

ارتعاشات اجباری غیرخطی صفحه مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مستطیلی شکل بر اساس

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم*

رامین منتشلو^(۱) علیرضا شوشتری^(۲)

چکیده در این مقاله ارتعاشات اجباری عرضی غیرخطی تحت نیروی تحریک هارمونیک جانبی یک صفحه مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مستطیلی شکل ساخته شده از پیزوالکتریک $BaTiO_3$ و مگنتواستریکتیو $CoFe_2O_4$ ، با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بررسی شده است. تغییرات خواص از پایین به بالا فرض شده است، یعنی سطح بالای ورق غنی از پیزوالکتریک است، در حالی که سطح پایین ورق غنی از مگنتواستریکتیو است و خواص مواد در جهت ضخامت مطابق قانون توزیع توانی درجه بندی شده است. معادلات حرکت بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم به دست آمده‌اند. همچنین معادلات ماکسول در حالت الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک برای مدل‌سازی رفتار الکتریکی و مغناطیسی به کار برده شده‌اند. سپس معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی به دست آمده با استفاده از روش گلسرکین به پنج معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی کوپل شده تبدیل شده‌اند. این معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به یک معادله دیفرانسیل که شامل ترم‌های غیرخطی سفنی و اینرسی و ترم‌های غیرخطی مرتبه دو و سه است کاهش یافته‌اند. برای حل معادله به دست آمده، از تئوری اغتشاشات استفاده شده است و سپس نتایج به دست آمده برای فرکانس طبیعی خطی با نتایج موجود برای ورق‌های همسانگرد و ورق‌های پیزوالاستیک همسانگرد مقایسه شده‌اند و مطابقت خوبی میان نتایج این پژوهش و نتایجی که قبلاً منتشر شده‌اند مشاهده گردیده است. در تحلیل ارتعاشات اجباری، تشدیدهای اولیه، سوپرهارمونیک مطالعه شده است و معادله پاسخ فرکانسی آن به دست آمده است. همچنین باتوجه به اهمیت تشدید اولیه، پایداری آن نیز بررسی شده است. نیروی تحریک خارجی در این حالت، نیروی تحریک مکانیکی با دامنه ثابت و به صورت هارمونیک در حوزه زمان در نظر گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی ورق هوشمند مدرج تابعی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم، قوانین گاوس، تئوری اغتشاشات، ارتعاش غیرخطی اجباری.

Nonlinear Forced Vibration of Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Rectangular Plate based on the Third Order Shear Deformation Theory

R. Mantashloo

A. Shooshtari

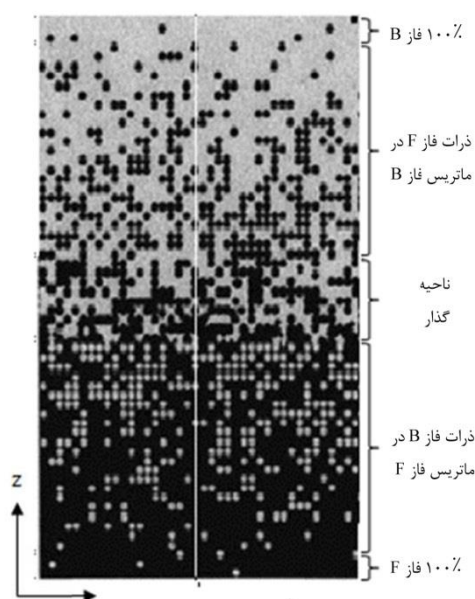
Abstract In this paper, nonlinear vibration of the functionally graded rectangular plates made of piezoelectric $BaTiO_3$ and magnetostrictive $CoFe_2O_4$, with simply supported boundary condition has been investigated. It is assumed that the composition is varied from the bottom surfaces to top surface, i.e., the top surface of the plate is piezoelectric-rich, whereas the bottom surface is magnetostrictive-rich. In addition, material properties are graded along the thickness according to volume fraction power-law distribution. Based on the Reddy's third-order shear deformation plate theory, the governing equations of motion, whereas Maxwell equations for electrostatics and magnetostatics are used to model the electric and magnetic behavior. Then, the nonlinear partial differential equations of motion are transformed into five coupled nonlinear ordinary differential equations by using the Galerkin method. Afterward, the obtained coupled ordinary differential equations are reduced to a single nonlinear differential equation which include nonlinear inertia and stiffness terms with quadratic and cubic nonlinear terms. A perturbation method is used to solve the equation of motion analytically. The results for natural frequency are compared with the available results for isotropic, laminated and piezo-laminated plates and good agreement is found between the results of present study with the results of previously published papers. In the forced vibration, primary, super-harmonic resonances are studied and the frequency response equation has been obtained. Because of the importance of the primary resonance, the stability of the steady-state motion is investigated for the primary resonance, The applied external force is assumed to be harmonic in time with a constant amplitude.

Key Words Functionally graded smart plate, Third order shear deformation theory, Gauss's laws, Perturbation method, Force vibration

* تاریخ دریافت مقاله ۹۶/۵/۹ و تاریخ پذیرش آن ۹۷/۵/۱۳ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v30i2.66477

(۱) کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا

(۲) نویسنده مسئول: دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا shooshta@basu.ac.ir



شکل ۱ ساختار کلی مواد مدرج تابعی [26]

مواد مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک که کوپلینگ بین میدان‌های مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی را در بر دارند و می‌توانند انرژی را میان این سه شکل تبدیل کنند، کاربرد مستقیمی در سنسورها و محرک‌ها، کنترل ارتعاشات در سازه‌ها و غیره دارند. همچنین از این مواد به‌تازگی در برداشت‌کننده‌های انرژی نیز استفاده شده است. بسیاری از این نوع سازه‌های هوشمند به‌صورت تیر مدل‌سازی و استفاده شده‌اند. در مقاله حاضر ارتعاشات اجباری غیرخطی یک صفحه مستطیل‌شکل مورد بررسی قرار گرفته است.

فریرا و همکاران [1] فرکانس‌های طبیعی ورق مربعی‌شکل مدرج تابعی را برای شرایط مرزی مختلف به‌دست آوردند. حسینی هاشمی و همکاران [2,3] ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی‌شکل مدرج تابعی را برای شرایط مرزی مختلف بررسی نموده و پاسخ تحلیلی برای آن به‌دست آوردند. ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی نیز موضوع تحقیقات زیادی بوده است [4-6].

مقدمه

مواد مدرج تابعی (FGM) نوع جدیدی از مواد مرکب ناهمگن ساخته شده از مواد با فازهای مختلف هستند. نمونه‌ای از ساختار کلی این مواد در شکل (۱) نشان داده شده است که در آن ذرات کروی یا تقریباً کروی در درون ماتریس‌های همسانگرد جاسازی شده است. در این‌گونه از مواد مرکب، مواد میکروسکوپی با فاز مختلف تغییراتی با تابع‌های مختلف دارند و امکان بهینه کردن تغییرات تنش در این مواد مرکب با تغییر مناسب پروفیل مواد ساختاری که از ویژگی‌های برجسته این مواد است وجود دارد. مواد مدرج تابعی این‌گونه توصیف شده‌اند که فاز تقویت‌کننده و مواد زمینه به‌صورت پیوسته و به‌تدریج و نه به‌صورت گسسته مانند مواد مرکب لایه‌ای تغییر می‌کنند.

به‌دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی این‌گونه از مواد، کرنش‌ها و گرادین آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که همین تغییرات تدریجی خواص در ساختار این مواد مرکب موجب استحکام در کل آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب لایه‌ای تداخل بین ساختارهای زمینه‌ای و الیاف نوعی ناهم‌انگهی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. این مواد مقاوم در مقابل خوردگی و سایش بوده و مقاومت بالایی در مقابل شکست دارند. در حال حاضر از این مواد برای سازه‌هایی که باید در مقابل دمای زیاد مقاوم باشد استفاده می‌شود. یکی از علت‌های تنش حرارتی افزایش دما می‌باشد. به‌طور مثال هنگامی که انبساط آزاد توسط قیدهای خارجی محدود می‌شود و یا این‌که یک جسم چندلایه‌ای از مواد مختلفی با ضرایب انبساط مختلف تشکیل شده باشد، لایه‌های مختلف ماده به اندازه‌های متفاوتی انبساط پیدا می‌کند و این خود باعث ایجاد تنش در جسم می‌شود.

به صورت تحلیلی بررسی کرده و جواب‌های ورق چندلایه‌ای را برحسب تکثیرکننده‌های ماتریسی بیان نمود. ارتعاش آزاد و تصادفی ورق‌های مستطیلی شکل مگنتو-الکترو-الاستیک در تماس با سیال [19] و کمانش و ارتعاش پوسته استوانه‌ای مگنتو-الکترو-الاستیک بر اساس تئوری برشی مرتبه بالا [20] نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. چن و همکاران [21] مسئله ارتعاش آزاد ورق‌های مگنتو-الکترو-الاستیک چندلایه‌ای با شرایط مرزی ترکیبی گیردار/آزاد حل نمودند. لی و ژانگ [22] و رضوی و شوشتری [23] از تئوری برشی مرتبه اول، به ترتیب، برای تعیین فرکانس‌های طبیعی ورق و پوسته دوانحنایی مگنتو-الکترو-الاستیک بر روی یک بستر الاستیک استفاده کرده و اثرات ضرایب بستر و فرکانس‌های الکتریکی و مغناطیسی را بر روی فرکانس طبیعی تعیین نمودند. انصاری و همکاران [24] ارتعاش غیرخطی نانو تیر مگنتو-الکترو-الاستیک را براساس مدل تیر تیموشنکو و تئوری الاستیسیته غیرموضعی و تئوری برشی مرتبه سوم غیرموضعی [25] تحلیل نمودند.

با وجود این که بانگل و گانسان [26] با استفاده از روش اجزای محدود، تحقیقات مختلفی را برای تحلیل ارتعاشات خطی ورق‌ها و پوسته‌های استوانه‌ای مگنتو-الکترو-الاستیک چندلایه‌ای و مدرج تابعی استفاده نمودند، هیچ مطالعه تحلیلی درباره ارتعاشات غیرخطی این نوع از مواد و ورق‌های هوشمند مدرج تابعی بر مبنای تئوری برشی مرتبه سوم در رابطه با تعیین فرکانس‌های غیرخطی، تأثیر پارامترهای هندسی و پراکنندگی ساختار در مواد مدرج تابعی بر این فرکانس‌ها انجام نشده است.

در این تحقیق، از تئوری برشی مرتبه سوم (TSDT) برای تعیین معادلات حرکت ورق استفاده شده است. ورق به صورت مستطیلی شکل با تکیه‌گاه ساده در هر چهار لبه و بدون امکان حرکت صفحه‌ای در لبه‌ها فرض شده است (شکل ۴).

پاسخ دینامیکی خطی و غیرخطی ورق‌های پیزوالکتریک از نوع مدرج تابعی نیز توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. ردی و چنگ [7] یک ورق مدرج تابعی را در نظر گرفته و با فرض اتصال یک لایه پیزوالکتریک بر روی سطح فلزی این ورق مدرج تابعی و با اعمال بارگذاری ترمومکانیکی بر روی سطح سرامیکی، ارتعاش ورق هیبریدی حاصل را بررسی کرده و دامنه ارتعاشات را با استفاده از اعمال ولتاژ به لایه پیزوالکتریک خنثی نمودند. لیو و همکاران [8] رفتار پس کمانش ورق‌های مستطیلی شکل مدرج تابعی که عملگرهای پیزوالکتریک بر سطح آن چسبانده شده است را بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم تحلیل نمودند. کوپپال [9] فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق پیزوالکتریک مستطیلی شکل با شرایط مرزی ساده برای دو نوع شرط مرزی الکتریکی مدار باز و مدار بسته را مورد بررسی قرار داده است. شین [10] پس کمانش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با عملگرهای پیزوالکتریک را در اثر فشار محوری ترکیب شده با بارهای الکتریکی در محیط گرم تحلیل نموده است. چن [11] از روش گلرکین فاقد المان برای آنالیز کمانش و بررسی پایداری ورق‌های مستطیلی پیزوالکتریک مدرج تابعی که در معرض توزیع غیریکواخت نیروها، گرما و ولتاژ می‌باشند استفاده نمود. از روش المان محدود [12-14] و روش‌های تحلیلی اغتشاشات [15-17] نیز برای حل مسئله ارتعاش غیرخطی ورق مدرج تابعی تحت بارهای حرارتی، مکانیکی و الکتریکی استفاده شده است.

نزدیک دو دهه است که تحلیل و بررسی حرکت استاتیکی و دینامیکی سازه‌های مگنتو-الکترو-الاستیک مورد توجه قرار گرفته است. پان [18] برای اولین بار یک ورق چندلایه‌ای مگنتو-الکترو-الاستیک را

معادلات ساختاری مواد مدرج تابعی

مگنتو-الکترو-الاستیک

کوپلینگ مگنتو-الکترو-الاستیک این مواد از طریق روابط تنش- کرنش صورت می گیرد. معادلات ساختاری مواد مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک خطی به صورت زیر نوشته می شوند [26].

$$\sigma = C\varepsilon + e(-E) + q(-H) \quad (1-الف)$$

$$D = e^T \varepsilon - \epsilon(-E) - d(-H) \quad (1-ب)$$

$$D = q^T \varepsilon - d(-E) - \mu(-H) \quad (1-پ)$$

که برای یک ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک همسانگرد ضرایب در حالت بسط یافته به صورت زیر می باشند:

$$C = \begin{bmatrix} C(z)_{11} & C(z)_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C(z)_{21} & C(z)_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(z)_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(z)_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C(z)_{66} \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e(z)_{31} \\ 0 & 0 & e(z)_{32} \\ 0 & e(z)_{24} & 0 \\ e(z)_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e(z)_{31} \\ 0 & 0 & e(z)_{32} \\ 0 & e(z)_{24} & 0 \\ e(z)_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon(z)_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon(z)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(z)_{33} \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu(z)_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu(z)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu(z)_{33} \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} d(z)_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d(z)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d(z)_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

که σ و ε به ترتیب بردار تنش و کرنش، D و B به ترتیب بردار جابه جایی الکتریکی و چگالی شار مغناطیسی، E و H به ترتیب بردار میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی،

C ، ε و μ به ترتیب ضرایب ماتریس الاستیک، دی الکتریک و نفوذپذیری مغناطیسی، e و q به ترتیب ضرایب ماتریس پیزوالکتریک و پیزومغناطیس، مگنتو-الکترونیک هستند.

مدل ریاضی خواص مواد مدرج تابعی مگنتو-

الکترو-الاستیک. اگر ورق مدرج تابعی مگنتو-

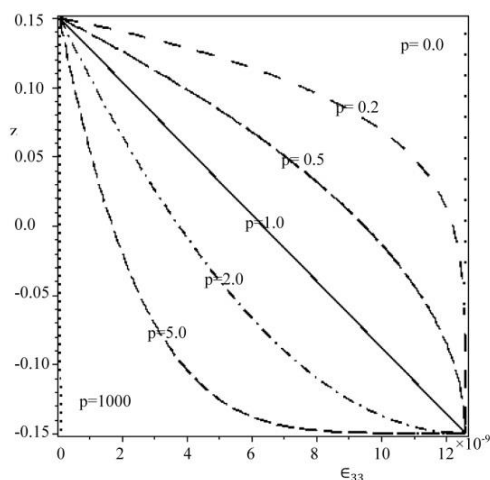
الکترو-الاستیک از دو فاز پیزوالکتریک $BaTiO_3$ (B) و پیزومغناطیس $CoFe_2O_4$ (C) طوری تشکیل شده باشد که تغییر تدریجی خواص ماده در راستای ضخامت و از سطح پایین به سطح بالا باشد، (شکل ۲)، کسر حجمی فاز B در جهت ضخامت و مطابق قانون توانی به صورت زیر توصیف می گردد [26]:

$$V_B = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p \quad (3)$$

که در آن h ضخامت ورق، z معرف مختصه ضخامت که $0 \leq z \leq h$ و p پارامتر توانی حقیقی و مثبتی بی بعدی است. همچنین قانون مخلوطها و نخستین قانون خطی کلاسیک ترکیبها برای مواد دوجزئی به ترتیب به صورت زیر نوشته می شوند [26]:

$$V_B + V_C = 1 \quad (4)$$

$$P_{eff} = P_B V_B + P_C V_C \quad (5)$$



شکل ۲ تغییر کسر حجمی V_B در طول ضخامت

مدل سازی مسئله با استفاده از تئوری HSDT

در این تئوری میدان های جابه جایی طبق اصل همپلتون به صورت تابعی درجه سوم از (u, v, w) در راستای ضخامت به صورت زیر هستند [28]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (V)$$

که $\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z}$ و $\phi_y = \frac{\partial v}{\partial z}$ تغییر مکان های تعمیم یافته بوده و توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. u_0, v_0 و w_0 تغییر جابه جایی های یک نقطه از ورق در صفحه $z = 0$ را نشان می دهند.

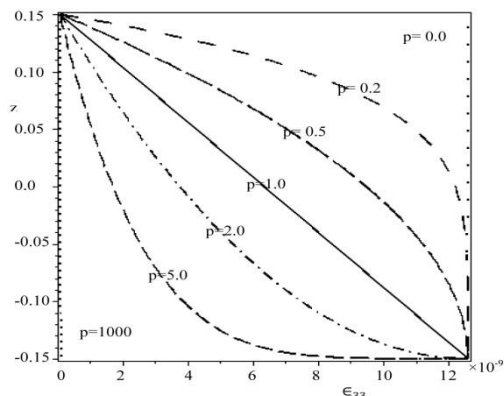
کرنش های غیرخطی متناظر با تئوری برشی مرتبه سوم به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \epsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \epsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(3)} \\ \epsilon_{yy}^{(3)} \\ \epsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} &= -c_1 \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \\ \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) \end{Bmatrix}, c_1 = \frac{4}{(3h^2)} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = -3c_1 \begin{Bmatrix} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (A)$$

با ترکیب معادلات (۵-۳) تغییرات خواص مؤثر الاستیک، پیزوالکتریک، پیزومغناطیس، دی الکتریک و نفوذپذیری مغناطیسی در دمای ثابت به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} C(z)_{ij} &= (C_C - C_C) \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + C_C \quad (۶-الف) \\ e(z)_{ij} &= (e_C - e_C) \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + e_C \quad (۶-ب) \\ q(z)_{ij} &= (q_C - q_C) \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + q_C \quad (۶-پ) \\ \epsilon(z)_{ij} &= (\epsilon_C - \epsilon_C) \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \epsilon_C \quad (۶-ت) \\ \mu(z)_{ij} &= (\mu_C - \mu_C) \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \mu_C \quad (۶-ث) \\ \rho &= (\rho_C - \rho_C) \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \rho_C \quad (۶-ج) \end{aligned}$$

تغییرات ضریب دی الکتریک ϵ_{33} مؤثر برای چند مورد مختلف توان p در عرض ضخامت ورق در شکل (۳) نشان داده شده است. لی [27] با استفاده از آنالیز میکرومکانیکی ماده مرکب متشکل از دو فاز B-C نشان داد که اندازه مدول مگنتو-الکتریک (d_{33}) غیر صفر بوده و وابسته به فاکتورهایی مانند روش ترکیب مواد و کسر حجمی هر یک از دو فاز است. تحقیقات اخیر نشان داده اند در حالتی که ورق تحت پتانسیل الکتریکی یا مغناطیسی قرار دارد و هدف مطالعه رفتار دینامیکی ارتعاشی ورق باشد اثر ضریب مگنتو-الکتریک بر فرکانس ارتعاشی بسیار ناچیز است و می توان از آن چشم پوشید.



شکل ۳ تغییرات ضریب دی الکتریک ϵ_{33} نسبت به تغییر گرادیان مواد p

$$\begin{Bmatrix} N_{ij} \\ M_{ij} \\ P_{ij} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{Bmatrix} dz \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{ij} \\ R_{ij} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (11)$$

$$I_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} z^\theta \rho(z) dz, (\theta = 0.1.2.3.4.6) \quad (12)$$

قوانین گوس برای حالت‌های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک، به صورت زیر هستند [29]:

$$D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z} = 0 \quad (13-الف)$$

$$B_{x,x} + B_{y,y} + B_{z,z} = 0 \quad (13-ب)$$

با استفاده از دو معادله (۱۳-الف و ب) گرادیان پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Phi_{,z} = (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \frac{e_{31}(z)}{\epsilon_{33}(z)} + (\epsilon_{xx}^{(3)} + \epsilon_{yy}^{(3)}) \frac{e(z)}{\epsilon_{33}(z)} + \Phi_0 \quad (14)$$

$$\Phi_{,z} = (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \frac{e_{31}(z)}{\epsilon_{33}(z)} + (\epsilon_{xx}^{(3)} + \epsilon_{yy}^{(3)}) \frac{e(z)}{\epsilon_{33}(z)} + \Phi_0 \quad (15)$$

که در آن Φ_0 و Ψ_0 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند که با توجه به شرایط مرزی الکتریکی و مغناطیسی زیر به دست می‌آیند: (V_0 و Ω_0 به ترتیب پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی هستند. مقدار $e(z)$ و $q(z)$ در پیوست آورده شده‌اند).

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, -h/2) = 0, \Phi(x, y, +h/2) = V_0 \\ \Psi(x, y, -h/2) = 0, \Psi(x, y, +h/2) = \Omega_0 \end{aligned} \quad (16)$$

با جای گذاری معادلات (۱-۲) به همراه کرنش‌های غیرخطی متناظر تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم

که در آن $c_2 = 3c_1$ و $c_1 = \frac{4}{3h^2}$ است. معادلات حاکم بر یک ورق مگنتو-الکترو-الاستیک مدرج تابعی در تئوری برشی مرتبه سوم به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = I_0 u_{0,tt} + (I_1 - c_1 I_3) \varphi_{x,tt} - c_1 I_3 w_{0,tt} \quad (9-الف)$$

$$N_{yy,y} + N_{xy,x} = I_0 v_{0,tt} + (I_1 - c_1 I_3) \varphi_{y,tt} - c_1 I_3 w_{0,tt} \quad (9-ب)$$

$$\begin{aligned} (N_{yy,y} + N_{xy,x}) w_{0,y} + (N_{xx,x} + N_{xy,y}) w_{0,x} \\ + N_{yy} w_{0,yy} + N_{xx} w_{0,xx} + c_1 (P_{xx,xx} + P_{xy,xy} + P_{yy,yy}) \\ + (Q_{x,x} - c_2 R_{x,x}) + (Q_{y,y} - c_2 R_{y,y}) + q_z \\ = I_0 w_{0,tt} - c_1^2 I_6 (w_{0,ttxx} + w_{0,ttxx}) \\ + c_1 I_3 (u_{0,tt} + v_{0,tt}) + c_1 (I_4 - c_1 I_6) (\varphi_{x,xtt} \\ + \varphi_{y,ytt}) \end{aligned} \quad (9-پ)$$

$$\begin{aligned} M_{xx,x} + M_{xy,y} - c_1 (P_{xx,x} + P_{xy,y}) + (Q_x - c_2 R_x) \\ = -c_1 (I_4 - c_1 I_6) w_{0,xtt} + (I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6) \varphi_{x,tt} \\ + (I_1 - c_1 I_3) u_{0,tt} \end{aligned} \quad (9-ت)$$

$$\begin{aligned} M_{yy,y} + M_{xy,x} - c_1 (P_{yy,y} + P_{xy,x}) + (Q_y - c_2 R_y) \\ = -c_1 (I_4 - c_1 I_6) w_{0,ytt} + (I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6) \varphi_{y,tt} \\ + (I_1 - c_1 I_3) v_{0,tt} \end{aligned} \quad (9-ث)$$

که در آن علامت '،' مشتق نسبی نسبت به تغییر مکان‌های تعمیم‌یافته می‌باشند. کمیت‌های $N_{\alpha\beta}$ متوجه‌های نیروی صفحه‌ای، $M_{\alpha\beta}$ متوجه‌های ممان، $Q_{\alpha\beta}$ متوجه‌های نیروی عرضی و $P_{\alpha\beta}$ و $R_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y$) متوجه‌های تنش مرتبه بالاتر و I_θ ممان‌های اینرسی جرمی هستند که برای ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک در تئوری برشی مرتبه سوم به صورت زیر نوشته می‌شود که هم شامل اثر مؤلفه‌های الاستیک ورق و هم شامل اثر مؤلفه‌های الکترواستریکتیو و مگنتواستریکتیو ورق است [28]:

$$-\begin{bmatrix} c_1 E_{11}^{ela} & c_1 E_{12}^{ela} & 0 \\ c_1 E_{21}^{ela} & c_1 E_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & c_1 E_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi_{,z} \end{Bmatrix} z^3 dz \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & A_{55}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & D_{55}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & D_{55}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & F_{55}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

در معادلات بالا X_{ij}^{ela} سفتی‌های مربوط به ترم الاستیک، X_{ij}^{me} سفتی‌های مربوط به ترم مگنتو-الکترونیک هستند. فرض‌های زیر برای سادگی و اختصار در معادلات به کار برده شده‌اند.

$$X_{ij}^{ela} + X_{ij}^{me} = X_{ij}, X = (A, B, D, E, F, H)$$

$$X_{ij}^{ela} = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{ij}(z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, (i, j = 1, 2, 6)$$

$$X_{ij}^{ela} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(z)(1, z^2, z^4) dz, (i, j = 4, 5)$$

$$X_{ij}^{me} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{e_{31}(z)}{\epsilon_{33}(z)} - \frac{V_1}{h} \right) e_{31}(z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz + \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{q_{31}(z)}{\mu_{33}(z)} - \frac{\Omega_1}{h} \right) q_{31}(z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (22)$$

$$(\delta_1^{me}, \delta_2^{me}, \delta_3^{me}) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{e(z)}{\epsilon_{33}(z)} e_{31}(z) - \frac{V_2}{h} e_{31}(z) \right) (1, z, z^3) dz + \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{q(z)}{\mu_{33}(z)} q_{31}(z) - \frac{\Omega_2}{h} q_{31}(z) \right) (1, z, z^3) dz \quad (23)$$

معادله (۸) در معادلات (۱۰-۱۲) و با فرض این‌که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در راستای ضخامت (z) باشند، متجه‌های نیرو و ممان و متجه‌های تنش مرتبه بالا به شکل بسط‌یافته زیر تعیین می‌گردند:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{ela} & A_{12}^{ela} & 0 \\ A_{21}^{ela} & A_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^{ela} & B_{12}^{ela} & 0 \\ B_{21}^{ela} & B_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11}^{ela} & E_{12}^{ela} & 0 \\ E_{21}^{ela} & E_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi_{,z} \end{Bmatrix} dz \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{ela} & A_{12}^{ela} & 0 \\ A_{21}^{ela} & A_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^{ela} & B_{12}^{ela} & 0 \\ B_{21}^{ela} & B_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 E_{11}^{ela} & c_1 E_{12}^{ela} & 0 \\ c_1 E_{21}^{ela} & c_1 E_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & c_1 E_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi_{,z} \end{Bmatrix} z^1 dz \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{ela} & A_{12}^{ela} & 0 \\ A_{21}^{ela} & A_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^{ela} & B_{12}^{ela} & 0 \\ B_{21}^{ela} & B_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & -2c_1(E_{11} - 3E_{66} + \delta_1)w_{0,yy}w_{0,xx} - c_1\delta_1w_{0,xx}w_{0,xx} \\
 & + 2(c_1E_{11} - 3E_{66})w_{0,yx}^2 + 2A_{11}w_{0,y}w_{0,x}w_{0,yx} \\
 & + \frac{3}{2}A_{11}w_{0,x}^2w_{0,xx} - c_1\delta_1w_{0,x}w_{0,xxx} - c_1\delta_1w_{0,x}w_{0,yyx} \\
 & - c_1\delta_1w_{0,y}w_{0,yyx} - c_1\delta_1w_{0,y}w_{0,yyy} \\
 & \quad - c_1^2(H_{11} + \delta_3)w_{0,xxxx} \\
 & - 2c_1^2(H_{11} + \delta_3)w_{0,yyxx} - c_1^2(H_{11} + \delta_3)w_{0,yyyy} \\
 & + (B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1) + 2c_1E_{66} - 2B_{66})\phi_{x,x}w_{0,y} \\
 & - (c_2^2F_{44} + 2c_2D_{44} - A_{44})\phi_{x,x} \\
 & \quad + (2B_{66} - c_1E_{66})\phi_{x,y}w_{0,yx} \\
 & + (B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1) + c_1E_{66} - B_{66})w_{0,y}\phi_{x,yx} \\
 & + (B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1))w_{0,x}\phi_{x,xx} + \Omega w_{0,y} \\
 & + (B_{66} - c_1E_{66})w_{0,x}\phi_{x,yy} \\
 & \quad + (c_1F_{11} - c_1^2(H_{11} + \delta_3))\phi_{x,xxx} \\
 & + Vw_{0,xx} + (c_1F_{11} - c_1^2(H_{11} + \delta_3))\phi_{x,yyx} + \frac{3}{2}A_{11}w_{0,y}^2w_{0,yy} \\
 & - (c_2^2F_{44} + 2c_2D_{44} - A_{44})\phi_{y,y} \\
 & \quad + (B_{66} - c_1E_{66})w_{0,y}\phi_{y,xx} \\
 & + (B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1))\phi_{y,y}w_{0,y} + \frac{1}{2}A_{11}w_{0,x}^2w_{0,y} \\
 & + (2B_{66} - c_1E_{66})\phi_{y,x}w_{0,yx} + (B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1))\phi_{x,x}w_{0,xx} \\
 & + (B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1) + c_1E_{66} - B_{66})\phi_{y,y}w_{0,xx} \\
 & + (B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1))w_{0,y}\phi_{y,yy} \\
 & + (c_1F_{11} - c_1^2(H_{11} + \delta_3))\phi_{y,yyx} \\
 & + (B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1) + c_1E_{66} - B_{66})w_{0,x}\phi_{y,yx} \\
 & \quad + q_0\cos(\Omega t) \\
 & \quad + (c_1F_{11} - c_1^2(H_{11} + \delta_3))\phi_{y,yyy} \\
 & = I_0\ddot{w}_0 - c_1^2I_6\ddot{w}_{0,xx} - c_1^2I_6\ddot{w}_{0,yy}
 \end{aligned}$$

(پ-۲۴)

$$\begin{aligned}
 & (B_{11} - c_1E_{11})u_{0,xx} + (-c_1E_{11} + c_1E_{66} + B_{11} \\
 & \quad - B_{66})v_{0,yx} \\
 & + (B_{66} - c_1E_{66})u_{0,yy} \\
 & + (B_{66} - c_1E_{66})w_{0,x}w_{0,y} \\
 & + (c_1E_{11} - c_1E_{66} - B_{11} \\
 & \quad + B_{66})w_{0,y}w_{0,yx} \\
 & - c_1(c_1(-H_{11} - \delta_3) + F_{11} \\
 & \quad + \delta_2)w_{0,xxx} \\
 & + (B_{11} - c_1E_{11})w_{0,x}w_{0,xx} \\
 & - c_1(c_1(-H_{11} - \delta_3) + F_{11} \\
 & \quad + \delta_2)w_{0,yyx} \\
 & + (c_1^2(H_{11} + \delta_3) - c_1(2F_{11} + \delta_2) \\
 & \quad + D_{11})\phi_{x,xx} \\
 & + (c_1^2H_{66} - 2c_1F_{66} + D_{66})\phi_{x,yy} \\
 & + c_1^2(H_{11} - H_{66} + \delta_3)\phi_{y,yx} \\
 & + (-c_1(2F_{11} - 2F_{66} + \delta_2) + D_{11} \\
 & \quad - D_{66})\phi_{y,yx} \\
 & - (c_2^2F_{44} - 2c_2D_{44} + A_{44})\phi_x \\
 & - (c_2^2F_{44} - 2c_2D_{44} + A_{44})w_{0,x} \\
 & = c_1(c_1I_6 - I_4)\ddot{w}_{0,x}
 \end{aligned}$$

(ت-۲۴)

باتوجه به این که اثرات جملات اینرسی مربوط به جابه‌جایی‌های تعمیم‌یافته u_0 ، v_0 و دوران‌های عرضی ϕ_y ، ϕ_x بسیار کوچک هستند، از اثرات این جملات اینرسی چشم‌پوشی می‌شود، سپس با استفاده از معادلات (۲۱-۱۷) در معادلات (۹-الف-ث) پنج معادله دیفرانسیل حرکت جزئی غیرخطی در ترم‌های جابه‌جایی‌های تعمیم‌یافته u_0 ، v_0 و w_0 و دوران‌های ϕ_y ، ϕ_x به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 & A_{11}u_{0,xx} + A_{66}u_{0,yy} + (B_{11} - c_1E_{11} - c_1\delta_1)\phi_{x,xx} \\
 & + (A_{11} - A_{66})(v_{0,xy} + w_{0,y}w_{0,xy}) \\
 & \quad + (B_{66} - c_1E_{66})\phi_{x,yy} \\
 & \quad + (B_{11} - c_1AE_{11} - B_{66} + c_1E_{66} \\
 & \quad - c_1\delta_1)\phi_{y,xy} \\
 & \quad + A_{66}w_{0,x}w_{0,yy} + A_{11}w_{0,x}w_{0,xx} \\
 & \quad - (c_1E_{11} + \delta_1)(w_{0,xxx} + w_{0,xyy}) \\
 & = -c_1I_3w_{0,ttt}
 \end{aligned}$$

(۲۴-الف)

$$\begin{aligned}
 & A_{11}v_{0,yy} + A_{66}v_{0,xx} + (B_{11} - c_1E_{11} - c_1\delta_1)\phi_{y,yy} \\
 & + (A_{11} - A_{66})(u_{0,xy} + w_{0,x}w_{0,xy}) + (B_{66} - c_1E_{66})\phi_{y,xx} \\
 & + (B_{11} - c_1AE_{11} - B_{66} + c_1E_{66} - c_1\delta_1)\phi_{x,xy} \\
 & + A_{66}w_{0,y}w_{0,xx} + A_{11}w_{0,y}w_{0,yy} - (c_1E_{11} + \delta_1)w_{0,yyy}w_{0,xy} \\
 & = -c_1I_3w_{0,ttt}
 \end{aligned}$$

(۲۴-ب)

$$\begin{aligned}
 & (A_{11} - 2A_{66})u_{0,x}w_{0,y} + A_{11}u_{0,x}w_{0,xx} \\
 & \quad + 2A_{66}u_{0,y}w_{0,yx} \\
 & \quad + (A_{11} - A_{66})w_{0,y}u_{0,yx} \\
 & \quad + A_{11}w_{0,x}u_{0,yy} + A_{11}w_{0,x}u_{0,xx} \\
 & \quad + c_1E_{11}u_{0,xxx} + c_1E_{11}u_{0,yyx} \\
 & \quad + 2A_{66}v_{0,x}w_{0,yx} + A_{11}v_{0,y}w_{0,yy} \\
 & \quad + (A_{11} - 2A_{66})v_{0,y}w_{0,xx} \\
 & \quad + A_{11}w_{0,y}v_{0,yy} + A_{66}w_{0,y}v_{0,xx} \\
 & \quad + (A_{11} - A_{66})w_{0,x}v_{0,yx} \\
 & \quad + c_1E_{11}v_{0,yyy} + c_1E_{11}v_{0,yxx} \\
 & \quad + (A_{11} - A_{66})w_{0,x}v_{0,yx} \\
 & \quad + c_1E_{11}v_{0,yyy} + c_1E_{11}v_{0,yxx} \\
 & \quad + \frac{1}{2}A_{11}w_{0,y}^2w_{0,xx} \\
 & \quad + (c_2^2F_{44} - 2c_2D_{44} + A_{44})w_{0,xx} \\
 & \quad + (c_2^2F_{44} - 2c_2D_{44} + A_{44})w_{0,yy} \\
 & \quad - c_1\delta_1w_{0,yy}w_{0,y}
 \end{aligned}$$

به طوری که $\alpha = n\pi/a$ و $\beta = m\pi/b$ است و (m, n) نشان دهندهٔ مود حرکتی ورق می باشد.:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y \\ v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y \\ w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h W_{mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y \\ \phi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y \\ \phi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y \end{aligned}$$

(۲۵)

با استفاده از روش گالری، چهار معادلهٔ دیفرانسیل جزئی غیرخطی (۲۴-الف)، (۲۴-ب)، (۲۴-ت) و (۲۴-ث) به چهار معادلهٔ دیفرانسیل معمولی غیرخطی برحسب $U_{mn}(t)$ ، $V_{mn}(t)$ و $X_{mn}(t)$ ، $Y_{mn}(t)$ و $W_{mn}(t)$ (جابه‌جایی عرضی) تبدیل می‌شوند. در نتیجه به صورت دستگاه معادلات زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} K_{1,1}U_{mn}(t) + K_{1,2}V_{mn}(t) + K_{1,3}X_{mn}(t) + K_{1,4}Y_{mn}(t) \\ = -K_{1,5}\ddot{W}_{mn}(t) - K_{1,6}W_{mn}(t) - K_{1,7}W_{mn}^2(t) \\ K_{2,1}U_{mn}(t) + K_{2,2}V_{mn}(t) + K_{2,3}X_{mn}(t) + K_{2,4}Y_{mn}(t) \\ = -K_{2,5}\ddot{W}_{mn}(t) - K_{2,6}W_{mn}(t) - K_{2,7}W_{mn}^2(t) \\ K_{4,1}U_{mn}(t) + K_{4,2}V_{mn}(t) + K_{4,3}X_{mn}(t) + K_{4,4}Y_{mn}(t) \\ = -K_{4,5}\ddot{W}_{mn}(t) - K_{4,6}W_{mn}(t) - K_{4,7}W_{mn}^2(t) \\ K_{5,1}U_{mn}(t) + K_{5,2}V_{mn}(t) + K_{5,3}X_{mn}(t) + K_{5,4}Y_{mn}(t) \\ = -K_{5,5}\ddot{W}_{mn}(t) - K_{5,6}W_{mn}(t) - K_{5,7}W_{mn}^2(t) \end{aligned}$$

(۲۶)

معادلهٔ (۲۴-پ) با استفاده از این روش به صورت

زیر نوشته می‌شود:

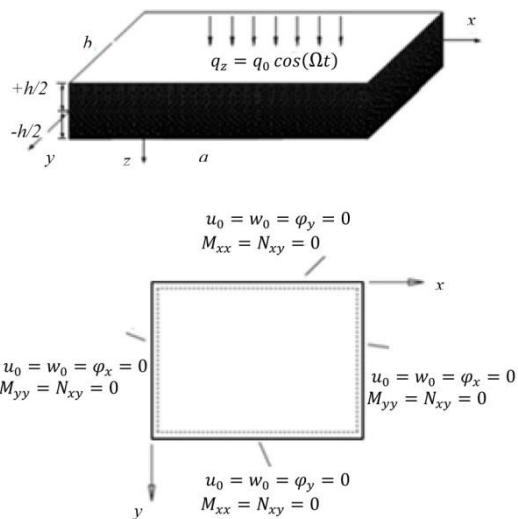
$$\begin{aligned} L_{3,1}U_{mn}(t) + L_{3,2}V_{mn}(t) + L_{3,3}X_{mn}(t) + L_{3,4}Y_{mn}(t) \\ + L_{3,5}U_{mn}(t)W_{mn}(t) + L_{3,6}V_{mn}(t)W_{mn}(t) \\ + L_{3,7}X_{mn}(t)W_{mn}(t) + L_{3,8}Y_{mn}(t)W_{mn}(t) + L_{3,9}\ddot{W}_{mn}(t) \\ + L_{3,10}W_{mn}(t) + L_{3,11}W_{mn}^2(t) + L_{3,12}W_{mn}^3(t) = 0 \end{aligned}$$

(۲۷)

$$\begin{aligned} (B_{66} - c_1 E_{66})v_{0,xx} + (-c_1 E_{11} + c_1 E_{66} + B_{11} \\ - B_{66})u_{0,yx} \\ + (B_{66} - c_1 E_{66})w_{0,y}w_{0,xx} + (B_{11} - c_1 E_{11})w_{0,y}w_{0,yy} \\ + (c_1 E_{11} - c_1 E_{66} - B_{11} + B_{66})w_{0,x}w_{0,yx} + D_{11}\phi_{x,yx} \\ - c_1(c_1(-H_{11} - \delta_3) + F_{11} + \delta_2)w_{0,yyy} - D_{11}\phi_{x,yx} \\ + (B_{11} - c_1 E_{11})v_{0,yy} \\ - c_1(c_1(-H_{11} - \delta_3) + F_{11} \\ + \delta_2)w_{0,yxx} \\ + (c_1^2(H_{11} + \delta_3) - c_1(2F_{11} + \delta_2) \\ + D_{11})\phi_{y,yy} \\ + (c_1^2 H_{66} - 2c_1 F_{66} + D_{66})\phi_{y,xx} \\ + (c_1^2(H_{11} - H_{66} + \delta_3) \\ - c_1(2F_{11} - 2F_{66} + \delta_2))\phi_{x,yx} \\ - (c_2^2 F_{44} - 2c_2 D_{44} + A_{44})\phi_y \\ - (c_2^2 F_{44} - 2c_2 D_{44} + A_{44})w_{0,y} \\ = c_1(c_1 I_6 - I_4)\ddot{w}_{0,y} \end{aligned}$$

(۲۴-ث)

در این معادلات، A_{ij} سفتی‌های کششی، B_{ij} سفتی‌های کوپلینگ خمشی-کششی و D_{ij} سفتی‌های خمشی نامیده می‌شوند. F_{ij} ، E_{ij} و H_{ij} سفتی‌های مرتبه بالای ضخامت را شامل می‌شوند که تأثیر کمی در پاسخ ورق‌های نازک یا نسبتاً نازک همگن دارند.



شکل ۴ مشخصات هندسی و شرایط مرزی ورق مدرج تابعی

مگنتو-الکترو-الاستیک

شرایط تکیه‌گاهی ورق ساده و همگن در نظر گرفته شده است. جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها متناظر با این شرایط مرزی شکل (۴) به صورت زیر هستند

خواص هندسی (طول، عرض و ضخامت ورق) و مؤلفه‌های مگنتو-الکترو-الاستیک ورق هستند: Z_1 و Z_5 تابع چگالی و مؤلفه‌های سفتی ورق بوده و واحدشان $\frac{kg^5m^5}{s^8}$ می‌باشد، درحالی‌که، Z_2 ، Z_3 و Z_4 فقط تابع مؤلفه‌های سفتی ورق بوده و واحدشان $\frac{kg^5m^5}{s^{10}}$ می‌باشد. Z_6 فقط تابع مؤلفه‌های سفتی ورق است (روابط بین Z_i ها با L_i و K_i در [32] آورده شده‌اند).

با معرفی زمان بی‌بعد به صورت $\tau = \left(\frac{t}{a}\right) \left(\frac{C_{11Max}}{\rho_{0Max}}\right)^{\frac{1}{2}}$ [29]، که در آن t زمان، τ زمان بی‌بعد و a طول ورق ρ_{0Max} ضریب الاستیک ماده مگنتوالکتریک و C_{11Max} چگالی ماده مگنتوالکتریک هستند، معادله (۲۳) به صورت بی‌بعد زیر نوشته می‌شود:

$$W_{,\tau\tau} + \omega_0^2 W + \alpha_1 W W_{,\tau\tau} + \alpha_2 W^2 + \alpha_3 W^3 = f \cos(\Lambda \Omega \tau) \quad (30)$$

در رابطه بالا، $f = \frac{q_0 Z_6}{Z_1} \Lambda^2$ دامنه نیروی بی‌بعد، $\omega_0 = (Z_2/Z_1)^{\frac{1}{2}}$ فرکانس طبیعی خطی و Λ برابر $a \left(\frac{\rho_{0Max}}{C_{11Max}}\right)^{\frac{1}{2}}$ است. $\alpha_2 = \Lambda^2 Z_3/Z_1$ و $\alpha_3 = \Lambda^2 Z_5/Z_1$ که فقط شامل مؤلفه‌های ماتریس‌های سفتی می‌باشد و $\alpha_1 = Z_3/Z_1$ ضرایب جملات اینرسی غیرخطی می‌باشند که علاوه بر مؤلفه‌های سفتی، شامل ترم‌های چگالی نیز هست.

صحه گذاری مدل

جدول‌های (۵-۲) فرکانس‌های خطی بی‌بعد $\omega_0 = (Z_1/Z_2)^{\frac{1}{2}}$ ورق ایزوتروپ، پیزوالکتریک و پیزومغناطیس برای $a = b = 1m$ و $h = 0.3m$ آورده شده است (در جدول ۱ خواص مواد سازنده ورق آمده است). از مقایسه نتایج این تحقیق و نتایج HSDT مشخص می‌شود که نتایج به دست آمده در این تحقیق مطابقت خوبی با نتایج ذکر شده دارند و اختلاف

جواب دستگاه معادلات (۲۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} U_{mn}(t) &= L_{1,1} \ddot{W}_{mn}(t) + L_{1,2} W_{mn}(t) + L_{1,3} W_{mn}^2(t) \\ V_{mn}(t) &= L_{2,1} \ddot{W}_{mn}(t) + L_{2,2} W_{mn}(t) + L_{2,3} W_{mn}^2(t) \\ X_{mn}(t) &= L_{4,1} \ddot{W}_{mn}(t) + L_{4,2} W_{mn}(t) + L_{4,3} W_{mn}^2(t) \\ Y_{mn}(t) &= L_{5,1} \ddot{W}_{mn}(t) + L_{5,2} W_{mn}(t) + L_{5,3} W_{mn}^2(t) \end{aligned} \quad (28)$$

در معادلات فوق مقدار ضرایب $L_{i,j}$ ($i=1,2,4,5; j=1,2,3$) و $K_{i,j}$ ($i=1,2,4,5; j=1,2,3,4,5,6,7$) است که در مرجع [32] آورده شده‌اند.

جدول ۱ خواص مواد مگنتو-الکترو-الاستیک [29]

BaTiO ₃ (B)	CoFe ₂ O ₄ (C)	
166.0	286.0	C ₁₁ (10 ⁹ N/m ²)
77.00	173.0	C ₁₂
43.00	45.30	C ₄₄
44.50	56.50	C ₆₆
11.60	0.000	e ₁₂ (C/m ²)
-4.400	0.000	e ₁₃
11.60	0.093	ε ₃₃ (10 ⁻⁹ C ² N/m ²)
10.00	157.0	μ ₃₃ (10 ⁻⁶ Ns ² /C ²)
0.000	550.0	q ₁₅ (N/Am)
0.000	580.3	q ₁₃
0.000	0.000	D _{ij} (10 ⁻⁹ Ns/VC)
5800	5300	ρ(Kg/m ³)

با جای گذاری جواب دستگاه معادلات (۲۶) در معادله (۲۷) و ساده کردن آن معادله دیفرانسیل غیرخطی حرکت ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک در مود اول ($n=m=1$) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} Z_1 W_{,tt} + Z_2 W + Z_3 W W_{,tt} + Z_4 W^2 + Z_5 W^3 \\ = Z_6 q_0 \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (29)$$

در رابطه فوق، Z_i ($i=1.2....6$) عبارت‌هایی از

تحلیل ارتعاشات اجباری ورق

با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه و معرفی پارامتر دیتونینگ (σ Detuning Parameter) به‌عنوان کمیتی برای انحراف از فرکانس خطی ω_0 و فرکانس تحریک Ω [31]، ارتعاشات اجباری در تشدید اولیه و تشدید ثانویه تحلیل می‌شود.

جواب تقریبی W با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه به‌صورت زیر می‌باشد [31]:

$$W(\tau; \varepsilon) = W_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon W_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 W_2(T_0, T_1, T_2) \quad (31)$$

که در آن:

$$T_n = \varepsilon^n \tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (32)$$

چون بسط تا مرتبه سه یعنی $O(\varepsilon^3)$ انجام می‌گیرد، فقط T_0, T_1 و T_2 موردنیاز خواهند بود. مشتقات نسبت به τ برحسب مشتقات جزئی T_n به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) \end{aligned} \quad (33)$$

تشدید اولیه. در این حالت فرکانس تحریک که به‌صورت تک فرکانسی (Ω Mono-Frequency) است نزدیک فرکانس طبیعی خطی ورق ω_0 در نظر گرفته می‌شود.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \sigma \quad (34)$$

با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه و جای‌گذاری معادلات (31 و 33) در معادله حرکت غیرخطی (30) و مساوی صفر قرار دادن ضرایب $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ و ε^2 در معادله حاصل، معادلات آتی به‌دست می‌آیند:

ناچیزی بین نتایج تحقیق حاضر و نتایج مرجع [30] موجود است. دلیل این اختلاف، صرف‌نظر کردن از ترم‌های اینرسی دورانی و صفحه‌ای می‌باشد.

جدول ۲ مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد

$$\omega = \omega_0 a \sqrt{\rho_{0max}/C_{11max}}$$

با خواص مؤثر الاستیک فاز B

(m,n)				روش حل
(3,1)	(2,2)	(1,2)	(1,1)	تحقیق حاضر
7.160	6.226	4.559	2.397	HSDT [30]
6.895	6.561	4.683	2.399	

جدول ۳ مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد

$$\omega = \omega_0 a \sqrt{\rho_{0max}/C_{11max}}$$

با خواص مؤثر الاستیک فاز C

(m,n)				روش حل
(3,1)	(2,2)	(1,2)	(1,1)	تحقیق حاضر
5.690	5.215	3.884	2.072	HSDT [30]
6.009	5.196	3.834	2.065	

جدول ۴ مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد

$$\omega = \omega_0 a \sqrt{\rho_{0max}/C_{11max}}$$

مربعی شکل ورق همسانگرد الکترو-الاستیک

(m,n)				روش حل
(3,1)	(2,2)	(1,2)	(1,1)	تحقیق حاضر
7.178	6.235	4.568	2.323	HSDT [30]
6.916	6.505	4.639	2.404	

جدول ۵ مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد

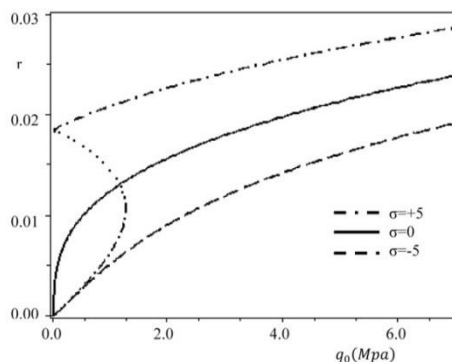
$$\omega = \omega_0 a \sqrt{\rho_{0max}/C_{11max}}$$

مربعی شکل ورق همسانگرد مگتو-الاستیک

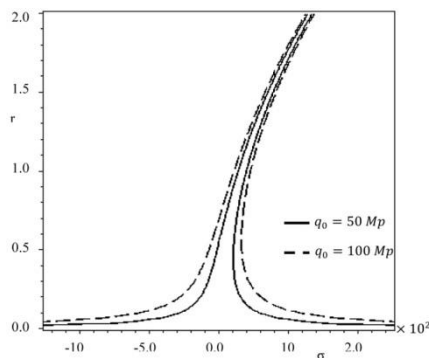
(m,n)				روش حل
(3,1)	(2,2)	(1,2)	(1,1)	تحقیق حاضر
5.974	5.220	3.892	2.760	HSDT [30]
6.011	5.198	3.836	2.667	

شکل (۵) تغییرات دامنه پاسخ نسبت به دامنه تحریک به‌ازای چند مقدار پارامتر دیتیونینگ را نشان می‌دهد. این منحنی به‌طور مستقیم از معادله (۳۴) به‌دست می‌آید و برای مقادیر قرینه پارامتر دیتیونینگ منحنی‌ها در ابتدا بر هم مماس هستند. باید توجه داشت که در این نمودار به‌ازای برخی از پارامترهای دیتیونینگ تعدادی از منحنی‌ها چندمقداری هستند و پدیده جهش در برخی از این منحنی‌ها اتفاق می‌افتد درحالی‌که برای تعدادی دیگر از منحنی‌ها این حالت اتفاق نمی‌افتد.

در شکل (۶) منحنی پاسخ-فرکانسی به‌ازای دو دامنه تحریک مختلف نشان داده شده است. وقتی دامنه تحریک افزایش می‌یابد منحنی پاسخ-فرکانسی از محور $\sigma=0$ دور می‌شود و به‌سمت بالا انتقال می‌یابد.



شکل ۵ منحنی دامنه-پاسخ به‌عنوان تابعی از دامنه تحریک به‌ازای چندمقدار پارامتر دیتیونینگ σ



شکل ۶ منحنی پاسخ-فرکانسی در تشدید اولیه به‌ازای دو دامنه تحریک مختلف

$$D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = 0 \quad (35)$$

$$D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_2 W_0^2 - \alpha_1 W_0 (D_0^2 W_0) \quad (36)$$

$$D_0^2 W_2 + \omega_0^2 W_2 = -D_1^2 W_0 - 2D_0 D_2 W_0 - 2D_0 D_1 W_1 - \alpha_1 W_0 D_0^2 W_1 - \alpha_1 W_1 D_0^2 W_0 - 2\alpha_1 W_0 D_0 D_1 W_0 - 2\alpha_2 W_0 W_1 - \alpha_3 W_0^3 + Q \cos(\omega_0 T_0 + \sigma \Lambda T_2) \quad (37)$$

با حل معادله (۳۵) و قرار دادن نتیجه در معادله (۳۶) و برابر صفر قراردادن جملات منفرد داریم:

$$D_1 A = 0 \rightarrow A = A(T_2) \quad (38)$$

جواب معادله (۳۶) به‌صورت زیر است:

$$D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2i\omega_0 D_1 A \exp(i\omega_0 T_0) + (\omega_0^2 \alpha_1 - \alpha_2) [A^2 \exp(2i\omega_0 T_0) + 2A\bar{A}] + cc \quad (39)$$

اگر جواب معادلات (۳۵) و (۳۶) با در نظر گرفتن شرط حل‌پذیری (۳۸) در معادله (۳۷) جای‌گذاری شود، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$D_0^2 W_2 + \omega_0^2 W_2 = \left[-2i\omega_0 D_2 A + \frac{1}{2} Q \exp(i\sigma \Lambda T_2) + \left(\frac{10}{3} \frac{\alpha_2^2}{\omega_0^2} - \frac{11}{3} \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{3} \omega_0^2 \alpha_1^2 \right) \bar{A} A^2 - 3\alpha_3 \right] \exp(i\omega_0 T_0) + NST + cc \quad (40)$$

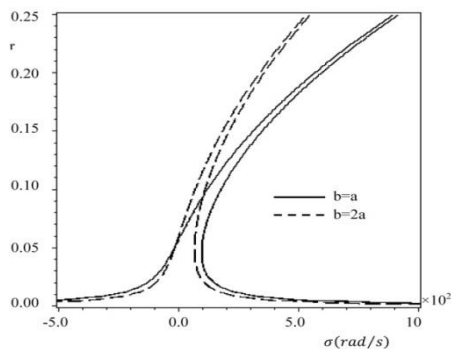
در معادله (۴۰) cc معرف جملات مختلط مزدوج است. با برابر صفر قرار دادن جملات منفرد معادله (۴۰) و $A(T_2) = \frac{1}{2} r(T_2) \exp(i\beta(T_2))$ و جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی عبارت حاصل از هم معادله پاسخ فرکانسی با حذف $\sin(\gamma)$ و $\cos(\gamma)$ از پاسخ حالت پایا در حالت تشدید اولیه به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\left[\frac{9\alpha_3 \omega_0^2 - 10\alpha_2^2 + 11\alpha_1 \alpha_2 \omega_0^2 - \alpha_1^2 \omega_0^4}{24\omega_0^2} r^2 - \Lambda \sigma \right]^2 r^2 = \frac{Q^2}{4\omega_0^2} \quad (41)$$

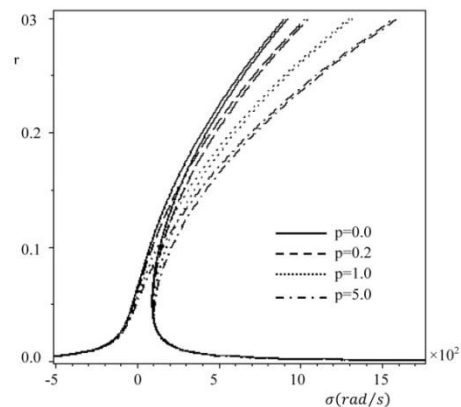
شکل‌های (۹ و ۱۰) به ترتیب منحنی پاسخ فرکانسی و دامنه پاسخ ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک برای گرایان مواد $p=1$ و دو نسبت متفاوت طول به عرض و به ازای σ برابر ۱۰ رادیان بر ثانیه را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود منحنی پاسخ فرکانسی در شکل (۹) به ازای نسبت طول به عرض کوچکتر به سمت راست منحرف می‌شوند و در نتیجه با کاهش این نسبت سخت‌شوندگی سیستم افزایش می‌یابد و با افزایش آن منحنی پاسخ فرکانسی به سمت چپ متمایل می‌شود و در نتیجه سفتی سیستم کاهش می‌یابد و با توجه به شکل (۱۰) با کاهش نسبت a/b ناحیه چندمقداری بزرگ‌تر است و پدیده پرش، در محدوده دامنه تحریک بیشتری می‌تواند اتفاق بیافتد. به عبارت دیگر، به ازای دامنه تحریک یکسان، دامنه حرکت در ورق‌هایی که نسبت طول به عرض کوچکتری دارد، بیشتر می‌باشد.

در شکل (۷) منحنی پاسخ فرکانسی چهار ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مربعی شکل با تغییر خواص مؤثر ورق در اثر تغییر گرایان p (جنس‌های مختلف) تحت تحریک $q_0 = 10 \text{ MPa}$ نشان داده شده است. برای ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مشاهده می‌شود که با تغییر گرایان p و تغییر تدریجی خواص مؤثر ورق از فاز B به فاز C، منحنی‌های پاسخ فرکانسی به سمت راست منحرف می‌شوند و میزان سخت‌شوندگی سیستم افزایش می‌یابد.

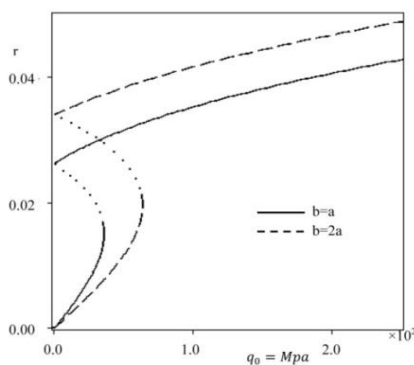
شکل (۸) منحنی دامنه-پاسخ را برای σ برابر ۱۰ نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود با تغییر گرایان مواد، محدوده چندمقداری کاهش می‌یابد و میزان افزایش دامنه حرکت پس از پدیده پرش، برای گرایان‌های کوچک‌تر بیشتر است.



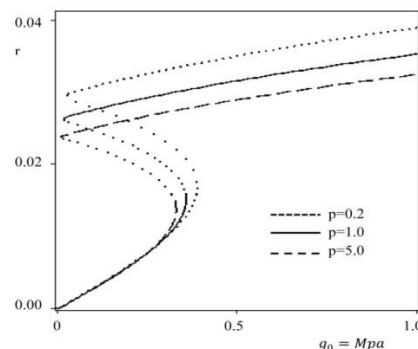
شکل ۹ منحنی پاسخ-فرکانسی در تشدید اولیه به ازای دو مقدار مختلف عرض (b) ورق، $p=1$



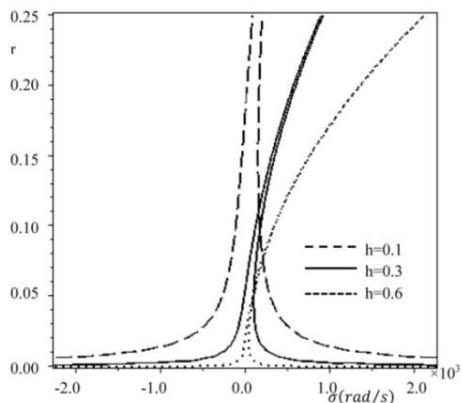
شکل ۷ منحنی پاسخ-فرکانسی در تشدید اولیه به ازای گرایان (p) مختلف از خواص مؤثر ورق مدرج تابعی



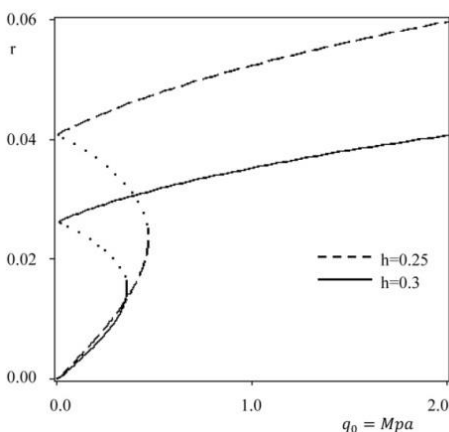
شکل ۱۰ منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه به ازای دو مقدار مختلف عرض (b) ورق، $p=1$



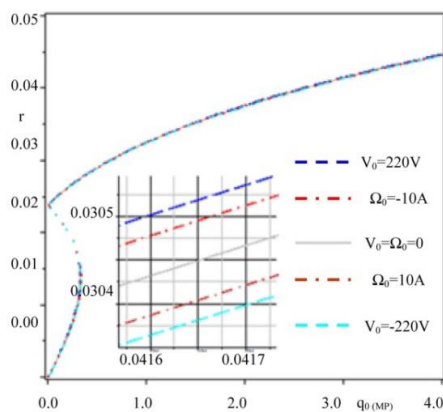
شکل ۸ منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه به ازای گرایان (p) مختلف از خواص مؤثر ورق مدرج تابعی



شکل ۱۱ منحنی پاسخ-فرکانسی در تشدید اولیه به‌ازای چند ضخامت مختلف ورق، $p=1$



شکل ۱۲ منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه به‌ازای چند مقدار مختلف ضخامت ورق، $p=1.0$



شکل ۱۳ تأثیر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی مثبت و منفی در منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه $p=1$

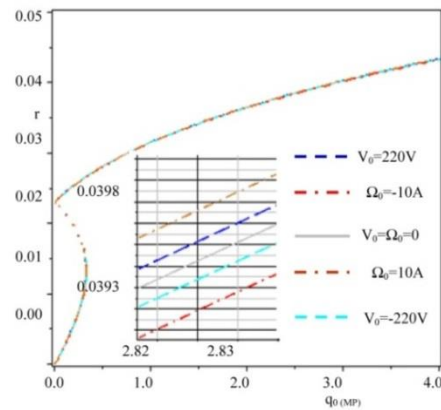
شکل (۱۱ و ۱۲) به ترتیب منحنی پاسخ فرکانسی و دامنه پاسخ ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک برای گرایان مواد $p=1$ و دو نسبت متفاوت طول به عرض و به‌ازای σ برابر ۱۰ رادیان بر ثانیه را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود منحنی پاسخ فرکانسی در شکل (۱۱) به‌ازای ضخامت‌های کوچکتر به سمت چپ منحرف می‌شود و در نتیجه با کاهش ضخامت ورق سخت‌شوندگی سیستم کاهش می‌یابد و با افزایش آن منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست متمایل می‌شود و در نتیجه سفتی سیستم افزایش می‌یابد. با توجه به شکل (۱۲) با کاهش ضخامت ورق ناحیه چندمقداری بزرگ‌تر می‌شود و پدیده پرش، در محدوده دامنه تحریک بیشتری می‌تواند اتفاق بیافتد. به عبارت دیگر، به‌ازای دامنه تحریک یکسان، دامنه حرکت در ورقی که ضخامت (h) کمتری دارد، بیشتر می‌باشد.

با توجه به منحنی‌های دامنه پاسخ در شکل (۱۳ و ۱۴) که برای $\sigma=10$ و به ترتیب برای گرایان مواد مؤثر $p=1$ و $p=20$ رسم شده‌اند، مشاهده می‌شود که در منحنی‌های دامنه-پاسخ پتانسیل الکتریکی مثبت و مغناطیسی منفی باعث افزایش دامنه بیشینه و محدود چندمقداری می‌شوند و نیز پتانسیل الکتریکی منفی و مغناطیسی مثبت باعث کاهش دامنه بیشینه و محدود چندمقداری می‌شود. مقدار این افزایش یا کاهش در دامنه بیشینه و محدود چندمقداری بسته به این که گرایان مؤثر مواد کلی ورق بیشتر به سمت خواص مؤثر فاز B یا فاز C باشد متفاوت است، به طوری که اگر گرایان مواد مؤثر ورق به سمت فاز B باشد (گرایان‌های پایین $p=1$)، پتانسیل الکتریکی رفتار حرکتی و ارتعاشی ورق را تعیین می‌کند و تأثیر بیشتری دارد و ورق از پتانسیل مغناطیسی نسبت به پتانسیل الکتریکی تأثیر کمی می‌پذیرد. اگر گرایان مواد مؤثر ورق به سمت فاز C باشد (گرایان‌های بالا $p=20$)، پتانسیل مغناطیسی رفتار ارتعاشی ورق را معین می‌کند و ورق بیشترین تأثیر را از پتانسیل مغناطیسی می‌پذیرد.

تحریک بارگذاری الکتریکی و مغناطیسی با شدت و جهت مناسب و تغییر در مقدار پارامتر دیتونینگ، ارتعاشات دلخواه را در این نوع از سازه‌های هوشمند ایجاد کرد و یا اثر ارتعاشات نامطلوب را میرا و کنترل نمود و دامنه ارتعاشات را کنترل کرد.

فهرست علائم

a و b	به ترتیب، طول و عرض ورق
h	ضخامت
r	دامنه ارتعاش در تشدید اولیه
A	مساحت ورق
d_{ij}	مؤلفه‌های ضریب کوپلینگ مگنتو-الکتریکی
e_{ij}	مؤلفه‌های ضریب پیزوالکتریک
q_{ij}	مؤلفه‌های ضریب پیزومگنت
q_0	دامنه نیروی تحریک
u_0, v_0 و w_0	تغییر مکان‌های یک نقطه از ورق در صفحه $z = 0$
A_{ij}	سفتی‌های کششی
B_i	مؤلفه‌های شار مغناطیسی
B_{ij}	سفتی‌های کوپلینگ خمشی-کششی
C_{ij}	مؤلفه‌های ماتریس سفتی
D_i	مؤلفه‌های جابه‌جایی الکتریکی
D_{ij}	سفتی‌های خمشی
E_i	مؤلفه‌های میدان الکتریکی
H_i	مؤلفه‌های میدان مغناطیسی
H_{ij}	سفتی‌های مرتبه بالای از ضخامت
I_0, I_1, I_3, I_4 و I_6	ممان‌های اینرسی جرمی
F_{ij} و E_{ij}	سفتی‌های مرتبه بالای از ضخامت
M_x, M_y و M_{xy}	منتجه‌های ممان



شکل ۱۴ تأثیر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی مثبت و منفی در منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه، $p=20$

نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق‌های هوشمند مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مستطیلی شکل با شرط تکیه‌گاهی ساده و با استفاده از تئوری برشی مرتبه سوم، قوانین گاوس برای حالت‌های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک و روش مقیاس‌های زمانی چندگانه به منظور دستیابی به معادله حرکت غیرخطی و پاسخ فرکانسی تحلیلی در حالت پایا برای تشدید اولیه مدل شد و اثر پارامترهای مختلف، از جمله تغییر پارامترهای هندسی و خواص مؤثر ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک، بارگذاری الکتریکی و مغناطیسی و تغییر در اندازه و شدت نیروی دامنه نیروی تحریک و پارامتر دیتونینگ بر رفتار ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق‌های هوشمند مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک در منحنی‌های دامنه-پاسخ و پاسخ-فرکانسی بررسی شد. در نتیجه با توجه به پارامترهای مؤثر در ارتعاشات اجباری غیرخطی این نوع از مواد هوشمند مدرج تابعی و با به کار بردن آن در ساختار سازه‌های هوشمند می‌توان با تغییر نسبت ضخامت کل به طول کل و عرض کل به طول کل یا تغییر خواص مؤثر مواد مدرج تابعی و یا

چرخش های نرمال عرضی، به ترتیب، حول محورهای x و y	ϕ_x و ϕ_y	منتجه های نیروی صفحه ای	N_{xx} ، N_{yy} و N_{xy}
مؤلفه های دی الکتریک	ϵ_{ij}	منتجه های تنش مرتبه بالاتر	P_{xx} ، P_{yy} و P_{xy} و R_x ، R_y
فرکانس دورانی خطی	ω_0		
بالا نویس			
ترم های متناظر مؤلفه های الاستیک	ela	منتجه های نیروی عرضی	Q_x و Q_y
ترم های متناظر مؤلفه های مگنتو- الکتریک	me	علائم یونانی	
		فاز حرکت در حرکت حالت پایدار	γ
		پارامتر مثبت بی بعد و کوچک	ϵ
		پارامتر دیتیونینگ	σ
		زمان بی بعد	τ
واژه نامه		فرکانس طبیعی خطی بی بعد	ω
Jump phenomena	پدیده پرش	فرکانس تحریک	Ω
Primary resonance	تشدید اولیه	کرنش برشی	γ_{ij}
Secondary resonance	تشدید ثانویه	مؤلفه های کرنش	ϵ_i
Third order shear deformation theory	تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم	مؤلفه های تراوایی (نفوذپذیری)	μ_{ij}
Frequency response function	منحنی پاسخ فرکانسی	مغناطیسی	
Functionally Graded Material (FGM)	مواد مدرج تابعی	چگالی ماده ورق	ρ_0
Multivalued region	ناحیه چندمقداری	مؤلفه های تنش	σ_i

مراجع

1. Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. and Jorge, R., "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Composite Structures*, Vol. 75, No. 1, pp. 593-600 (2006).
2. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S.R., "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 1, pp. 11-22 (2011).
3. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S.R., "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 722-735 (2011).
4. Allahverdzadeh, A., Oftadeh, R., Mahjoob, M. and Naei, M., "Homotopy perturbation solution and periodicity analysis of nonlinear vibration of thin rectangular functionally graded plates", *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 27, No. 2, pp. 210-220 (2014).
5. Malekzadeh, P. and Alibeygi Beni, A., "Nonlinear Free Vibration of In-Plane Functionally Graded Rectangular Plates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 22, No. 8, pp. 633-640, (2015).

6. Duc, N.D., Cong, P.H., Tuan, N.D., Tran, P., Anh, V.M. and Quang V.D., "Nonlinear vibration and dynamic response of imperfect eccentrically stiffened shear deformable sandwich plate with functionally graded material in thermal environment", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, pp. 1099636215602142, (2015).
7. Reddy, J.N., "On laminated composite plates with integrated sensors and actuators", *Engineering Structures*, Vol. 21, No. 7, pp. 568-593 (1999).
8. Liew, K., Yang, J. and Kitipornchai S., "Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 15, pp. 3869-3892, (2003).
9. Cupiał, P., "Three-dimensional natural vibration analysis and energy considerations for a piezoelectric rectangular plate", *Journal of sound and vibration*, Vol. 283, No. 3, pp. 1093-1113, (2005).
10. Shen, H.-S., "Postbuckling of axially loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments", *Composites science and technology*, Vol. 65, No. 11, pp. 1675-1690, (2005).
11. Chen, X., Zhao, Z. and Liew, K.M., "Stability of piezoelectric FGM rectangular plates subjected to non-uniformly distributed load, heat and voltage", *Advances in Engineering software*, Vol. 39, No. 2, pp. 121-131, (2008).
12. Fakhari, V., Ohadi, A. and Yousefian, P., "Nonlinear free and forced vibration behavior of functionally graded plate with piezoelectric layers in thermal environment", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 9, pp. 2310-2321, (2011).
13. Kumar, A. and Panda S., "Chakraborty D., Piezo-viscoelastically damped nonlinear frequency response of functionally graded plates with a heated plate-surface", *Journal of Vibration and Control*, pp. 1077546314532672, (2014).
14. Kumar, A., Panda, S. and Chakraborty, D., "Harmonically excited nonlinear vibration of heated functionally graded plates integrated with piezoelectric composite actuator", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 26, No. 8, pp. 931-951, (2015).
15. Shen, H.-S., "Nonlinear bending analysis of unsymmetric cross-ply laminated plates with piezoelectric actuators in thermal environments", *Composite Structures*, Vol. 63, No. 2, pp. 167-177 (2004).
16. Huang, X.-L. and Shen, H.-S., "Nonlinear free and forced vibration of simply supported shear deformable laminated plates with piezoelectric actuators", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 47, No. 2, pp. 187-208, (2005).
17. Shen, H.S., "Nonlinear thermal bending response of FGM plates due to heat conduction", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 201-215, (2007).
18. Pan, E., "Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, No. 4, pp. 608-618, (2001).
19. Chang, T.P., "Deterministic and random vibration analysis of fluid-contacting transversely isotropic magneto-electro-elastic plates", *Computers & Fluids*, Vol. 84, pp. 247-254, (2013).
20. Lang, Z. and Xuewu, L., "Buckling and vibration analysis of functionally graded magneto-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 4, pp. 2279-2292, (2013).

21. Chen, J., Heyliger, P. and Pan, E., "Free vibration of three-dimensional multilayered magneto-electro-elastic plates under combined clamped/free boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 17, pp. 4017-4029, (2014).
22. Li, Y. and Zhang, J., "Free vibration analysis of magneto-electro-elastic plate resting on a Pasternak foundation", *Smart Materials and Structures*, Vol. 23, No. 2, pp. 025002, (2013).
23. Razavi, S. and Shooshtari, A., "Free vibration analysis of a magneto-electro-elastic doubly-curved shell resting on a Pasternak-type elastic foundation", *Smart Materials and Structures*, Vol. 23, No. 10, pp. 105003, (2014).
24. Ansari, R., Gholami, R. and Rouhi, H., "Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of magneto-electro-thermo-elastic Timoshenko nanobeams based upon the nonlocal elasticity theory", *Composite Structures*, Vol. 126, pp. 216-226, (2015).
25. Ansari, R., Hasrati, E., Gholami, R. and Sadeghi, F., "Nonlinear analysis of forced vibration of nonlocal third-order shear deformable beam model of magneto-electro-thermo elastic nanobeams", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 83, pp. 226-241, (2015).
26. Bhangale, R.K. and Ganesan, N., "Free vibration of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates by finite element method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, No. 4, pp. 1016-1038, (2006).
27. Li, J.Y., "Magneto-electro-elastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 38, No. 18, pp. 1993-2011, (2000).
28. Reddy, J.N., *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*: CRC press, (2004).
29. Pan, E. and Han, F., "Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 43, No. 3, pp. 321-339, (2005).
30. Moita, J.M.S., Soares, C.M.M. and Soares, C.A.M., "Analyses of magneto-electro-elastic plates using a higher order finite element model", *Composite structures*, Vol. 91, No. 4, pp. 421-426, (2009).
31. Nayfeh A.H. and Mook D.T., *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, (2008).
32. Mantashloo R. and Shooshtari A. , "Nonlinear Transverse Vibration of FGM Magneto-electro elastic rectangular plates based on third order shear deformation theory", M. Sc. Thesis, Bu-Ali Sina University, (2015).

پیوست

$$e(z) = \int_{-h/2}^{+h/2} e_{15}(z) \left(\frac{3c_1 z^2 - 1}{c_1} \right) dz$$

$$q(z) = \int_{-h/2}^{+h/2} q_{15}(z) \left(\frac{3c_1 z^2 - 1}{c_1} \right) dz$$

(الف-۱)

$$\Phi_0 = \frac{1}{h} (V_0 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})V_1 - (\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)})V_2)$$

$$\Psi_0 = \frac{1}{h} (\Omega_0 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\Omega_2 - (\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)})\Omega_1)$$

(الف-۲)

$$\Omega_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{q_{31}(z)}{\mu_{33}(z)} dz, \Omega_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{q(z)}{\mu_{33}(z)} dz$$

(الف-۳)

$$V_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{e_{31}(z)}{\varepsilon_{33}(z)} dz, V_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{e(z)}{\varepsilon_{33}(z)} dz$$

(الف-۴)

