تمام نقاط صفحه به دست آید. با مشخص شدن میدان دمای  $T$  بر روی کل صفحه، دمای محلی که حسگرها قرار دارند یعنی بردار  $T_m$ ، در هر یک از زیربازه‌های زمانی ثبت می‌شود. آن‌گاه توسط حسگر حرارتی دمای واقعی نقاط یعنی  $Y_m$  نیز در هر زیربازه زمانی اندازه‌گیری می‌شود. اکنون از اختلاف بین این دو دما و با استفاده از معادله (۵) مقدار  $J$  محاسبه می‌شود. حال اگر  $J$  از معیار توقف، که در مراحل بعد تعریف خواهد شد کوچک‌تر بود، پس شدت و مکان حدسی، تخمین خوبی برای منبع حرارتی خواهد بود و اگر از معیار توقف بزرگ‌تر بود، الگوریتم حل برای اصلاح کردن شدت و مکان حدسی تا رسیدن به یک تخمین مطلوب، وارد مرحله بعدی می‌شود [26].

## تحلیل معکوس

روند معمول برای حل این مسئله به روش تحلیل معکوس در ذیل بیان شده است.

فرض بر این است که یک حدس اولیه  $x_0$  و  $z_0$  برای مختصات منبع حرارتی در دسترس است.

• روش گرادیان مزدوج به همراه مسئله الحاقی برای تخمین شدت منبع حرارتی  $G(t)$  را به عنوان یک مسئله تخمین تابع، به کار می‌گیریم.

• اکنون شدت منبع حرارتی  $G(t)$  معلوم است و روش گرادیان مزدوج برای تخمین مختصات  $x_0$  و  $z_0$  منبع حرارتی به عنوان یک مسئله تخمین پارامترها، به کار گرفته می‌شود.

• با  $x_0$  و  $z_0$  جدید به دست آمده، مجدداً روش گرادیان مزدوج به منظور تخمین جدید برای  $G(t)$  استفاده می‌گردد. این روند تکراری تا زمانی ادامه می‌یابد که معیار توقف مشخص شده در تخمین  $G(t)$  و  $x_0$  و  $z_0$  ارضا گردد.

## تخمین $G(t)$

**مسئله مستقیم.** یک ورق نازک دوبعدی را که مرزهای آن در شکل (۱) نشان داده شد، در نظر بگیرید. فرض بر این است که خواص حرارتی ورق یعنی ضریب هدایت، ظرفیت حرارتی و چگالی صفحه در راستای  $z$  تغییر می‌کند؛ بنابراین معادله حاکم و شرایط مرزی برای مسئله انتقال حرارت گذرا به صورت معادله (۱) نوشته می‌شود [22].

معادله حاکم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(z) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + G(t) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) = \rho(z) c(z) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

شرایط مرزی و اولیه:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad x = 0 \quad (2-الف)$$

در معادله (۵) پارامترهای  $T_m$  و  $Y_m$  به ترتیب دمای تخمینی الگوریتم حل و دمای اندازه گیری شده در محل قرارگیری حسگرها در زمان دلخواه می باشد.  $T_m$  با قرار دادن مقدار تخمینی  $G_E(t)$  به جای مقدار دقیق منبع حرارتی  $G(t)$  از حل معادله مستقیم (۱) که پیشتر توضیح داده شد، به دست می آید.

روش گرادیان مزدوج به عنوان یک روش شناخته شده برای کمینه سازی تابع هدف که با معادله (۵) مشخص شده است به کار گرفته می شود.

**مسئله حساسیت.** برای تعیین مسئله حساسیت، فرض می شود که شدت منبع حرارتی  $G(t)$  به اندازه  $\Delta G(t)$  افزایش پیدا می کند. در اثر این افزایش، میدان دمای  $T(x, z, t)$  به اندازه  $\Delta T(x, z, t)$  افزایش می یابد. بنابراین با جایگزین کردن  $T(x, z, t)$  با  $T(x, z, t) + \Delta T(x, z, t)$  و  $G(x, z, t)$  با  $G(x, z, t) + \Delta G(x, z, t)$  در معادلات (۱ و ۲) و کم کردن معادلات حاصل، از معادلات اولیه آنها و صرف نظر کردن از ترم های مرتبه دو، مسئله حساسیت به صورت معادله (۶) حاصل می شود.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right) + \Delta G(t) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) = \rho(z) c(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \quad (6)$$

شرایط مرزی و اولیه:

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad x = 0 \quad (7-الف)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad (7-ب)$$

$$\Delta T = 0 \quad \text{on} \quad x = L, \quad z = H \quad (7-ج)$$

$$\Delta T(x, z, t_0) = 0 \quad (7-د)$$

معادلات مسئله حساسیت به همان روش معادلات مسئله مستقیم حل می گردد.

به دلیل پیچیدگی معادلات حاکم از یک روش عددی تقریبی برای حل استفاده می کنیم. خواص حرارتی و فیزیکی مواد مدرج تابعی، به طور پیوسته و به صورت تابعی از توزیع و خواص مواد آن نوشته می شود. استفاده از مدل توانی ساده برای توزیع مواد مدرج تابعی متداول است؛ لذا توزیع توانی خواص ماده مدرج تابعی به صورت معادله (۳) در نظر گرفته می شود.

$$G(z) = G_M + (G_C - G_M)[V_f]^P \quad (3)$$

که در اینجا،

$$V_f = \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{z}{h} \right)^P \right] \quad (4)$$

زیر نویس های  $C$  و  $M$  به ترتیب اشاره به سرامیک و فلز دارند.  $V_f$  تابع توزیع ماده و  $P$  نیز شاخص تابع توزیع می باشد که یک عدد مثبت است. هر کدام از خواص ضریب هدایت، ظرفیت گرمایی و چگالی ماده مدرج تابعی از رابطه (۳) به دست می آید.

**مسئله معکوس.** هدف تحلیل معکوس، پیش بینی شدت و مکان منبع حرارتی متغیر با زمان به وسیله اندازه گیری دما در برخی نقاط در زمان ها و مکان های دلخواه می باشد. فرض بر این است که به جز منبع حرارتی، سایر پارامترها در معادلات (۱ و ۲) معلوم می باشد. از طرفی خواندن دما در برخی نقاط در زمان دلخواه نیز امکان پذیر می باشد. حل این مسائل به وسیله یک روش بهینه سازی انجام می گیرد. طبق این روش با مینیمم سازی تابع مشخص شده در معادله (۵) توابع مجهول به دست می آیند.

$$J[G(t), x^*, z^*] = \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^M [T_m(x, z, t) - Y_m(x, z, t)]^2 dt \quad (5)$$

در ابتدا عبارت انتگرالی دوم در سمت راست معادله (۹) به وسیله انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء ساده می‌شود و سپس شرایط مرزی و اولیه به دست آمده از معادله حساسیت در آن اعمال می‌شود. برای مینیمم کردن تابع هدف، می‌بایست تمام ضرایب در معادله (۹) مساوی صفر قرار داده شود. با مساوی صفر قراردادن ضریب  $\Delta T$ ، معادله ضریب لاگرانژ و شرایط مرزی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(z) \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z) \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) + \rho(z)c(z) \frac{\partial \lambda}{\partial t} + 2[T(x, z, t) - Y(x, z, t)]\delta(x - x_0)\delta(z - z_0) = 0 \quad (10)$$

شرایط مرزی و اولیه:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad x = 0 \quad (11\text{-الف})$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad (11\text{-ب})$$

$$\lambda = 0 \quad \text{on} \quad x = L, \quad z = H \quad (11\text{-ج})$$

$$\lambda(x, z, t) = 0 \quad (11\text{-د})$$

همان‌طور که در معادله (۱۱-د) مشاهده می‌شود، ضریب لاگرانژ در انتهای بازه زمانی صفر است. برای تبدیل این مسئله به یک مسئله مقدار اولیه از تغییر متغیر  $\tau = t_f - t$  استفاده می‌شود. پس از آن مسئله الحاقی نیز به روش مسئله مستقیم حل می‌گردد. در آخر جمله انتگرالی زیر باقی می‌ماند:

$$\Delta \hat{J} = \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^H \lambda \Delta G(t) \delta(x - x^*) \delta(z - z^*) dx dz dt \quad (12)$$

تعریف مشتق جهتی بردار  $\hat{J}$  به صورت معادله (۱۳) می‌باشد.

**مسئله الحاقی و معادله گرادیانی.** برای مشخص کردن مسئله الحاقی از روش ضریب لاگرانژ بهره گرفته می‌شود. در روش ضریب لاگرانژ، تابع هدف همچنان به صورت یک تابع واحد باقی می‌ماند. متغیر ضریب لاگرانژ با نماد  $\lambda(x, z, t)$  تعریف می‌شود. برای استفاده از این روش، ابتدا معادله حاکم که با رابطه (۱) نشان داده شد، در ضریب لاگرانژ ضرب می‌شود؛ سپس از آن روی کل دامنه مکانی و بازه زمانی انتگرال‌گیری می‌شود. عبارت به دست آمده از این عملیات جبری به سمت راست تابع هدف  $J$ ، یعنی معادله (۵) اضافه می‌شود تا معادله (۸) حاصل شود.

$$\begin{aligned} \hat{J}[G(t), x^*, z^*] &= \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^H \sum_{m=1}^M [T_m(x, z, t) - Y_m(x, z, t)]^2 \\ &\quad \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) dx dz dt \\ &\quad + \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^H \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k(z) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + G(t) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) - \rho(z)c(z) \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dz dt \quad (8) \end{aligned}$$

برای ایجاد فرم تغییراتی فرض می‌شود  $T$  به اندازه  $\Delta T$  و  $G(t)$  به اندازه  $\Delta G(t)$  افزایش پیدا می‌کند؛ بنابراین برای ایجاد فرم تغییراتی در معادله (۸)،  $T$  با  $T + \Delta T$ ،  $G(t)$  با  $G(t) + \Delta G(t)$  و  $\hat{J}$  با  $\hat{J} + \Delta \hat{J}$  جایگزین می‌شود. سپس معادله حاصل از معادله (۸) کم می‌شود و سرانجام با صرف‌نظر از عبارات مرتبه دو، فرم تغییراتی  $\hat{J}$  به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \Delta \hat{J} &= \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^H \sum_{m=1}^M 2[T_m(x, z, t) - Y_m(x, z, t)] \Delta T \\ &\quad \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) dx dz dt \\ &\quad + \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^H \lambda \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Delta G(t) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) - \rho(z)c(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right] dx dz dt \quad (9) \end{aligned}$$



$$G^{k+1}(t) = G^k(t) - \beta^k d^k(t) \quad (17)$$

در این معادله  $\beta^k$  اندازه گام جستجو از مرحله  $k$ ام تا مرحله  $k+1$ ام و  $d^k(t)$  جهت گام نامیده می شود. بالانویس  $k$  بر روی هر پارامتر نشان دهنده مرحله تکرار الگوریتم حل می باشد. جهت گام  $d^k(t)$  به صورت معادله (۱۸) تعریف می شود.

$$d^k(t) = J'^k + \gamma^k d^{k-1}(t) \quad (18)$$

در این معادله  $\gamma^k$  ضریب توأم نامیده می شود. ضریب توأم در مرحله اول تکرار صفر در نظر گرفته می شود و در مراحل بعد از رابطه فلچر-ریویز به صورت رابطه (۱۹) به دست می آید [23, 27, 28].

$$\gamma^k = \frac{\int_0^{t_f} (J'^k)^2 dt}{\int_0^{t_f} (J'^{k-1})^2 dt} \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

اندازه گام نیز از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\beta^k = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^M (T_m^k - Y_m^k) \Delta T_m^k dt}{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^M [\Delta T_m^k]^2 dt} \quad (20)$$

**روند تکراری برای روش گرادیان مزدوج**

**به منظور تخمین شدت منبع حرارتی نقطه ای**

برای تخمین مختصات مکان منبع حرارتی، همانند پروسه تکرار که در معادله (۱۷) توضیح داده شد، خواهیم داشت:

$$x_0^{k+1} = x_0^k - \beta_{x_0}^k d_{x_0}^k(t) \quad (21)$$

$$z_0^{k+1} = z_0^k - \beta_{z_0}^k d_{z_0}^k(t) \quad (22)$$

$$\Delta \hat{J} = \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^H J' \Delta G(t) dx dz dt \quad (13)$$

حال از معادلات (۱۲ و ۱۳) می توان معادله گرادیانی را به صورت زیر نتیجه گرفت.

$$J' = \lambda \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) = \lambda(x_0, z_0, t) \quad (14)$$

رابطه (۱۴) معرف مقدار  $\lambda$  در محل منبع حرارتی می باشد.

### تخمین $x_0$ و $z_0$

تخمین  $x_0$  و  $z_0$  یک مسئله تخمین پارامتر است که برای حل آن زیرمسئله های ذیل که با معادلات (۱۵ و ۱۶) مشخص گردیده است، بایستی حل گردد.

**معادلات گرادیانی برای تخمین مکان منبع حرارتی**

**نقطه ای.** برای به دست آوردن معادله گرادیانی به منظور اصلاح مکان حدسی منبع حرارتی نقطه ای، بایستی از معادله (۵) به ترتیب نسبت به  $x_0$  و  $z_0$  مشتق گرفت. بنابراین  $J'_{x_0}$  و  $J'_{z_0}$  به ترتیب به صورت زیر به دست می آیند.

$$J'_{x_0} = \frac{\partial J}{\partial x_0} = 2 \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^M (T_m - Y_m) \frac{\partial T}{\partial x_0} dt \quad (15)$$

$$J'_{z_0} = \frac{\partial J}{\partial z_0} = 2 \int_0^{t_f} \sum_{m=1}^M (T_m - Y_m) \frac{\partial T}{\partial z_0} dt \quad (16)$$

مقادیر  $J'_{z_0}$  و  $J'_{x_0}$  به روش عددی محاسبه می گردند.

**روند تکراری برای روش گرادیان مزدوج**

**به منظور تخمین شدت منبع حرارتی نقطه ای**

روند تکراری برای روش گرادیانی به منظور تخمین تابع  $G(t)$  به وسیله معادله زیر داده می شود.



در این معادله  $\varepsilon$  تلورانس که خطای قابل قبول برای مسئله می‌باشد، برای حل مسئله حاضر باید طوری انتخاب شود که باتوجه به خطاهای اندازه‌گیری، حل مطلوبی به دست آید. حل مطلوب وقتی به دست می‌آید که معیار زیر ارضا شود. در ادامه نتایج برای مقادیر  $\sigma$  از 0 تا 0.2 نشان داده می‌شود.

$$T(x_m, z_m, t_m) - Y(x_m, z_m, t_m) \approx \sigma, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (30)$$

در معادله (30) پارامتر انحراف از معیار خطاهای اندازه‌گیری می‌باشد.  $\varepsilon$  نیز به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon = M\sigma^2 t_f \quad (31)$$

پارامتر  $M$  در معادلات (30 و 31)، تعداد سنسورهای حرارتی می‌باشد.

### نتایج عددی

در این قسمت دقت و صحت روش گرادیان مزدوج که یکی از روش‌های حل مسائل معکوس می‌باشد، برای تخمین شدت و مکان منبع حرارتی در ورق مدرج تابعی، با ارائه جداول و نمودارهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا به بررسی صحت نتایج حاصل از حل مستقیم پرداخته می‌شود و در ادامه نتایج حاصل از حل معکوس ارائه می‌گردد. به منظور به دست آوردن نتایج از پارامترهای بی‌بعد زیر استفاده شده است.

$$t^* = \frac{k_{ave} t_f}{\rho_{ave} c_{ave} L^2}, \quad k^*(z) = \frac{k(z)}{k_{ave}},$$

$$c^*(z) = \frac{c(z)}{c_{ave}}, \quad \rho^*(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_{ave}},$$

$$T^* = \frac{T}{G_{max} L^2 / k_{ave}}, \quad L^* = \frac{H}{L},$$

$$G^*(t) = \frac{G(t)}{G_{max}} \quad (32)$$

در معادلات  $\beta^k$  اندازه گام جستجو از مرحله  $k$ ام تا مرحله  $k+1$ ام و  $d^k(t)$  جهت گام نامیده می‌شود. بالانویس  $k$  بر روی هر پارامتر نشان‌دهنده مرحله تکرار الگوریتم حل می‌باشد. جهت گام  $d^k(t)$  به صورت معادله زیر تعریف می‌شود.

$$d_{x_0}^k(t) = J_{x_0}^k + \gamma_{x_0}^k d_{x_0}^{k-1}(t) \quad (23)$$

$$d_{z_0}^k(t) = J_{z_0}^k + \gamma_{z_0}^k d_{z_0}^{k-1}(t) \quad (24)$$

در این معادله  $\gamma_{\alpha}^k (\alpha = x_0, z_0)$  در مرحله اول تکرار صفر در نظر گرفته می‌شود و در مراحل بعد از رابطه فلچر- ریویز به صورت زیر به دست می‌آید [23-25].

$$\gamma_{x_0}^k = \frac{\int_0^{t_f} (J_{x_0}^k)^2 dt}{\int_0^{t_f} (J_{x_0}^{k-1})^2 dt} \quad k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

$$\gamma_{z_0}^k = \frac{\int_0^{t_f} (J_{z_0}^k)^2 dt}{\int_0^{t_f} (J_{z_0}^{k-1})^2 dt} \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

اندازه گام نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\beta_{x_0}^k = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^M [T_m^k - Y_m^k] \left\{ d_{x_0}^k \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x_0} \right) \right\} dt}{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^M \left\{ d_{x_0}^k \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x_0} \right) \right\}^2 dt} \quad (27)$$

$$\beta_{z_0}^k = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^M [T_m^k - Y_m^k] \left\{ d_{z_0}^k \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z_0} \right) \right\} dt}{\int_0^{t_f} \sum_{m=1}^M \left\{ d_{z_0}^k \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z_0} \right) \right\}^2 dt} \quad (28)$$

معیار توقف برای روش گرادیانی مزدوج. معیار توقف برای روش گرادیانی مزدوج، به وسیله رابطه (29) تعریف می‌شود [29].

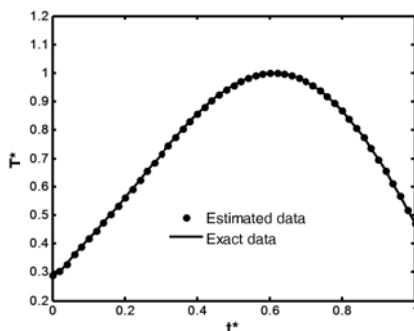
$$J < \varepsilon \quad (29)$$

هم‌گرایی سریع روش و هم‌خوانی بسیار نزدیک آن با جواب‌های مرجع [30] قابل مشاهده است. همچنین می‌توان دید که ابعاد شبکه ۱۰×۱۰ برای به‌دست آوردن جواب‌های همگرا شده قابل قبول کافی است.

به‌منظور نمایش صحت حل مستقیم، نمونه‌ای از کانتورهای توزیع دما در شکل (۲) مربوط به مثال (۲) نمایش داده می‌شود.

**نتایج تخمین منبع حرارتی نقطه‌ای.** در این بخش در قسمت اول فرض بر این است که مکان منبع حرارتی در مسئله ما معلوم است اما شدت منبع مجهول می‌باشد؛ لذا به ارائه نتایج براساس این شرایط می‌پردازیم. در قسمت دوم فرض بر این است که علاوه بر شدت منبع حرارتی، مکان منبع نیز مجهول می‌باشد؛ لذا به تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای می‌پردازیم. برای ارزیابی توانایی الگوریتم ارائه در تخمین شدت منبع حرارتی، توابع مختلفی را انتخاب می‌کنیم. در مثال اول تابع دقیق منبع حرارتی را به‌صورت رابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$G(t) = \begin{cases} 2G_0 \left( \frac{t}{t_f} \right), & 0 \leq \frac{t}{t_f} \leq 0.5 \\ 2G_0 \left( 1 - \frac{t}{t_f} \right), & 0.5 \leq \frac{t}{t_f} \leq 1 \end{cases} \quad (38)$$



شکل ۲ مقایسه مقدار دقیق و تخمینی دما در مثال ۲ ( $\sigma = 0$ )

ماده مورد بررسی به‌صورت ترکیبی از سرامیک و فلز انتخاب گردیده است که خواص مادی هر کدام در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱ خواص ترموفیزیکی مواد

ماده	c(J/kgK)	k(W/mK)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
SiC	670	65	3100
Al	896	233	2702

**بررسی صحت نتایج.** طبق بررسی نویسنده، تاکنون تحلیل ورق نازک مدرج تابعی برای تخمین هم‌زمان مکان و شدت منبع حرارتی نقطه مورد بررسی قرار نگرفته است؛ لذا به‌علت نبود کارهای انجام‌شده در این زمینه، برای اثبات صحت نتایج روش حل مستقیم می‌توان در یک حالت خاص با اعمال منبع حرارتی سطحی، نتایج را با مرجع [30] مقایسه نمود؛ لذا ابتدا به مقایسه نتایج به‌دست آمده از حل عددی و نتایج ارائه‌شده توسط ردی [30] می‌پردازیم. شرایط مرزی و اولیه ورق در این مرجع، به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{on } x = 0 \quad (33\text{-الف})$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (34\text{-ب})$$

$$T = 0 \quad \text{on } x = L, z = H \quad (35\text{-ج})$$

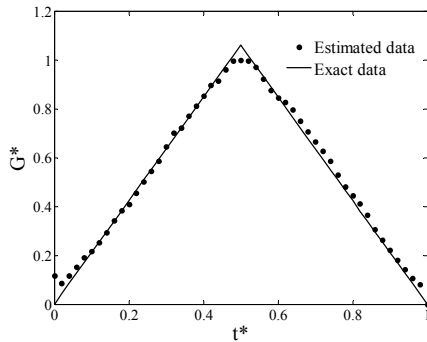
$$T(x, z, 0) = 0 \quad (36\text{-د})$$

از مقادیر بدون بعد زیر در مرجع [30] استفاده گردیده است.

$$H = 1, \quad k = 1, \quad G(t) = 1, \quad L = 1 \quad (37)$$

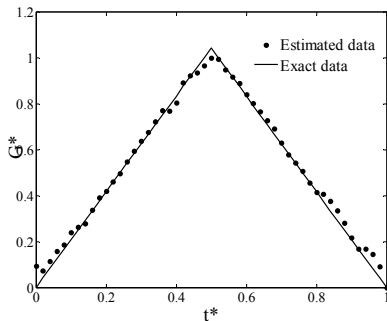
جدول ۲ مقایسه نتایج توزیع دما با مرجع [30]

ابعاد شبکه	T*		
	T(0,0)	T(L/2, 0)	T(L/2, H/2)
2 × 2	0.3107	0.2410	0.1927
4 × 4	0.2984	0.2322	0.1838
8 × 8	0.2956	0.2300	0.1818
10 × 10	0.2953	0.2298	0.1816
12 × 12	0.2953	0.2298	0.1816
[29]	0.2947	0.2293	0.1811



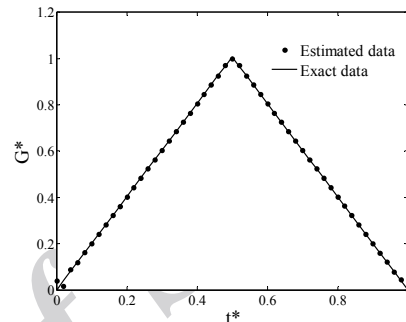
شکل ۵ مقایسه مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی

نقطه‌ای مثال ۱ (σ = 0.2)



شکل ۶ مقایسه مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی

نقطه‌ای مثال ۱ (σ = 0.3)



شکل ۳ مقایسه مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی

نقطه‌ای مثال ۱ (σ = 0)

جدول ۳ نتایج تخمین شدت منبع حرارتی برای انحراف

معیارهای مختلف (مثال ۱)

σ	دفعات تکرار	زمان محاسبات (ثانیه)	درصد خطا
0	18	4.23	0.89
0.1	4	3.94	1.1
0.2	3	3.94	6.83
0.3	2	3.93	7.45

در جدول (۳) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه شده براساس رابطه زیر برای انحراف معیارهای مختلف مثال اول آورده شده است.

$$\text{Error} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{N_t} |G(i) - G_{\text{exact}}(i)|}{G_{\text{exact}}(i)} \div N_t \right] \times 100 \quad (39)$$

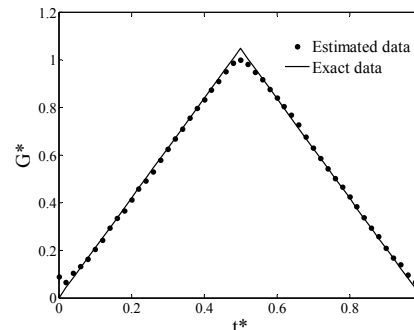
در مثال دوم تابع دقیق منبع حرارتی را به صورت رابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$G(t) = G_0(t) \sin\left(\frac{\pi t}{t_f}\right) \quad (40)$$

مختصات مکان منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطه زیر است.

$$x_0(\text{exact}) = 0.25 \quad (41)$$

$$z_0(\text{exact}) = 0.25$$



شکل ۴ مقایسه مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی

نقطه‌ای مثال ۱ (σ = 0.1)

در مثال سوم تابع دقیق منبع حرارتی نقطه‌ای را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$G(t) = \begin{cases} 3G_0 \left(\frac{t}{t_f}\right) & 0 \leq \frac{t}{t_f} \leq \frac{1}{3} \\ G_0 & \frac{1}{3} \leq \frac{t}{t_f} \leq \frac{2}{3} \\ 3G_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right) & \frac{2}{3} \leq \frac{t}{t_f} \leq 1 \end{cases} \quad (44)$$

مختصات مکان منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطه زیر است.

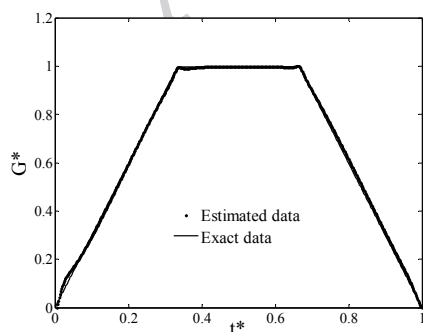
$$\begin{aligned} x_0(\text{exact}) &= 0.25 \\ z_0(\text{exact}) &= 0.25 \end{aligned} \quad (45)$$

در شکل (۸) شدت منبع حرارتی نقطه‌ای تخمین زده شده مثال سوم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار  $(\sigma = 0)$  نشان داده شده است.

مختصات به دست آمده برای مکان منبع حرارتی بعد از ۲۶ مرحله تکرار به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} x_0(\text{exact}) &= 0.2498 \\ z_0(\text{exact}) &= 0.2498 \end{aligned} \quad (46)$$

در جدول (۵) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه شده برای انحراف معیار  $(\sigma = 0)$  برای شدت و مکان مثال سوم آورده شده است.



شکل ۸ مقایسه مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۳  $(\sigma = 0)$

حدس اولیه برای تخمین مکان منبع حرارتی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

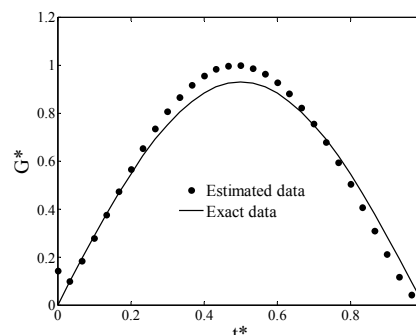
$$\begin{aligned} x_0(\text{exact}) &= 0.2 \\ z_0(\text{exact}) &= 0.2 \end{aligned} \quad (42)$$

در شکل (۷) شدت منبع حرارتی نقطه‌ای تخمین زده شده مثال دوم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار  $(\sigma = 0)$  مقایسه شده است.

مختصات به دست آمده برای مکان منبع حرارتی بعد از ۵ مرحله تکرار به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} x_0(\text{exact}) &= 0.2402 \\ z_0(\text{exact}) &= 0.2402 \end{aligned} \quad (43)$$

در جدول (۴) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه شده برای انحراف معیار  $(\sigma = 0)$  برای شدت و مکان مثال دوم آورده شده است.



شکل ۷ مقایسه مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی نقطه‌ای مثال ۲  $(\sigma = 0)$

جدول ۴ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای (مثال ۲)

$\sigma = 0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات (ثانیه)	درصد خطا
$G(t)$	5	92.89	2.51
$x$	5	92.89	3.94
$z$	5	92.89	3.94

جدول ۵ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی نقطه‌ای (مثال ۳)

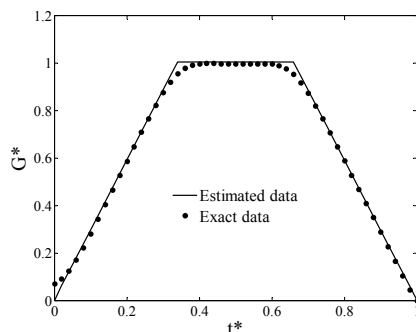
$\sigma = 0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات (ثانیه)	درصد خطا
G(t)	26	84.47	0.44
x	26	84.47	0.09
z	26	84.47	0.09

حدس اولیه برای تخمین این پارامترها را نیز به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$x_0(\text{exact})=0.7 \quad (50)$$

$$z_0(\text{exact})=0.7$$

نتایج تخمین منبع حرارتی گسترده. در این بخش فرض بر این است که علاوه بر شدت منبع حرارتی گسترده، پارامترهایی از مکان منبع نیز مجهول می‌باشد، لذا به تخمین هم‌زمان این پارامترهای مکانی و شدت منبع حرارتی گسترده می‌پردازیم.



شکل ۹ مقایسه مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی گسترده مثال ۴ برای  $(\sigma = 0)$

عبارت منبع حرارتی در معادله حاکم (۱) برای منبع حرارتی گسترده به صورت رابطه زیر است:

$$G(x, z, t) = G^*(t)F(x, z; x_0, z_0) \quad (47-f)$$

$$F(x, z; x_0, z_0) = (x + x_0)^2 + (z + z_0)^2 \quad (47-b)$$

در رابطه (۴۷)،  $x_0$  و  $z_0$  معرف پارامترهای مکانی مجهول منبع حرارتی گسترده می‌باشند. در این بخش هدف تخمین  $G^*$ ،  $x_0$  و  $z_0$  به صورت هم‌زمان می‌باشد. در مثال چهارم تابع دقیق منبع حرارتی گسترده را به صورت رابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$x_0(\text{exact})=0.4865 \quad (51)$$

$$z_0(\text{exact})=0.5242$$

در جدول (۶) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه شده برای انحراف معیار  $(\sigma = 0)$  برای شدت و مکان مثال چهارم آورده شده است.

$$G^*(t) = \begin{cases} 3G_0 \left(\frac{t}{t_f}\right) & 0 \leq \frac{t}{t_f} \leq \frac{1}{3} \\ G_0 & \frac{1}{3} \leq \frac{t}{t_f} \leq \frac{2}{3} \\ 3G_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right) & \frac{2}{3} \leq \frac{t}{t_f} \leq 1 \end{cases} \quad (48)$$

جدول ۶ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی مثال ۴

$\sigma = 0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات (ثانیه)	درصد خطا
G(t)	2915	84.67	1.17
x	2915	84.67	2.76
z	2915	84.67	4.61

پارامترهای مجهول مکانی منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطه زیر است.

$$x_0(\text{exact})=0.5 \quad (49)$$

$$z_0(\text{exact})=0.5$$

مختصات به دست آمده برای پارامترهای مکانی منبع حرارتی بعد از ۱۹۹۵ مرحله تکرار به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} x_0(\text{exact}) &= 0.4911 \\ z_0(\text{exact}) &= 0.5288 \end{aligned} \quad (55)$$

در جدول (۷) تعداد دفعات تکرار، مدت زمان انجام محاسبات و خطای محاسبه شده برای انحراف معیار ( $\sigma = 0$ ) برای شدت و مکان مثال (۵) آورده شده است.

جدول ۷ نتایج تخمین مکان و شدت منبع حرارتی مثال ۵

$\sigma = 0$	دفعات تکرار	زمان محاسبات (ثانیه)	درصد خطا
G(t)	1995	98.11	1.62
x	1995	98.11	1.82
z	1995	98.11	5.45

محاسبه خطای RMSE برای پارامترهای مکانی. در جداول قبل با فرض معلوم بودن انحراف معیار، خطا را از رابطه (۳۹) به دست آوردیم. حال با استفاده از مقادیر تخمینی به دست آمده برای پارامترهای مکانی مثال های ۲ تا ۵ مقدار RMS را به دست می آوریم.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2} \quad (56)$$

	مثال ۲	مثال ۳	مثال ۴	مثال ۵
RMSE				
$x_0$	0.01	0.014	$2 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-6}$
$z_0$	0.01	0.014	$10^{-4}$	$9 \times 10^{-4}$

### نتیجه گیری

در این مقاله برای تخمین مکان و شدت منبع حرارتی از الگوریتم گرادیان مزدوج استفاده شده است. همان طور که از نتایج مشخص گردید سرعت و دقت تخمین برای این مسئله بسیار خوب است و جزء

در مثال پنجم تابع دقیق منبع حرارتی گسترده را به صورت رابطه زیر در نظر می گیریم.

$$G(t) = \begin{cases} 2G_0 \left( \frac{t}{t_f} \right), & 0 \leq \frac{t}{t_f} \leq 0.5 \\ 2G_0 \left( 1 - \frac{t}{t_f} \right), & 0.5 \leq \frac{t}{t_f} \leq 1 \end{cases} \quad (52)$$

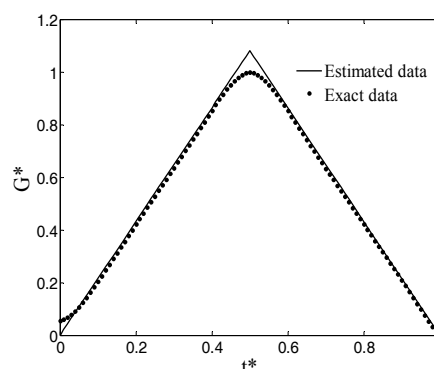
پارامترهای مکانی مجهول منبع حرارتی نیز، در این مثال مطابق رابطه زیر است.

$$\begin{aligned} x_0(\text{exact}) &= 0.5 \\ z_0(\text{exact}) &= 0.5 \end{aligned} \quad (53)$$

حدس اولیه برای تخمین پارامترهای مکانی مجهول منبع حرارتی نیز به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} x_0(\text{exact}) &= 0.7 \\ z_0(\text{exact}) &= 0.7 \end{aligned} \quad (54)$$

در شکل (۱۰) شدت منبع حرارتی گسترده تخمین زده شده مثال پنجم با مقدار دقیق آن برای انحراف معیار ( $\sigma = 0$ ) رسم گردیده است.



شکل ۱۰ مقایسه مقدار دقیق و تخمینی شدت منبع حرارتی گسترده مثال ۵ برای ( $\sigma = 0$ )

V	تابع توزیع ماده	روش‌های پایدار می‌باشد که در صورت حل درست معادلات مستقیم و الحاقی، حتماً به جواب می‌رسد و همگرایی روش در مراجع مختلف تضمین گردیده است.
$x_0$	مختصات مکانی منبع حرارتی در راستای محور x	
Y	دمای اندازه‌گیری شده به وسیله سنسور (K)	توابع مختلفی برای تخمین منبع حرارتی مورد بررسی قرار گرفت که مشاهده گردید الگوریتم محاسباتی توانایی تخمین هر تابعی را به‌عنوان منبع حرارتی دارد.
$z_0$	مختصات مکانی منبع حرارتی در راستای محور z	

### علائم یونانی

$\beta$	اندازه گام جستجو
$\gamma$	ضریب گرادیانی
$\delta$	تابع دلتای دیراک
$\Delta t$	گام زمانی
$\varepsilon$	معیار هم‌گرایی
$\lambda$	ضریب لاگرانژ
$\rho$	چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )
$\sigma$	انحراف معیار استاندارد

### بالانویس

k	مرحله تکرار
---	-------------

### زیرنویس‌ها

Ave	مقدار متوسط
f	نهایی
m	شماره سنسور
max	مقدار بیشینه

از آنجا که اندازه‌گیری‌ها همیشه دقیق نبوده است و همواره مقداری خطا در اندازه‌گیری پارامترها وجود دارد، در این مقاله خطاهای اندازه‌گیری نیز در نظر گرفته شد که نتایج نشان‌دهنده این است که وجود خطا تأثیر چندانی در نتایج تخمینی برای حالت‌های مختلف ندارد.

### فهرست علائم

c	ظرفیت گرمایی ویژه ( $\text{J/kg}^\circ\text{C}$ )
d	جهت جستجو
G	شدت منبع حرارتی
H	ضخامت ورق (m)
J	تابع هدف
$\hat{J}$	تابع هدف اصلاح‌شده
k	ضریب هدایت گرمایی ( $\text{W/m}^\circ\text{K}$ )
L	طول ورق (m)
M	تعداد سنسورها
N	تعداد تقسیمات
p	شاخص تابع توزیع
T	دما (K)
t	زمان (s)



## مراجع

1. Silva Neto, A.J. and Ozisik, M.N., "The estimation of space and time dependent strength of a volumetric heat source in a one-dimensional plate", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, No. 6, pp. 909-915, (1994).
2. Pasquetti, R. and Petit, D., "Inverse-heat-conduction problems with boundary element: analysis of a corner effect", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 13, No. 4, pp. 321-331, (1994).
3. Yang, C.Y., "Solving the two-dimensional inverse heat source problem through the linear least squares error method", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, No. 2, pp. 393-398, (1998).
4. Karami, G. and Hematiyan, M.R., "A boundary element method of inverse non-linear heat conduction analysis with point and line heat sources", *Communication in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp.191-203, (2000).
5. Su, J. and Silva Neto, A.J., "Two-dimensional inverse heat conduction problem of source strength estimation in cylindrical rods", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 25, No. 10, pp. 861-782, (2001).
6. Nortershauser, D. and Millan, P., "Estimation of moving heat sources with a three dimensional unsteady inverse method", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 5, No. 8, pp. 529-540, (2001).
7. Niliot, C.L. and Lefever, F., "A method for multiple steady line heat sources identification on a diffusive system: application to an experimental 2D problem", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, No. 7, pp. 1425-1438, (2001).
8. Lefever, F. and Niliot, C.L., "The BEM for point heat source estimation: application to multiple static sources and moving sources", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 41, No. 6, pp. 536-545, (2002).
9. Lefever, F. and Niliot, C.L., "Multiple transient point heat sources identification in heat diffusion: Application to experimental 2D problems", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, No. 9, pp. 1951-1964, (2002).
10. Niliot, C.L. and Lefever, F., "A parameter estimation approach to solve the inverse problem of point heat sources identifications", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, No. 4, pp. 827-841, (2004).
11. Zueco, J., Alhama, F. and C. Gonza'lez Ferna'ndez, F., "Inverse determination of heat generation sources in two-dimensional homogeneous solids: Application to orthotropic medium", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, No. 1, pp. 40-55, (2006).
12. Liu, C.S., "A two-stage LGSM to identify time-dependent heat source through an internal measurement of temperature", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, No. 7-8, pp. 1635-1642, (2009).
13. Liu, F.B., "A modified genetic algorithm for solving the inverse heat transfer problem of estimating plane heat source", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 15-16, pp. 3745-3752, (2008).

14. Yan, L., Fu, C.L. and Yang, F.L., "The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, No. 3, pp. 216-222, (2008).
15. Nili Ahmadabadi, M., Arab, M. and Maalek Ghaini, F.M., "The method of fundamental solutions for the inverse space-dependent heat source problem", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, No. 10, pp. 1231-1235, (2009).
16. Mierzwiczak, M. and Kolodziej, J.A., "Application of the method of fundamental solutions and radial basis functions for inverse transient heat source problem", *Computer Physics Communications*, Vol. 181, No. 12, pp. 2035-2043, (2010).
17. Geng, F. and Lin, Y., "Application of the variational iteration method to inverse heat source problems", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 11-12, pp. 2098-2102, (2009).
18. Golbahar Haghighi, M.R., Eghtesad, M., Malekzadeh, P. and Neculescu, D.S., "Three-dimensional inverse transient heat transfer analysis of thick functionally graded plates", *Energy Conversion and Management*, Vol. 50, No. 3, pp. 450-457, (2009).
19. Mohammadiun, M. and Rahimi, A.B., "Estimation of time-dependent heat flux using temperature distribution at a point in a two layer system", *Scientia Iranica*, Vol. 18, No. 4, pp. 966-973, (2011).
20. Lee, H.L., J. Chang, W., Chen, W.L. and Yang, Y.C., "Inverse heat transfer analysis of a functionally graded fin to estimate time-dependent base heat flux and temperature distributions", *Energy Conversion and Management*, Vol. 57, pp. 1-7, (2012).
21. Lee, H.L., Chang, W.J., Sun, S.H. and Yang, Y.C., "Estimation of temperature distributions and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder simultaneously subjected to inner-and-outer boundary heat fluxes", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 2, pp. 786-792, (2012).
22. Abou Khachfe, R. and Jarny, Y., "Estimation of heat sources within two dimensional shaped bodies", *3rd Int. Conference on Inverse Problems in Engineering*, June 13-18, Port Ludlow, Washington, USA, (1999).
23. Alifanov, O.M., "Inverse heat transfer problems", Springer-Verlag, New York, (2000).
24. Daniel, J.W., "The approximate minimization of functional", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, (1971).
25. Fletcher, R. and Reeves, C.M., "Function minimization by conjugate gradients", *Computer Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 149-154, (1964).
26. Golbahar Haghighi, M.R., Eghtesad, M., Neculescu, D.S. and Malekzadeh, P., "Temperature control of functionally graded plates using a feedforward-feedback controller based on the inverse solution and proportional-derivative controller", *Energy Conversion and Management*, Vol. 51, No. 1, pp. 140-146, (2010).
27. Daniel, J.W., "The approximate Minimization of Functional", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, (1971).
28. Fletcher, R. and Reeves C.M., "Function Minimization by Conjugate Gradient", *Computer J.*, 7, pp. 149-154, (1964).
29. Ozisik, M.N., "Inverse heat transfer: fundamental and applications", CRC Press, New York, (2000).

30. Reddy, J.N., "An introduction to the finite element method", Third Edition, McGraw Hill, (2006).

Archive of SID