

## **Simplifying Computation of Diversity-Multiplexing Trade-off of Full-duplex Diamond Relay Channels**

**Farshid Jafarian<sup>1</sup>, Farzad Parvaresh<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Dept. of Electrical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

<sup>2</sup> Dept. of Electrical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

### **Abstract:**

For the most relay networks with fading channels, it is practicable to devise communication schemes that are optimal in terms of diversity multiplexing trade-off (DMT). Characterizing the DMT of a general  $n$ -relay is an ongoing challenging problem. In this paper, we show that to compute DMT of a diamond relay channel one has to solve an optimization problem. Direct computation of DMT of a diamond network with  $n$  relays requires solving  $2^n$  optimization problems (an optimization for each cut in the network). Solving that many optimization problems in networks with many relays is not practical. We demonstrate that for any  $n$ -relay full-duplex diamond channel, if all the exponential orders of the average signal to ratios of links in the network are greater than the multiplexing gain, then computing DMT of such network is equivalent to minimizing a submodular function and can be carried out in polynomial time.

**Keywords:** Diversity-Multiplexing Trade-off, Diamond Networks, Fading Channels, Full-duplex Relays, Submodular Function Minimization.

## ساده‌سازی محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی در شبکه‌های لوزی

فرشید جعفریان<sup>۱</sup>، فرزاد پرورش<sup>۲</sup>

۱- کارشناسی ارشد، گروه مهندسی برق - دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه اصفهان - اصفهان - ایران

farshid.jafarian@gmail.com

۲- استادیار، گروه مهندسی برق - دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه اصفهان - اصفهان - ایران

f.parvaresh@eng.ui.ac.ir

**چکیده:** به دلیل آنکه مشخص کردن ظرفیت کانال‌های رله در بسیاری از شبکه‌ها هنوز جزء مسائل حل نشده است، در عمل در بسیاری از شبکه‌های رله با کانال محوشدگی، از بهینه‌سازی معیار معاوضه تسهیم و چندگانگی برای طراحی روش مخابره در شبکه استفاده می‌شود. به دست آوردن معاوضه تسهیم و چندگانگی شبکه‌های رله در حالت کلی جزء مسائلی است که در حال حاضر پژوهش‌های بسیاری درباره آن انجام می‌شود. در این مقاله نشان داده شده است برای محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی شبکه لوزی به حل یک مسئله بهینه‌سازی نیاز است. در روش مستقیم برای محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی در شبکه لوزی با  $n$  رله به حل  $2^n$  مسئله بهینه‌سازی (یک بهینه‌سازی به ازای هر برش شبکه) نیاز است که برای شبکه‌های با تعداد زیادی رله حل این تعداد بهینه‌سازی عملی نیست. در این مقاله نشان داده شده است برای یک شبکه لوزی دوسویه، زمانی که مرتبه نمایی متوسط بهره کانال‌ها بزرگ‌تر یا مساوی با بهره تسهیم باشند، محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی در شبکه به یک مسئله کمینه‌کردن یک تابع سابعادولار تبدیل می‌شود و مقدار معاوضه تسهیم و چندگانگی در این حالت با پیچیدگی محاسباتی چندجمله‌ای به دست می‌آید.

**واژه‌های کلیدی:** معاوضه تسهیم و چندگانگی، کانال رله لوزی، کانال محوشدگی، رله دوسویه، بهینه‌سازی سابعادولار

### ۱- مقدمه

مقصد<sup>۱</sup> ارسال می‌کنند [۱،۲]. در واقع، رله‌ها در شبکه سعی می‌کنند به صورت همکارانه، اطلاعات را از گره منبع به گره مقصد با بیشترین نرخ ممکن ارسال کنند.

معاوضه تسهیم و چندگانگی<sup>۲</sup> (DMT) به‌عنوان یک معیار برای مقایسه روش‌های مختلف مخابره در شبکه‌های رله، زمانی استفاده می‌شود که نسبت سیگنال به نویز<sup>۳</sup> (SNR) در شبکه بالا باشد. معاوضه تسهیم و چندگانگی به نوعی معاوضه بین نرخ ارسال و احتمال خطا در مخابره را برای کانال‌های محوشدگی<sup>۴</sup> نشان می‌دهد [۳]. در معاوضه تسهیم و چندگانگی، دو مفهوم بهره چندگانگی<sup>۱</sup> و بهره تسهیم<sup>۲</sup> استفاده می‌شوند. بهره چندگانگی به نوعی روند کاهش احتمال خطا با افزایش سیگنال به نویز در مخابره را نشان می‌دهد و بهره تسهیم روند افزایش نرخ مخابره با افزایش

شبکه‌های لوزی از جمله شبکه‌های متعارفی هستند که برای بررسی جنبه‌های همکاری<sup>۱</sup> در شبکه‌های بی‌سیم به کار می‌روند. این شبکه‌ها دو پرش<sup>۲</sup> را شامل می‌شوند که در پرش اول، گره منبع<sup>۳</sup> اطلاعات را از طریق یک کانال پخشی<sup>۴</sup> به  $n$  رله ارسال می‌کند و در پرش دوم، رله‌ها داده‌های دریافتی را از طریق یک کانال دسترسی چندگانه<sup>۵</sup> به گره

<sup>۱</sup> تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۱۹

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۱۲/۰۹

نام نویسنده مسئول: فرزاد پرورش

نشانی نویسنده مسئول: ایران - اصفهان - خیابان هزار جریب - دانشگاه اصفهان - دانشکده فنی و مهندسی - گروه مهندسی برق

ارسال اطلاعات استفاده می‌شود. در روش ارسال نیمه دوسویه، رله اطلاعات خود را با مالتی پلکس کردن در زمان یا فرکانس دریافت و ارسال می‌کند. در حالت مالتی پلکس در فرکانس، رله داده‌های خود را در یک باند فرکانسی دریافت و در باند فرکانسی متفاوتی ارسال می‌کند و در مالتی پلکس در زمان رله اطلاعات خود را در یک بازه زمانی خاص، ارسال و در بازه زمانی دیگری دریافت می‌کند.

در ارسال نیمه دوسویه انتظار می‌رود معاوضه تسهیم و چندگانگی، نسبت به ارسال دوسویه کاهش یابد؛ زیرا در ارسال نیمه دوسویه از تمام ظرفیت کانال برای ارسال استفاده نشده است. یک سؤال اساسی آن است که استفاده از ارسال نیمه دوسویه چه مقدار باعث کاهش در مقدار معاوضه تسهیم و چندگانگی نسبت به حالت ارسال دوسویه می‌شود. برای جواب دادن به این سؤال اساسی نیاز است معاوضه تسهیم و چندگانگی در حالت ارسال دوسویه برای شبکه‌های لوزی با  $n$  رله به دست بیاید. سپس این مقدار با معاوضه تسهیم و چندگانگی با ارسال نیمه دوسویه مقایسه شود. برای محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی شبکه لوزی با  $n$  رله دوسویه به حل  $2^n$  مسئله بهینه‌سازی نیاز است و به‌خودی‌خود مسئله ساده‌ای نیست. در این مقاله نشان داده شده است در شرایط خاص، محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی در شبکه لوزی را می‌توان به یک مسئله کمینه‌کردن یک تابع سابمادولار<sup>۱۷</sup> تبدیل کرد و در نتیجه، مقدار معاوضه تسهیم و چندگانگی در شبکه لوزی با رله‌های دوسویه در زمان چندجمله‌ای<sup>۱۸</sup> به دست می‌آید.

در این راستا، ابتدا معاوضه تسهیم و چندگانگی برای روش ارسال کوانتیزه - نگاشت - ارسال (روش مخابراتی) که از لحاظ معاوضه تسهیم و چندگانگی بهینه است [۳] در یک شبکه لوزی در حالت کلی با  $n$  رله در حالت ارسال دوسویه به صورت جواب یک مسئله بهینه‌سازی نوشته می‌شود. سپس نشان داده می‌شود اگر متوسط مرتبه نمایی سیگنال به نویز تمام بهره‌ها در شبکه لوزی بزرگ‌تر یا مساوی بهره تسهیم در شبکه باشد، مسئله بهینه‌سازی مطرح شده به کمینه‌کردن یک تابع سابمادولار تبدیل می‌شود و به کمک الگوریتم‌های چندجمله‌ای موجود برای

سیگنال به نویز در شبکه را مشخص می‌کند. فرض شود یک خانواده کد  $\{C(SNR)\}$  برای مخابرات در کانال بی‌سیم استفاده می‌شود. اگر نرخ ارسال خانواده کد با  $R(SNR)$  نمایش داده شود و احتمال خطای مخابرات با  $P_e(SNR)$  نشان داده شود، آنگاه بهره تسهیم که با  $r$  نمایش داده می‌شود، برای خانواده کد با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$r = \lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{R(SNR)}{\log(SNR)} \quad (1)$$

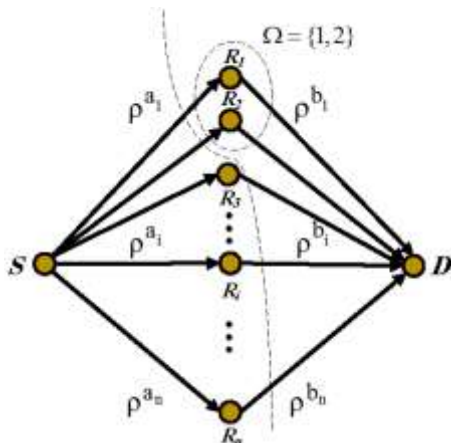
و بهره چندگانگی که با  $d$  نمایش داده می‌شود، با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$d = - \lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{\log P_e(SNR)}{\log(SNR)} \quad (2)$$

ماکزیمم بهره چندگانگی حصول شده روی تمام خانواده‌های کدهای موجود برای یک بهره تسهیم خاص  $r$  معاوضه بهره تسهیم و چندگانگی برای شبکه در آن بهره تسهیم، تعریف و با  $d^*(r)$  نمایش داده می‌شود [۴].

در شبکه‌های لوزی، رله‌ها عموماً در دو حالت مختلف نیمه دوسویه<sup>۱۹</sup> و دوسویه<sup>۲۰</sup> عمل می‌کنند. اگر رله به‌طور همزمان در یک بازه فرکانسی و در یک زمان اطلاعات را ارسال و دریافت کند، رله به صورت دوسویه کار می‌کند. در روش انتقال داده‌ها به صورت دوسویه نشان داده شده است که ارسال به کمک روش کوانتیزه - نگاشت - ارسال<sup>۱۴</sup> (QMF) می‌تواند به معاوضه تسهیم و چندگانگی بهینه در شبکه برسد [۲]. در [۵] اوستی مهر و همکاران نشان داده‌اند در یک شبکه با توپولوژی دلخواه، روش ارسال کوانتیزه - نگاشت - ارسال به یک تقریب جمعی<sup>۱۵</sup> از ظرفیت کانال می‌رسد که این تقریب مستقل از توان ارسال و بهره‌های کانال‌های شبکه است و تنها تابع تعداد رله‌ها در شبکه است؛ بنابراین در سیگنال به نویزهای بالا تقریباً ظرفیت کانال با ظرفیت ارسال به کمک روش کوانتیزه - نگاشت - ارسال یکی است و معاوضه تسهیم و چندگانگی کانال به کمک محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی روش کوانتیزه - نگاشت - ارسال به دست می‌آید [۳].

برای اجتناب از پدیده خود تداخلی<sup>۱۶</sup>، در عمل در بسیاری از شبکه‌های رله، از رله‌های نیمه دوسویه برای



شکل (۱): شبکه لوزی با  $n$  رله.

در این مدل کانال، فرض می‌شود بهره کانال‌ها در طول ارسال یک کلمه کد ثابت باقی می‌ماند و بهره کانال‌ها از یک کلمه کد به کلمه کد دیگر طبق توزیع معرفی شده به صورت مستقل تغییر می‌کنند. همچنین در این مدل فرض می‌شود طول کلمه کدها به اندازه کافی بلندند؛ به گونه‌ای که خطا در ارسال تنها زمانی رخ می‌دهد که کانال در حالت قطع قرار داشته باشد [۳].

در این مدل مخابراتی، فرض می‌شود گره منبع از بهره کانال‌ها یا خبر نیست؛ ولی هر رله از بهره کانال منبع به خود رله اطلاع دارد و گره مقصد به کمک کانال‌های مخابراتی شبکه از بهره تمام کانال‌های مخابراتی در شبکه مطلع است. نویز کانال‌ها در رله‌ها و گره مقصد با نویز متقارن دایروی مختلط گوسی سفید جمع شونده با میانگین صفر و واریانس یک مدل می‌شود که از یکدیگر مستقل‌اند.

در این مدل  $\rho^{a_i}$  و  $\rho^{b_i}$  به ترتیب بیان‌کننده متوسط سیگنال به نویز از گره منبع به رله  $R_i$  و از رله  $R_i$  به گره مقصدند. مرتبه نمایی سیگنال به نویز لحظه‌ای مسیرها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_i = \frac{\log(|h_{sr_i}|^2 \rho^{a_i})}{\log(\rho)}, \beta_i = \frac{\log(|h_{rd}|^2 \rho^{b_i})}{\log(\rho)} \quad (۳)$$

در یک شبکه لوزی که رله‌ها به صورت دوسویه کار می‌کنند، مدل مخابره به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Y_i = h_{sr_i} \rho^{a_i/2} X_s + N_i \quad (۴)$$

$$Y_d = \sum_{i=1}^n h_{rd} \rho^{b_i/2} X_i + N_d \quad (۵)$$

کمینه کردن توابع سابمادولار، مقدار معاوضه تسهیم و چندگانگی در زمان چندجمله‌ای محاسبه می‌شود.

ادامه مقاله به صورت زیر سازمان داده شده است. در بخش دوم، مدل مخابراتی به کاررفته برای شبکه لوزی ارائه شده است. نتیجه اصلی مقاله (که همان محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی است)، در بخش سوم آمده است. در فصل چهارم، نتایج جمع‌بندی شده‌اند.

در این مقاله تمام  $\log(\cdot)$ ها بر مبنای دو در نظر گرفته شده‌اند. یک بردار  $v_i, i \in S$  با  $\{v_i\}_{i \in S}$  نمایش داده می‌شود. برای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  منظور از  $A^c$  متمم مجموعه  $A$  است و مجموعه  $A \setminus B$  همان  $A - B$  است. مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  با  $[n]$  نمایش داده می‌شود. منظور از  $\mathbf{1}_n$  بردار با  $n$  یک و  $\mathbf{0}_n$  بردار با  $n$  صفر است. مقدار  $x^+$  همان  $\max\{x, 0\}$  است.

## ۲- مدل مخابراتی کانال لوزی

مدل شبکه‌ای در نظر گرفته شده در این مقاله، یک شبکه لوزی با  $n$  رله است و فرض می‌شود رله‌ها با روش ارسال دوسویه اطلاعات را دریافت و ارسال می‌کنند. شکل (۱) نشان‌دهنده مدل شبکه است که یک گره منبع (S) را شامل می‌شود که پیام مد نظر را به گره مقصد (D) با همکاری  $n$  گره رله  $\{R_i\}_{i \in [n]}$  ارسال می‌کند. مجموعه رله‌ها با  $R_n = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  نمایش داده می‌شود. در این شبکه فرض می‌شود مسیر مستقیمی بین گره منبع و گره مقصد وجود ندارد.

تمام گره‌ها در این شبکه مجهز به یک آنتن برای ارسال و دریافت‌اند و کانال مخابراتی در نظر گرفته شده کانال i.i.d. نیمه - ایستا با محوشدگی تخت<sup>۱۹</sup> است. در این کانال بهره‌های کانال از گره منبع به رله  $R_i$  برابر با  $h_{sr_i} \rho^{a_i/2}$  و از رله  $R_i$  به گره مقصد برابر با  $h_{rd} \rho^{b_i/2}$  فرض می‌شوند که در اینجا  $h_{sr_i}$  و  $h_{rd}$  متغیرهای تصادفی i.i.d. با توزیع متقارن دایروی مختلط گوسی<sup>۲۰</sup> با میانگین صفر و واریانس یک هستند و ثابت‌های  $a_i$  و  $b_i$  مقادیر حقیقی مثبت هستند و بیان‌کننده مرتبه نمایی متوسط سیگنال به نویز از منبع به رله  $i$ ام و از رله  $i$ ام به مقصدند.

رخداد قطع شبکه، زمانی پیش می‌آید که نرخ ارسال  $R$  از ظرفیت شبکه  $C$  بیشتر باشد ( $C \leq R$ ). به دلیل اینکه مقدار  $C_u$  به اندازه یک ثابت مستقل از  $\rho$  از ظرفیت کانال فاصله دارد، در رژیم‌هایی که SNR به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، واقعه قطع شبکه با  $C_u \leq R \cong r \log \rho$  معادل است. همچنین زمانی که SNR یا  $\rho$  به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، در رابطه (۶) با توجه به رابطه (۳) می‌توانیم بنویسیم:

$$\log \left( 1 + \sum_{k \in \Omega} |h_{s_k}|^2 \rho^{\alpha_k} \right) = \log \left( 1 + \sum_{k \in \Omega} \rho^{\alpha_k} \right) \\ \cong \log \left( 1 + \rho^{\max_{k \in \Omega}(\alpha_k)} \right) = \max_{k \in \Omega}(\alpha_k^+) \log \rho$$

و به همین صورت

$$\log \left( 1 + \left( \sum_{k \in \Omega^c} |h_{r_d}| \rho^{\beta_k/2} \right)^2 \right) = \log \left( 1 + \left( \sum_{k \in \Omega^c} \rho^{\beta_k/2} \right)^2 \right) \\ \cong \log \left( 1 + \rho^{\max_{k \in \Omega^c}(\beta_k)} \right) = \max_{k \in \Omega^c}(\beta_k^+) \log \rho$$

و خواهیم داشت

$$C_u \cong \min_{\Omega \subseteq [n]} \left( \max_{k \in \Omega}(\alpha_k) + \max_{k \in \Omega^c}(\beta_k) \right) \log \rho$$

بنابراین واقعه قطع در حالت  $\rho \rightarrow \infty$  با نامساوی (۷) نمایش داده می‌شود:

$$\min_{\Omega \subseteq [n]} \max_{k \in \Omega}(\alpha_k^+) + \max_{k \in \Omega^c}(\beta_k^+) \leq r \quad (۷)$$

که  $\alpha_k$  ها و  $\beta_k$  ها در رابطه (۳) تعریف شده‌اند و  $x^+ = \max\{x, 0\}$  در رابطه (۸)، که در بالای صفحه بعد آمده است، زنجیره‌ای از نامساوی‌ها وجود دارد و بر این واقعیت دلالت می‌کند که برای محاسبه  $d_{f,d}^*(r)$  به حل یک مسئله بهینه‌سازی نیاز است. در رابطه (۸) مساوی (i) با در نظر گرفتن معادل رخداد قطع بیان شده که در رابطه (۷) آمده است. در مساوی (ii) چگالی احتمال‌ها برای توابع احتمال  $p_{\alpha_1}(\alpha_1), \dots, p_{\alpha_n}(\alpha_n)$  و  $p_{\beta_1}(\beta_1), \dots, p_{\beta_n}(\beta_n)$  به کار برده می‌شود و ثابت‌ها و جملاتی که به  $\rho$  وابسته نیستند، حذف شده‌اند [۳]. در نهایت، در (iii) با به‌کارگیری روش لاپلاس مشابه با [۴] مقدار انتگرال در حالت حدی  $\rho \rightarrow \infty$  محاسبه شده است؛ بنابراین معاوضه تسهیم و چندگانگی یک شبکه لوزی

که  $Y_i$  سیگنال دریافتی رله  $i$  ام،  $Y_d$  سیگنال دریافتی در گره مقصد،  $X_s$  سیگنال ارسالی از گره منبع،  $X_i$  سیگنال ارسالی از رله  $i$  ام،  $N_i$  نویز سفید گوسی جمع‌شونده در رله  $i$  ام و  $N_d$  نویز سفید گوسی جمع‌شونده در گره مقصد برای  $i = 1, 2, \dots, n$  هستند.

### ۳- نتایج اصلی

نتیجه اصلی این مقاله به‌طور خلاصه به شرح زیر است. زمانی که مرتبه نمایی بهره کانال‌ها بزرگ‌تر یا مساوی بهره تسهیم باشند ( $a_i, b_i \geq r, i \in [n]$ )، معاوضه تسهیم و چندگانگی شبکه لوزی با رله دوسویه با کمینه‌کردن یک تابع مجموعه‌ای ساپمادولار محاسبه می‌شود که روی تمام برش‌های شبکه تعریف شده است. به سبب اینکه کمینه‌کردن یک تابع ساپمادولار در زمان چندجمله امکان‌پذیر است، در نتیجه، محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی در زمان چندجمله‌ای برای حالت  $a_i, b_i \geq r, i \in [n]$  امکان‌پذیر است.

برای اثبات نتیجه اصلی، ابتدا نشان داده شده است معاوضه تسهیم و چندگانگی شبکه با کمینه‌کردن یک تابع آورده‌شده در رابطه (۹) روی تمام برش‌های شبکه برابر است. سپس در قضیه ۱ نشان داده شده تابع معرفی‌شده در (۹) زمانی که  $a_i, b_i \geq r, i \in [n]$  یک تابع ساپمادولار است و در نتیجه، محاسبه مقدار کمینه آن در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است [۹].

برای یک شبکه لوزی با  $n$  رله دوسویه، در [۵] نشان داده شده است ظرفیت شبکه  $C$  در محدوده

$$C_u - \kappa \leq C \leq C_u$$

قرار دارد که  $\kappa$  یک عدد ثابت مستقل از توان ارسالی در شبکه و تنها تابع تعداد رله‌ها در شبکه است و مقدار  $C_u$  از رابطه (۶) محاسبه می‌شود.

$$\min_{\Omega \subseteq [n]} \log \left( 1 + \sum_{k \in \Omega} |h_{s_k}|^2 \rho^{\alpha_k} \right) + \log \left( 1 + \left( \sum_{k \in \Omega^c} |h_{r_d}| \rho^{\beta_k/2} \right)^2 \right) \quad (۶)$$

که  $\Omega$  نشان‌دهنده برش‌های شبکه است.

$$\begin{aligned}
 d_{f,d}^*(r) &= -\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log \Pr(C \leq r \log \rho)}{\log \rho} = -\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log \Pr(C_u \leq r \log \rho)}{\log \rho} \\
 &\stackrel{(i)}{=} -\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log \Pr\left(\min_{\Omega \subseteq [n]} \max_{k \in \Omega}(\alpha_k) + \max_{k \in \Omega^c}(\beta_k) \leq r\right)}{\log \rho} \\
 &= -\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \rho} \log \left( \int_{\substack{\min_{\Omega \subseteq [n]} \max_{k \in \Omega}(\alpha_k^+) + \max_{k \in \Omega^c}(\beta_k^+) \leq r \\ \alpha_k \leq a_k, \beta_k \leq b_k, k=1, \dots, n}} P_{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n}(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n) d\alpha_1 d\beta_1 \dots d\alpha_n d\beta_n \right) \\
 &= -\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \rho} \log \left( \int_{\substack{\min_{\Omega \subseteq [n]} \max_{k \in \Omega}(\alpha_k^+) + \max_{k \in \Omega^c}(\beta_k^+) \leq r \\ \alpha_k \leq a_k, \beta_k \leq b_k, k=1, \dots, n}} P_{\alpha_1}(\alpha_1) P_{\beta_1}(\beta_1) \dots P_{\alpha_n}(\alpha_n) P_{\beta_n}(\beta_n) d\alpha_1 d\beta_1 \dots d\alpha_n d\beta_n \right) \quad (8) \\
 &\stackrel{(ii)}{=} -\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \rho} \log \left( \int_{\substack{\min_{\Omega \subseteq [n]} \max_{k \in \Omega}(\alpha_k^+) + \max_{k \in \Omega^c}(\beta_k^+) \leq r \\ \alpha_k \leq a_k, \beta_k \leq b_k, k=1, \dots, n}} \rho^{-(a_1+b_1+\dots+a_n+b_n-\alpha_1-\beta_1-\dots-\alpha_n-\beta_n)} d\alpha_1 d\beta_1 \dots d\alpha_n d\beta_n \right) \\
 &\stackrel{(iii)}{=} \min_{\substack{\min_{\Omega \subseteq [n]} \max_{k \in \Omega}(\alpha_k^+) + \max_{k \in \Omega^c}(\beta_k^+) \leq r \\ \alpha_k \leq a_k, \beta_k \leq b_k, k=1, \dots, n}} a_1 + b_1 + K + a_n + b_n - \alpha_1 - \beta_1 - \dots - \alpha_n - \beta_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{\Omega_1 \cup \Omega_2}(r) &= \min \sum_{k \in \Omega_1 \cup \Omega_2} (a_k - \alpha_k) + \sum_{k \in \Omega_1^c \cup \Omega_2^c} (b_k - \beta_k) \\
 \text{s.t.} \quad &0 \leq \alpha_k \leq a_k, \quad k \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (13) \\
 &0 \leq \beta_k \leq b_k, \quad k \in \Omega_1^c \cup \Omega_2^c \\
 &\max_{k \in \Omega_1 \cup \Omega_2}(\alpha_k) + \max_{k \in \Omega_1^c \cup \Omega_2^c}(\beta_k) \leq r
 \end{aligned}$$

با  $n$  رلهٔ دوسویه از حل مسئلهٔ بهینه‌سازی زیر به دست می‌آید:

$$d_{f,d}^*(r) = \min_{\Omega \subseteq [n]} d_{\Omega}(r) \quad (9)$$

که تابع  $d_{\Omega}(r)$  روی برش‌های شبکه با بهینه‌سازی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 d_{\Omega}(r) @ \min \quad &\sum_{k \in \Omega} (a_k - \alpha_k) + \sum_{k \in \Omega^c} (b_k - \beta_k) \\
 \text{s.t.} \quad &0 \leq \alpha_k \leq a_k, \quad k \in \Omega \\
 &0 \leq \beta_k \leq b_k, \quad k \in \Omega^c \quad (10) \\
 &\max_{k \in \Omega}(\alpha_k) + \max_{k \in \Omega^c}(\beta_k) \leq r
 \end{aligned}$$

**تعریف ۱:** اگر  $U$  یک مجموعه متناهی باشد و  $P(U)$  نشان‌دهندهٔ تمام زیرمجموعه‌های  $U$  باشد (مجموعه توانی  $U$ ), یک تابع  $f: P(U) \rightarrow \mathbb{R}$ , یک تابع  $f$  تابع سابمادولار است. اگر برای تمام زیرمجموعه‌های  $A, B \subseteq U$  داشته باشیم [۷]

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B) \quad (11)$$

قضیه ۱: اگر  $a_i, b_i \geq r$  برای تمام  $i \in [n]$ , آنگاه تابع  $d_{\Omega}(r)$  که در (۱۰) تعریف شده، یک تابع سابمادولار بر حسب  $\Omega$  است. به عبارت دیگر، برای هر  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq [n]$  داریم

$$d_{\Omega_1}(r) + d_{\Omega_2}(r) \geq d_{\Omega_1 \cup \Omega_2}(r) + d_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(r) \quad (12)$$

که  $d_{\Omega_1}(r)$  و  $d_{\Omega_2}(r)$  همانند رابطه (۱۰) هستند و برای  $d_{\Omega_1 \cup \Omega_2}(r)$  به‌طور مشخص داریم

**اثبات:** ابتدا یک کران بالا برای سمت راست نامساوی (۱۲) و یک کران پایین برای سمت چپ نامساوی به دست آورده می‌شود. سپس نشان داده می‌شود کران بالای به‌دست‌آمده کوچک‌تر از کران پایین حاصل شده است. برای این منظور، یک کران بالا برای مقدار مسئلهٔ بهینه‌سازی (۱۳) به دست آورده می‌شود. این مسئلهٔ بهینه‌سازی به‌صورت یک کمینه‌سازی برنامه‌ریزی خطی استاندارد نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad &c^T x \\
 \text{s.t.} \quad &Ax \leq d, \quad x \geq 0 \quad (15)
 \end{aligned}$$

که برای به دست آوردن بهینه‌سازی (۱۳) می‌باید در (۱۵) بردار  $c = -\mathbf{1}_n$



$$d_{\Omega_1 \cup \Omega_2}(r) + d_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(r) \leq \sum_{k \in \Omega_1} a_k + \sum_{k \in \Omega_1^c} b_k + \sum_{k \in \Omega_2} a_k + \sum_{k \in \Omega_2^c} b_k - \max\{|\Omega_1| + |\Omega_2|, |\Omega_1^c \cup \Omega_2^c| + |\Omega_1 \cup \Omega_2|, |\Omega_1^c \cap \Omega_2^c| + |\Omega_1 \cap \Omega_2|, |\Omega_1^c| + |\Omega_2^c|\} r \quad (20)$$

$$d_{\Omega_1}(r) + d_{\Omega_2}(r) \geq \sum_{k \in \Omega_1} a_k + \sum_{k \in \Omega_1^c} b_k + \sum_{k \in \Omega_2} a_k + \sum_{k \in \Omega_2^c} b_k - \max\{|\Omega_1| + |\Omega_2|, |\Omega_1| + |\Omega_2^c|, |\Omega_1^c| + |\Omega_2|, |\Omega_1^c| + |\Omega_2^c|\} r \quad (25)$$

$$d_{\Omega_2}(r) \geq \sum_{k \in \Omega_2} a_k + \sum_{k \in \Omega_2^c} b_k - \max\{|\Omega_2|, |\Omega_2^c|\} r \quad (24)$$

$$d_{\Omega_1}(r) = \max \sum_{k \in \Omega_1} a_k + \sum_{k \in \Omega_1^c} b_k - d^T y \quad (21)$$

$$\text{s.t. } -A^T y \leq c, \quad y \geq 0$$

نوشته می‌شود که در این رابطه  $c = -\mathbf{1}_n$ ،  
 $d^T = \left( \{a_i\}_{i \in \Omega_1}, \{b_j\}_{j \in \Omega_1^c}, r \mathbf{1}_{|\Omega_1| \times |\Omega_1^c|}^T \right)$  و ماتریس  
 به صورت  $A$

$$A^T = \begin{pmatrix} I_n & \left( I_{|\Omega_1^c|}^{(|\Omega_1^c|)} \right)^T \\ I_{|\Omega_1^c|} & L & I_{|\Omega_1^c|} \end{pmatrix}$$

هستند. با استفاده از ویژگی دوگان، هر بردار  $y_1$  که در فضای شدنی (۲۱) قرار داشته باشد، یک کران پایین روی  $d_{\Omega_1}(r)$  نتیجه می‌دهد

$$d_{\Omega_1}(r) \geq \sum_{k \in \Omega_1} a_k + \sum_{k \in \Omega_1^c} b_k - d^T y_1 \quad (22)$$

برای حالتی که  $\Omega_1, \Omega_1^c \neq \emptyset$ ، اگر از بردار

$$y_1^T = \left( \mathbf{0}_n^T, \frac{1}{\min(|\Omega_1|, |\Omega_1^c|)} \mathbf{1}_{|\Omega_1| \times |\Omega_1^c|}^T \right)$$

که در فضای شدنی (۲۱) است، در رابطه (۲۲) استفاده شود به نامساوی

$$d_{\Omega_1}(r) \geq \sum_{k \in \Omega_1} a_k + \sum_{k \in \Omega_1^c} b_k - \max\{|\Omega_1|, |\Omega_1^c|\} r \quad (23)$$

خواهیم رسید. در حالتی که  $\Omega_1$  یا  $\Omega_1^c$  برابر مجموعه تهی باشند، آنگاه به سادگی می‌توان دید نامساوی (۲۳) هنوز برقرار است؛ بنابراین در حالت کلی، کران پایین (۲۳) روی مقدار  $d_{\Omega_1}(r)$  برقرار است.

برای به دست آوردن یک کران پایین برای مقدار  $d_{\Omega_2}(r)$  مشابه قبل عمل می‌شود و در نتیجه، خواهیم داشت

از روابط (۲۳) و (۲۴) می‌توان به یک کران پایین برای سمت چپ نامساوی (۱۲) رسید که در رابطه (۲۵) در بالای صفحه داده شده است. با مقایسه روابط (۲۰) و (۲۵) نامساوی (۱۲) ثابت می‌شود.

گزاره ۱: فرض می‌شود  $U$  یک مجموعه متناهی باشد و  $P(U)$  مجموعه زیرمجموعه‌های  $U$  باشد. اگر  $f: P(U) \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع مجموعه‌ای سابمادولار باشد و برای هر  $S \in P(U)$  بتوانیم مقدار  $f(S)$  را در زمان  $\tau$  بیابیم، آنگاه مسئله کمینه‌سازی  $\min_{S \in P(U)} f(S)$  در زمان چندجمله‌ای بر حسب  $\tau$  و  $|U|$  یافت می‌شود [۷]. با توجه به قضیه ۱ و گزاره ۱، نشان می‌دهیم محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی در یک شبکه لوزی با  $n$  رله برای زمانی که بهره تسهیم از  $\max_{i \in [n]} \{\alpha_i, \beta_i\}$  کوچک‌تر است، در زمان چندجمله‌ای بر حسب  $n$  محاسبه می‌شود. گووتچل<sup>۳۳</sup>، لواتس<sup>۳۴</sup> و شرایور<sup>۳۵</sup> در [۷] یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای قوی برای کمینه‌سازی توابع سابمادولار معرفی کرده‌اند. بسط لواتس بیان می‌کند مسئله کمینه‌سازی تابع سابمادولار به صورت یک بهینه‌سازی مجدد، مطرح و آنگاه با استفاده از روش حل بیضوی<sup>۳۶</sup> در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود [۷ و ۹].

#### ۴- نتیجه‌گیری

با نشان دادن سابمادولاریت تابع معاوضه تسهیم و چندگانگی برش‌های شبکه لوزی و ترکیب آن با این حقیقت که کمینه‌کردن یک تابع سابمادولار در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است، نشان داده شد محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی برای یک شبکه لوزی با  $n$  رله دوسویه در حالت کلی امکان‌پذیر است؛ البته زمانی که



- [4] L. Zheng and D. N. C. Tse, "Diversity and multiplexing: A fundamental tradeoff in multiple-antenna channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. 49, No. 5, pp. 1073-1096, May 2003.
- [5] A.S. Avestimehr, S.N. Diggavi, and D.N.C. Tse, "Wireless network information flow: A deterministic approach," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. 57, No. 4, pp. 1872-1905, Apr. 2011.
- [6] S. Pawar, A.S. Avestimehr, and D.N.C. Tse, "Diversity-multiplexing tradeoff of the half-duplex relay channel," in *Proc. 46<sup>th</sup> Annu. Allerton Conf. Commun. Control, Comput.*, Sept. 2008, pp. 27-33.
- [7] M. Groetschel, L. Lovasz, and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimizations*, New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1988.
- [8] S.P. Boyd, L. Vandenberghe, "Convex optimization", Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [9] S. Fujishige, "Submodular functions and optimizations," *Annals of Discrete Mathematics*, Vol. 58, 2<sup>nd</sup> ed. Piscataway, NJ, USA: Elsevier, 2005"

مقادیر مرتبه‌نمایی متوسط سیگنال به نویز لینک‌ها در شبکه  $(\{a_i, b_i\}_{i \in [n]})$  بزرگ‌تر یا مساوی بهره تسهیم است. زمانی که بهره تسهیم در شبکه افزایش می‌یابد باعث می‌شود بهره چندگانگی کاهش یابد؛ بنابراین در بیشتر شبکه‌ها در عمل، بهره تسهیم بالا استفاده نمی‌شود و در نتیجه، روش پیشنهادی برای محاسبه معاوضه تسهیم و چندگانگی در بیشتر شبکه‌های عملی کاربرد دارد.

## مراجع

- [1] B. Schein and R. Gallager, "The Gaussian parallel relay network," in *Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, June 2000, pp. 22.
- [2] B. Schein, *Distributed coordination in network information theory*, Ph.D. dissertation, MIT, Cambridge, MA, 2001.
- [3] R. Kolte, A. Ozgur, and S. Diggavi, "When are dynamic relaying strategies necessary in half-duplex wireless networks?," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. 61, No. 4, pp. 1720-1738, Apr. 2015.

- 
- <sup>1</sup> Cooperation  
<sup>2</sup> Hop  
<sup>3</sup> Source node  
<sup>4</sup> Broadcast channel  
<sup>5</sup> Multiple access channel  
<sup>6</sup> Destination node  
<sup>7</sup> Diversity-Multiplexing Trade-off  
<sup>8</sup> Signal to noise ratio  
<sup>9</sup> Fading channel  
<sup>10</sup> Diversity gain  
<sup>11</sup> Multiplexing gain  
<sup>12</sup> Half-duplex  
<sup>13</sup> Full-duplex  
<sup>14</sup> Quantize-map-and-forward  
<sup>15</sup> Constant additive approximation  
<sup>16</sup> Self-interference  
<sup>17</sup> Submodular function  
<sup>18</sup> Polynomial time  
<sup>19</sup> Quasi-static flat-fading channel  
<sup>20</sup> Circularly symmetric complex Gaussian noise  
<sup>21</sup> Outage  
<sup>22</sup> Kronecker product  
<sup>23</sup> Grötschel  
<sup>24</sup> Lovátz  
<sup>25</sup> Schrijver  
<sup>26</sup> Ellipsoid method