

تحلیل و بهینه‌سازی شکل سازه‌های متقارن محوری با استفاده از روش ایزوژئومتری

بهرز حسنی^{۱*}، احمد گنجعلی^۲، ابوالفضل حجت پناه منتظری^۳

^۱دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

^۲دانشجوی دکتری عمران، گرایش سازه، دانشگاه صنعتی شاهرود

^۳دانش آموخته کارشناسی ارشد عمران، گرایش سازه، دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

تحلیل ایزوژئومتری یک روش عددی جدید در آنالیز مسائل مهندسی است. این روش بالقوه دارای ویژگی‌های منحصر به فرد و مناسبی است که شاید در آینده‌ای نه چندان دور بتواند جایگزین روشهای عددی متداول نظیر اجزای محدود و روش‌های بدون المان گردد. در این مقاله ضمن معرفی فرمول بندی روش ایزوژئومتری در مسائل متقارن محوری به تحلیل و نیز کاربرد این روش در بهینه‌سازی شکل این نوع از سازه‌ها پرداخته شده است. در این راستا علاوه بر بررسی دقت حل با یک مثال نمونه، دو مثال بهینه‌سازی و حل آن به کمک الگوریتم برنامه ریزی درجه دوم پیاپی ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش ایزوژئومتری در مقایسه با روش‌های بهینه‌سازی مبتنی بر اجزای محدود با استفاده از تعداد بسیار کمی متغیر طراحی به جواب بهینه مسئله نایل شده است. همچنین به دلیل حذف فرآیند تولید شبکه در این روش، هزینه‌های محاسباتی به طور چشمگیری کاهش یافته است.

کلمات کلیدی: تحلیل ایزوژئومتری؛ تکنیک نربز؛ بهینه‌سازی شکل؛ سازه‌های متقارن محوری.

۱- مقدمه

این ایده با استفاده از توابع نربز (بی-اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت^۲) که از توسعه توابع اسپلاین بدست می‌آیند توسط هیوز^۳ [۴] تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتری نام گرفت. اساس این روش را استفاده از فناوری‌های طراحی به کمک رایانه^۴ و پیشرفت‌های اخیر در زمینه گرافیک رایانه‌ای تشکیل می‌دهد. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آن‌ها جهت درونیابی و تقریب سازی هم استفاده می‌شود. شاید بتوان این‌طور بیان کرد که دلیل این‌که روش‌های طراحی به کمک رایانه تاکنون در روش اجزای محدود به صورت گسترده وارد نشده است مربوط به اختلاف زمانی، در پیدایش این دو نسبت به یکدیگر می‌باشد. آغاز پیدایش روش اجزای محدود در سال ۱۹۵۶ میلادی بوده است در حالی که شکل-گیری روش‌های طراحی به کمک کامپیوتر مربوط به بعدها در حدود سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ می‌باشد [۴].

در دهه‌های گذشته روش‌های بسیاری برای تحلیل مسایل مهندسی ارایه شده است که برخی از مشهورترین آنها روش تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته‌ای از روش‌ها با عنوان روش‌های بدون شبکه می‌باشند. اگر چه این‌ها در پی یکدیگر و با هدف توانمندتر نمودن و رفع مشکلات روش‌های پیش از خود ارایه شده‌اند، اما هنوز هم نمی‌توان روشی را یافت که بتوان آن‌را کامل و بدون نقص نامید. از جمله این نواقص و مشکلات می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسایل دارای هندسه پیچیده، ضعف در مدلسازی دقیق مسائل با تغییرات شدید در خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المان‌ها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، اشاره نمود.

برای غلبه بر این مشکلات و بهبود روش‌های موجود استفاده از توابع پایه اسپلاین به جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود در تحلیل مسائل مهندسی اولین بار در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ توسط کیگان^۱ و هولیک^۲ [۳-۱] معرفی شد. در سال ۲۰۰۵

^۲ Hollig

^۳ Non-Uniform Rational B-splines(NURBS)

^۴ Hughes

^۵ CAD(Computer Aided Design)

^۱ Kagan

مقاله پرداخته شده است. کمینه کردن تغییر مکان‌های عمودی لبه خارجی صفحه‌ی دایره‌ای شکل، با تکیه‌گاه گیردار در مرکز و بهینه‌سازی شکل یک مخزن بزرگ آب تحت بارگذاری هیدرواستاتیکی، دو مثال حل شده در این پژوهش می‌باشند. جهت آشنایی با فرضیات و روش بهینه‌سازی با استفاده از زیر برنامه‌های DOT مراجعه به مرجع [۳۲] پیشنهاد می‌شود.

۲- بی - اسپلاین و نریز

در این بخش به طور خلاصه و در حد نیاز، به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی - اسپلاین و نریز پرداخته می‌شود. برای آشنایی بیشتر، مراجعه به مراجع [۳۳] و [۳۴] پیشنهاد می‌شود.

نریزها از بی - اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی - اسپلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه) تعریف می‌شوند. نواحی مذکور دامنه‌ی مدلسازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گره‌ی^۲ در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به صورت زیر تشکیل می‌شود [۳۴]:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \quad \xi_{i+1} \geq \xi_i \quad i = 1, 2, \dots, n+p+1 \quad (1)$$

که در آن ξ_i ، 'i' امین گره، p مرتبه چند جمله‌ای و n تعداد توابع شکل تشکیل دهنده بی - اسپلاین به شمار می‌رود. انواع مختلفی از بردارهای گره‌ای وجود دارد، ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گره‌ای به نام بردارهای گره‌ای نامتناوب^۳ (یا باز^۴) استفاده می‌کنیم. این نوع بردارها به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (2)$$

در این صورت 'i' امین تابع پایه‌ای بی اسپلاین از درجه p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی - اسپلاین از درجه p به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴]:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (4)$$

$C(\xi)$ یک منحنی چند جمله‌ای قطعه‌ای^۵ است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی - اسپلاین هستند که روی بردار گره‌ای نامتناوبی به صورت رابطه (۲) با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می‌شوند. اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط

در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتریکی به سرعت در زمینه‌های مختلفی توسعه داده شده است که می‌توان به موارد کاربردی همچون مراجع [۵-۱۱]، کاربرد آن در دینامیک سیالات [۱۲-۱۷]، مکانیک سازه‌ها [۱۸-۲۶] و الکترومغناطیس [۲۷-۲۸] اشاره نمود. همچنین در این زمینه یک کتاب به چاپ رسیده است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد [۲۹].

مسائل بهینه‌سازی اولین بار در سال‌های بسیار دور مورد توجه اشخاصی مانند لاگرانژ و کوشی قرار گرفت [۳۰]. اما در دهه‌های گذشته با به کارگیری کامپیوترهای پر سرعت، مسائل بهینه‌سازی به طور گسترده‌ای مطرح شدند. یکی از اولین کارها در مورد بهینه‌سازی شکل توسط زینکوویچ انجام شد [۳۱]. او شکل اولیه سازه و مدل طراحی را به صورت یک مدل محاسباتی اجزای محدود تبدیل کرده و سپس با چشم پوشی کامل از مدل هندسی، تنها بر روی مدل محاسباتی کار می‌کرد. در این حالت مختصات نقاط اجزای محدود واقع بر روی مرزهای سازه به عنوان متغیرهای طراحی مساله بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شد. این کار مستلزم در نظر گرفتن تعداد زیادی متغیرهای طراحی بود که از اشکالات مهم این روش به شمار می‌آمد. یکی از نکاتی که در یک مسئله بهینه‌سازی اهمیت دارد کم بودن تعداد متغیرهای طراحی تا حد ممکن است. علاوه بر آن در مسائل بهینه‌سازی شکل چون موقعیت بهینه مرزهای سازه مورد توجه است، حفظ پیوستگی در مرزهای سازه ضروری است. در تحلیل ایزوژئومتریکی به دلیل استفاده از سطوح نریز برای تعریف شکل هندسی سازه این مشکلات وجود ندارد. در این روش تولید و کنترل شکل سازه با استفاده از تعداد محدودی از نقاط کنترلی فراهم می‌شود و تعداد متغیرهای طراحی مسئله کاهش می‌یابد. علاوه بر آن با انتخاب توابع پایه نریز با درجات بالا می‌توان پیوستگی لازم در مسائل مورد بررسی را فراهم نمود. همچنین با توجه به هزینه بالای شبکه بندی دامنه در مسائل بهینه‌سازی، از مهم‌ترین مزایای دیگر روش ایزوژئومتریکی در بهینه‌سازی شکل سازه می‌توان به حذف تولید پی‌درپی شبکه اجزای محدود در فرآیند بهینه‌سازی اشاره کرد.

در این پژوهش ضمن معرفی فرمول‌بندی روش ایزوژئومتریکی در تحلیل مسائل متقارن محوری، به بررسی عملکرد و کاربرد این روش در بهینه‌سازی شکل سازه‌های با تقارن محوری پرداخته شده است. بدین منظور برنامه نویسی به زبان فرترن در محیط نرم افزار Compaq Visual Fortran صورت گرفته است، که قادر به تحلیل سازه‌ها به روش ایزوژئومتریکی در حالت‌های تنش و کرنش مسطح و همچنین سازه‌ها با تقارن محوری می‌باشد. جهت بهینه‌سازی شکل از زیربرنامه‌های DOT که توسط وندریلات و همکارانشان [۳۲] تهیه شده است، استفاده می‌شود. در این راستا با اتصال این زیر برنامه‌ها به برنامه تحلیل ایزوژئومتریکی و با استفاده از روش برنامه ریزی درجه دوم پیاپی (SQP^۱) به بهینه‌سازی دو مثال ارائه شده در این

^۲Patch

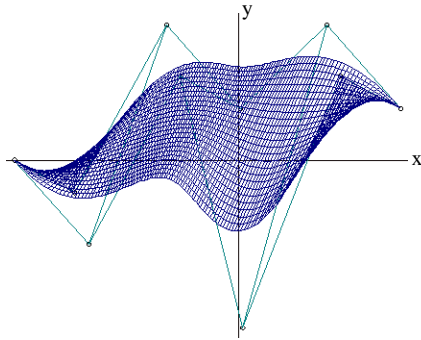
^۳Knot Vector

^۴Nonperiodic knot vector

^۵Open

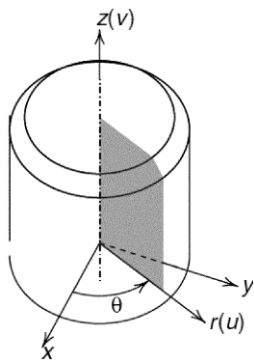
^۶Piecewise polynomial curve

^۱Sequential Quadratic Programming



شکل ۱- شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز مربوط به آن

کرنش‌های اعمالی به یک مخزن بزرگ تحت فشار، تحلیل جریان سیال در لوله‌ها، دیسک‌های توربین‌ها و پی‌های استوانه‌ای قرار گرفته بر روی توده‌های خاکی را نام برد. سازه‌های متقارن محوری سازه‌هایی هستند که از نظر هندسه، خواص مصالح، شرایط مرزی و بارگذاری در دستگاه مختصات استوانه‌ای نسبت به θ مستقل هستند (شکل ۲). وجود تقارن محوری تضمین می‌کند که هیچ نوع حرکت و تغییر مکانی در امتداد زاویه θ وجود ندارد. بنابراین مسئله سه‌بعدی در مختصات (r, θ, z) به مسئله دوبعدی در صفحه rz کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۲- تحلیل دوبعدی در حالت تقارن محوری

۴- فرمول بندی تحلیل ایزوژئومتریکی در مسائل

متقارن محوری

بطور کلی در روش ایزوژئومتریکی مقدار مجهول مسئله در حالت دوبعدی، (به طور مثال مولفه تغییر مکان جهت r) به عنوان یک سطح نربز، طوری تعیین می‌شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هر نقطه از دامنه بیان کننده مقدار مجهول مسئله در آن مکان باشد. در مسائل متقارن محوری اگر نقاط کنترلی را طوری انتخاب کنیم که مولفه‌های اول و دوم مختصات این نقاط (P_r, P_z) ، بتوانند هندسه مسئله را در صفحه rz تعریف کنند، در این صورت مولفه سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می‌کنیم که درونیایی بین این نقاط به وسیله توابع پایه‌ای نربز نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد. در حقیقت می‌توان رویه‌ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه rz نشان دهنده هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحه rz نشان دهنده

کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آنگاه می‌توان رابطه $m = n + p + 1$ را برای آن‌ها نوشت.

به طرز مشابهی سطوح بی-اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴]:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (5)$$

که در آن:

$$\Xi = \left\{ 0, \dots, 0, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, 1, \dots, 1 \right\}; \quad (6)$$

$$\mathcal{H} = \left\{ 0, \dots, 0, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, 1, \dots, 1 \right\}$$

به طوری که بردار گره‌ای Ξ دارای $r+1$ گره و \mathcal{H} دارای $s+1$ گره می‌باشد. یک منحنی نربز از درجه p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad a \leq \xi \leq b \quad (7)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره‌ای به صورت رابطه (۷) تعریف شده‌اند. در نهایت، یک سطح نربز که در جهت ξ از درجه p ، و در جهت η از درجه q باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴]:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (8)$$

در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه‌ی نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است. همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه‌ای بی-اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره‌ای به صورت رابطه (۶) تعریف شده‌اند. در رابطه (۸) اگر توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (9)$$

خواهیم داشت:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (10)$$

در شکل ۱ شبکه‌ی نقاط کنترلی و سطح نربز به دست آمده از آن با توابع پایه درجه دو در جهت x و y مشاهده می‌شود.

۳- سازه‌های دارای تقارن محوری

تحلیل اجسامی که تقارن محوری دارند و بار اعمالی به آنها نیز متقارن محوری است در بسیاری از پروژه‌های مهندسی مورد نیاز است. از کاربردهای این نوع تحلیل می‌توان بررسی تنش و

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (18)$$

که در آن \mathbf{u} بردار تغییر مکان‌ها، $\boldsymbol{\varepsilon}$ کرنش، و \mathbf{L} عملگر دیفرانسیل می‌باشد که برای مسائل متقارن محوری به صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (19)$$

با جایگذاری معادله (۱۳) در رابطه (۱۸) می‌توان کرنش‌ها را به صورت زیر تقریب زد:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{P}} \quad (20)$$

که با توجه به ماتریس دیفرانسیل گیری \mathbf{L} ماتریس \mathbf{B} برای مسائل تقارن محوری به صورت رابطه (۲۱) خواهد بود. همچنین در مسائل متقارن محوری می‌توان چهار مولفه تنش را به صورت رابطه (۲۲) برای بردار تنش‌ها در نظر گرفت.

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial r} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial z} & \dots \\ \frac{R(\xi, \eta)}{r} & 0 & \dots \\ \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial z} & \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial r} & \dots \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

با فرض وجود رفتار خطی کشسان، رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌ها، خطی و به صورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (23)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}_0$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ تنش‌ها و کرنش‌های اولیه و \mathbf{D} ماتریس خواص مصالح می‌باشد که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

یکی از روش‌هایی که در تحلیل‌های عددی برای هم ارزشی استاتیکی نیروهای گره‌ای با تنش‌های مرزی و بارهای گسترده و نهایتاً محاسبه ماتریس سختی، استفاده می‌شود، روش تغییر مکان مجازی می‌باشد. به این ترتیب که ابتدا یک تغییر مکان گره‌ای

تغییر مکان آن نقطه باشد. بنابراین اگر حرکت‌های شعاعی (در جهت r) و محوری (در جهت z) هر نقطه را به ترتیب با u و v نشان دهیم، می‌توان تغییر مکان هر نقطه در داخل زیر دامنه نربز (ناحیه) را به صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درون یابی کرد:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u i,j} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v i,j} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

در رابطه بالا $\mathbf{P}_{i,j}$ ها نمایشگر بردار مولفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز، $R_{i,j}$ توابع پایه‌ای نربز و m, n تعداد نقاط کنترلی جهت‌های r و z می‌باشند.

با توجه به خاصیت بازه تاثیر توابع نربز که بیان می‌کند برای هر ξ, η فقط تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می‌باشند [۳۴]، می‌توان برای کم کردن هزینه محاسبات کامپیوتر معادله (۱۱) را به صورت زیر تغییر داد. بدین منظور اگر فرض کنیم ξ, η به ترتیب در دهانه‌های گره‌ای η و ξ قرار دارند (یعنی $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ و $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1}]$)، و درجه توابع پایه‌ای در جهت بردار گره‌ای ξ, η ، p و در جهت بردار گره‌ای η, ξ ، q باشند، آنگاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)$ تابع پایه‌ای غیر صفر وجود خواهد داشت. در این صورت می‌توان معادله (۱۱) را به معادله (۱۲) کاهش داد. همچنین می‌توان معادله (۱۲) را به فرم ماتریسی معادله (۱۳) نوشت.

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u k,l} \\ \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v k,l} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{P}} \quad (13)$$

که در آن $\bar{\mathbf{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان‌ها به صورت زیر است:

$$\bar{\mathbf{u}}^{i,j} = [u_{i,j} \quad v_{i,j}]^T \quad (14)$$

همچنین $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه‌ای نسبی نربز و $\bar{\mathbf{P}}$ ماتریس ستونی مختصات نقاط کنترلی به صورت زیر هستند:

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i,j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i,j}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = [P_{u i-p,j-q} \quad P_{v i-p,j-q} \quad \dots \quad P_{u i-p,j} \quad P_{v i-p,j} \quad \dots \quad P_{u i,j} \quad P_{v i,j}]^T \quad (16)$$

در مسائل دارای تقارن محوری بردار کرنش‌ها دارای چهار مولفه مستقل از هم می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

با معلوم بودن تغییر مکان در نقاط داخل هر زیر دامنه می‌توان کرنش‌ها را در هر نقطه دلخواه بدست آورد. در این صورت مطابق رابطه (۱۸) خواهیم داشت:

مقارن محوری مستقل از θ می‌باشند می‌توان این انتگرال را به صورت دو بعدی زیر تبدیل کرد:

$$\mathbf{K}_{patch} = 2\pi \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz \quad (35)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، برای محاسبه ماتریس سختی احتیاج به محاسبه ماتریس \mathbf{B} است که در آن نیاز به محاسبه مشتق $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r}$ و $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}$ می‌باشد. در صورتی که \mathbf{R} ، r و z هر سه تابعی از مختصات فضای پارامتری نریز یعنی ξ و η می‌باشند. به همین دلیل برای محاسبه این مشتقات ژاکوبین زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (36)$$

با این تعریف داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

که در آن $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi}$ و $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}$ مشتقات جزئی توابع پایه‌ای نریز می‌باشند. همچنین با توجه به این‌که همه پارامترهای انتگرال ماتریس سختی، در دستگاه مختصات فضای پارامتری نریز بیان شده است، ساده‌ترین راه برای محاسبه انتگرال سختی استفاده از همین دستگاه مختصات می‌باشد. این عمل باعث ایجاد ژاکوبین $\det \mathbf{J}_1$ در رابطه انتگرال ماتریس سختی می‌شود.

$$drdz = \det \mathbf{J}_1 d\xi d\eta \Rightarrow \mathbf{K}_{patch} = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) r \det \mathbf{J}_1 d\xi d\eta \quad (38)$$

برای محاسبه انتگرال فوق می‌توان از روش گاوس استفاده کرد [۳۵]. نقاط گاوس نقاطی از پیش تعیین شده هستند که برای المان‌های مختلف پایه محل و وزن آن‌ها محاسبه شده است. لازم به یادآوری است که در تحلیل ایزوژئومتریک فواصل بین گره‌ها مشابه المان در روش اجزای محدود در نظر گرفته می‌شود. برای این‌که بتوانیم از این نقاط ارائه شده بهره ببریم، بایستی از یک نگاهت استفاده کنیم، به گونه‌ای که این نگاهت مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه سرنديپیتی (r, s) المان Ω را به دستگاه مختصات نرمال زیردامنه نریز (ξ, η) منتقل می‌کند:

$$\xi = \frac{1}{2} [(\xi_{i+1} - \xi_i) r + (\xi_{i+1} + \xi_i)] \quad (39)$$

$$\eta = \frac{1}{2} [(\eta_{i+1} - \eta_i) s + (\eta_{i+1} + \eta_i)]$$

در روابط فوق r, s مؤلفه‌های مختصات نقاط در دستگاه سرنديپیتی المان و ξ, η مؤلفه‌های مختصات در دستگاه نرمال زیر دامنه نریز می‌باشد. این نگاهت در انتگرال گیری باعث ایجاد ژاکوبین به صورت زیر می‌شود:

فرضی (مجازی) را اعمال و کارهای داخلی و خارجی را که نیروهای مختلف در اثنای این تغییر مکان انجام می‌دهند، مساوی فرض می‌کنیم [۳۵].

از همین روش می‌توان برای محاسبه ماتریس ضرایب در ایزوژئومتریک نیز استفاده کرد؛ به طوری که اگر در یک زیر دامنه به حجم V که دارای مرزهای Γ می‌باشد، نیروهای کالبدی \mathbf{b}^1 و نیروهای سطحی \mathbf{t}^2 وجود داشته باشند، می‌توان نوشت:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (25)$$

با استفاده از معادلات (۱۳) و (۲۰) می‌توان نوشت:

$$\delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{R}} \delta \bar{\mathbf{P}} \quad (26)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \bar{\mathbf{P}} \quad (27)$$

حال با جایگذاری معادلات فوق در معادله (۲۵) داریم:

$$\int_V \delta \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma} \delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (28)$$

با حذف $\delta \bar{\mathbf{P}}$ و استفاده از رابطه (۲۳) خواهیم داشت:

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV - \int_V \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (29)$$

از طرفی با جایگذاری $\boldsymbol{\varepsilon}$ از معادله (۲۰) خواهیم داشت:

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}} dV - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV - \int_V \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (30)$$

در نهایت می‌توان رابطه (۳۰) را با فرض عدم وجود تنش‌ها و کرنش‌های اولیه به صورت رابطه (۳۱) نوشت.

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (31)$$

که در آن \mathbf{K} ماتریس ضرایب (سختی)، \mathbf{U} مجهولات مسئله (مختصه سوم نقاط کنترلی) و \mathbf{F} نیروهای خارجی وارد بر زیر دامنه می‌باشند، که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (32)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (33)$$

۴-۱- محاسبه انتگرال ماتریس سختی در مسائل مقارن محوری

محاسبه انتگرال ماتریس سختی در مسائل مقارن محوری با استفاده از المان حجمی نریز امکان پذیر است. این المان از دوران یک المان سطحی نریز حول محور تقارن ایجاد می‌شود که به صورت یک حلقه با سطح مقطع چهار ضلعی می‌باشد. بنابراین می‌توان انتگرال ماتریس سختی را برای هر زیر دامنه نریز به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{K}_{patch} = \int \int \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz d\theta \quad (34)$$

بایستی توجه داشت که جزء حجم در مختصات استوانه‌ای به صورت $dv = r dr dz d\theta$ می‌باشد. همچنین با توجه به این نکته که مسائل

¹Body forces

²Traction forces

نیروهای وارده را به شکلی امن و اقتصادی تحمل کند. بهینه سازی ابزاری ارزشمند است که می‌تواند برای ایجاد یک طرح جدید و موثر، مورد استفاده طراحان قرار بگیرد. هدف از بهینه‌سازی سازه‌ها، تولید سازه‌هایی است که با وجود وزن حداقل، از بیشترین مقاومت و سختی در برابر نیروهای وارده برخوردار هستند. این فرآیند در یک فضای مشخص به نام دامنه طراحی^۱ و تحت اثر شرایط مشخص بارگذاری و تکیه گاهی صورت می‌پذیرد. در بهینه سازی شکل، هندسه اولیه، بارگذاری و قیود تکیه گاهی از قبل معلوم بوده و سازه تحلیل می‌شود. سپس با استخدام یک روش تکراری و محاسبه حساسیت شکل مساله به تغییر پارامترهای طراحی، از جواب اولیه به یک جواب بهینه می‌رسیم. در سالیان اخیر روشهای متعددی برای بهینه کردن شکل سازه‌ها ابداع شده است. یکی از روش‌های پرکاربرد روش تغییرات مرزی^۲ است. در این روش از اسپلاین‌ها برای مدل کردن مرزهای سازه مورد نظر استفاده می‌کنند و مختصات نقاط کنترلی اسپلاین به عنوان متغیر طراحی مساله بهینه سازی در نظر گرفته می‌شود. در حالت کلی می‌توان مساله بهینه سازی شکل را به صورت زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned} \min \text{ or } \max f(x) \\ g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \\ h_k(x) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, l \\ x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_{dv} \end{aligned} \quad (44)$$

که x بردار متغیرهای طراحی، $f(x)$ تابع هدف که مینیمم یا ماکزیمم می‌شود، $g(x)$ و $h(x)$ به ترتیب توابع قیود نامساوی و مساوی و x_i^l و x_i^u حدود پایین و بالای متغیرهای طراحی x_i می‌باشند.

الگوریتم بهینه سازی شکل از دو مرحله اساسی زیر تشکیل شده است [۳۶]:

- ۱- محاسبه مقادیر توابع هدف و قیود و گرادبان‌های آن‌ها نسبت به همه متغیرهای طراحی.
- ۲- محاسبه تغییرات متغیرهای طراحی جهت حرکت به سوی نقطه بهینه.

مراحل ۱ و ۲ تا زمانی که یک مینیمم محلی برای تابع هدف پیدا شوند تکرار می‌شوند. روند بهینه سازی با متغیر پیشنهادی طراحی x_i^0 شروع می‌شود، که به صورت ورودی به برنامه معرفی شده است.

سپس طراحی به کمک تغییر در متغیر طراحی x_i به روز می‌شود:

$$x_i^q = x_i^{q-1} + \alpha r^q \quad (45)$$

در رابطه (۴۵)، q شماره تکرارها و r نشان دهنده بردار جهت یابی است. جهت r عموماً جهتی امکان پذیر و به سمت کمینه یا بیشینه کردن تابع هدف $f(x)$ است. کمیت α ، پارامتر جابجایی برای جهت r است [۳۷]. روش حل به خصوصیات توابع هدف و

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad d\xi d\eta = \det \mathbf{J}_2 dr ds \quad (40)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i), & \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_i) \end{aligned} \quad (41)$$

بنابراین می‌توان رابطه ماتریس سختی را به فرم نهایی زیر در دستگاه مختصات سرندیپیتی المان‌ها نوشت:

$$\mathbf{K}_{patch} = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(r,s) \mathbf{D} \mathbf{B}(r,s) r \det \mathbf{J}_1 \det \mathbf{J}_2 dr ds \quad (42)$$

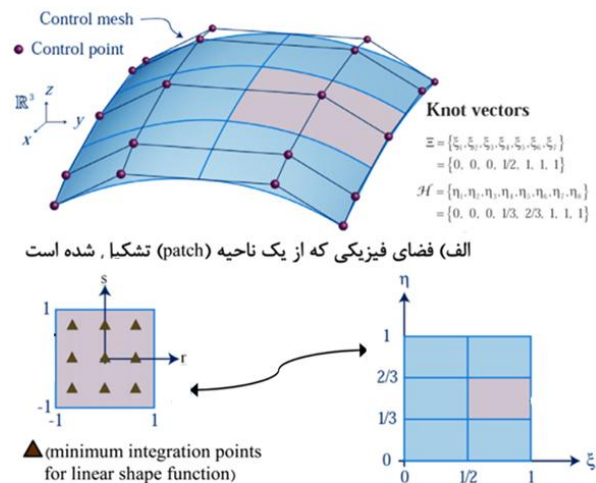
و در نهایت انتگرال ماتریس سختی به روش گاوس به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{K}_{patch} = 2\pi \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mathbf{B}^T(r,s) \mathbf{D} \mathbf{B}(r,s) r \det \mathbf{J}_1 \det \mathbf{J}_2 w_i w_j \quad (43)$$

که در آن m و n تعداد نقاط گاوس در جهت r و s در هر المان و w_i, w_j وزن نقاط گاوس می‌باشد.

لازم به ذکر است که در تحلیل ایزوژئومتریک حداقل تعداد نقاط مورد نیاز جهت انتگرال گیری عددی به روش گاوس با توجه به مرتبه توابع شکل از مورد مشابه آن در اجزای محدود بیشتر است [۱۱].

در شکل ۳ فضای فیزیکی و فضای پارامتری مربوط به آن و همچنین فضای انتگرال گیری عددی یک المان نرئز ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود حداقل تعداد نقاط انتگرال گیری گاوس برای توابع شکل مرتبه دو در هر جهت سه نقطه می‌باشد که این تعداد در روش اجزای محدود دو نقطه در هر جهت است.



شکل ۳ - نقاط انتگرال گیری گاوس در روش ایزوژئومتریک

۵- بهینه‌سازی شکل سازه‌ها

در طراحی سازه‌ها، بدست آوردن یک طرح بندی مناسب برای سازه امری لازم است. این طرح بندی بایستی به گونه‌ای باشد تا بتواند

¹Design Domain

²Boundary Variation Method

تقریبی خطی از مسئله اصلی می باشد. می توان نشان داد که بردار r به دست آمده از حل زیر مسئله ها، که در x تعریف می شود، برداری است که جهت آن به صورت تقریبی به سمت نقطه کمینه یا بیشینه محلی تابع هدف می باشد، مخصوصاً زمانی که x^0 نزدیک به نقطه اکسترمم باشد. با مشخص شدن جهت r ، یک مسئله جهت یابی یک بعدی برای به روز کردن متغیرها حل می شود و از یک تابع پنالتی خارجی برای نگه داشتن جهت r در محدوده مجاز استفاده می شود [۳۷-۴۱]. به طور خلاصه مراحل کار در این روش به صورت زیر است:

- ۱- تعیین یک جواب اولیه برای x_i^0 .
- ۲- یک تقریب اولیه برای ماتریس هسین از قسمت درجه دو تابع هدف.
- ۳- حل یک زیر مسئله جهت یابی برای r با حل زیر مسئله های درجه دو.
- ۴- انجام یک جستجوی یک بعدی برای کمینه کردن تابع پنالتی خارجی.
- ۵- به روز کردن جواب ها.
- ۶- کنترل همگرایی؛ اگر جواب کمینه محلی پیدا شد، متوقف می شود و اگر نه به مرحله دوم بر می گردد.

۶- ارائه مثال ها

در این بخش ابتدا به منظور بررسی نحوه عملکرد برنامه در تحلیل مسائل متقارن محوری با استفاده از روش ایزوژئومتریک به ارائه نتایج بدست آمده از تحلیل لوله بلند جدار ضخیم، تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت و مقایسه آن با حل دقیق پرداخته می شود. در مرحله بعد به منظور بررسی کارایی برنامه در بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری به طرح و حل دو مثال می پردازیم. مبنیم کردن تغییر مکان های عمودی لبه خارجی صفحه دایره ای شکل با تکیه گاه گیردار در مرکز و بهینه سازی شکل یک مخزن بزرگ آب تحت بارگذاری هیدرواستاتیکی دو مثال ارائه شده در این بخش می باشند. همان طور که بیان شد جهت حل مسئله بهینه سازی شکل در این پژوهش از زیربرنامه های DOT استفاده شده است. برای استفاده از این زیربرنامه ها ابتدا بایستی زیربرنامه های دیگری نوشته شود که قادر به محاسبه مقدار تابع هدف، مقدار قیود و بهنگام سازی مقدار متغیرهای طراحی باشد. سپس به وسیله یک برنامه اصلی ارتباط بین زیربرنامه های ذکر شده، زیربرنامه های DOT و همچنین برنامه تحلیل ایزوژئومتریکی برقرار می شود.

۶-۱- لوله بلند جدار ضخیم

یکی از مسائل با شرایط تقارن محوری که معمولاً برای کنترل صحت تحلیل های عددی مورد بررسی قرار می گیرد، لوله بلند جدار ضخیم، تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت می باشد. این مسئله شامل یک لوله بلند به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2

توابع قید بستگی دارد. بر این اساس دسته بندی زیر برای روش های حل معرفی می شود.

الف- برنامه ریزی خطی^۱: زمانی که هم توابع هدف و هم توابع قید قید به صورت خطی نسبت به متغیر طراحی x باشند یا این که به صورت خطی در نظر گرفته شده باشند.

ب- برنامه ریزی درجه دو^۲: زمانی که توابع هدف درجه دو هستند یا درجه دو فرض می شوند و توابع قید خطی هستند یا به صورت خطی در نظر گرفته شده باشند.

ج- برنامه ریزی غیرخطی^۳: زمانی که هم توابع هدف و هم توابع قید غیر خطی باشند.

روش بهینه سازی SQP که در این پژوهش جهت بهینه سازی شکل مورد استفاده قرار گرفته است، یک روش برنامه ریزی غیر-خطی به شمار می رود. در این روش مسئله بهینه سازی غیرخطی به وسیله زیرمسئله های درجه دو، در یک نقطه تقریب زده می شود و به صورت ترتیبی حل می شود [۳۷]. در ادامه به بیان خلاصه ای از این روش پرداخته شده است.

۵-۱- تشریح روش SQP در بهینه سازی شکل سازه ها

روش برنامه ریزی درجه دوم پیپای (SQP)، در سال ۱۹۶۳ میلادی توسط ویلسون [۳۸] ارائه شد. روش مذکور، در سال های ۱۹۷۷ و ۱۹۷۸ میلادی توسط هان و پاول [۳۹-۴۰] بهبود یافت. شیوه برنامه ریزی درجه دوم پیپای، با استفاده از دنباله تیلور تابع هدف را به صورت رابطه درجه دوم و محدودیت ها را به صورت خطی به کار می برد. با در نظرگیری بسط درجه دو سری تیلور برای تابع $F(x)$ حول نقطه x^0 داریم:

$$F(x) = F(x^0) + \nabla F(x^0)^T \delta x + \frac{1}{2} \delta x^T H(x^0) \delta x \quad (46)$$

که در آن $\delta x = x - x^0$ و $\nabla F(x^0)$ بردار گرادیان تابع F در نقطه x^0 است. ∇F_i به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (47)$$

همچنین ماتریس هسین، $H(x^0)$ با رابطه زیر تعریف می شود:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \quad (48)$$

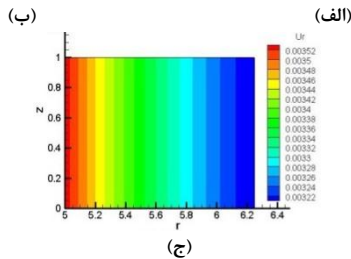
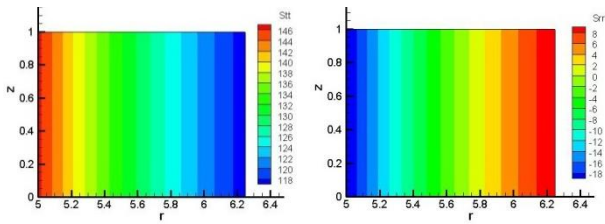
رابطه فوق معمولاً تقریب خوبی برای تابع $F(x)$ به دست می دهد، مخصوصاً زمانی که x^0 نزدیک به نقطه بهینه باشد.

در الگوریتم SQP یک روال ترتیبی برای حل زیر مسئله های درجه دو وجود دارد. توابع هدف این زیر مسئله ها همان ضرایب قسمت خطی گرادیان تابع هدف مسئله بهینه سازی اصلی است؛ در حالی که برای قسمت درجه دو ضرایب لاگرانژ تابع هدف مسئله اصلی از تقریب زنی هسین استفاده می شود. قیود زیر مسئله ها،

¹Linear Programming

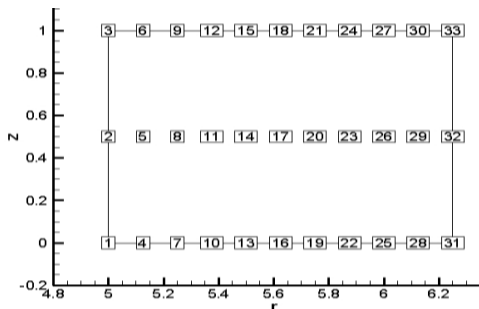
²Quadratic Programming

³Nonlinear Programming



شکل ۵- کانتورهای (الف) تنش‌های شعاعی

(ب) تنش‌های مماسی (ج) تغییر مکان شعاعی بدست آمده با استفاده از حل دقیق لوله جدار ضخیم

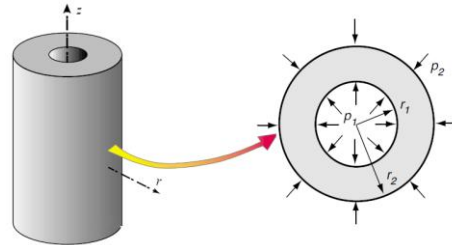


شکل ۶- نحوه قرار گیری نقاط کنترلی در مدل هندسی لوله جدار ضخیم

در شکل ۷ کانتورهای تغییر مکان و تنش‌های بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی نشان داده شده است. درصد خطای تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریکی به ازای تغییرات در جهت شعاعی در شکل ۸ ارائه شده است. با توجه به مستقل بودن این تغییرات از مختصات z ، این نمودارها برای قسمت پایینی مدل (در $z=0$) رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود درصد خطای تغییر مکانهای شعاعی بسیار کم می‌باشد؛ و جواب‌های بدست آمده بسیار نزدیک به جواب دقیق می‌باشد. اما نرم خطای تنش‌ها در نواحی نزدیک به مرزها مقداری افزایش یافته است که به علت وجود تمرکز تنش ناشی از اعمال شرایط مرزی می‌باشد.

در شکل ۹ نیز جهت نمایش بهتری از مقایسه نتایج تحلیل ایزوژئومتریکی و حل دقیق به ترسیم نمودارهای تغییر مکان و تنش‌های بدست آمده از تحلیل ایزوژئومترک و حل دقیق پرداخته شده است.

می‌باشد (شکل ۴). در این مسئله علاوه بر داشتن شرایط تقارن محوری، به دلیل بلند بودن طول لوله، کرنش در جهت محور z ها نیز معلوم و برابر صفر می‌باشد. تنش‌های دقیق این مسئله به صورت روابط (۴۹) تا (۵۱) و تغییر مکان شعاعی آن به صورت رابطه (۵۲) می‌باشد [۴۲].



شکل ۴- لوله جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (49)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (50)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (51)$$

$$u_r = \frac{1+\nu}{E} \left[\frac{r_1^2 r_2^2 (p_2 - p_1)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} + (1-2\nu) \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r \right] \quad (52)$$

در روابط فوق E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون، r_1 شعاع داخلی، r_2 شعاع خارجی، p_1 فشار وارده بر سطح داخلی لوله و p_2 فشار وارده بر سطح خارجی لوله می‌باشد.

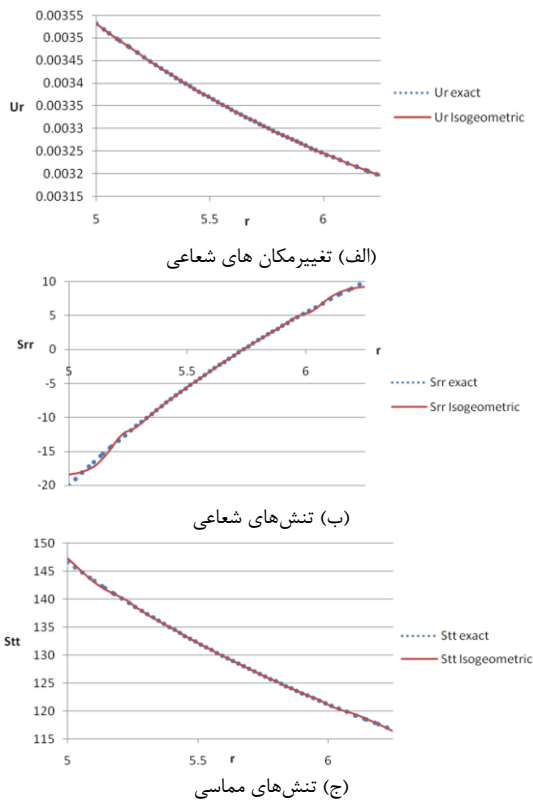
حل دقیق این مسئله با فرض به کار بردن مصالحی با $E = 2 \times 10^5$ و $\nu = 0.3$ انجام شده است. هم‌چنین شعاع داخلی $r_1 = 5$ ، شعاع خارجی $r_2 = 6.25$ ، فشار داخلی $p_1 = 20$ و فشار خارجی $p_2 = 10$ می‌باشد. کانتورهای تغییر مکان شعاعی و تنش‌های شعاعی و مماسی ایجاد شده در جسم که با استفاده از حل دقیق بدست آمده‌اند، در شکل ۵ نشان داده شده است.

برای مدل‌سازی این مسئله در روش ایزوژئومتریکی از تکنیک نریز استفاده شده است. مدل تحلیلی این مسئله به صورت یک مستطیل با عرض $1/25$ و ارتفاع واحد در نظر گرفته شده است. جهت تشکیل این مستطیل از ۳۳ نقطه کنترلی استفاده شده، بطوری که در جهت شعاعی از ۱۱ نقطه کنترلی و در جهت z از ۳ نقطه کنترلی بهره برده شده است (شکل ۶).

در جهت بردار گره ای ξ (جهت شعاعی)، از توابع پایه ای نریز درجه ۳ و در جهت بردار گره ای η (جهت z) از توابع پایه ای نریز درجه ۲ استفاده شده است و مختصات بردارهای گره ای نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\xi = \{0, 0, 0, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1, 1, 1, 1\}$$

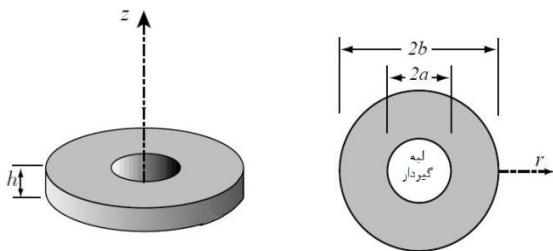
$$\eta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$



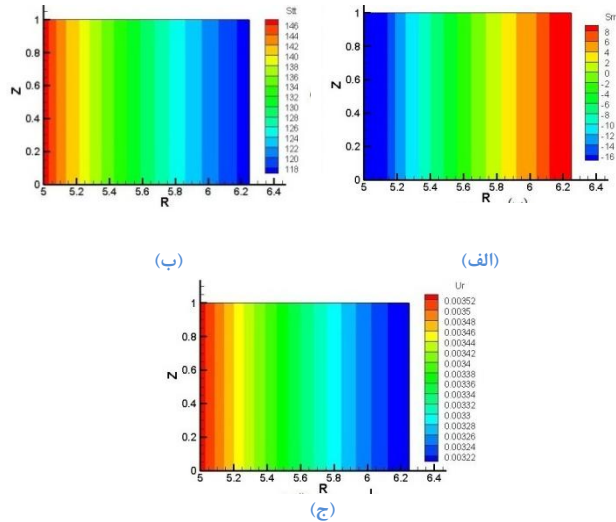
شکل ۹- مقایسه تغییر مکان ها و تنش های بدست آمده از حل دقیق و تحلیل ایزوژئومتریک

مدل اولیه این مسئله با توجه به دارا بودن تقارن محوری، به شکل مستطیلی به طول ۳۰ و ارتفاع ۶ می باشد که دامنه تغییرات ارتفاع در فرآیند بهینه سازی حداکثر ۱۰ و حداقل ۱/۵ در نظر گرفته شده است. برای مدل سازی ایزوژئومتریک این جسم از ۱۸ نقطه کنترلی استفاده شده، بطوری که تعداد نقاط کنترلی در جهت شعاعی برابر ۶ و در جهت ارتفاعی برابر ۳ می باشد (شکل ۱۱).

متغیرهای طراحی در این مسئله موقعیت نقاط کنترلی ردیف بالایی شکل می باشد که این نقاط کنترلی می توانند در جهت z حرکت کنند. موقعیت نقاط کنترلی ردیف پایین ثابت در نظر گرفته شده است. همچنین همان طور که در شکل ۱۱ مشاهده می شود، اگر نقاط کنترلی ردیف بالایی که به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده به سمت پایین حرکت کنند این احتمال وجود دارد که از نقاط کنترلی ردیف میانی عبور کنند؛ به همین دلیل نقاط کنترلی میانی به عنوان متغیرهای طراحی وابسته در نظر گرفته شده است.



شکل ۱۰- شکل اولیه صفحه دایره ای شکل، دارای تکیه گاه گیردار در لبه داخلی



شکل ۷- کانتورهای (الف) تنش های شعاعی، (ب) تنش های مماسی و (ج) تغییر مکان شعاعی بدست آمده با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریک لوله جدار ضخیم

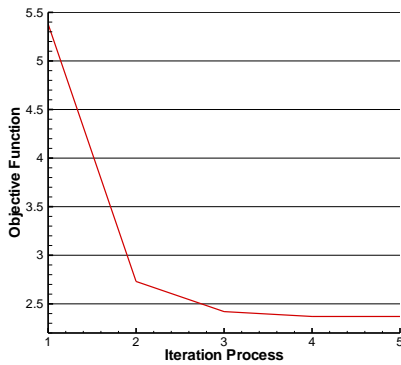


شکل ۸- درصد خطای نتایج تحلیل ایزوژئومتریک برای لوله جدار ضخیم

۶-۲- صفحه دایره ای شکل دارای تکیه گاه گیردار در مرکز

اولین مثالی که جهت بررسی عملکرد روش ایزوژئومتریک در بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری مورد توجه قرار می گیرد، صفحه ای دایره ای شکل به شعاع خارجی ۴۰ و شعاع داخلی ۱۰ می باشد که در لبه داخلی به وسیله تکیه گاه گیردار مقید شده است (شکل ۱۰).

ارتفاع این صفحه در حالت اولیه برابر ۷ در نظر گرفته شده؛ همچنین این صفحه تحت تاثیر بار خطی عمودی در لبه خارجی خود به شدت $F = 10$ بر واحد طول می باشد. تابع هدف در این مسئله بهینه سازی مینیمم کردن تغییر مکان های عمودی لبه خارجی جسم یعنی محل اعمال نیرو می باشد. با این قید که سطح مقطع استفاده شده ۷۰٪ حداکثر سطح مقطع تعریف شده یعنی ۳۰۰ باشد.



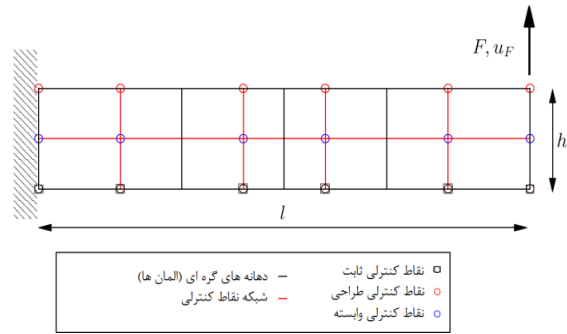
شکل ۱۵- نمودار همگرایی بهینه سازی شکل صفحه دایره ای

روش‌های نخستین مبتنی بر اجزای محدود تعداد متغیر طراحی برابر با تعداد نقاط گره‌ای قرار گرفته بر روی مرزها می‌باشد. همچنین در مقایسه با روش بهینه‌سازی با استفاده از تغییرات مرزی و اجزای محدود که در آن‌ها برای کم کردن متغیرهای طراحی مرزهای سازه به وسیله منحنی‌های بی-اسپلاین تعریف می‌شوند، این مزیت در استفاده از تحلیل ایزوژئومتریکی نسبت به روش تغییرات مرزی وجود دارد که در هر تکرار نیازی به المان بندی دوباره نداریم. نیاز به شبکه اجزای محدود به هنگام شده در هر تکرار باعث افزایش هزینه‌های محاسباتی و همچنین زمان محاسبه می‌شود. همانگونه که از نمودار شکل ۱۵ قابل مشاهده است، در شکل بهینه تغییر مکان نقاط واقع بر لبه به کمتر از نصف تقلیل یافته است.

۳-۶- مخزن بزرگ آب

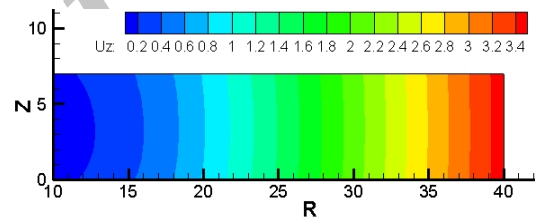
مثال بعدی بهینه‌سازی شکل یک مخزن بزرگ آب به شکل متقارن محوری تحت بارگذاری هیدرواستاتیکی می‌باشد. شکل این مخزن به صورت استوانه است که در قسمت پایینی دارای تکیه‌گاه‌های گیردار می‌باشد. شعاع داخلی این مخزن ۵/۸ و شعاع خارجی آن ۶/۴ و ارتفاع این مخزن برابر ۱۲ می‌باشد. این مخزن تحت فشار هیدرواستاتیکی آب در دیواره داخلی خود قرار دارد که این فشار در بالاترین نقطه برابر صفر و در پایین مخزن برابر ρgh است (شکل ۱۶). برای مدل سازی این مخزن در ایزوژئومتریکی از یک زیر دامنه نرئز که دارای ۷۲ نقطه کنترلی می‌باشد، استفاده شده است. تعداد نقاط کنترلی در جهت شعاعی برابر ۶ و در جهت محور z برابر ۱۲ در نظر گرفته شده است. درجه توابع پایه ای نرئز در هر دو جهت برابر ۳ است و در نتیجه تعداد مولفه‌های بردار گره ای در جهت شعاعی برابر ۱۰ و در جهت محور z برابر ۱۶ می‌باشد. کانتورهای تغییر مکان‌های شعاعی و عمودی طرح اولیه سازه در شکل ۱۷ آورده شده است.

تابع هدف در این مسئله مینیمم کردن حداکثر تغییر مکان شعاعی می‌باشد و قید در نظر گرفته شده در این مسئله حجم مصالح استفاده شده می‌باشد؛ به طوری که حداکثر حجم مصالح استفاده شده ناپستی بیشتر از حجم اولیه مصالح باشد.

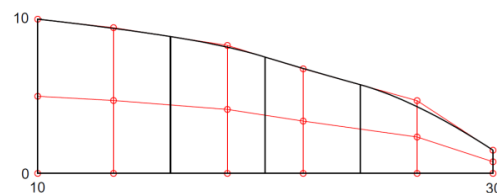


شکل ۱۱- مدل‌سازی صفحه دایره ای شکل دارای تکیه گاه گیردار در لبه داخلی با استفاده از روش ایزوژئومتریکی

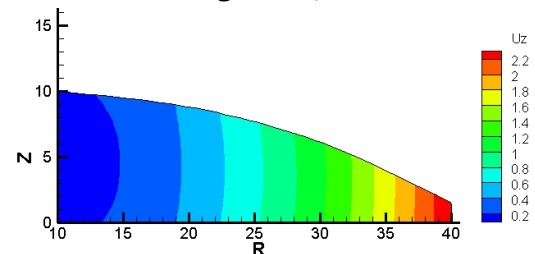
این بدان معنی است که موقعیت این نقاط کنترلی به نوعی تنظیم شود که همواره نقاط میانی بین نقاط کنترلی ردیف بالا و پایین واقع می‌شوند. بهینه‌سازی این مسئله با استفاده از روش SQP انجام شده است. در شکل‌های ۱۲ تا ۱۵ طرح اولیه و نتیجه نهایی بدست آمده از حل این مثال به همراه نمودار همگرایی نشان داده شده است.



شکل ۱۲- کانتور تغییر مکان عمودی صفحه دایره ای شکل برای طرح اولیه



شکل ۱۳- طرح بهینه صفحه دایره ای شکل دارای تکیه گاه گیردار در لبه داخلی

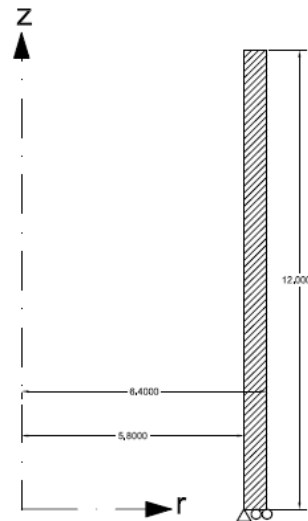


شکل ۱۴- کانتور تغییر مکان‌های عمودی صفحه دایره ای شکل بهینه شده

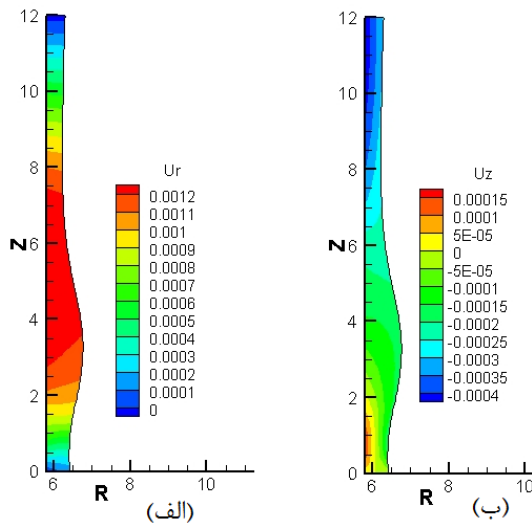
همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در این مسئله با استفاده از تعداد بسیار کمی متغیر طراحی در مقایسه با روش‌های بهینه‌سازی مبتنی بر اجزای محدود جواب بهینه حاصل شده است، به طوری که در

۷- نتیجه گیری

معرفی فرمول بندی روش ایزوژئومتریکی در تحلیل مسائل متقارن محوری و بررسی عملکرد و کاربرد این روش در تحلیل و بهینه سازی شکل سازه های با تقارن محوری، در این مقاله مورد بحث قرار گرفته است. نتایج بدست آمده از این پژوهش نشان می دهند که استفاده از روش ایزوژئومتریکی در بهینه سازی شکل سازه ها باعث کاهش قابل ملاحظه تعداد متغیرهای طراحی در مقایسه با روش های بهینه سازی مبتنی بر اجزای محدود شده است. به دلیل حذف فرآیند تولید شبکه در هر تکرار فرآیند بهینه سازی شکل در این روش، هزینه های محاسباتی نیز به طور چشمگیری کاهش یافته است. همچنین حل مسائل بهینه سازی با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریکی به دلیل تعریف هندسه توسط توابع نرژ در عمل باعث ایجاد جوابی بهینه با مرزهای هموارتری شده است.

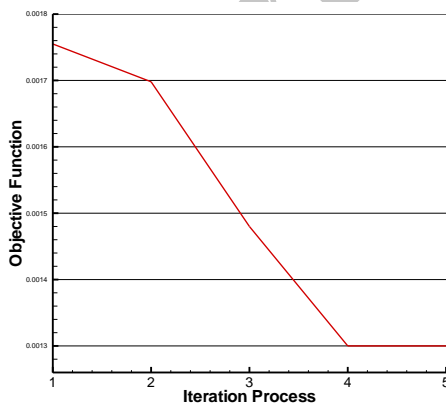


شکل ۱۶- طرح اولیه مخزن استوانه ای شکل

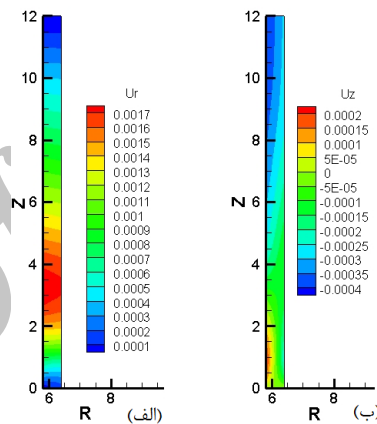


شکل ۱۸- کانتورهای تغییر مکان های شکل بهینه سازه، (الف)

کانتور تغییر مکان های عمودی (ب) کانتور تغییر مکان های شعاعی، (ب)



شکل ۱۹- نمودار همگرایی بهینه سازی شکل مخزن استوانه ای



شکل ۱۷- (الف) کانتورهای تغییر مکان های شعاعی،

(ب) کانتورهای تغییر مکان های عمودی

موقعیت افقی نقاط کنترلی قرار گرفته در روی مرز خارجی سازه به عنوان متغیرهای طراحی انتخاب شده است و نقاط کنترلی مرز داخلی ثابت فرض شده است. همچنین نقاط کنترلی واقع بین مرزهای داخلی و خارجی به عنوان متغیرهای طراحی وابسته در نظر گرفته شده اند. مقدار اولیه متغیرهای طراحی برابر ۶/۴ است و دامنه تغییرات متغیرهای طراحی در بازه ۶ تا ۷ قرار دارد.

نتایج حل این مسئله به روش SQP به همراه نمودار همگرایی در شکل های ۱۸ و ۱۹ نشان داده شده است. همان طور که از این نمودارها قابل مشاهده است، در شکل بهینه با استفاده از همان مقدار مصالح تغییر مکان جانبی جدار مخزن حدود ۳۰٪ تقلیل یافته است.

- [5] Auricchio F, Beirao da Veiga L, Hughes TJR, Reali A, Sangalli G (2010) Isogeometric collocation methods. *Math. Models Methods, Appl. Sci.* 20(11): 2075–2107.
- [6] Bazilevs Y, Beirao da Veiga L, Cottrell JA, Hughes TJR, Sangalli G (2006) Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 16(7): 1031–1090.
- [7] Cottrell JA, Hughes TJR, Reali A (2007) Studies of refinement and continuity in isogeometric analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196: 4160–4183.
- [8] Drfel M, Jüttler B, Simeon B (2010) Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199(5–8): 264–275.
- [9] Evans JA, Bazilevs Y, Babuška I, Hughes TJR (2009) n-width, sup-infs, and optimality ratios for the k-version of the isogeometric finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198: 1726–1741.
- [10] Hughes TJR, Reali A, Sangalli G (2008) Duality and unified analysis of discrete approximations in structural dynamics and wave propagation: comparison of p-method finite elements with k-method NURBS. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197(49–50): 4104–4124.
- [11] Hughes TJR, Reali A, Sangalli G (2010) Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199(5–8): 301–313.
- [12] Bazilevs Y, Calo VM, Cottrell JA, Hughes TJR, Reali A, Scovazzi G (2007) Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197(1–4): 173–201.
- [13] Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJR, Zhang Y (2008) Isogeometric fluid–structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Comput. Mech.* 43(1): 3–37.
- [14] Bazilevs Y, Calo VM, Zhang Y, Hughes TJR (2006) Isogeometric fluid–structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Comput. Mech.* 38: 310–322.
- [15] Bazilevs Y, Hughes TJR (2008) NURBS-based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components. *Comput. Mech.* 43: 143–150.
- [16] Buffa A, deFalco C, Sangalli G (2010) Isogeometric analysis: new stable elements for the stokes equation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2000, 00:1–6.
- [17] Gmez H, Calo V, Bazilevs Y, Hughes TJR (2008) Isogeometric analysis of the Cahn–Hilliard phase–field model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197(49–50): 4333–4352.
- [18] Auricchio F, Beirao da Veiga L, Lovadina C, Reali A (2010) The importance of the exact satisfaction of the incompressibility constraint in nonlinear elasticity: mixed FEMs versus NURBS-based approximations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199(5–8): 314–323.
- [19] Auricchio F, Beirao da Veiga L, Buffa A, Lovadina C, Reali A, Sangalli G (2007) A fully “locking-free” isogeometric approach for plane linear elasticity problems: a stream function formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197(1–4): 160–172.
- [20] Benson DJ, Bazilevs Y, Hsu MC, Hughes TJR (2010) Isogeometric shell analysis: the Reissner–Mindlin shell.

۸- فهرست علائم

Ξ	بردار گرهي در فضای پارامتری ξ
\mathcal{H}	بردار گرهي در فضای پارامتری η
$N_{i,0}(\xi)$	آمین تابع پایه ای بی اسپلاین از درجه صفر
$N_{i,p}(\xi)$	آمین تابع پایه ای بی اسپلاین از درجه P
$C(\xi)$	منحنی تعریف شده توسط توابع پایه بی-اسپلاین و یا نریز
$S(\xi, \eta)$	سطح تعریف شده توسط توابع پایه بی-اسپلاین و یا نریز
$R_{i,j}(\xi, \eta)$	توابع پایه ای نسبی قطعه‌ای نریز
\hat{u}	بردار تغییر مکان هر نقطه در داخل زیر دامنه نریز
\bar{R}	ماتریس توابع پایه ای نسبی نریز
\bar{P}	ماتریس ستونی مختصات نقاط کنترلی سطح نریز
ε	بردار کرنش در مسائل متقارن محوری
L	عملگر دیفرانسیل در مسائل متقارن محوری
B	ماتریس کرنش واحد در مسائل متقارن محوری
σ	بردار تنش در مسائل متقارن محوری
D	ماتریس خواص ارتجاعی مصالح در مسائل متقارن محوری
δu	بردار تغییر مکان مجازی
$\delta \varepsilon$	بردار کرنش مجازی
K	ماتریس ضرایب (سفتی) مربوط به کل دامنه مسئله
K_{patch}	ماتریس ضرایب (سفتی) مربوط به هر زیر دامنه نریز از دامنه کل مسئله
J_1	ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات از r و z (فضای فیزیکی مسئله) به ξ و η (فضای پارامتری نریز)
J_2	ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات از ξ و η (فضای پارامتری نریز) به S و T (فضای پارامتری انتگرال گیری گاوس)
x_i^q	متغیر طراحی ام در شماره تکرار q
$F(x)$	تابع هدف
∇F_i	ماتریس گرادیان تابع F
H_{ij}	ماتریس هسین

۹- مراجع

- [1] Kagan P, Fischer A, Bar–Yoseph PZ (1998) New B-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis. *Int. J. numer. Methods Engrg.* 41: 435–458.
- [2] Hollig K, Reif U, Wipper J (2001) Weighted extended B-spline approximation of dirichlet problems. *SIAM J Numer Anal.* 39(2): 442–462.
- [3] Kagan P, Fischer A, Bar–Yoseph PZ (2003) Mechanically based models: adaptive refinement for B-spline finite element. *Int. J. numer. Methods Engrg.* 57: 1145–1175.
- [4] Hughes TGR, Cottrell JA, Bazilevs Y, (2005) Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194: 4135–4195.

- [30] Rao SS (1995) Optimization—theory and applications, New Age International. New Delhi.
- [31] Zienkiewicz OC, Campbell JS (1973) Shape optimization and sequential linear programming. In: Optimum structural design, theory and applications (eds. R.H. Gallagher & O.C.Zienkiewicz), Wiley and Sons, London, 109–126.
- [32] Vanderplaats Research & Development, Inc. (2011) USERS MANUAL Version 5.0: DOT; DESIGN OPTIMIZATIONTOOLS. <http://dakota.sandia.gov/licensing/release/Users5.0.pdf>.
- [33] Rogers DF (2001) An introduction to NURBS, Morgan Kaufmann Publishers.
- [34] Piegl L, Tiller W (1997) The NURBS book. 2nd ed, Springer-Verlag, New York.
- [35] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ (2005) The finite element method. 6thed, Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [36] Afonso SMB (1995) Shape optimization of shells under static and free vibration conditions. PhD Thesis, Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, UK.
- [37] Ozaka M (1993) Analysis and optimal design of structures with adaptivity. Ph.D Thesis. Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, UK.
- [38] Wilson RB (1963) A simplicial algorithm for concave programming. Ph.D. Thesis, Harvard University, Graduate School of Business Administration.
- [39] Han SP (1977) A globally convergent method for nonlinear programming. JOTA 22(3): 297–309.
- [40] Powell MJD (1978) A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization Calculations. in: G.A. Waton (ed.), Numerical analysis, Springer, Berlin, 144–157.
- [41] Hassani B, Hinton E (1999) Homogenization and Structural topology optimization. Springer.
- [42] Sadd MH (2005) ELASTICITY theory, applications, and numerics. Elsevier Butterworth-Heinemann.
- Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 199(5–8): 276–289.
- [21] Cottrell JA, Reali A, Bazilevs Y, Hughes TJR (2006) Isogeometric analysis of structural vibrations. Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 195(41–43): 5257–5296.
- [22] Elguedj T, Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJR (2008) B and –F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 197: 2732–2762.
- [23] Lipton S, Evans JA, Bazilevs Y, Elguedj T, Hughes TJR (2010) Robustness of isogeometric structural discretizations under severe mesh distortion. Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 199(5–8): 357–373.
- [24] Wall WA, Frenzel MA, Cyron C (2008) Isogeometric structural shape optimization. Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 197(33–40): 2976–2988.
- [25] Zhang Y, Bazilevs Y, Goswami S, Bajaj CL, Hughes TJR (2007) Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow. Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 196(29–30): 2943–2959.
- [26] Hassani B, Khanzadi M, Tavakkoli SM, Moghadam NZ (2009) Isogeometric shape optimization of three dimensional problems. 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization June 1–5, Lisbon, Portugal.
- [27] Buffa A, Rivas J, Sangalli G, Vazquez R (2010) Isogeometric analysis in electromagnetics: theory and testing. Technical Report, Pubblicazione: 13PV10/13/0, Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche (I.M.A.T.I.)–C.N.R.
- [28] Buffa A, Sangalli G, Vazquez R (2010) Isogeometric analysis in electromagnetics: Bsplines approximation. Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. 199(17–20): 1143–1152.
- [29] Cottrell JA, Hughes TJR, Bazilevs Y (2009) Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA. Wiley.