

حل مسائل غیرخطی الاستیک تراکم‌پذیر با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک*

مهدی اردیانی^(۱) بهروز حسنی^(۲) سیدمهدی توکلی^(۳)

چکیده کاربرد روش تحلیلی ایزوژئومتریک برای حل مسائل غیرخطی الاستیک تراکم‌پذیر موسوم به مسائل هایپرالاستیسیته موضوع این مقاله است. بدین منظور جهت استخراج ماتریس ضرایب با بهره‌گیری از مفهوم ایزوژئومتریک، پس از خطی‌سازی روابط حاکم، معادلات تعادل در فرم گسسته‌شده آن نوشته شده و در ادامه الگوریتمی برای تحلیل این دسته از مسائل ارائه می‌گردد. برای بررسی کارایی روش و صحت نتایج به دست آمده در مسائل هایپرالاستیسیته تراکم‌پذیر، نتایج حاصل از روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک با یکدیگر مقایسه می‌شود. استفاده از روش پیشنهادی علاوه بر امکان ایجاد هندسه مدل با دقت و انعطاف‌پذیری بیشتر، باعث تشکیل دستگاه معادلات کوچکتر و در کل کاهش حجم محاسبات می‌شود. به علاوه، علیرغم وجود تغییرشکل‌های بزرگ، وابستگی به نحوه گسسته‌سازی مسائل حداقل بوده و برخلاف روش اجزای محدود تا حد بسیار زیادی نیاز به تولید مجدد شبکه اجزای محدود وجود ندارد. همچنین، در این مقاله به بررسی تأثیر تعداد تقسیمات بار و نیز تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی در همگرایی جواب مسائل پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی تحلیل ایزوژئومتریک، نریز، هایپرالاستیسیته، مصالح تراکم‌پذیر.

Solution of Nonlinear Compressible Hyperelastic Problems by Isogeometric Analysis Method

M. Ardiani B. Hassani M. Tavakoli

Abstract Employing the Isogeometric Analysis method for solution of nonlinear compressible elastic materials, generally known as hyperelasticity, is the subject of this article. For this purpose, the matrix of coefficients is derived and by the linearization of governing equations the discretized equilibrium equations are obtained and a solution algorithm is presented. To study the performance and accuracy of the method in compressible hyperelastic problems, the obtained results are compared with those of finite elements. The presented approach, besides providing a good flexibility in geometrical modeling, results in a smaller system of equations and consequently reducing the computational cost. Furthermore, despite having large deformations, the need for remeshings is alleviated. Also, the effects of the number of load increments, as well as, the number of Gauss integration points on the convergence of the solution are studied.

Key Words Isogeometric analysis, NURBS, Hyperelasticity, Compressible materials.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۶/۳/۲۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۷/۶/۲۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v30i2.65185

(۱) دانشجوی دکترای هوا فضا، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

(۲) نویسنده مسئول: استاد، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد. b_hassani@um.ac.ir

(۳) استادیار، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود.

مقدمه

نخستین بار هیوز و همکارانش [23] استفاده از این توابع پایه در مدل‌سازی هندسه و تقریب تابع مجهول مسائل مهندسی را با نام روش تحلیلی ایزوژئومتریکی پیشنهاد نمودند. مراجع [24-34] جهت آشنایی بیشتر با مفاهیم بنیادی روش تحلیلی ایزوژئومتریکی معرفی می‌شوند.

به دلیل قابلیت انعطاف‌پذیری زیاد توابع پایه نربز در تولید هندسه‌های پیچیده، استفاده از آن در روش تحلیل ایزوژئومتریکی فرآیند تولید مش مجدد در مسائل غیرخطی الاستیک تراکم‌پذیر تا حد زیادی رفع و در نتیجه سرعت حل در مقایسه با روش اجزای محدود افزایش می‌یابد. هیوز و همکاران [35] برای اولین بار روش ایزوژئومتریکی را برای حل مسائل دارای تغییرشکل‌های بزرگ مورد استفاده قرار دادند.

در ادامه این مقدمه، در بخش دوم مقاله ابتدا فرمول‌بندی مصالح هایپرالاستیسیته «تراکم‌پذیر» به اختصار بیان شده و معادله تعادل حاکم بر این دسته از مسائل ارائه می‌شود. به دلیل غیرخطی بودن این دسته از مسائل، به منظور امکان استفاده از روش حل تکراری نیوتن-رافسون خطی‌سازی انجام می‌پذیرد. در بخش سوم روش ایزوژئومتریکی به طور خلاصه توضیح داده می‌شود و گسسته‌سازی توابع مجهول و هندسه در مسائل خطی‌سازی شده هایپرالاستیسیته توسط توابع پایه و متغیرهای کنترلی مطرح می‌گردد. انتهای این بخش به بیان الگوریتمی برای مسائل غیرخطی ارتجاعی تراکم‌پذیر بر پایه روش تحلیلی ایزوژئومتریکی اختصاص یافته است. در بخش چهارم، ضمن ارائه چند مثال از مسائل هایپرالاستیک تراکم‌پذیر، نتایج به دست آمده با روش اجزای محدود مقایسه می‌شود. در ادامه، به بررسی تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی و نیز تعداد تقسیمات بار در همگرایی جواب پرداخته می‌شود.

برای طراحی ایمن و استفاده بهینه از ظرفیت مصالح، در نظر گرفتن تغییرشکل‌های ارتجاعی بزرگ در مواد موسوم به هایپرالاستیک، حائز اهمیت است. رفتار غیرخطی در ناحیه ارتجاعی سبب ایجاد منحنی غیرخطی تنش-کرنش در مدل‌سازی رفتار مصالح می‌شود. با استفاده از تعریف تابع انرژی کرنشی ذخیره شده معادلات حاکم بر مسائل تراکم‌پذیر با تغییرشکل‌های بزرگ نتیجه می‌شود. با خطی‌سازی روابط حاکم، الگوریتم حل با استفاده از روش نیوتن-رافسون حاصل می‌شود.

نخستین تلاش جهت حل مسائل غیرخطی الاستیک با استفاده از روش اجزای محدود توسط ترنر و همکارانش [1] انجام شد. از جمله سایر تحقیقات اولیه بر پایه روش اجزای محدود در این زمینه، حل مسئله کمانش توسط کاپور [2]، گالاگر و پادلگ [3]، کالاگر و همکاران [4] و هولاند و موآن [5] را می‌توان نام برد. ترنر و همکارانش [1] و ارگریس [6-7] فرآیند اعمال تدریجی بار در چندین مرحله را پیشنهاد کردند و اُدن [8]، مالت و مارکل [9] استفاده از روش حل برمبنای تکرار نیوتن-رافسون را مطرح نمودند. بهبود روش نیوتن-رافسون توسط اُدن [10]، هایسر و همکارانش [11] و زینکوویچ [12] مورد پژوهش قرار گرفت و بریبا و کونر [13] روش اعمال تدریجی بار و ایجاد همگرایی در هر مرحله افزایش بار را پیشنهاد نمودند. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم و روش‌های حل مسائل غیرخطی، اعم از مصالح و هندسه، مطالعه مراجع [14-20] توصیه می‌شود.

مدل‌سازی هندسه‌های پیچیده با استفاده از توابع پایه متشکل از اسپلاین‌ها شامل توابع بی‌اسپلاین (B-spline)، نربز (NURBS - Non Uniform Rational B-Splines) و تی‌اسپلاین‌ها (T-spline) [21,22] در طراحی و تحلیل به کمک کامپیوتر (Computer Aided Design) حائز اهمیت می‌باشد.

هایپرالاستیسیته تراکم‌پذیر

در این نوع از مسائل، با استفاده از مفهوم گرادیان تغییرشکلها \mathbf{F} با توجه به استقلال کار انجام شده از مسیر در این نوع مصالح برای هر نقطه از جسم مانند \mathbf{X} و با توجه به نقطه آغازین و پایانی مسیر، تابع انرژی کرنشی ذخیره شده بر واحد حجم تغییرشکل نیافته Ψ به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد [14,15,17]:

$$\Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \int_{t_0}^t \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} dt \quad (1)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}} \quad (2)$$

که در رابطه فوق، $\dot{\mathbf{F}}$ نرخ تغییرات تابع گرادیان و $\mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X})$ تانسور تنش پیولا-کیرشهف اول می‌باشد. با بازنویسی رابطه بیان شده بر حسب تنش پیولا-کیرشهف دوم یعنی \mathbf{S} خواهیم داشت:

$$\Psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \int_{t_0}^t \mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{C}} dt \quad (3)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X})}{\partial \mathbf{C}} \quad (4)$$

که در این روابط، \mathbf{E} تانسور کرنش لاگرانژی، \mathbf{C} تانسور گرین-کوشی راست و $\dot{\mathbf{C}}$ نرخ تغییرات این تانسور است [14,15,17]. نظر به غیرخطی بودن رابطه تنش و کرنش در معادله فوق، با خطی‌سازی این رابطه در دستگاه مختصات لاگرانژی ماتریس مرتبه چهار الاستیسیته $\tilde{\mathbf{C}}$ به صورت زیر حاصل می‌شود [14,15,17]

$$\mathbf{DS}[\mathbf{u}] = \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{DE}[\mathbf{u}] \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (6)$$

با در نظر گرفتن همسانگردی برای مواد، رابطه بین Ψ و تانسورهای گرین-کوشی راست \mathbf{C} و چپ \mathbf{b} تنها وابسته به نامتغیرهای (Invariants) ماده ایزوتروپیک می‌باشد و در نتیجه تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوم \mathbf{S} و تانسور تنش کوشی $\boldsymbol{\sigma}$ با تعریف در دستگاه لاگرانژی و اوپلری، به صورت زیر به دست می‌آیند [14,15,17].

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_C} \frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{C}} \\ &+ 2 \frac{\partial \Psi}{\partial II_C} \frac{\partial II_C}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} \quad (7) \\ &= 2 \psi_I \mathbf{I} + 4 \psi_{II} \mathbf{C} + 2 J^2 \psi_{III} \mathbf{C}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T = \\ &= 2 J^{-1} \psi_I \mathbf{b} + 4 J^{-1} \psi_{II} \mathbf{b}^2 + 2 J \psi_{III} \mathbf{I} \quad (8) \end{aligned}$$

که در روابط فوق I_C, II_C, III_C نامتغیرهای تانسور \mathbf{C} ، \mathbf{J} دترمینان گرادیان تغییرشکلها (Volume Change) و $\psi_I = \frac{\partial \Psi}{\partial I_C}, \psi_{II} = \frac{\partial \Psi}{\partial II_C}, \psi_{III} = \frac{\partial \Psi}{\partial III_C}$ است.

از جمله مدل‌های مواد ایزوتروپیک می‌توان از روابط پیشنهادی آگدن، نئو-هوکین، یئو و غیره می‌باشد که با استفاده از روابط بالا، تانسورهای تنش و الاستیسیته آنها در وضعیت تراکم‌پذیری قابل حصول می‌باشد. در ادامه این مقاله از مدل مصالح نئو-هوکین تراکم‌پذیر استفاده شده است.

با توجه به تابع انرژی کرنشی مورد استفاده، شرایط مرزی و شرایط بارگذاری در مسائل غیرخطی هندسی و مواد، معادله کار مجازی δW بر مبنای سرعت مجازی $\delta \mathbf{v}$ قابل تعریف بوده و منجر به رابطه غیرخطی (9) می‌گردد که نیازمند خطی‌سازی هر یک از مؤلفه‌های معادله است. در روابطی که در ادامه می‌آید، \mathbf{u} میدان جابه‌جایی ذره، \mathbf{f} نیروهای کالبدی نظیر وزن، $\boldsymbol{\varepsilon}$ تانسور کرنش اوپلری، \mathbf{t} نیروهای سطحی

انواع ارتقایافته آن، نظیر نربز و تی اسپلین، انجام می شود. با تقریب مجهولات مسئله - در اینجا مؤلفه های تغییر مکان ها- به وسیله توابع نربز و نقاط کنترلی و جای گذاری آنها در معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله به حل آن پرداخته می شود. حل مسئله به صورت رویه ای از پاسخ با گسسته سازی محیط پیوسته به وسیله این نقاط کنترلی و استفاده آنها در تقریب تابع مجهول ساخته می شود. این همان نگاه استفاده از شبکه در روش تفاضل های محدود، المان ها در روش اجزای محدود یا مجموعه ای از نقاط در روش های بدون شبکه می باشد. حسنی و مقدم [36] و حسنی و همکاران [37] توانایی این ایده در حل معادلات دیفرانسیل معمولی را مورد بررسی قرار داده و همچنین نتایج بسیار خوبی در مکانیک محاسباتی توسط هیوز و گروه تحقیقاتی آن گزارش شده است [24-34]. برخی از مزایای روش تحلیل ایزوژئومتریکی در مقایسه با سایر روش های عددی چنین است:

- تعریف هندسه و مرزهای مدل با دقت و انعطاف پذیری بالا
- کاهش حجم محاسبات و حصول دستگاه معادلات کوچکتر در مقایسه با سایر روش های عددی برای به دست آوردن دقت حل مشابه.
- عدم نیاز به مش بندی مجدد به سبب انعطاف بالا در فرآیند حل مسائلی که با تغییر دامنه مواجه هستند مانند مسائل با تغییر شکل های بزرگ، مسائل بهینه سازی، مسائل با دیدگاه لاگرانژی و غیره.

لازم به ذکر است که علیرغم مزایای این روش عدم فرارگیری نقاط کنترلی بر روی هندسه و رویه جواب مسئله از جمله مشکلات این روش می باشد. به بیان دیگر، با در دست داشتن نقاط در فضای فیزیکی برای یافتن متناظر آنها در فضای پارامتری نیازمند حل دستگاه معادله ای به صورت معکوس می باشیم.

نظیر نیروی فشار $\mathbf{t} = \mathbf{p}\mathbf{n}$ و \mathbf{d} نرخ تغییر شکل ها است [14,15,17].

$$\begin{aligned} \delta W(\phi, \delta \mathbf{v}) &= \delta W_{int}(\phi, \delta \mathbf{v}) - \delta W_{ext}(\phi, \delta \mathbf{v}) \\ &= \left(\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} \, dv \right) - \left(\int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} \, dv + \int_V \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} \, da \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

جمله دوم رابطه فوق قابل تفکیک به کارهای مجازی داخلی و خارجی به شرح زیر است:

$$\delta W(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] + D \delta W(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} D \delta W_{int}(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] &= \int_V \mathbf{DE}[\delta \mathbf{v}] : \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{DE}[\mathbf{u}] \, dv \\ &+ \int_V \mathbf{S} : [(\nabla_0 \mathbf{u})^T (\nabla_0 \mathbf{u})] \, dv = \int_V \delta \mathbf{d} : \tilde{\mathbf{c}} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dv \\ &+ \int_V \boldsymbol{\sigma} : [(\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \mathbf{u})] \, dv \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} D \delta W_{ext}(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] &= D \delta W_{ext}^f(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] + D \delta W_{ext}^p(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_{A_\xi} \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \times \delta \mathbf{v} \right) + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \eta} \times \mathbf{u} \right) \right] d\xi d\eta \\ &- \frac{1}{2} \int_{A_\xi} \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \times \delta \mathbf{v} \right) + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \xi} \times \mathbf{u} \right) \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (12)$$

که در این روابط داریم:

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right\|} ; \quad da = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right\| d\xi d\eta \quad (13)$$

تحلیل ایزوژئومتریکی در مسائل هایپر الاستیسیته

پیشرفت های صنعت طراحی به کمک کامپیوتر در مدل سازی هندسی اساس روش تحلیل ایزوژئومتریکی است [23]. در این روش مدل سازی خطوط منحنی، سطوح و احجام با استفاده از توابع پایه بی اسپلین و

فاصله گره‌ای (ξ_i, ξ_{i+1}) به تعداد $p+1$ تابع پایه‌ای غیرصفر وجود دارد که عبارتند از $N_{i-p,p}(\xi), N_{i-p+1,p}(\xi), \dots, N_{i,p}(\xi)$. در روش ایزوژئومتریک، هندسه مسئله با استفاده از توابع پایه و نقاط کنترلی مربوطه تعریف می‌شود. در ادامه از همین نقاط کنترلی و توابع پایه برای تقریب‌سازی رویه مؤلفه‌های جواب، با افزودن یک مؤلفه به مؤلفه‌های نقاط کنترلی به‌کاررفته در تعریف هندسه، استفاده می‌شود. این بدان معنی است که با در نظر گرفتن هندسه در فضای دو یا سه‌بعدی، بردار کنترلی مؤلفه‌های جواب مسئله از یک بعد بالاتر خواهند بود.

نحوه گسسته‌سازی. مشابه مفهوم ایزوپارامتری در روش اجزای محدود متغیرهای توصیف‌کننده هندسه در دستگاه‌های مختصات مادی (لاگرانژی) و فضایی (اولری) و نیز توابع مجهول در مسائل هایپراستاتیسته تراکم‌پذیر مطابق روابط زیر تقریب‌سازی می‌شوند. همان‌گونه که از دقت در این روابط ملاحظه می‌شود، بدین ترتیب کلیه متغیرها اعم از اولیه و ثانویه برحسب مختصات نقاط کنترلی تبیین می‌شوند که مترادف با گسسته‌سازی در سایر روش‌های عددی است؛ مانند نقاط گرهی در روش اجزای محدود.

$$\mathbf{X} = \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_{pa} \quad (19-الف)$$

$$\mathbf{x} = \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{x}(t)_{pa} \quad (19-ب)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{v}_{pa} \quad (19-ج)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^n R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{u}_{pa} \quad (19-د)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{a=1}^n X_{pa} \otimes \nabla_0 R_a \quad (19-ه)$$

$$\mathbf{C} = \sum_{a=1}^n (X_{pa} \cdot X_{pa}) \nabla_0 R_a \otimes \nabla_0 R_b \quad (19-و)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{a=1}^n \nabla_0 R_a \cdot \nabla_0 R_b (X_{pa} \otimes X_{pa}) \quad (19-ز)$$

نحوه تعریف سطوح و احجام. برای تعریف سطوح و احجام از توابع پایه اسپلاین‌ها و به‌ویژه توابع نربز به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (14)$$

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) P_{i,j,k} \quad (15)$$

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p_1}(\xi) N_{j,p_2}(\eta) \omega_{i,j}}{\sum_{e=0}^{n_1} \sum_{f=0}^{n_2} N_{e,p_1}(\xi) N_{f,p_2}(\eta) \omega_{e,f}} \quad (16)$$

که در این روابط $P_{i,j}$ معرف نقاط کنترلی، به تعداد $(n_1+1) \times (n_2+1)$ هستند که برای تعریف هندسه به‌کار می‌روند. همچنین، n_1 و n_2 تعداد توابع پایه بی‌اسپلاین، $\omega_{i,j}$ وزن مرتبط با هر نقطه و $N_{i,p_1}(\xi) N_{j,p_2}(\eta)$ توابع پایه بی‌اسپلاین به‌ترتیب در راستای ξ و η با مرتبه چند جمله‌ای p_1 و p_2 می‌باشد. در این روابط، ξ و η آمین تابع بی‌اسپلاین با بردار گرهی $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m_1}\}$ از درجه p_1 در راستای ξ توسط رابطه بازگشتی زیر تعریف می‌گردد.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

$$N_{i,p_1} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p_1} - \xi_i} N_{i,p_1-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p_1+1} - \xi}{\xi_{i+p_1+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p_1-1}(\xi) \quad (18)$$

در روش ایزوژئومتریک استفاده از بردارهای گرهی موسوم به باز یا نامتناوب متداول‌تر است. در این نوع بردارهای گرهی، گره ابتدا و انتها به‌تعداد $p+1$ بار تکرار می‌شوند و در نتیجه تعداد نقاط گرهی در بردار مزبور $m=n+p+1$ می‌باشد. همچنین در

که \mathbf{R}_a باقیمانده نیروها در متغیرهای کنترلی است. برای جمله دوم رابطه (۱۰) به طرز مشابهی می توان نوشت:

$$D\delta W^{(e)}(\phi, \mathbf{R}_a, \delta \mathbf{v}_a)[\mathbf{R}_b, \mathbf{u}_b] = D(\delta \mathbf{v}_a (\mathbf{T}_a^{(e)} - \mathbf{F}_a^{(e)}))[\mathbf{R}_b, \mathbf{u}_b] = \delta \mathbf{v}_a (D(\mathbf{T}_a^{(e)} - \mathbf{F}_a^{(e)}))[\mathbf{R}_b, \mathbf{u}_b] = \delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{K}_{ab}^{(e)} \mathbf{u}_b \quad (24)$$

همان گونه که مشاهده می شود، از معادله (۲۴) تعریف ماتریس ضرایب $\mathbf{K}_{ab}^{(e)}$ نتیجه می شود که در واقع مبین تغییرات نیرو در متغیر کنترلی a نسبت به تغییر مکان در متغیر کنترلی b در المان گرهی e است. این ماتریس ضرایب از دو قسمت تشکیل می شود: اول، مؤلفه های ناشی از کار داخلی، که خود شامل دو بخش تنش ابتدایی $\mathbf{K}_{\sigma, ab}^{(e)}$ و ساختار رفتاری $\mathbf{K}_{c, ab}^{(e)}$ است و دوم، مؤلفه ناشی از کار خارجی که به مؤلفه نیروهای خارجی ماتریس ضرایب $\mathbf{K}_{p, ab}^{(e)}$ موسوم است.

$$\mathbf{K}_{ab}^{(e)} = \mathbf{K}_{c, ab}^{(e)} + \mathbf{K}_{\sigma, ab}^{(e)} - \mathbf{K}_{p, ab}^{(e)} \quad (25)$$

$$[\mathbf{K}_{c, ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial \mathbf{R}_a}{\partial \mathbf{X}_k} \tilde{c}_{ijkl} \frac{\partial \mathbf{R}_b}{\partial \mathbf{X}_l} dv; i, j=1,2,3 \quad (26)$$

$$[\mathbf{K}_{\sigma, ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial \mathbf{R}_a}{\partial \mathbf{X}_k} \sigma_{kl} \frac{\partial \mathbf{R}_b}{\partial \mathbf{X}_l} \delta_{ij} dv; i, j=1,2,3 \quad (27)$$

$$[\mathbf{K}_{p, ab}^{(e)}]_{ij} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} [k_{p, ab}^{(e)}]_k; i, j=1,2,3 \quad (28)$$

$$\mathbf{k}_{p, ab} = \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathbf{R}_a}{\partial \eta} \mathbf{R}_b - \frac{\partial \mathbf{R}_b}{\partial \eta} \mathbf{R}_a \right) da + \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \mathbf{R}_a}{\partial \xi} \mathbf{R}_b - \frac{\partial \mathbf{R}_b}{\partial \xi} \mathbf{R}_a \right) da \quad (29)$$

که پس از بازنویسی معادلات تعادل در فضای گسسته و استفاده از روش حل برمبنای تکرار نیوتن-رافسون روابط زیر به دست می آیند:

$$\delta \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = -\delta \mathbf{v}^T \mathbf{R} \quad (30)$$

لازم به توضیح است که محاسبه $\nabla \mathbf{R}, \nabla_0 \mathbf{R}$ انتقال از فضای فیزیکی به فضای پارامتری باتوجه به تعریف توابع شکل نریزی \mathbf{R} به وسیله بردارهای گره ای به صورت زیر امکان پذیر می باشد:

$$\nabla_0 \mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{X}} \quad (20)$$

$$\nabla \mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}} \quad (21)$$

که در این روابط \mathbf{R}_a توابع شکل، n تعداد نقاط کنترلی مرتبط با آن، x_{pa} مختصات جدید متغیر کنترلی در دستگاه اوپلری، \mathbf{X}_{pa} مختصات جدید متغیر کنترلی در دستگاه لاگرانژی، v_{pa} سرعت متغیر کنترلی و u_{pa} مؤلفه های جابه جایی متغیر کنترلی می باشند.

همان گونه که در بالا توضیح داده شد، با خطی سازی رابطه کار مجازی برمبنای سرعت، رابطه (۱۰) حاصل می شود که در آن اولین مؤلفه معادله بیانگر کار نیروهای خارجی $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ و داخلی $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ و دومین مؤلفه بیانگر شیب منحنی نیرو-جابه جایی $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ است. در ادامه، با بهره گیری از روابط (۱۹) در فضای گسسته، معادله خطی سازی شده فوق را باتوجه به متغیرهای کنترلی بازنویسی نموده و از روش حل برمبنای تکرار نیوتن-رافسون استفاده می شود. معادله کار مجازی در روش ایزوژئومتریکی به رابطه (۲۲) تبدیل می شود که در آن a ها معرف متغیرهای کنترلی دامنه مسئله و e ها نشان دهنده المان های گرهی (knot elements) مربوطه هستند.

$$\delta W(\phi, \delta \mathbf{v}) = \sum_{a=1}^N \delta W(\phi, \mathbf{R}_a, \delta \mathbf{v}_a) = \sum_{a=1}^N \delta \mathbf{v}_a (\mathbf{T}_a - \mathbf{F}_a) = \sum_{a=1}^N \sum_{e=1}^N \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{e}_a} \delta \mathbf{v}_a \int_{V^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{R}_a dv - \sum_{a=1}^N \sum_{e=1}^N \delta \mathbf{v}_a \left(\int_{V^{(e)}} \mathbf{R}_a \mathbf{f} dv + \int_{\partial V^{(e)}} \mathbf{R}_a \mathbf{t} da \right) = 0 \quad (22)$$

که این رابطه معادل است با

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{T}_a - \mathbf{F}_a = 0 \quad (23)$$

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}[(\xi_{i+1} - \xi_i)r + (\xi_{i+1} + \xi_i)] \\ \eta = \frac{1}{2}[(\eta_{i+1} - \eta_i)s + (\eta_{i+1} + \eta_i)] \\ \zeta = \frac{1}{2}[(\zeta_{i+1} - \zeta_i)t + (\zeta_{i+1} + \zeta_i)] \end{cases} \quad (35)$$

گام‌های الگوریتم حل مسائل هایپر الاستیسیته تراکم‌پذیر در زیر خلاصه شده و در ادامه فلوجارت حل در شکل (۱) آورده شده است.

۱. ورود مشخصات هندسه (بردارهای گره‌ای، وزن توابع پایه و نقاط کنترلی)، تعریف خصوصیات و پارامترهای مواد هایپر الاستیک و پارامترهای تحلیل مسئله شامل تعداد تقسیمات بار و دقت همگرایی در هر مرحله.
۲. اعمال حلقه سری افزایشی بار که در هر مرحله افزایش بار ΔF_i توسط روابط زیر انجام می‌پذیرد.

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i - \Delta \mathbf{R}_i \quad ; \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i + \Delta \mathbf{F}_i$$

۳. اعمال حلقه همگرایی در هر مرحله افزایش بار

الف) محاسبه ماتریس ضرایب \mathbf{K}_i

ب) حل معادله $\mathbf{K}_i \mathbf{u}_p = -\mathbf{R}_i$

ج) یافتن مختصات جدید نقاط کنترلی

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p + \mathbf{u}_p$$

د) محاسبه نیروهای داخلی \mathbf{T}_i

ه) محاسبه باقی‌مانده $\mathbf{R}_i = \mathbf{T}_i - \mathbf{F}_i$

۴. اتمام حلقه همگرایی.

۵. اتمام حلقه سری افزایشی بار.

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{R}(\mathbf{x}_k); \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{u} \quad (31)$$

توجه به این مطلب ضروری است که اگرچه در مسائل غیرخطی وارد نمودن تمام بار خارجی در یک مرحله به صورت تئوری امکان‌پذیر می‌باشد، در عمل بار خارجی \mathbf{F} در چند مرحله و به صورت یک‌سری افزایشی (Series of Increments) بر جسم اعمال می‌شود.

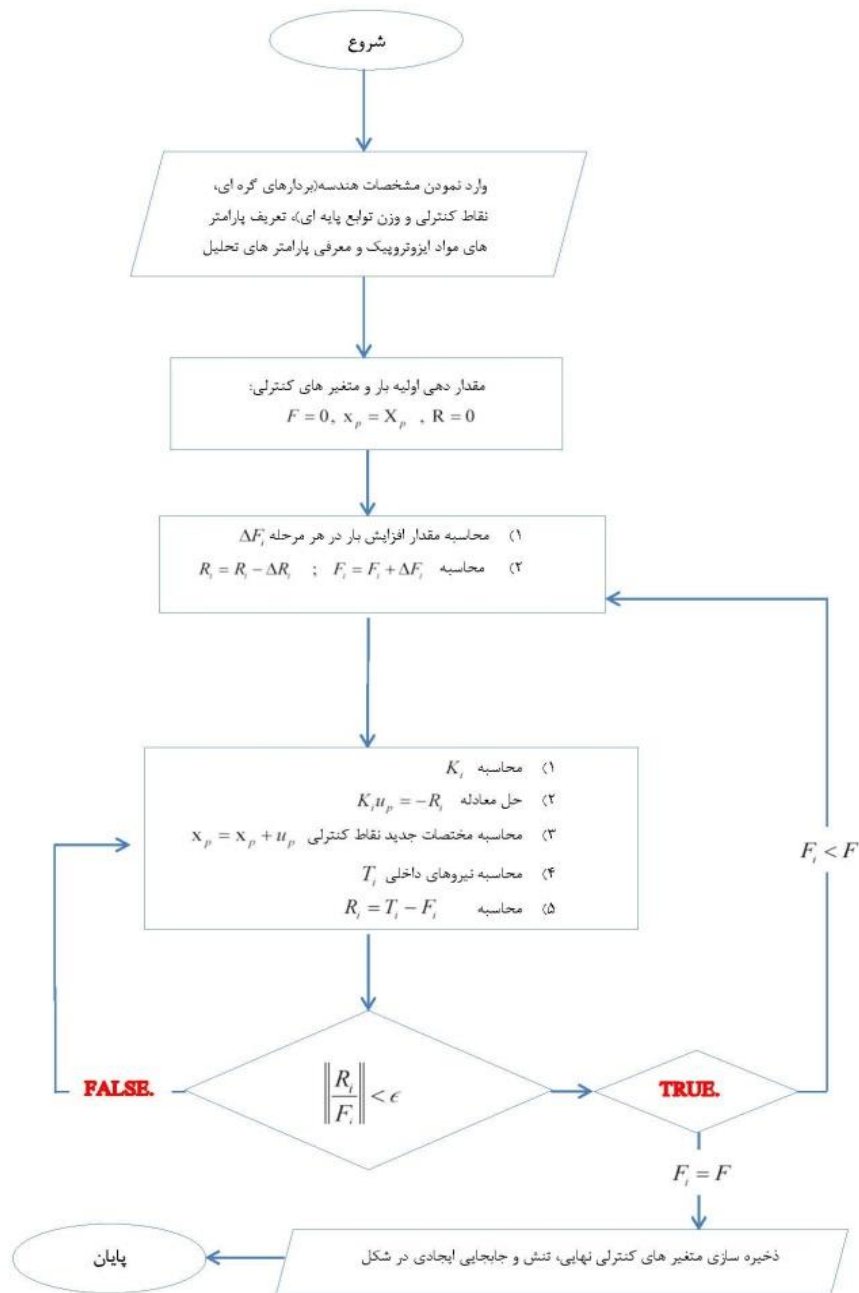
$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^I \Delta \mathbf{F}_i \quad (32)$$

لازم به توضیح است که در روش ایزوژئومتری، برای تعریف هندسه و رویه جواب مسئله در فضای فیزیکی $\{x, y, z\}$ از فضای پارامتری $\{\xi, \eta, \zeta\}$ استفاده می‌شود که توسط بردارهای گرهی تبیین می‌شوند. از سوی دیگر برای محاسبه انتگرال‌ها به روش انتگرال‌گیری گوس، مشابه روش اجزای محدود، لازم است که نگاهی از این فضا به فضای الگو $\{r, s, t\}$ انجام شود. به بیان دیگر انتگرال‌گیری در فضای فیزیکی با دو انتقال از فضای الگو به فضای پارامتریک و سپس به فضای فیزیکی همراه است. ماتریس‌های ژاکوبی نگاشت‌های اشاره شده چنین هستند:

$$\begin{aligned} dx dy dz &= (\det J_1) d\xi d\eta d\zeta \\ &= (\det J_1 \det J_2) dr ds dt \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (34)$$

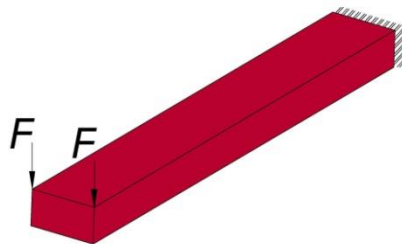


شکل ۱ الگوریتم روش تحلیل ایزوژئومتری در مسائل هایپرالاستیسیت تراکم پذیر

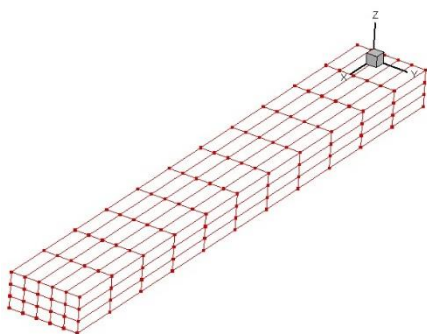
ارائه مثالها

در این بخش ابتدا با ارائه یک مثال در مورد مسائل هایپرالاستیک تراکم پذیر با تغییر شکل های بزرگ، به مقایسه جواب روش ایزوژئومتری بر اساس الگوریتم ارائه شده IGLAGSHYP در این مقاله با نتیجه روش

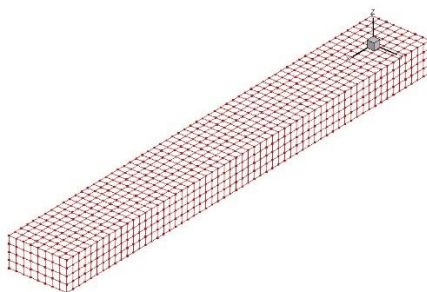
اجزای محدود، که با استفاده از کد آکادمیک FLAGSHYP به دست آمده است، می پردازیم [17]. در ادامه به منظور بررسی اثر تعداد نقاط گوسی و تعداد تقسیمات بار دو مثال دیگر ارائه می شود. در این تحقیق از مصالح نئو-هوکن تراکم پذیر با تابع انرژی



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲ تعریف مثال ۱-الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی، ب) شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریکی و ج) مش‌بندی اولیه در روش اجزای محدود

نتایج حاصل از حل ایزوژئومتریکی و اجزای محدود در شکل‌های (۳ و ۴) و نیز جدول (۱) ارائه شده است.

کرنتی و پارامترهای به قرار زیر استفاده شده است که در آن، چگالی مصالح و μ و λ ضرایب لازم می‌باشند.

$$\begin{cases} \psi(C) = \frac{\mu}{2} (I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2 \\ \rho = 0 ; \mu = 100 ; \lambda = 100 \end{cases}$$

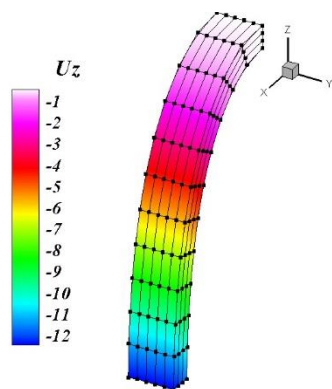
مثال ۱- مدل‌سازی تیر طره تحت اثر بار در انتها.

مدل تحلیلی ارائه‌شده در این مسئله، یک مکعب مستطیل با طول ۱۵، عرض ۲ و ارتفاع واحد می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاهی در شکل (۲) نشان داده شده است. بارگذاری در ۱۰ مرحله با تیرانس همگرایی $\epsilon = 1 \times 10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. در روش اجزای محدود، از ۱۹۲۰ المان‌های هشت‌گره‌ای شش‌وجهی و ۲۷۴۵ گره و برای انتگرال‌گیری در هر المان از ۸ نقطه گوسی استفاده شده است. در روش ایزوژئومتریکی از توابع پایه بی‌اسپلاین درجه دو ($p=q=r=2$) برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

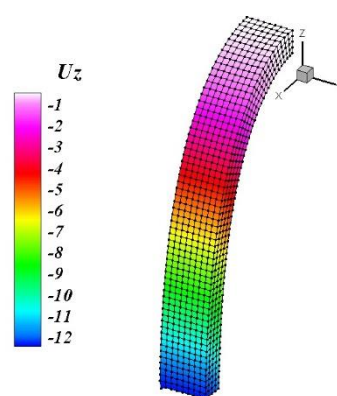
$$\begin{aligned} \xi &= \{0, 0, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, \\ &0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1, 1\} \\ \eta &= \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\} \\ \zeta &= \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\} \end{aligned}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از ۶۴ نقطه گوسی استفاده شده است. با در نظر داشتن رابطه $m = n + p + 1$ به صورت زیر است.

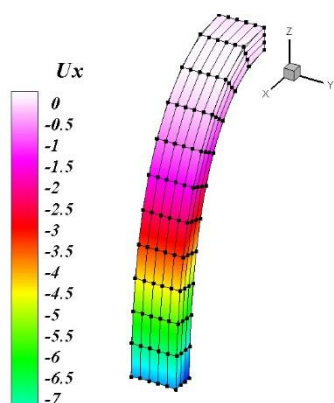
$$P_\xi = 12 ; P_\eta = 6 ; P_\zeta = 4 ; P_{\text{total}} = 288$$



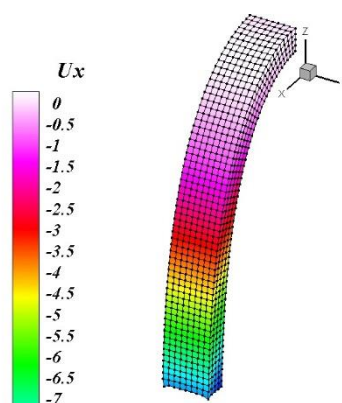
(الف)



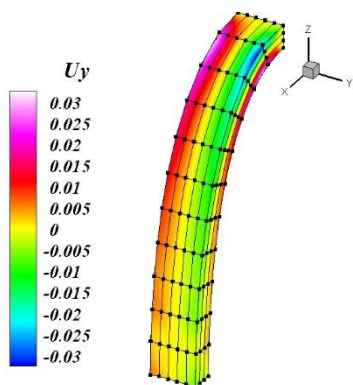
(ب)



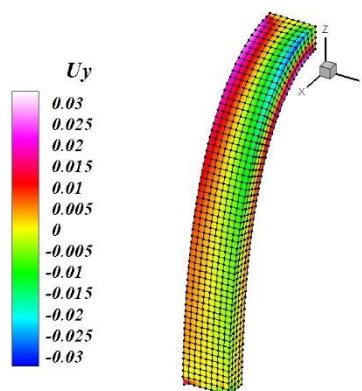
(ج)



(د)



(ه)



(و)

شکل ۳ (الف) کانتور جابه‌جایی در راستای Z در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترل تغییر یافته، (ب) کانتور جابه‌جایی در راستای Z در روش اجزای محدود، (ج) کانتور جابه‌جایی در راستای X در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترل تغییر یافته، (د) کانتور جابه‌جایی در راستای X در روش اجزای محدود، (ه) کانتور جابه‌جایی در راستای Y در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترل تغییر یافته، (و) کانتور جابه‌جایی در راستای Y در روش اجزای محدود.

سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. از توابع پایه نریز درجه دو ($p=q=r=2$) برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

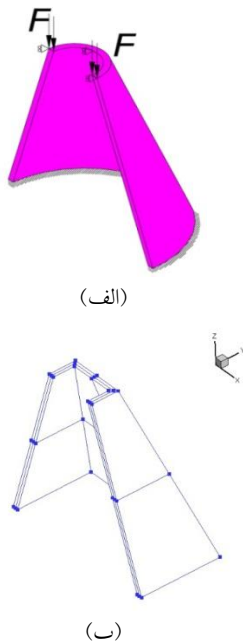
$$\xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}, \quad \zeta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از A_i^3 نقطه گوسی استفاده شده است که A_i تعداد گوسی در هر راستا می‌باشد. به منظور بررسی اثر نقاط گوسی بر جواب مسئله $A_i = 3, 4, 6$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از رابطه $m = n + p + 1$ تعداد نقاط کنترلی به صورت زیر است.

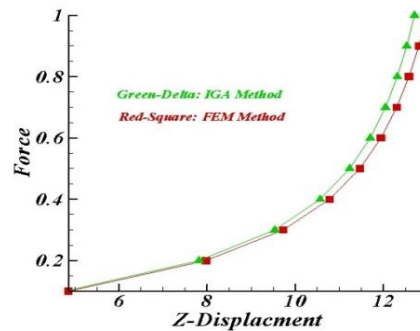
$$P_\xi = 5; \quad P_\eta = 3; \quad P_\zeta = 3; \quad P_{\text{total}} = 45$$

مقدار وزن توابع نریز در نظر گرفته شده برای این مثال با توجه به شکل (۵-ب) در گوشه‌ها برابر 0.7×0.7 می‌باشد.



شکل ۵ تعریف مسئله ۲ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتری

نتایج در شکل (۶) نشان داده شده است.



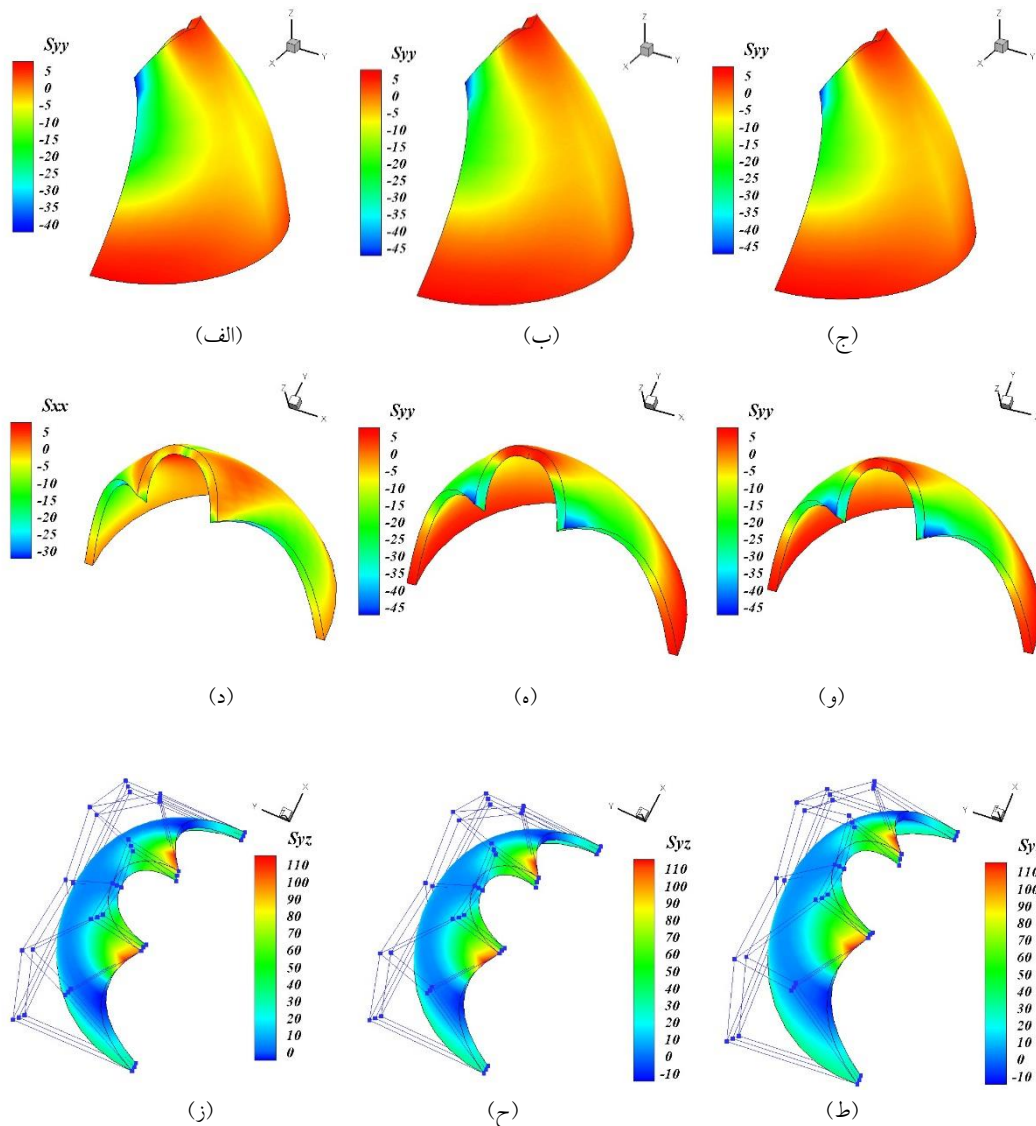
شکل ۴ نمودار بار-جابجایی در نقطه اعمال بار مربوط به مثال ۱

جدول ۱ نسبت تغییرات حجم آغازین و پایانی در روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک مربوط به مثال ۱

	حجم اولیه (متر مکعب)	حجم پایانی (متر مکعب)	نسبت تغییر حجم (J)
روش اجزای محدود	30.000000	30.037631	1.00125
روش ایزوژئومتریک	30.000000	30.037242	1.00124

باتوجه به نتایج ارائه شده در این مثال ملاحظه می‌شود که استفاده از روش اجزای محدود باعث ایجاد دستگاه معادلات بزرگتر و در نتیجه حجم محاسباتی بالاتر شده است. همچنین بادقت در شکل تغییر شکل یافته مسئله، به ویژه در انتهای تیر طره، نیاز به فرآیند مش بندی مجدد نیز قابل مشاهده می‌باشد. به نظر می‌رسد علت این بهبود استفاده از توابع پایه با قابلیت انعطاف بالا در ایجاد هندسه مدل در روش ایزوژئومتریک است.

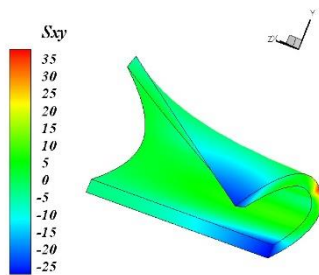
مثال ۲ - مسئله نیم‌مخروط ناقص تحت فشار خارجی. در این مسئله به بررسی تأثیر نقاط گوسی در همگرایی جواب پرداخته شده است. مدل هندسی ارائه شده در این مسئله یک نیم‌مخروط ناقص با شعاع متوسط ابتدائی $2/9$ ، انتهائی $0/9$ ، ضخامت $0/2$ و ارتفاع 6 می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاهی در شکل (۵) نشان داده شده است. بار در 200 مرحله با مقدار همگرایی $\epsilon = 1 \times 10^{-10}$ به صورت



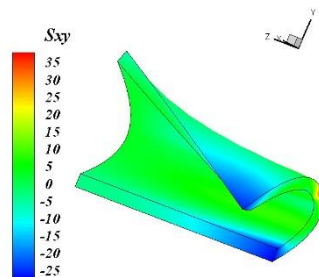
شکل ۶ (الف) کانتور تنش σ_{yy} با ۲۷ نقطه گوسی (ب) کانتور تنش σ_{yy} با ۶۴ نقطه گوسی (ج) کانتور تنش σ_{yy} با ۲۱۶ نقطه گوسی (د) کانتور تنش σ_{xx} با ۲۷ نقطه گوسی (ه) کانتور تنش σ_{xx} با ۶۴ نقطه گوسی (و) کانتور تنش σ_{xx} با ۲۱۶ نقطه گوسی (ز) کانتور تنش τ_{xz} با ۲۷ نقطه گوسی به همراه شبکه کنترلی تغییر یافته (ح) کانتور تنش τ_{xz} با ۶۴ نقطه گوسی به همراه شبکه کنترلی تغییر یافته (ط) کانتور تنش τ_{xz} با ۲۱۶ نقطه گوسی به همراه شبکه کنترلی تغییر یافته

مثال ۳- مدل‌سازی صفحه خمیده تحت فشار خارجی. در این مسئله به بررسی تأثیر تعداد تقسیمات بار در همگرایی جواب پرداخته شده است. مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله یک صفحه خمیده با شعاع تقریبی متوسط ۹، ضخامت ۱ و طول ۱۸ می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاهی در شکل (۷) نشان داده شده است. بار در مرحله A با

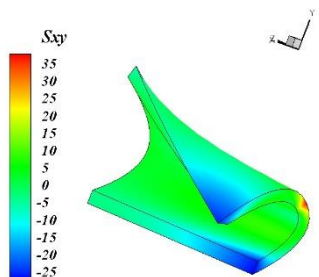
باتوجه به استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی در نقاط گوسی، یافتن تعداد نقاط گوسی بهینه در هر راستا بدون کاهش در دقت جواب مسئله باعث افزایش سرعت حل و کاهش زمان محاسبات می‌گردد. نتایج ارائه شده در این مثال نشان می‌دهد با مرتبه چندجمله‌ای $(p=q=r=2)$ انتخاب ۴ نقطه گوسی در هر راستا مناسب است.



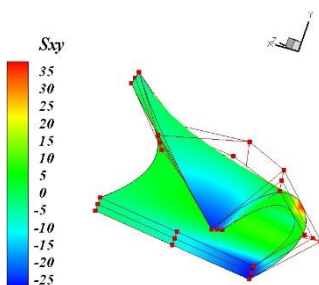
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۸ (الف) کانتور تنش τ_{xy} با تعداد تقسیمات بار=۱۰

(ب) کانتور تنش τ_{xy} با تعداد تقسیمات بار=۲۰

(ج) کانتور تنش τ_{xy} با تعداد تقسیمات بار=۵۰ (د) کانتور تنش

τ_{xy} با تعداد تقسیمات بار=۱۰۰ به همراه شبکه کنترلی تغییر یافته

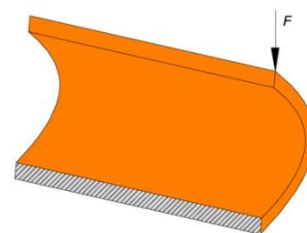
مقدار همگرایی $\epsilon = 1 \times 10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. به منظور بررسی اثر تعداد تقسیمات بار بر جواب مسئله A=10, 20, 50, 100 در نظر گرفته شده است. از توابع پایه ب- اسپلاین درجه (p=q=r=2) برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$$

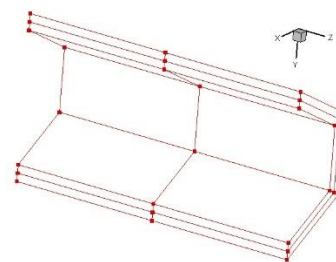
$$\eta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \quad \zeta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از ۶۴ نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m=n+p+1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

$$P_{\xi} = 4 ; P_{\eta} = 3 ; P_{\zeta} = 3 ; P_{total} = 36$$



(الف)



(ب)

شکل ۷ تعریف مسئله ۳ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط

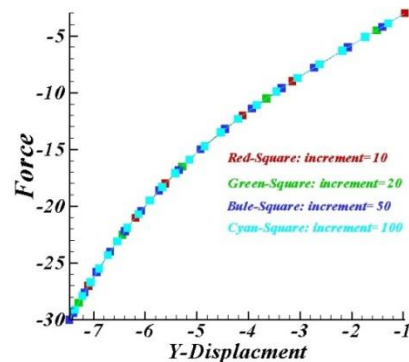
مرزی (ب) شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک

نتایج در شکل (۸ و ۹) ارائه شده است.

باتوجه به نتایج ارائه شده، روش ایزوژئومتریکی در مقایسه با روش اجزای محدود به دستگاه معادلات کوچکتری منجر شده و وابستگی جواب مسئله به شبکه المان‌ها و در نتیجه نیاز به تولید مجدد مش را تا حدود بسیار زیادی منتفی می‌نماید. باتوجه به استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی در نقاط گوسی، یافتن تعداد نقاط گوسی بهینه در هر راستا بدون کاهش در دقت جواب مسئله باعث افزایش سرعت حل و کاهش زمان محاسبات می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد با مرتبه چند جمله‌ای $(p=q=r=2)$ انتخاب ۴ نقطه گوسی در هر راستا مناسب است. به علاوه نشان داده شد که در مسائل هایپر الاستیسیته جواب نهایی مستقل از تعداد تقسیمات بار می‌باشد.

واژه‌نامه

Isogeometric	ایزوژئومتریکی
Bspline	ب-اسپلاین
Strain energy function	تابع انرژی کرنشی
Compressible	تراکم‌پذیر
Deformation gradient	گرادیان تغییر شکل
Nurbs	نربز
Control point	نقاط کنترلی
Hyperelasticity	هایپر الاستیسیته
Physical space	فضای فیزیکی
Parameter space	فضای پارامتری



شکل ۹ نمودار بار-جاب‌جایی در نقطه اعمال بار مربوط به مثال ۳

باتوجه به نتایج ارائه شده در این مثال در مسائل هایپر الاستیسیته تراکم‌پذیر جواب نهایی مستقل از تعداد تقسیمات بار می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به کاربرد روش تحلیلی ایزوژئومتریکی جهت فرمول‌بندی مسائل غیرخطی با تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک تراکم‌پذیر که به عنوان مسائل هایپر الاستیسیته شناخته می‌شوند، پرداخته شده است. بدین منظور جهت استخراج ماتریس ضرایب با بهره‌گیری از مفهوم ایزوژئومتریکی، پس از خطی‌سازی روابط حاکم بر این دسته از مسائل، معادلات تعادل در فرم گسسته شده آن نوشته شد و الگوریتمی برای تحلیل این دسته از مسائل معرفی گردید. جهت بررسی و صحت نتایج ارائه شده در مسائل هایپر الاستیسیته تراکم‌پذیر نتایج روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریکی با یکدیگر مقایسه شد.

مراجع

1. Tuner, M.J., Drill, E.H., Martin, H.C. and Melosh, R.J., "Large deflection of structures subject to heating and external load", *Journal Aerospace Sciences.*, Vol. 27, pp. 97-106, (1960).
2. Kapur, W.W. and Hartz, B.J., "Stability of plates using the finite element method", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 92, pp. 177-195, (1966).
3. Gallagher, R.J. and Padlog, J., "Discrete element approach to structural stability", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 92, pp. 196-203, (1966).

- Aeronautics & Astronautics*, Vol. 1, No. 6, pp. 1437-1439, (1963).
4. Gallagher, R.J., Gellatly, R.A., Padlog, J. and Mallet, R.H., "A discrete element procedure for thin shell instability analysis", *Journal of Aeronautics & Astronautics*, Vol. 5, No. 1, pp. 138-145, (1967).
 5. Holand, I. and Moan, T., "The finite element in plate buckling", *Finite Element Methods in Stress Analysis*, (1969).
 6. Argyris, J.H., "*Recent Advance in Matrix Method of Structure Analysis, Progress in Aeronautical Sciences*", (1964).
 7. Argyris, J.H., "Countinua and discountinua", Proc, conf, Matrix Methods in Struct, mech, *Air Force Institute of Technology*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Octobr (1965).
 8. Oden, J.T., "Numerical Formulation of non-linear elasticity problems", *Journal of the Structural Division*, Vol. 93, pp. 5290, (1967).
 9. Mallet, R.H. and Marcal, P.V., "finite element analysis of non-linear structures", *Journal of the Structural Division*, Vol. 94, pp. 2081-2105, (1968.)
 10. Oden, J.T., "Finite elemnt application in non-linear structural analysis", Proc, Conf, on Finite elemnt Meth, Vanderbilt University Tennessee, 18 November (1969).
 11. Haisler, W.E., Stricklin, J.E. and Stebbins, F.J., "Development and evaluation of solution procedures for geometrically non-linear structural analysis by the discrete stiffnes method", AIAA/ASME, 12th structure, Structural Dynamics & Materials Conf, Anaheim, californa, 24 April (1971).
 12. Zinckiewicz, O.C., "*The Finite Element in Engeneering Science*", Mc Graw-Hill, London, (1971).
 13. Brebbia, C. and Connor, J., "Geometrically non-linear finite element analysis", *Journal of the Structural Division*, pp. 6516, (1969).
 14. Crisfield, M.A., "*Nonlinear finite element analysis of solids and structures*", Vol. I & Vol. II, John Wiley & Sons, (1991).
 15. Belytschko, T., Liu, W.K. and Moran, B., "*Nonlinera Finite Element for Countinua and Structures*", John Wiley & Sons, (2000).
 16. Zinkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., "The finite element method, Vol. II, 5nd edition", McGraw Hill, (2000).
 17. Bonet, J. and Wood, R.D., "*Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, 2nd edition", Cambridge University Press, (2008).
 18. Wriggers, P., "*Nonlinear finite element methods*", Springer, (2008).
 19. Qiang, Z. and Qing-Sheng, Y., "Effects of large deformation and material nonlinearity on spherical indentation of hyperelastic soft materials", *Mechanics Research Communications*, Vol. 84, pp. 55-59, (2017).
 20. Clayton J.D., "Geometry of nonlinear elastic solids with internal structure", *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 112, pp. 118-146, (2017).
 21. Piegel, L. and Wayne, T., "*The Nurbs Book, 2nd edition*", Springer, (1996).
 22. Rogers, D.F., "*An Introduction to NURBS with Historical Perspective*", Morgan Kaufmann Publishers, (2001).
 23. Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: Cad, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135-4195, (2005).
 24. Penter, P.M., "*Splines and Variational Methods*", John Wiley & Sons, (1989).
 25. Hölling, K., "Finite elemnt methods with B-Splines", Society for industrial and applied mathematics Philadelphia, (2003).
 26. Kadapa, C., Dettmer, W.G. and Perić, D., "Subdivision based mixed methods for isogeometric analysis of linear and nonlinear nearly incompressible materials", *Computer Methods in Applied*

- Mechanics and Engineering*, Vol. 305, pp. 241-270, (2016).
27. Nguyen, X., Atroschchenko, E. and nguyen, H., "Geometrically nonlinear isogeometric analysis of functionally graded microplates with the modified couple stress theory", *Computers & Structures*, Vol. 193, pp. 110-127, (2017).
 28. Bauer, A.M., Breitenberger, M., Philipp, B., Wüchner, R. and Bletzinger, K.-U., "Nonlinear isogeometric spatial Bernoulli beam", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 303, pp. 101-127, (2016).
 29. Antolin, P., Bressan, A., Buffa, A. and Sangalli, G., "An isogeometric method for linear nearly-incompressible elasticity with local stress projection", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 316, pp. 694-719, (2017).
 30. Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y., "*Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA*", John Wiley & Sons, (2009).
 31. Bazilevs, Y., Beirão, L., Cottrell, J., Hughes, T.J.R. and Sangalli, G., "Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes", *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 16, pp. 1031–1090, (2006).
 32. Bazilevs, Y., Calo, V., Cottrell, J., Hughes, T., Reali, A. and Scovazzi, G., "Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 173–201, (2007).
 33. Bazilevs, Y., Calo, V.M., Zhang, Y. and Hughes, T.J.R., "Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 38, No. 4, pp. 310–322, (2006).
 34. Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y. and Hughes, T.J.R., "Isogeometric analysis of structural vibrations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 5257–5296, (2006).
 35. Elguedj, T., Bazilevs, Y., Calo, V.M. and Hughes, T.J.R., " \bar{B} and \bar{F} projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 2732-2762, (2008).
 36. Hassani, B. and Moghadam, N.Z., "Development of a new numerical method for solution of ordinary differential equations by using spline basis functions", *Technical Report*, No. 1015, *Shahrood University of Technology*, Iran, (2009), (In Farsi).
 37. Hassani, B., Moghaddam, N.Z. and Tavakkoli, S.M., "Isogeometric solution of Laplace equation", *Asian Journal of Civil Engineering*, Vol. 10, No. 5, pp. 579-592, (2009).