

تحلیل کمانش و ارتعاش آزاد صفحه‌های خمشی با ضریب کشسانی غیرقطعی با استفاده از

روش اجزای محدود تصادفی*

(یادداشت پژوهشی)

محمد کارکن^(۱)سلیمان قوهستانی^(۲)فرزاد شهابیان^(۳)

چکیده در این پژوهش اثر عدم قطعیت ضریب کشسانی صفحه بر پاسخ ارتعاش آزاد و کمانش آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، ضریب کشسانی صفحه به صورت متغیر تصادفی با توزیع نرمال الگوسازی می‌شود. همچنین، تابع خودهمبستگی فاصله‌ای برای میدان تصادفی به کار می‌رود. در این شیوه، میزان همبستگی به فاصله وابسته می‌گردد. به گونه‌ای که با دور شدن نقاط از هم، میزان همبستگی نیز کاهش می‌یابد. سپس، با بهره‌جویی از راهکار توانمند اجزای محدود و به کارگیری شبیه‌سازی مونت کارلو، رابطه‌های اجزای محدود تصادفی استخراج می‌گردد. برای این منظور یک جزء چهار گرهی کیرشهف با دوازده درجه آزادی به کار می‌رود. برای تحلیل نیز، متغیر تصادفی ۵۰۰۰ بار شبیه‌سازی می‌گردد. در پایان، با انجام آزمون‌های عددی، اثر عدم قطعیت ضریب کشسانی بر روی بسامادهای طبیعی و بارهای کمانشی صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج این آزمون‌ها نشان می‌دهد که تغییر ضریب کشسانی صفحه تأثیر متفاوتی بر روی پاسخ ارتعاشی و کمانش صفحه دارد؛ به گونه‌ای که ضریب تغییرات پاسخ ارتعاش آزاد حدود نصف ضریب تغییرات بار کمانشی صفحه است. همچنین، آزمون‌های عددی آشکار می‌سازند که ضریب تغییرات بار کمانشی فشاری با کمانش برشی برابر هستند.

واژه‌های کلیدی اجزای محدود تصادفی، صفحه خمشی، کمانش، ارتعاش آزاد، شبیه‌سازی مونت کارلو

Stability and Free Vibration Analysis of Plates with Random Material Property using Stochastic Finite Element Method

M. Karkon

S. Ghouhestani

F. Shahabian

Abstract This study aims to investigate the influence of the plate uncertainty elastic modulus on free vibration response and buckling behavior. To this purpose, elastic modulus of plate is modeled as a random variable with a normal distribution. Spatial autocorrelation function is used for random fields. In this method, the correlation is dependent on the distance, as the points be far away from each other, the correlation is also reduced. Then, applying the powerful finite element method stochastic finite element relations were calculated using Monte Carlo simulation. To this purpose, a four-node Kirchhoff's element was used with twelve degrees of freedom. For the analysis, random variable is simulated 5,000 times. At last, by numerical tests, the effects of uncertainty on elastic modulus are investigated on the natural frequencies and buckling loads of plate. The results of these tests show that the effect of uncertainty in elastic modulus of the plate has a different effect on the response of vibration and buckling of plate. So that these changes have low effect on free vibration responses of plate. But buckling loads are highly dependent on the elasticity coefficient.

Key Words Stochastic Finite Element, Plate Bending, Buckling, Free Vibration, Monte-Carlo Simulation

* تاریخ دریافت مقاله ۹۶/۳/۱۴ و تاریخ پذیرش آن ۹۷/۳/۱۳ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v30i2.64895

(۱) نویسنده مسئول: استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لارستان، لارستان m.karkon@iaularestan.ac.ir

(۲) استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه فسا، فسا

(۳) استاد، گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

مقدمه

سیستم‌های سازه‌ای همواره در شرایط عدم قطعیت طراحی می‌شوند. وجود نامطمئن ذاتی در رفتار این سامانه‌ها، دانشمندان را به اهمیت تحلیل‌های با ماهیت تصادفی در بررسی سیستم‌های مهندسی واقف نموده است. عامل‌های متعددی سبب پیدایش عدم قطعیت در سازه می‌گردند که از آن میان می‌توان به ثابت نبودن خصوصیات ماده تشکیل‌دهنده مانند ضریب کشسانی اشاره کرد [1].

از دیرباز رویه معمول در برخورد با این عدم قطعیت‌ها استفاده از مقادیر میانگین و تئوری‌های علم آمار و احتمال بوده است. این رویه که تا به امروز در بیشتر کارهای مهندسی به کار می‌رود بر دو مبنای مقادیر حدی و میانگین عامل‌های با عدم قطعیت می‌باشد. در واقع در این شیوه به طوری ضمنی فرض می‌گردد که نتایج تحلیل یقین‌اندیشانه، ماهیت غیرقطعی دارد. این راهکار در اکثر موارد صحیح نیست و نمی‌تواند به یک طراحی بهینه منجر شود. راهکار تحلیل تصادفی این امکان را فراهم می‌آورد که حتی در سیستم‌های پیچیده با عدم قطعیت نیز بتوان به طراحی بهینه دست یافت.

یکی از ابزارهای قدرتمند در تحلیل‌های با عدم قطعیت، اجزای محدود تصادفی (SFEM) می‌باشد. این روش که گسترش یافته روش اجزای محدود معمولی می‌باشد، قابل استفاده در تحلیل انواع مسائل استاتیکی و دینامیکی با ماهیت تصادفی می‌باشد. یکی از شیوه‌های مرسوم در محاسبه پاسخ‌های تصادفی سیستم، روش مونت کارلو (MCS) می‌باشد [2]. در این شیوه، با بهره‌جویی از تئوری‌ها و تابع‌های تصادفی، داده‌های با عدم قطعیت کمی‌سازی می‌گردد. به دلیل سادگی و کمبود داده‌های آزمایشگاهی، اغلب از فرض گوسی بودن میدان‌های تصادفی استفاده می‌شود [3]. بررسی ارتعاش و کمانش صفحات کاربرد گسترده‌ای در طراحی سازه‌های مکانیکی، دریایی و هوافضایی

دارد. چاکرابارتی و دای [4] با بهره‌جویی از روش مونت کارلو و بسط نیومن، تحلیل دینامیکی صفحه‌ها در شرایط عدم قطعیت عامل‌ها را به انجام رساندند. سپهوند و همکاران [5] با روش بسط چندجمله‌ای‌های سری آشوب، اثر عدم قطعیت ضریب کشسانی را بر ارتعاش آزاد صفحات چندسانگرد، مورد مطالعه قرار دادند. شاکر و همکاران [6, 7] با روش اجزای محدود تصادفی، تحلیل ارتعاش آزاد صفحه‌های چندلایه و FGM را انجام دادند. دای و همکاران [8] تحلیل ارتعاش آزاد صفحه‌های چندلایه با فرض تصادفی بودن ضریب کشسانی، چگالی و جهت لایه‌ها را به انجام رساندند. تحلیل ارتعاش آزاد صفحه FGM با متغیرهای تصادفی، توسط طلحه و سینگ [9] انجام شد. چاکرابارتی و همکاران [10] یک روش جدید مدل‌سازی میدان تصادفی بر پایه بسط چندجمله‌ای تابع همبستگی (PCFE) را برای تحلیل ارتعاش آزاد صفحه‌های چندلایه پیشنهاد دادند. با بهره‌جویی از جزء خمشی نه گرهی، نایاک و ساتاپاتی، تحلیل ارتعاش آزاد میرای صفحه‌های مرکب ساندویچی با متغیرهای تصادفی را انجام دادند [11].

گرچه تاکنون مقالات زیادی درباره ارتعاش آزاد صفحات با متغیرهای تصادفی نگارش یافته، اما پژوهش‌های کمتری در مورد اثر تصادفی بودن خصوصیات ماده بر روی بارهای کمانشی صفحه‌های خمشی انجام شده است. گراهام و سیرجی [12] اثر عدم قطعیت ضریب کشسانی را بر کمانش صفحه‌های دارای سخت‌شونده، مورد مطالعه قرار دادند. آنکار و همکاران [13,14] تحلیل کمانش فشاری و برشی صفحه‌های چندلایه با فرض تصادفی بودن ضریب کشسانی و جهت لایه‌ها را به انجام رساندند. تحلیل پایداری سازه‌های کشسان با عامل‌های تصادفی توسط کامینسکی و سویتا [15] انجام شد. طلحه و سینگ [16] تحلیل کمانش صفحه FGM با مشخصات مصالح تصادفی زیر اثر بار حرارتی را مورد بررسی قرار دادند.

در این رابطه، $r = (x, y)$ مختصات مکان مورد نظر (مرکز جزء) و $\xi = (\xi_x, \xi_y)$ بردار فاصله بین نقطه‌های r و $r + \xi$ (فاصله بین مرکز دو جزء) می‌باشد. با فرض همگن و همسان‌گرد بودن میدان تصادفی، تابع خودهمبستگی فقط به میزان فاصله $|\xi|$ و مقدار واریانس σ_α^2 وابسته می‌گردد. بنابراین، می‌توان تابع خودهمبستگی فاصله‌ای را به صورت نمایی زیر پنداشت [1]:

$$R_{\alpha\alpha}(\xi) = \sigma_\alpha^2 \exp\left[-\left(\frac{|\xi|}{d}\right)\right] \quad (4)$$

در رابطه (4)، عامل d طول همبستگی می‌باشد. به گونه‌ای که با افزایش d میزان همبستگی افزایش، و با کاهش آن نیز میزان همبستگی کاهش می‌یابد. همچنین، σ_α انحراف معیار $\alpha(r)$ می‌باشد. این کمیت بیانگر مقدار پراکندگی میدان تصادفی $A(r)$ می‌باشد.

در روش اجزای محدود، سازه به n جزء تقسیم می‌شود. همچنین، فرض می‌گردد که مقدار میدان تصادفی درون جزء ثابت است. به طور معمول، هر چه تعداد جزءها افزایش یابد، دقت پاسخ نیز افزایش پیدا می‌کند. بنابراین چنانچه n جزء برای صفحه به کار رود، n مقدار تصادفی $\alpha_i = \alpha(r_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$ وابسته به این جزءها خواهیم داشت. همبستگی این مقادیرها با ماتریس کوواریانس مشخص می‌گردد. این ماتریس را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\text{cov}[\alpha_i \alpha_j] = R_{\alpha\alpha}(\xi_{ij}) \quad (5)$$

اگر برای هر جزء با روش مونت کارلو N شبیه‌سازی انجام شود، بردار میدان تصادفی همبسته (با میانگین صفر) $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ به صورت زیر به دست می‌آید [1]:

$$\{\alpha\} = [L]\{Z\} \quad (6)$$

لی و همکاران [17] با روش مبتنی بر آشوب، تحلیل کماتش حرارتی صفحه‌های خمشی چندلایه با متغیرهای تصادفی را به انجام رساندند.

در این پژوهش، اثر عدم قطعیت ضریب کشسانی بر کماتش فشاری و برشی و نیز، ارتعاش آزاد صفحه نازک خمشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این کار، فرض می‌گردد که میدان تصادفی دارای توزیع گوسی است. همچنین، تابع خودهمبستگی فاصله‌ای برای میدان تصادفی به کار می‌رود. در این شیوه، تغییرات میدان در یک جزء محدود با میانگین فاصله‌ای تقریب زده می‌شود. در ادامه، با بهره‌جویی از راهکار توانمند اجزای محدود و به کارگیری شبیه‌سازی مونت کارلو، رابطه‌های اجزای محدود تصادفی استخراج می‌گردد. یادآوری می‌گردد که جزء چهارپهلوی چهارگره‌ی (MZC) با ۱۲ درجه آزادی برای تحلیل اجزای محدود به کار می‌رود.

شبیه‌سازی میدان تصادفی

در این پژوهش، فرض می‌گردد که ضریب کشسانی به طور تصادفی و متناسب با فاصله (r) بر روی سطح صفحه تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$A(r) = A_0[1 + \alpha(r)] \quad (1)$$

در رابطه کنونی A_0 میانگین عامل غیرقطعی و $\alpha(r)$ میزان نوسان و تغییرات آن می‌باشد. یادآوری می‌گردد که میانگین این تغییرات صفر می‌باشد:

$$E[\alpha(r)] = 0 \quad (2)$$

در اینجا نماد $E[\cdot]$ ، بیانگر مقدار میانگین می‌باشد. همچنین، تابع خودهمبستگی به صورت زیر تعریف می‌گردد [1]:

$$R_{\alpha\alpha} = E[\alpha(r) \alpha(r + \xi)] \quad (3)$$

در رابطه کنونی، $[K_{total}]$ ماتریس سختی کل سازه، $[K]$ ماتریس سختی وابسته به مواد و $[K_g]$ ماتریس سختی هندسی برای کل سازه می‌باشند. ماتریس‌های سختی مواد و هندسی $[k]$ و $[k_g]$ برای یک جزء را می‌توان به صورت زیر حساب کرد:

$$[k] = \int_v [B]^T [D]_e [B] dv \quad (10)$$

$$[k_g] = \int_v [A]^T [S] [A] dv \quad (11)$$

عامل‌های $[N]$ ، $[D]_e$ و $[S]$ ، در رابطه‌های (۱۰ و ۱۱)، به ترتیب تابع‌های درون‌یاب، ماتریس مواد و ماتریس نیروهای درون صفحه می‌باشند. هم‌چنین با داشتن تابع‌های درون‌یاب، می‌توان ماتریس‌های $[B]$ و $[A]$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$[B] = \left\{ \frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 [N]}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 [N]}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (12)$$

$$[A] = \left\{ \frac{\partial [N]}{\partial x} \quad \frac{\partial [N]}{\partial y} \right\}^T \quad (13)$$

تابع‌های درون‌یاب $[N]$ برای جزء i گرهی کیرشلف (MZC) به صورت زیر به دست می‌آید [19]:

$$[N] = \{ [N_i^I \quad N_i^{II} \quad N_i^{III}] \} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

$$N_i^I = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (2 + \xi \xi_i + \eta \eta_i - \xi^2 - \eta^2) \quad (15)$$

$$N_i^{II} = \frac{a}{8} \xi_i (1 + \xi \xi_i)^2 (1 - \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i)$$

$$N_i^{III} = \frac{b}{8} \eta_i (1 + \eta \eta_i)^2 (1 - \eta \eta_i) (1 + \xi \xi_i)$$

در رابطه (۱۵) عامل‌های ξ و η مختصه‌های بدون بعد در جزء خمشی می‌باشند. هم‌چنین، $2a$ و $2b$ ابعاد جزء MZC در راستای محورهای x و y می‌باشند. شکل (۱)، این جزء چهار گرهی را نشان می‌دهد. هم‌چنین، ماتریس نیروهای درون صفحه $[S]$ نیز صورت زیر را دارد:

بردار $\{Z\} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_N\}$ بردار تصادفی مستقل گوسی با میانگین صفر و انحراف معیار یک می‌باشد. ماتریس پایین مثلثی $[L]$ از تجزیه چولسکی ماتریس کوواریانس $cov(\alpha_i, \alpha_j)$ به دست می‌آید. پس از یافتن ماتریس $[L]$ ، بردار تصادفی همبسته برای هر بار شبیه‌سازی محاسبه می‌شود. در حالت کلی میزان دقت در میانگین و انحراف معیار پاسخ، وابسته به تعداد نمونه‌ها می‌باشد.

رابطه‌های اجزای محدود

معادله دیفرانسیل حاکم بر کماتش صفحه خمشی نازک، به صورت زیر می‌باشد [18]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

در این رابطه، عامل‌های w و D به ترتیب، خیز صفحه و سختی صفحه می‌باشند. هم‌چنین، عامل‌های S_x ، S_y و S_{xy} به ترتیب، نیروهای درون صفحه در راستای محور x ، y و نیروهای برشی وارد بر لبه‌های صفحه می‌باشند. در روش اجزای محدود، تابع خیز w با تابع‌های درون‌یاب $[N]$ به جابه‌جایی‌های گرهی $\{D\}$ وابسته می‌گردد:

$$w = [N] \{D\} \quad (8)$$

با بهره‌جویی از راهکار گلرکین و هم‌چنین رابطه (۸)، برای تحلیل کماتش صفحه با روش اجزای محدود معادله (۷) به صورت ماتریسی زیر تبدیل می‌شود:

$$\det([K_{total}]) = \det([K] - P_{cr} [K_g]) = 0 \quad (9)$$

باتوجه به غیرقطعی بودن ضریب کشسانی، ماتریس معین $[C]_e$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[C]_e = \frac{t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

در ادامه، معادله حاکم بر ارتعاش آزاد صفحه نازک خمشی آورده می‌شود. این معادله را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$([K] - \omega^2[M])\{\bar{D}\} = 0 \quad (21)$$

در رابطه کنونی، $\{\bar{D}\}$ بردار جابه‌جایی گرهی، ω بسامد زاویه‌ای، $[K]$ ماتریس سختی و $[M]$ ماتریس جرم کل سازه می‌باشند. یادآوری می‌گردد ماتریس جرم $[m]$ برای جزء (MZC) را می‌توان به صورت زیر حساب کرد:

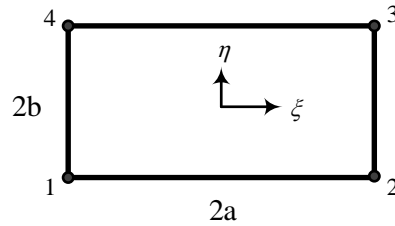
$$[m] = \rho \int_v [N]^T [N] dv \quad (22)$$

در رابطه کنونی ρ چگالی صفحه می‌باشد. در ادامه، رابطه‌های اجزای محدود تصادفی استخراج می‌گردد. چنانچه ماتریس مواد $[D]_e$ دارای ماهیت تصادفی باشد، ماتریس سختی جزء و به دنبال آن ماتریس سختی کل سازه نیز دارای ماهیت تصادفی و غیرقطعی خواهند بود. در نتیجه پاسخ سازه نیز ماهیت تصادفی و غیرقطعی خواهد داشت. بنابراین ماتریس سختی سازه نیز دو بخش میانگین و انحرافی خواهد داشت:

$$[k(h)] = [k(h_0)] + [k(\Delta h)] \quad (23)$$

بخش‌های میانگین و انحرافی ماتریس سختی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y \end{bmatrix} \quad (16)$$



شکل ۱ جزء خمشی چهار گرهی MZC

یادآوری می‌گردد، ماتریس مواد $[D]_e$ برای جزء خمشی نازک به صورت زیر می‌باشد:

$$[D]_e = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

عامل‌های E ، ν و t به ترتیب، ضریب کشسانی، ضریب پواسون و ضخامت صفحه می‌باشند. چنانچه ماتریس مواد $[D]_e$ ماهیت تصادفی و غیرقطعی داشته باشد، این ماتریس را می‌توان برحسب عامل تصادفی h_α به صورت زیر نوشت:

$$[D]_e = h_\alpha [C]_e \quad (18)$$

عامل h_α نشان‌دهنده تصادفی بودن ماتریس مواد بر روی سطح جزء می‌باشد. همچنین $[C]_e$ نیز ماتریس معین می‌باشد. برای وارد کردن ماهیت تصادفی در روابط اجزای محدود، پارامتر تصادفی h_α را می‌توان به صورت جمع دو بخش میانگین و انحرافی $h_\alpha = h_0 + \Delta h$ نوشت. بنابراین باتوجه به رابطه (۱) ضریب کشسانی غیرقطعی را می‌توان به صورت رابطه (۱۹) نوشت:

$$E = E_0(1 + \alpha_e) \quad (19)$$

هم‌چنین، ضریب کشسانی و ضریب پواسون، به ترتیب $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ و $\nu = 0.3$ اختیار می‌گردند. با انجام تحلیل، بار کمانشی بدون‌بعد به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{P}_{cr} = P_{cr} \frac{\pi^2 D}{L^2} \quad (29)$$

برای تحلیل اجزای محدود، یک شبکه 10×10 به‌کار می‌رود. همچنین، با بهره‌جویی از روش مونت کارلو، ۵۰۰۰ بار شبیه‌سازی تصادفی انجام شده است. در جدول‌های (۲ و ۱) به‌ترتیب، میزان میانگین و انحراف معیار بار کمانش فشاری برای حالت‌های مختلف متغیر تصادفی درج شده است. هم‌چنین، جدول‌های (۳ و ۴) نیز به‌ترتیب، میزان میانگین و انحراف معیار بار کمانش برشی را برای حالت‌های مختلف متغیر تصادفی نشان می‌دهند. یادآوری می‌گردد که، چنان‌چه ضریب کشسانی مقداری قطعی فرض گردد، با بهره‌جویی از شبکه 10×10 برای کل صفحه، جزء MZC بار کمانش فشاری و برشی بدون‌بعد را به‌ترتیب، برابر با $\bar{P}_{cr} = 3.985$ و $\bar{P}_{cr} = 9.052$ به‌دست می‌دهد. با بررسی این جدول‌ها مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب تغییرات ضریب کشسانی، میانگین و انحراف معیار بار کمانشی برای هر دو حالت کمانش فشاری و برشی افزایش می‌یابد. هم‌چنین، این جدول‌ها آشکار می‌سازند که سرعت افزایش میانگین پاسخ کمتر از انحراف معیار است. یادآوری می‌گردد که ضریب تغییرات پاسخ از تقسیم مقدار انحراف معیار بر مقدار میانگین به‌دست می‌آید.

جدول ۱ میانگین بار کمانش فشاری برای حالات

مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	$d=0.002$	$d=2$	$d=200$
COV=0.1	3.9412	3.9502	3.9673
COV=0.2	3.8938	3.9399	3.9629
COV=0.3	3.8068	3.8850	3.9742

$$[k(h_0)] = E_0 \int_v [B]^T [C]_e [B] dv \quad (24)$$

$$[k(\Delta h)] = E_0 \alpha_e \int_v [B]^T [C]_e [B] dv \quad (25)$$

یادآوری می‌گردد که ماتریس سختی هندسی $[k_g]$ و ماتریس جرم $[m]$ ، ماتریسی معین می‌باشد. با روی هم‌گذاری ماتریس‌های سختی، هندسی و نیز ماتریس جرم جزء‌ها، ماتریس سختی، ماتریس سختی هندسی و ماتریس جرم کل سازه به‌دست می‌آید:

$$[K] = \sum_{e=1}^n [k(h)]_e \quad (26)$$

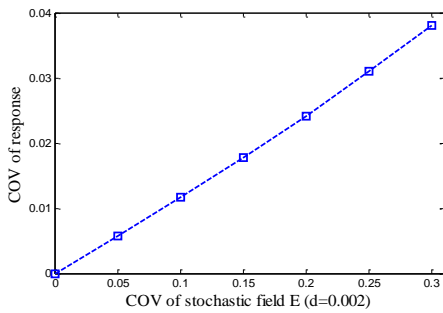
$$[K_g] = \sum_{e=1}^n [k_g]_e \quad (27)$$

$$[M] = \sum_{e=1}^n [m]_e \quad (28)$$

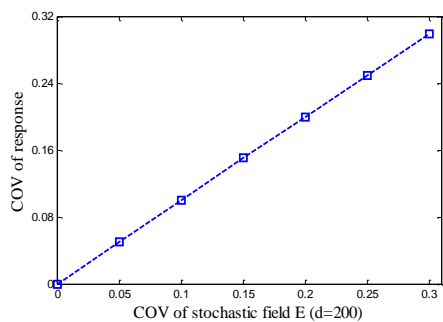
در روش مونت‌کارلو ابتدا متغیرهای تصادفی به‌روش عددی شبیه‌سازی می‌شوند، سپس برای هر یک از متغیرهای شبیه‌سازی شده، پاسخ سازه محاسبه می‌شود. بردار متغیر تصادفی $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ می‌تواند نشان‌دهنده هر یک از عامل‌های تصادفی نظیر مواد، هندسه، بار و غیره باشد. با محاسبه پاسخ سازه برای تمام متغیرهای شبیه‌سازی شده می‌توان عکس‌العمل سازه را نسبت به این عامل‌های تصادفی به‌دست آورد.

آزمون عددی یکم (تحلیل کمانش)

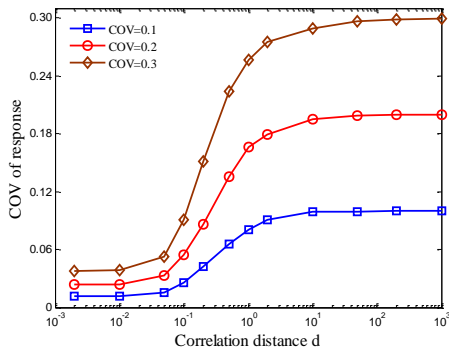
در این بخش، برای بررسی اثر تصادفی بودن ضریب کشسانی بر روی کمانش فشاری (بار محوری در جهت x) و برشی صفحه خمشی، یک آزمون عددی انجام می‌گیرد. برای این منظور، یک صفحه مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده تحلیل می‌شود. این صفحه دارای طول $a = 1 \text{ m}$ و ضخامت $t = 0.001 \text{ m}$ می‌باشد.



شکل ۲ میزان تغییر ضریب تغییرات بار کماتشی در برابر ضریب تغییرات میدان تصادفی در حالت همبستگی کم



شکل ۳ میزان تغییر ضریب تغییرات بار کماتشی در برابر ضریب تغییرات میدان تصادفی در حالت همبستگی کامل



شکل ۴ میزان حساسیت بار کماتش فشاری و برشی صفحه به میزان ضریب تغییرات و همبستگی ضریب کشسانی

آزمون عددی دوم (تحلیل ارتعاش آزاد)

در این بخش، برای بررسی اثر تصادفی بودن ضریب کشسانی بر ارتعاش آزاد صفحه خمشی، یک آزمون عددی انجام می‌گیرد. برای این منظور، یک صفحه مربعی با تکیه‌گاه‌های ساده تحلیل می‌شود. این صفحه

جدول ۲ انحراف معیار بار کماتش فشاری برای حالات

مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	$d=0.002$	$d=2$	$d=200$
COV=0.1	0.0460	0.3579	0.3908
COV=0.2	0.0940	0.7052	0.7938
COV=0.3	0.1449	1.0679	1.2043

جدول ۳ میانگین بار کماتش برشی برای حالات مختلف متغیر

تصادفی

ضریب تغییرات	$d=0.002$	$d=2$	$d=200$
COV=0.1	9.0121	9.0570	9.0117
COV=0.2	8.8986	9.0093	9.0157
COV=0.3	8.6882	8.9139	9.0311

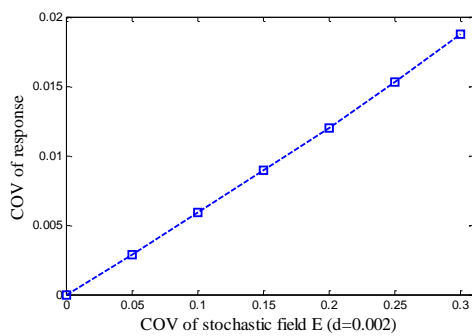
جدول ۴ انحراف معیار بار کماتش برشی برای حالات مختلف

متغیر تصادفی

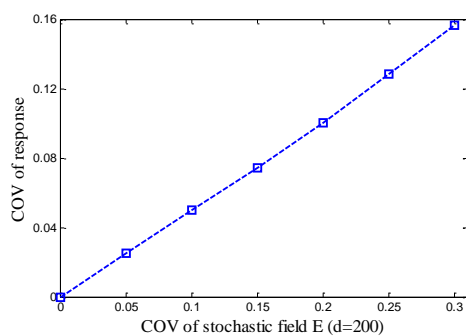
ضریب تغییرات	$d=0.002$	$d=2$	$d=200$
COV=0.1	0.1228	0.7998	0.9054
COV=0.2	0.2529	1.6645	1.7914
COV=0.3	0.3909	2.5031	2.7441

همچنین در شکل (۲)، اثر مقدار ضریب تغییرات میدان تصادفی با همبستگی کم ($d=0.002$) بر کماتش فشاری و برشی صفحه نشان داده شده است. شکل (۳) نیز اثر مقدار ضریب تغییرات میدان تصادفی با همبستگی کامل ($d=200$) را بر بار بحرانی فشاری و برشی نشان می‌دهد. باتوجه به نمودارها مشاهده می‌شود که تصادفی بودن میدان ضریب کشسانی، تأثیر زیادی بر کماتش صفحه دارد. همچنین، مشاهده می‌شود که افزایش میزان همبستگی میدان تصادفی باعث افزایش ضریب تغییرات پاسخ می‌شود، به گونه‌ای که در بحرانی‌ترین حالت، ضریب تغییرات بار کماتشی برابر با ضریب تغییرات مدول کشسانی صفحه می‌شود. برای بهتر نشان دادن این موضوع، در شکل (۴) نمودار حساسیت بار کماتش فشاری و برشی صفحه به میزان ضریب تغییرات و همبستگی میدان تصادفی نشان داده شده است.

در شکل (۵)، اثر مقدار ضریب تغییرات میدان تصادفی با همبستگی کم ($d=0.002$)، بر پاسخ ارتعاش آزاد نشان داده شده است. شکل (۶) نیز اثر مقدار ضریب تغییرات میدان تصادفی با همبستگی کامل ($d=200$) را بر پاسخ ارتعاش آزاد نشان می‌دهد. در شکل (۷) نیز نمودار حساسیت پاسخ ارتعاش به میزان ضریب تغییرات و همبستگی میدان تصادفی نشان داده شده است. این نمودارها آشکار می‌سازند که اگرچه افزایش میزان همبستگی میدان تصادفی باعث افزایش ضریب تغییرات پاسخ می‌شود، اما تأثیر آن کمتر از کماتش است؛ به گونه‌ای که در حالت همبستگی کامل ضریب تغییرات پاسخ ارتعاش، نصف ضریب تغییرات مدول کشسانی صفحه به دست می‌آید.



شکل ۵ میزان تغییر ضریب تغییرات پاسخ ارتعاش آزاد در برابر ضریب تغییرات ضریب کشسانی در حالت همبستگی کم



شکل ۶ میزان تغییر ضریب تغییرات پاسخ ارتعاش آزاد در برابر ضریب تغییرات ضریب کشسانی در حالت همبستگی کامل

دارای طول $a = 1\text{m}$ و ضخامت $t = 0.001\text{m}$ می‌باشد. ضریب کشسانی، ضریب پواسون و چگالی صفحه نیز به ترتیب $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ، $\nu = 0.3$ و $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ و با انجام تحلیل، عامل بدون بعد فرکانس مود اول به صورت زیر حساب می‌گردد:

$$\lambda_1 = \omega_1 a^2 \sqrt{\frac{\rho t}{D}} \quad (30)$$

برای تحلیل اجزای محدود، یک شبکه 10×10 به کار می‌رود. باید دانست در صورت قطعی پنداشتن ضریب کشسانی، جزء MZC بسامد بدون بعد مود اول را برابر با $\lambda_1 = 19.6356$ به دست می‌دهد. همچنین، با بهره‌جویی از روش مونت کارلو، 5000 بار شبیه‌سازی تصادفی انجام شده است. در جدول‌های (۵ و ۶) به ترتیب، میزان میانگین و انحراف معیار بار بسامد مود اول برای حالت‌های مختلف متغیر تصادفی درج شده است. با توجه به این جدول‌ها، مشاهده می‌شود که میانگین پاسخ در تمامی حالت‌ها تقریباً یکسان است، اما انحراف معیار پاسخ، با افزایش همبستگی و نیز ضریب تغییرات مدول کشسانی، افزایش می‌یابد.

جدول ۵ میانگین بار کماتش فشاری برای حالات

مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	$d=0.002$	$d=2$	$d=200$
COV=0.1	19.5967	19.6190	19.5991
COV=0.2	19.4789	19.5615	19.5948
COV=0.3	19.2893	19.2556	19.4255

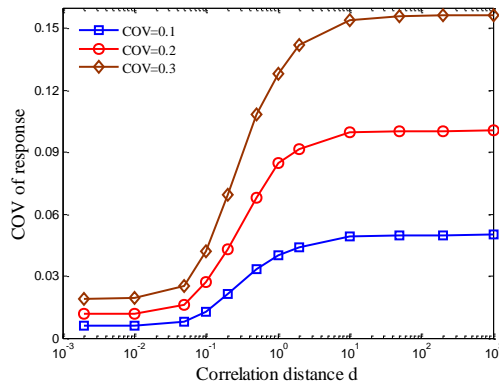
جدول ۶ انحراف معیار بار کماتش فشاری برای حالات

مختلف متغیر تصادفی

ضریب تغییرات	$d=0.002$	$d=2$	$d=200$
COV=0.1	0.1163	0.8631	0.9791
COV=0.2	0.2361	1.7949	2.0039
COV=0.3	0.3616	2.7879	3.0391

فهرست علائم

انحراف معیار	σ_a
تابع خود همبستگی	R_{aa}
طول همبستگی	d
کواریانس	cov
متغیر تصادفی با میانگین صفر	α_e
ضریب تغییرات	COV
ضریب کشسانی	E
تابع خیز صفحه	w
نیروی درون صفحه در راستای x	S_x
نیروی درون صفحه در راستای y	S_y
نیروی برشی وارد بر لبه‌های صفحه	S_{xy}
سختی صفحه	D
طول صفحه	a
علائم یونانی	
ضریب پواسون	ν
چگالی (kgm^{-3})	ρ
بسامد مود اول	ω_1
بسامد بدون بعد مود اول	λ_1
زیرنویس‌ها	
کل (ماتریس سختی)	total
جزء	e
شماره جزء	n
بحرانی	cr
هندسی (ماتریس سختی)	g
واژه‌نامه	
Free vibration	ارتعاش آزاد
Stochastic finite element method	روش اجزای محدود تصادفی
Monte-Carlo simulation	شبیه‌سازی مونت کارلو
Buckling	کمانش



شکل ۷ میزان حساسیت پاسخ ارتعاش آزاد صفحه به میزان ضریب تغییرات و همبستگی میدان تصادفی

نتیجه‌گیری

در این مقاله اثر تصادفی بودن ضریب کشسانی بر کمانش فشاری و برشی و نیز ارتعاش آزاد صفحه خمشی مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور، از روش اجزای محدود و مونت‌کارلو بهره‌جویی شد. همچنین، میدان تصادفی (ضریب کشسانی) با توزیع نرمال الگوسازی شد و تابع خودهمبستگی فاصله‌ای برای آن به کار رفت. با انجام تحلیل کمانش صفحه، مشاهده شد که متغیر بودن ضریب کشسانی تأثیر زیادی بر بار کمانش فشاری و برشی دارد. به گونه‌ای که اگر ضریب تغییرات میدان تصادفی ۳۰ درصد باشد، میزان ضریب تغییرات پاسخ، بسته به میزان همبستگی میدان تصادفی، بین ۴ تا ۳۰ درصد خواهد بود. همچنین، آزمون‌های عددی نشان دادند که ضریب تغییرات بار بحرانی برای کمانش فشاری و برشی تقریباً یکسان می‌باشد. همچنین مشاهده شد که متغیر بودن ضریب کشسانی تأثیر کمتری بر پاسخ ارتعاش آزاد صفحه دارد؛ به گونه‌ای که اگر ضریب تغییرات میدان تصادفی ۳۰ درصد باشد، میزان ضریب تغییرات پاسخ، بسته به میزان همبستگی میدان تصادفی، بین ۲ تا ۱۵ درصد خواهد بود.

مراجع

1. Lima, B.S. and Ebecken, N.F., "A comparison of models for uncertainty analysis by the finite element method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 34, No. 2, pp. 211-232, (2000).
2. Noh, H.C. and Park, T., "Monte Carlo simulation-compatible stochastic field for application to expansion-based stochastic finite element method", *Computers & structures*, Vol. 84, No. 31, pp. 2363-2372, (2006).
3. Stefanou, G., "The stochastic finite element method: past, present and future", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 9, pp. 1031-1051, (2009).
4. Chakraborty, S. and Dey, S., "A stochastic finite element dynamic analysis of structures with uncertain parameters", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40, No. 11, pp. 1071-1087, (1998).
5. Sepahvand, K., Marburg, S. and Hardtke, H.J., "Stochastic free vibration of orthotropic plates using generalized polynomial chaos expansion", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 1, pp. 167-179, (2012).
6. Shaker, A., Abdelrahman, W.G., Tawfik, M. and Sadek, E., "Stochastic finite element analysis of the free vibration of laminated composite plates", *Computational Mechanics*, Vol. 41, No. 4, pp. 493-501, (2008).
7. Shaker, A., Abdelrahman, W., Tawfik, M. and Sadek, E., "Stochastic finite element analysis of the free vibration of functionally graded material plates", *Computational Mechanics*, Vol. 41, No. 5, pp. 707-714, (2008).
8. Dey, S., Mukhopadhyay, T. and Adhikari, S., "Stochastic free vibration analysis of angle-ply composite plates—a RS-HDMR approach", *Composite Structures*, Vol. 122, pp. 526-536, (2015).
9. Talha, M. and Singh, B., "Stochastic vibration characteristics of finite element modelled functionally gradient plates", *Composite Structures*, Vol. 130, pp. 95-106, (2015).
10. Chakraborty, S., Mandal, B., Chowdhury, R. and Chakrabarti, A., "Stochastic free vibration analysis of laminated composite plates using polynomial correlated function expansion", *Composite Structures*, Vol. 135, pp. 236-249, (2016).
11. Nayak, A. and Satapathy, A., "Stochastic damped free vibration analysis of composite sandwich plates", *Procedia Engineering*, Vol. 144, pp. 1315-1324, (2016).
12. Graham, L. and Siragy, EF, "Stochastic finite-element analysis for elastic buckling of stiffened panels", *Journal of engineering mechanics*, Vol. 127, No. 1, pp. 91-97, (2001).
13. Onkar, A., Upadhyay, C. and Yadav, D., "Stochastic buckling analysis of laminated plates under shear and compression", *AIAA journal*, Vol. 45, No. 8, pp. 2005-2014, (2007).
14. Onkar, A., Upadhyay, C. and Yadav, D., "Generalized buckling analysis of laminated plates with random material properties using stochastic finite elements", *International journal of mechanical sciences*, Vol. 48, No. 7, pp. 780-798, (2006).
15. Kamiński, M. and Świta, P., "Generalized stochastic finite element method in elastic stability problems", *Computers & Structures*, Vol. 89, No. 11, pp. 1241-1252, (2011).
16. Talha, M. and Singh, B., "Stochastic perturbation-based finite element for buckling statistics of FGM plates with uncertain material properties in thermal environments", *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 823-833, (2014).
17. Li, J., Tian, X., Han, Z. and Narita, Y., "Stochastic thermal buckling analysis of laminated plates using perturbation technique", *Composite Structures*, Vol. 139, pp. 1-12, (2016).
18. Szilard, R., "Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods": John Wiley & Sons, (2004).
19. Quek, S.S. and Liu, G.R., "Finite Element Method: A Practical Course": Elsevier Science, (2003).