

# مدلسازی خودکار رشد ترک در مود مرکب و رشد ترک خستگی بدون مش بندی مجدد

رضا نادری<sup>۱</sup>، عبدالغفور خادم الرسول<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> استادیار دانشکده مهندسی عمران و معماری، دانشگاه صنعتی شاهرود

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری عمران، مکانیک خاک و پی، دانشگاه صنعتی شاهرود

## چکیده

در این مطالعه به بررسی چگونگی رشد خودکار ترک به عنوان یکی از مسایل پیچیده عددی در مکانیک شکست پرداخته می‌شود. در این مطالعه برای فایق آمدن بر نواقص روش اجزای محدود استاندارد در مدلسازی ترک و رشد آن از روش اجزای محدود توسعه یافته (XFEM) استفاده شده است. در مطالعه حاضر از روش مجموعه‌ی تراز (LSM) مسیر رشد ترک در حالت مود مرکب مشخص می‌شود. همچنین برای مسایل دو بعدی صفحه‌ای با تعریف یک فضای کمکی، فاکتورهای شدت تنش با استفاده از انتگرال متقابل  $M$  که کاملاً بر پایه انتگرال مستقل از مسیر  $J$  استوار است، محاسبه می‌شوند. همچنین اختلاف نحوه رشد ترک برای شرایط مرزی متفاوت نشان داده می‌شود. در این مطالعه رشد پایدار ترک خستگی با اعمال تعداد سیکل‌های بارگذاری متعدد و با استفاده از قانون پاریس به دست آمده است. در انتها برای حصول اطمینان از نتایج آنالیز عددی، نتایج به دست آمده برای فاکتورهای شدت تنش و نیز مسیرهای رشد ترک با نتایج تحلیلی فاکتورهای شدت تنش و نیز نتایج آزمایشگاهی در رشد ترک مقایسه می‌شود.

**کلمات کلیدی:** اجزای محدود توسعه یافته؛ روش مجموعه تراز؛ انتگرال متقابل؛ قانون پاریس؛ رشد ترک و خستگی.

## ۱- مقدمه

انواع ترک یا فضاهای خالی به صورت ضمنی مدل می‌شوند. مدلسازی انواع ناپیوستگی‌ها با فرایند غنی‌سازی نقاط گرهی متأثر از آن ناپیوستگی صورت می‌گیرد. بنابراین با غنی‌سازی نقاط متأثر از ترک مساله تکینگی تنش در نوک ترک نیز برطرف می‌شود. در این روش؛ ترک با غنی‌سازی نقاط متأثر از نوک و بدنه ترک به وسیله توابع غنی‌سازی نوک ترک و هویساید برای بدنه ترک انجام می‌گیرد [۵ - ۶].

در این مطالعه برای محاسبه عددی فاکتور شدت تنش از روش انتگرال متقابل  $M$  که کاملاً بر پایه انتگرال مستقل از مسیر  $J$  می‌باشد، در روش اجزای محدود توسعه یافته استفاده شده تا بتوان با یک مرحله انتگرال‌گیری بر روی ناحیه مشخص شده هر دو فاکتور شدت تنش برای موده‌های مختلف شکست را محاسبه نمود. لازم به ذکر است که انتگرال متقابل  $M$  بر اساس قوانین الاستیسیته و اصول پایه مکانیک شکست استوار است. این روش اولین بار توسط چن<sup>۳</sup> و شیلد<sup>۴</sup> ارائه شده است [۷ - ۸].

مبحث گسترش ترک در مکانیک شکست یکی از موضوعاتی است که از سالیان گذشته مورد توجه محققین مختلف قرار گرفته

به طور کلی رفتار عضو دارای ناپیوستگی در مکانیک شکست خطی با یک پارامتر مانند فاکتور شدت تنش (SIFs) که با استفاده از انتگرال مستقل از مسیر  $J$  محاسبه شده مشخص می‌شود. این پارامتر نقش مهمی در تعیین فضای تنش، در همسایگی نوک ترک دارد. برای چند مورد ایده‌آل شده، حل تحلیلی برای یافتن مقادیر فاکتور شدت تنش در موده‌های مختلف شکست دو بعدی موجود می‌باشد، اما برای مقاصد عملی شامل هندسه پیچیده با بارگذاری متفاوت و شرایط مرزی مختلف، نیازمند استفاده از روشهای عددی در محاسبه‌ی پارامترهای شکست می‌باشد. روش عددی اجزای محدود توسعه یافته (XFEM) یکی از روشهای عددی است که در محاسبه فاکتورهای شکست و نیز در گسترش ترک دارای قابلیت‌های بسیار خوبی است که استفاده از این روش را در مکانیک شکست فراوان نموده است. به طور کلی شکل‌گیری مبنای ریاضی روش اجزای محدود توسعه یافته با تعریف جزئ‌بندی واحد روش اجزای محدود (PUFEM) توسط ملنک<sup>۱</sup> و بابوسکو<sup>۲</sup> آغاز گردید [۱-۴]. در روش اجزای محدود توسعه یافته، ناپیوستگی‌های مختلف شامل

<sup>3</sup> Chen

<sup>4</sup> Shield

<sup>1</sup> Melenk

<sup>2</sup> Babuska

نوع دامنه با هر نوع ناپیوستگی و با هر زاویه‌ای نسبت با افق وجود دارد. همچنین در ترکیب مودهای شکست و در محاسبه فاکتورهای شدت تنش از روش انتگرال M، استفاده شده است. همچنین از روش مجموعه تراز (LSM) در برآورد خودکار مسیر رشد ترک و المان‌های مربوط به ترک استفاده شده است. به علاوه در ناحیه معادل انتگرال‌گیری حول نوک ترک زیردامنه سازی مثلثی برای افزایش دقت انتگرال‌گیری عددی به کار گرفته می‌شود.

مطالبی که در این مقاله خواهد آمد به این ترتیب است. ابتدا به معرفی پارامترهای شکست پرداخته خواهد شد. سپس روش انتگرال M در محاسبه فاکتورهای شکست مود مرکب بیان می‌شود. همچنین اصول کلی روش XFEM توضیح داده شده است. در ادامه به معرفی روش مجموعه تراز، معیار رشد ترک و رشد ترک خستگی با استفاده از قانون پاریس پرداخته می‌شود. در انتها چندین مثال عددی با شرایط مرزی مختلف نشان داده شده است.

## ۲- پارامترهای شکست: فاکتور شدت تنش

به طور کلی فاکتورهای شدت تنش از روشهای مستقیم و غیرمستقیم به دست می‌آیند. منظور از روشهای مستقیم آن دسته از روشهایی است که از توزیع تنش و جابجایی‌ها در منطقه نزدیک به نوک ترک در محاسبه فاکتور شدت تنش استفاده می‌کنند. همچنین منظور از روشهای غیر مستقیم روشهای بر پایه انرژی است، از جمله این روشها می‌توان به روش میزان رهایی انرژی کلی، تغییرات سختی (برای اجزای محدود)، انتگرال روی مسیر، روش انتگرال روی دامنه انرژی و تکنیک انتگرال‌گیری بسته شدن ترک اشاره نمود. در مطالعه حاضر به علت مزایایی که روش انتگرال روی دامنه انرژی دارد از این روش در محاسبه فاکتورهای شدت تنش استفاده می‌شود. ویژگی روش انتگرال روی مسیر در این است که چون این انتگرال مستقل از مسیر است این امکان را فراهم می‌کند که در فاصله‌ای دورتر از نوک ترک یعنی در جایی که دقت روش عددی بالاتر است، محاسبه شود. در این مطالعه از روش انتگرال متقابل (M) برای محاسبه همزمان فاکتورهای شدت تنش هر دو مود به صورت همزمان استفاده می‌شود، از طرفی ایجاد انتگرال روی مسیر در کار عددی اندکی مشکل است و دقت آن نیز چندان بالا نیست بنابراین از روش انتگرال دامنه انرژی روی یک سطح (ناحیه) در مسایل دو بعدی استفاده می‌شود که هم دقت بالاتری نسبت به انتگرال روی مسیر دارد و هم تعریف آن در حل عددی ساده‌تر می‌باشد [۵].

فاکتور شدت تنش با واحد  $MPa\sqrt{m}$ ، به هر دو عامل تنش وارده در دوردست و هندسه ترک بستگی دارد. برای یافتن فاکتورهای شدت تنش روش‌های نظری، که به روش‌های تحلیلی و عملی تقسیم شده و همچنین روش‌های آزمایشی و تجربی وجود دارند. روش‌های عددی از مجموعه تکنیک‌های نظری هستند که در محاسبه ضرایب تمرکز تنش به کار می‌روند.

است. برای بررسی و مدل‌سازی رشد ترک از روشهای عددی مختلفی نظیر اجزای محدود استاندارد، روش بدون‌مش، روش المان‌های مرزی استفاده شده است. به طور کلی اعمال شرایط مرزی در روشهای بدون مش و المان‌مرزی اندکی پیچیده است و اغلب نیازمند به کارگیری فرآیندهای خاص در اعمال شرایط مرزی است [۹]. موضوع گسترش ترک به علت پیچیدگی‌هایی که در فرآیند مدل‌سازی عددی و خودکار دارد، پیچیده است. از سال ۱۹۶۷ روش اجزای محدود استاندارد در بررسی گسترش ترک به کار گرفته شده است. روش اجزای محدود استاندارد دارای مزایایی است اما معایبی نیز دارد که استفاده از این روش را در برآورد خودکار مسیر رشد ترک محدود نموده است. از جمله معایب روش اجزای محدود استاندارد در این است که المانها به یکدیگر وابسته هستند در نتیجه امکان جداسازی و یا پاره شدن از یکدیگر را ندارند. همچنین از آن روی که تنش در نوک ترک دارای تکینگی است، پس؛ یا باید المان بندی در نزدیکی نوک ترک بسیار ریز باشد و یا اینکه از المان‌های ویژه تکین استفاده شود. یکی دیگر از معایب این روش در مدل‌سازی گسترش ترک می‌باشد. به طور کلی از آنجا که در مساله رشد ترک المانها دچار تغییر شکل می‌شوند، پس برای مرحله بعد رشد ترک باید المان‌بندی مجدد [حداقل برای منطقه نزدیک به نوک ترک] انجام شود که این موضوع بسیار هزینه‌بر است، در حالیکه در روش اجزای محدود توسعه یافته در مدل‌سازی گسترش ترک نیازی به المان‌بندی مجدد دامنه نیست [۱۰-۱۲].

یکی دیگر از موضوعات مورد توجه در مطالعه حاضر مساله رشد ترک خستگی است. به طور کلی رشد ترک خستگی پدیده‌ای است که در آن ترک در هر سیکل بارگذاری به میزان بسیار کم رشد می‌نماید. بر اساس آزمایش‌ها و مشاهدات مختلف مشخص شده است که مقدار رشد ترک ( $\Delta a$ ) در هر سیکل بارگذاری با نسبت تغییرات طول ترک به تغییرات سیکل بارگذاری ( $da/dN$ ) قابل نمایش است. در این مطالعه بر اساس قانون پاریس<sup>۱</sup> مساله رشد ترک خستگی با تعداد سیکل‌های زیاد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در مطالعه حاضر و در مدل‌سازی تمامی مسایل مورد توجه برای اینکه بتوان گسترش ترک و همچنین مرز ناپیوستگی را دنبال نمود از روش مجموعه تراز (LSM) به عنوان یک روش قوی و کارا در دنبال کردن مرزها استفاده می‌شود. در واقع با استفاده از روش LSM به طور خودکار المان‌های درگیر با ترک مشخص می‌شوند. برای یافتن مرز ترک در هر مرحله گسترش ترک از دو تابع مجموعه‌ی تراز برای نوک و بدنه ترک استفاده می‌شود. همچنین از فاکتورهای شدت تنش محاسبه شده برای مودهای مختلف شکست در برآورد جهت و امتداد گسترش ترک استفاده می‌شود.

در مطالعه حاضر با استفاده از الگوریتم‌های مناسب و برنامه نویسی در محیط نرم افزار MATLAB به مدل‌سازی رشد ترک و رشد ترک خستگی به صورت کاملاً خودکار و با قابلیت مدل‌سازی هر

<sup>۱</sup> Paris

$$J_1^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (5)$$

انتگرال  $J$  را می توان برای وضعیت خالص "۱" و کمکی "۲" از هم جدا نمود که این امر منتهی به یک جمله متقابل می شود.

$$J_1^{(1+2)} = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (6)$$

در رابطه (۶)،  $I^{(1,2)}$ ، جمله متقابل است که به صورت رابطه (۷) می باشد.

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (7)$$

که  $W^{(1,2)}$  دانسیته انرژی کرنشی متقابل است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)} \quad (8)$$

از آنجا که دو حالت ترک را روی هم ترکیب کرده ایم، پس می توان آنها را به صورت زیر نوشت:

$$J_1^{(1+2)} = \frac{(K_I^{(1)} + K_I^{(2)})^2}{E_{eff}} + \frac{(K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)})^2}{E_{eff}} \quad (9)$$

با بسط دادن و مرتب سازی رابطه (۹) می توان رابطه زیر را به دست آورد.

$$J_1^{(1+2)} = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + \frac{2(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)})}{E_{eff}} \quad (10)$$

با استفاده از روابط فوق نتیجه می شود:

$$I^{(1,2)} = \frac{2(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)})}{E_{eff}} \quad (11)$$

در انتها فاکتور شدت تنش را برای وضعیت تنش موجود می توان با جداسازی دو مود شکست از یکدیگر به دست آورد. برای مثال با

قرار دادن  $K_I^{(2)} = 0, K_{II}^{(2)} = 1$ ، مساله برای به دست آوردن  $K_I^{(1)}$  حل می گردد.

$$K_I^{(1)} = \frac{I^{(1, Mode I)} E_{eff}}{2} \quad (12)$$

به طور مشابه می توان  $K_{II}^{(1)}$  را نیز به دست آورد:

$$K_{II}^{(1)} = \frac{I^{(1, Mode II)} E_{eff}}{2} \quad (13)$$

در روابط فوق  $E_{eff}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_{eff} = \begin{cases} E, & \text{plane stress} \\ \frac{E}{1-\nu^2}, & \text{plane strain} \end{cases} \quad (14)$$

در محاسبه انتگرال  $M$  به صورت عددی می توان این انتگرال را با روی مسیر منحنی وار گرفت و یا اینکه از یک سطح معادل مثل  $A$  شکل ۱ استفاده نمود. از جمله ویژگی های استفاده از سطح معادل

حل ویلیامز<sup>۱</sup> برای فضای تنش نوک ترک در اجسام الاستیک به صورت یک سری به صورت رابطه (۱) بیان می شود.

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = A_1 r^{-1/2} f_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 r^{1/2} f_{ij}^{(3)}(\theta) + \text{higher order terms} \quad (1)$$

در این رابطه  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش،  $r$  و  $\theta$  مختصات قطبی نسبت به نوک ترک مطابق شکل ۱ می باشند.  $f_{ij}^{(1)}, f_{ij}^{(2)}, f_{ij}^{(3)}$  توابع عمومی از  $\theta$  بوده و  $A_1, A_2, A_3$  پارامترهایی متناسب با بارگذاری در دوردست می باشند. در همسایگی نوک ترک ( $r \rightarrow 0$ ) جملاتی که جمله  $r$  در مخرج کسر وجود دارد دچار تکینگی می شوند. دامنه منطقه تنش تکین با استفاده از فاکتورهای شدت تنش مشخص می شوند [۵].

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad (2)$$

در رابطه (۲) عبارتهای  $K_I$  و  $K_{II}$  به ترتیب فاکتورهای شدت تنش برای مودهای اول (بازشدگی) و دوم (برشی) شکست هستند.

### ۳- انتگرال متقابل: انتگرال $M$

انتگرال متقابل از انتگرال مستقل از مسیر  $J$  برای دو وضعیت ممکن از یک جسم الاستیک ترک دار به دست می آید. در روش انتگرال متقابل، یک فضای کمکی تعریف می شود و بر فضای اصلی مساله تحمیل می گردد. فضای کمکی تنش و جابجایی ها به نحوی انتخاب می گردد که معادلات تعادل و شرایط مرزی مساله بدون نیرو بر سطوح ترک را در دامنه معادل در انتگرال گیری عددی پیرامون ترک ارضا نماید (در بخش ضمایم). در این مطالعه از معادلات کمکی تنش و جابجایی به دست آمده توسط ویلیامز و وسترگارد<sup>۲</sup> استفاده می شود. برای بیان فرمولاسیون روش انتگرال  $M$  بالانویس "۱" در جملات  $u_i^{(1)}, \epsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$  جهت نمایش وضعیت اصلی و بالانویس "۲" در جملات  $u_i^{(2)}, \epsilon_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$  برای نمایش وضعیت کمکی است [۵].

در ادامه ابتدا به بیان مختصر انتگرال مستقل از مسیر  $J$  پرداخته شده و سپس انتگرال متقابل به طور کامل تشریح می شوند. انتگرال  $J$  به صورت رابطه (۳) تعریف می شود [۸]:

$$J_i = \int_{\Gamma} \left[ W n_i - \sigma_{jk} n_j \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] d\Gamma \quad (3)$$

که  $W$ ، دانسیته انرژی کرنشی و  $i$ ، بیانگر جهت بازشدگی نوک ترک می باشد. این جهت در راستای  $X$  کلی در نظر گرفته می شود. این رابطه را می توان به صورت رابطه زیر بازنویسی نمود:

$$J_1 = \int_{\Gamma} \left[ W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (4)$$

با جایگزینی دو وضعیت تنش، رابطه (۵) به دست می آید.

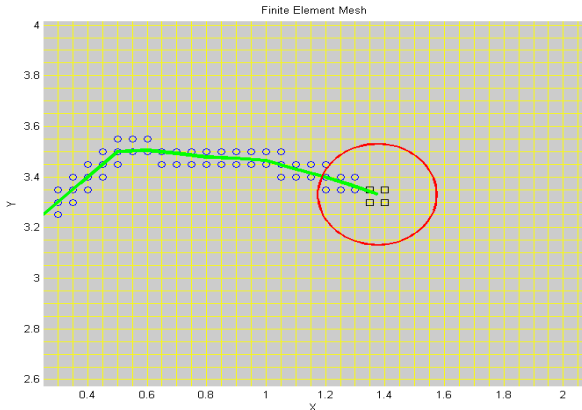
<sup>1</sup> Williams

<sup>2</sup> Westergaard

می‌باشند، در حالی که  $\Omega \cap \Omega_d = \emptyset$  باشد توابع غنی‌کننده  $v(x)$  حذف می‌شوند [۲-۴].

#### ۴-۱- غنی سازی ترک

برای مدل کردن ترک در مصالح همگن، دو بخش غنی سازی وجود دارد. غنی سازی المانهای نوک ترک و هویساید برای المانهای بدنه ترک (به شکل ۲ مراجعه شود).



شکل ۲- نمایش غنی سازی المانی بدنه و نوک ترک در ناحیه مشخص شده در شبکه اجزای محدود

برای المان‌هایی که کاملاً با یک ترک قطع شده باشند از تابع غنی سازی هویساید به شکل زیر استفاده می‌شود.

$$h(x) = \begin{cases} +1 & \text{Above Crack} \\ -1 & \text{Below Crack} \end{cases} \quad (17)$$

در نتیجه یک ناپیوستگی به صورت ضمنی به دامنه اجزای محدود اضافه می‌شود. برای شرایطی که المان حاوی نوک ترک باشد از توابعی استفاده می‌شود که توسط فلمینگ برای نمایش جابجایی نوک ترک در بدون المان گالرکین و روابطی که توسط بلیچکو تکرار شده‌اند به کار می‌روند. جابجایی منطقه نوک ترک شکلی به صورت چهار تابع زیر را به خود می‌گیرد [۳]:

$$[\phi_\alpha(r, \theta), \alpha=1-4] = \left[ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (18)$$

در رابطه فوق  $r, \theta$  مختصات قطبی با مرکزیت نوک ترک می‌باشند. در حالتی که نیاز باشد تا یک گره با هر دو تابع غنی سازی گردد، فقط از تابع غنی سازی رابطه (۱۸) استفاده می‌شود.

#### ۴-۲- آنالیز مجدد

به طور کلی در خلال آنالیز رشد ترک یک فرآیند تکرار شونده باید به کار گرفته شود. بنابراین باید تمهیداتی اندیشیده شود تا کمترین فضای اضافی از کامپیوتر اشغال شود، پس با در نظر گرفتن تقریب جابجایی در XFEM به صورت زیر

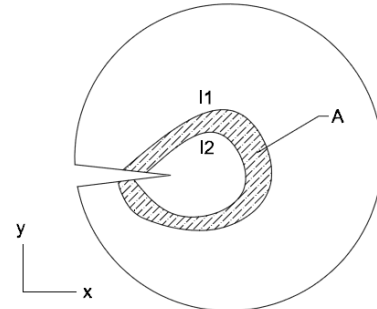
$$u^h(x) = \sum_I N_I(x) \left[ u_I + H_I(x) a_I + \sum_{\alpha=1}^4 \Phi_\alpha(x) b_I^\alpha \right] \quad (19)$$

ماتریس ضرایب به صورت رابطه (۲۰) می‌باشد.

بهبود روش محاسبه انتگرال در روش عددی است. بنابراین در این مطالعه از روش سطح معادل در محاسبه انتگرال استفاده می‌شود. در واقع  $L_2$  از نوک ترک انتخاب می‌شود.

با استفاده از روش انتگرال  $M$ ، رابطه انتگرال متقابل به صورت رابطه (۱۵) می‌باشد.

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^1}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (15)$$



شکل ۱- نمایش سطح انتگرال گیری پیرامون نوک ترک

در این روش یک تابع هموار کننده با نام  $q$  به کار برده می‌شود که دارای مقادیر یک و صفر می‌باشد. مسیر  $I^{(1,2)}$  با استفاده از قانون دیورژانس و اعمال تابع هموار کننده انتگرال روی مسیر به انتگرال سطح منتقل می‌شود. این تابع برای داخلی‌ترین مسیر دارای مقدار یک و برای بیرونی‌ترین مسیر دارای مقدار صفر است. بنابراین منطقه بین یک و صفر دامنه انتگرال‌گیری است. سپس برای هر نقطه درون منطقه  $A$  از توابع شکل خطی در درون‌یابی مقدار  $q$  استفاده می‌شود [۱۳].

#### ۴- اصول کلی روش XFEM

به طور کلی روش اجزای محدود توسعه یافته بر پایه مفهوم جزئبندی واحد در غنی سازی تقریب اجزای محدود استاندارد که در برگیرنده اثرات تکینگی یا ناپیوستگی‌های دامنه اطراف یک ترک می‌باشد، استوار است. روش XFEM به ناپیوستگی‌ها اجازه می‌دهد تا با جزئبندی واحد اجزای محدود به صورت مستقل از شبکه نمایش داده شوند. در این روش هرگونه ناپیوستگی با هر زاویه‌ای مستقل از شبکه اجزای محدود با عمل غنی سازی المان‌های قطع شده با ترک بوسیله توابع غنی سازی ارضا کننده رفتار ناپیوسته و درجات آزادی اضافی مدل می‌شوند. تقریب جابجایی در XFEM به صورت زیر بیان می‌شود. به عبارت دیگر مقادیر توابع شکل اجزای محدود استاندارد در توابعی ضرب می‌شوند.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \Omega} N_I(\mathbf{x}) \left[ \mathbf{u}_I + \sum_{I \in \Omega_d} v(x) \mathbf{a}_I \right] \quad (16)$$

در رابطه فوق  $\Omega$  بیانگر کل دامنه و  $\Omega_d$  دامنه حاوی ناپیوستگی‌ها می‌باشد.  $N_I(x)$  توابع شکل اجزای محدود و  $v(x)$  تابع غنی-سازی ناپیوستگی و  $\mathbf{u}_I$  و  $\mathbf{a}_I$  درجات آزادی استاندارد و غنی‌شده

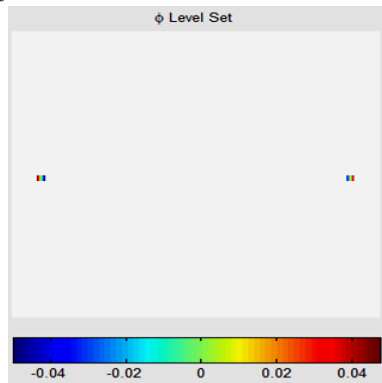
که مجموعه تراز صفر آن از موقعیت نوک ترک موجود عبور کرده و در جهت تابع سرعت نوک ترک قرار می‌گیرد. در واقع همیشه نوک ترک محل تلاقی دو تابع مجموعه‌ی تراز صفر نوک ترک و مجموعه‌ی تراز صفر بدنه ترک می‌باشد. همچنین مجموعه‌ی تراز نوک ترک  $\phi$  همیشه بر مجموعه تراز مسیر ترک  $\psi$  عمود است. مجموعه تراز صفر  $\phi(x(t), t)$  با خطی در تقاطع با موقعیت نوک ترک موجود و عمود بر مجموعه تراز صفر  $\psi$  به دست می‌آید. برای توابع مجموعه تراز  $\phi$  و  $\psi$ ، به هر نقطه‌ی گره‌ی یک فاصله از آن نقطه تا نزدیکترین نقطه به تابع صفر آن مجموعه تراز اختصاص داده می‌شود. علامت فاصله برای تابع مجموعه تراز  $\psi$  بر وجه پادساعتگرد نسبت به جهت تابع سرعت نوک ترک مثبت است و بر وجه ساعتگرد منفی است. علامت تابع فاصله برای تابع  $\phi$ ، بر وجه در جهت رشد ترک مثبت است و بر وجه مخالف رشد ترک منفی است. بنابراین ترک در موقعیتی است که شرایط زیر صادق باشد.

$$\begin{cases} \phi(x(t), t) \leq 0 \\ \psi(x(t), t) = 0 \\ \phi_{,i} \psi_{,i} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

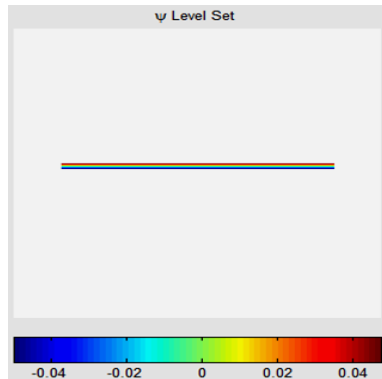
در این روش مقادیر توابع مجموعه تراز فقط در نقاط ذخیره می‌شوند. پس با استفاده از همان توابع شکل اجزای محدود می‌توان مقادیر توابع را در شبکه اجزای محدود به دست آورد [۱۳]:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum N_j(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}, t) \quad (22)$$

$$\psi^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) (\psi_j^k(\mathbf{x}, t)) \quad (23)$$



شکل ۳- نمایش تابع Phi از برای ترک وسط چین



شکل ۴- نمایش تابع Psi برای بدنه ترک وسط چین

$$K = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} & K_{ub} \\ K_{ua}^T & K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ub}^T & K_{ab}^T & K_{bb} \end{bmatrix} \quad (20)$$

همان‌گونه که از رابطه (۲۰) مشخص است، درایه‌های مربوط به اجزای محدود استاندارد تابعی از موقعیت ترک نمی‌باشد، این مساله نشان دهنده این است که درایه‌های  $K_{uu}$  در هر مرحله از رشد ترک ثابت می‌باشند. در نتیجه تغییرات مربوط به ماتریس ضرایب فقط در بخش‌های غنی شده انجام می‌گیرد که در مقایسه با کل ماتریس کوچک می‌باشند. به علاوه المان‌هایی که با توابع هویساید غنی شده باشند، در مراحل بعدی رشد ترک ثابت باقی می‌مانند. یعنی اینکه درایه‌های حاوی اندیس  $a$ ، در مراحل بعدی ثابت می‌مانند. بنابراین تنها لازم است، المان‌هایی را که از غنی‌سازی با توابع نوک ترک به غنی‌سازی هویساید تبدیل می‌شوند لحاظ نمود. بنابراین در میزان محاسبات صرفه جویی لازم صورت می‌گیرد.

### ۵- روش مجموعه تراز (LSM)

یکی از جنبه‌های مهم در مسائلی که با حرکت مرزها مواجه هستیم، دنبال کردن رشد یا جابجایی آن مرز است. چند روش برای این منظور وجود دارد که در این مطالعه از روش مجموعه تراز استفاده شده است. همچنین از (Non-Uniform Rational B-spline) NURBS نیز در دنبال کردن حرکت مرزها استفاده شده است [۱۴]. در این روش به جای دنبال کردن خود مرزها، یک منحنی پایه را انتخاب نموده و آن را بر روی یک سطح می‌سازیم برای توضیحات بیشتر می‌توان به مرجع [۱۵] مراجعه نمود.

در روش LSM، سطح مرزی مورد نظر به صورت سطح تراز صفر از تابع  $\phi(\mathbf{x})$  بیان می‌شود. این تابع یک بعد بالاتر از بعد سطح مرزی است. معادله تغییر مرز را می‌توان به صورت معادله‌ای از تغییر  $\phi$  نشان داد. در خصوص استفاده از LSM برای دنبال نمودن حرکت مرزها نسبت به دیگر روشها دارای مزایای متعددی است. از جمله این مزایا شامل؛ اولاً، حرکت مرز بر روی یک شبکه ثابت اولین<sup>۱</sup> محاسبه می‌گردد. دوم، این روش تغییرات توپولوژی<sup>۲</sup> مرز را به طور طبیعی و خودکار برآورد می‌کند. سوم، این روش را به سادگی می‌توان برای مسائل با ابعاد بالاتر نیز به کار برد. نهایتاً، مشخصات هندسی مرز را می‌توان از تابع مجموعه تراز  $\phi$  به دست آورد. فقط چون در LSM باید از تابع با بعد بیشتر از بعد ترک استفاده نمود، میزان محاسبات بیشتر می‌شود [۱۶].

دو تابع مجموعه تراز  $\phi$  و  $\psi$  برای مدل کردن و دنبال کردن مسیر رشد ترک لازم می‌باشد. یکی از این توابع برای دنبال کردن مسیر ترک و دیگری برای دنبال کردن نوک ترک است. در این شیوه، مسیر ترک با استفاده از تابع مجموعه تراز صفر  $\psi(x(t), t)$  نمایش داده می‌شود. مجموعه تراز  $\psi$  به طرزى جهت گیری دارد

<sup>1</sup> Eulerian

<sup>2</sup> Topology

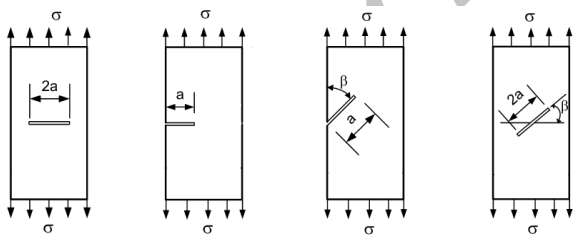
تنش‌های نزدیک به مقدار آستانه پایین  $\Delta K_{th}$ ، است که زیر این مقدار رشد ترک اتفاق نمی‌افتد. به این ناحیه، ناحیه آستانه گفته می‌شود. بخش خطی دوم موجود در دیاگرام معرف یک رابطه توانی بین نرخ رشد ترک و محدوده فاکتورهای شدت تنش است. در انتها زمانی که  $K_{max}$ ، میل به مقدار فاکتور شدت تنش بحرانی  $K_{IC}$  می‌کند، رشد سریع ترک اتفاق افتاده و ترک به صورت ناپایدار رشد می‌کند. در ناحیه دوم معادله پاریس تقریب خوبی از داده‌های آزمایشگاهی را بیان می‌کند.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (26)$$

در رابطه فوق  $C$  و  $m$  ثابت‌های تجربی هستند که تحت عنوان پارامترهای قانون پاریس شناخته می‌شوند. طی سالها مطالعات زیادی بر روی این پارامترها انجام گرفته است تا نشان دهند که این دو مقدار را نمی‌توان فقط به عنوان ثابت مصالح تعریف نمود. در واقع آنها به شرایط آزمایش مانند هندسه و اندازه نمونه، طول اولیه ترک و نسبت بارگذاری  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max} = K_{min}/K_{max}$  بستگی دارند [۱۶-۱۸].

## ۸- مثال‌های عددی

در این مطالعه امکان بررسی محیط با هر نوع ترکی وجود دارد. در این بخش نتایج حاصل از آنالیز برای محیط‌های با حضور ترک آورده می‌شود. در ابتدا برای کنترل نتایج حاصل از محاسبات عددی به روش اجزای محدود توسعه یافته و نتایج حاصل از حل تحلیلی مسایل برای یافتن فاکتورهای شدت تنش چند مثال بیان می‌شود. سپس به بررسی مبحث گسترش ترک در حالت‌های مختلف پرداخته می‌شود. در مسیر انجام آنالیز امکان هرگونه بارگذاری برشی و نرمال بر هر وجه وجود دارد. در شکل ۶ حالت‌های مختلف ترک در محیط نشان داده شده است.



شکل ۶- حالات مختلف محیط حاوی ترک

### ۸-۱- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی

در محاسبه فاکتورهای شدت تنش روابط تحلیلی وجود دارد که برای ترک در لبه دامنه و ترک وسط ارائه شده‌اند. رابطه تحلیلی فاکتور شدت تنش برای ترک لبه‌ای به شرح رابطه (۲۷) است.

$$K_I = \left[ 1 + 0.256 \left( \frac{a}{b} \right) - 1.152 \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 12.2 \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right] \sigma \sqrt{\pi a} \quad (27)$$

رابطه تحلیلی فاکتور شدت تنش برای ترک در وسط دامنه به صورت رابطه (۲۸) است.

## ۶- معیار گسترش ترک

در این مطالعه برای گسترش ترک از معیار حداکثر تنش مماسی استفاده می‌شود. تئوری حداکثر تنش مماسی به عنوان معیاری برای شکست در مود مرکب توسط اردوغان<sup>۱</sup> و سی<sup>۲</sup> (۱۹۶۳) ارائه شد. این معیار بر پایه آگاهی از وضعیت تنش در حوالی نوک ترک در مختصات قطبی استوار است. بر مبنای این معیار زمانی که حداکثر تنش مماسی یا کشش ( $\sigma_{\theta Max}$ ) به مقدار بحرانی ثابت مواد برسد، ترک از نوک آن و در یک راستای شعاعی در صفحه‌ای عمود بر راستای بزرگترین کشش منتشر می‌شود. راستای انتشار با زاویه  $\theta_c$  نشان داده می‌شود. مقدار زاویه گسترش ترک در مود مرکب به طریق زیر تعیین می‌گردد [۵ و ۱۱]:

$$\cos \frac{\theta_c}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_c}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_c \right] = \sigma_{\theta Max} \sqrt{2\pi r} \quad (24)$$

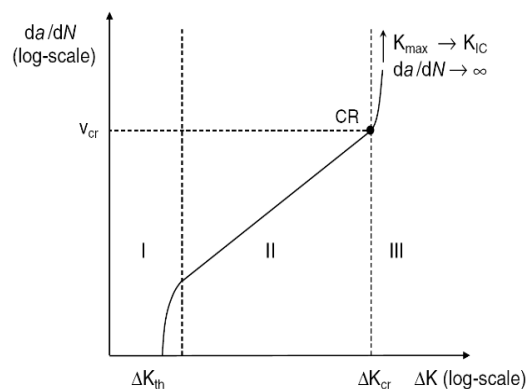
در نهایت زاویه رشد ترک ( $\theta_c$ ) خواهد شد

$$\theta_c = 2 \times \arctan \left( \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} - \frac{1}{4} \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (25)$$

## ۷- رشد ترک خستگی

رشد ترک خستگی پدیده‌ای است که در آن ترک در هر سیکل بارگذاری به میزان بسیار کم رشد می‌نماید. بر اساس آزمایش‌ها و مشاهده‌های مختلف مشخص شده است که مقدار رشد ترک ( $\Delta a$ ) در هر سیکل بارگذاری با نسبت تغییرات طول ترک به تغییرات سیکل بارگذاری ( $da/dN$ ) قابل نمایش است.

در اوایل دهه ۱۹۶۰، پاریس برای اولین بار نشان داد که مقدار رشد پایدار ترک در هر سیکل بارگذاری خستگی، با فاکتور شدت تنش در نوک ترک کنترل می‌شود. در شکل ۵ رشد ترک خستگی بر حسب تغییرات لگاریتم  $da/dN$  و  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$  نشان داده شده است.



شکل ۵- منحنی چگونگی رشد ترک خستگی

بر اساس نتایج آزمایشگاهی سه ناحیه برای این منحنی تشخیص داده شده است [۱۶]. ناحیه اول مربوط به دامنه فاکتور شدت

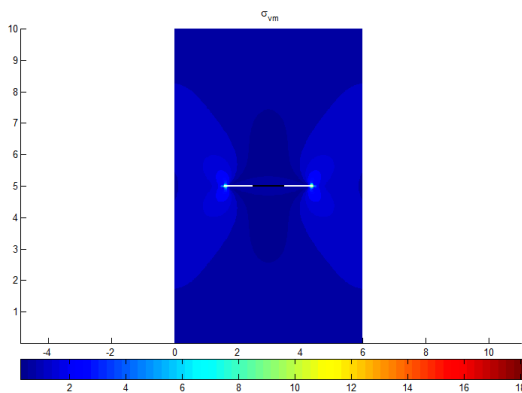
<sup>1</sup> Erdogan

<sup>2</sup> Sih

عددی برای انتگرال  $M$  در اطراف هر تعداد نوک ترک در دامنه مساله درون سطح معادل به صورت دایره‌ای که شعاع آن بر اساس مساحت المان و با ضرب در یک ضریب بزرگنمایی است، به دست می‌آید. در این مطالعه اندازه شعاع این دایره معادل  $0.15$  در نظر گرفته می‌شود.

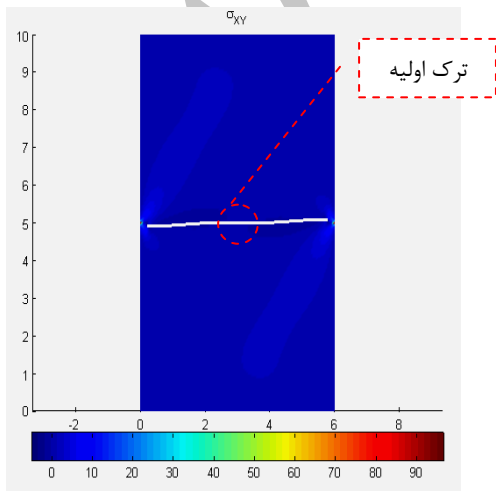
#### ۸-۲-۱- مدل‌سازی گسترش ترک وسط چین

مثال اول مدل‌سازی گسترش ترک وسط چین و بارگذاری بر وجه جهت  $y$  به صورت کششی است. این آنالیز برای ۱۰ تکرار در رشد ترک انجام گرفته است. شرایط مرزی به صورت بسته شدن ۳ درجه آزادی افقی و قائم در مدل می‌باشد. در این شرایط بارگذاری و بدون برش بر وجوه دامنه انتظار رشد ترک به صورت افقی وجود دارد که این نتیجه در شکل ۷ به وضوح مشاهده می‌گردد.



شکل ۷- رشد ترک تحت کشش یکنواخت

مثال دوم بررسی گسترش ترک وسط چین و بارگذاری بر وجه جهت  $y$  به صورت برشی و کششی. این آنالیز برای ۱۰ تکرار در رشد ترک و در مدت زمانی  $79.56$  ثانیه به اتمام رسیده است. شرایط مرزی به صورت بسته شدن ۳ درجه آزادی افقی و قائم در مدل می‌باشد.



شکل ۸- مدل‌سازی رشد ترک وسط چین تحت کشش و برش

$$K_I = \left[ \begin{array}{l} 1.12 - 0.23 \left( \frac{a}{b} \right) + 10.56 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \\ -21.74 \left( \frac{a}{b} \right)^3 + 30.42 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \end{array} \right] \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (28)$$

در ادامه برای کنترل نتایج عددی فاکتور شدت تنش در خلال گسترش ترک مطابق جدول ۱ مقایسه‌ای بین مقادیر عددی و تحلیلی آورده شده است. لازم به ذکر است که نتایج جدول ۱ برای اعمال کشش تک محوره است.

جدول ۱- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی

نوع ترک (افقی)	طول ترک (a)	عرض دامنه (b)	$K_I$ تحلیلی	$K_I$ عددی	$K_{II}$ تحلیلی	$K_{II}$ عددی
وسط	۱	۶	۱,۲۷۸۹	۱,۲۵۳۶	۰٫۰	-۰٫۰۰۰۰۸
وسط	۲	۶	۱,۸۹۱۵	۱,۸۸۰۲	۰٫۰	-۰٫۰۰۰۰۲
وسط	۰٫۲۵	۲۰	۰٫۷۹۴۶	۰٫۷۶۹۸	۰٫۰	-۰٫۰۰۰۰۲
وسط	۰٫۱۲۵	۲۰	۱,۱۲۶۳	۱,۱۱۰۴	۰٫۰	-۰٫۰۰۰۰۱
وسط	۰٫۱	۲۰	۱,۲۶۰۷	۱,۲۴۷۵	۰٫۰	-۰٫۰۰۰۰۱
لبه‌ای	۰٫۵	۳	۱,۶۲۶۶	۱,۵۹۸۶	۰٫۰	-۰٫۰۰۰۰۵
لبه‌ای	۱	۳	۳,۱۶۷۴	۳,۱۶۸۷	۰٫۰	-۰٫۰۰۰۱۱

لازم به ذکر است که حداکثر مقدار خطای محاسباتی برای موارد نمونه ذکر شده در جدول ۱، ۳ درصد است.

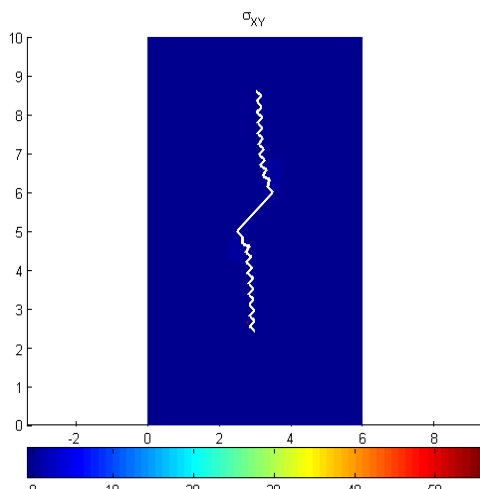
#### ۸-۲-۲- مدل‌سازی گسترش ترک

محاسبه فاکتورهای شدت تنش در شرایط هندسی و بارگذاری پیچیده و نیز دامنه دلخواه از توان روابط تحلیلی خارج است. بنابراین باید از روش عددی در برآورد فاکتورهای شدت تنش استفاده نمود. در ادامه ضمن محاسبه فاکتورهای شدت تنش در هر مرحله رشد ترک، مسیر رشد ترک نیز به دست می‌آید. لازم به ذکر است که تمامی آنالیزهای موجود در این مقاله با استفاده از کامپیوتری با پردازشگر دو هسته‌ای  $2.66$  گیگاهرتز و  $4$  گیگابایت حافظه و در یک سیستم عامل  $64$  بیتی انجام شده است. برای مثال‌های ۱ تا ۵ که در آنها دامنه مورد مطالعه با عرض  $6$  و ارتفاع  $10$  لحاظ شده از تعداد  $24321$  المان  $4$  گرهی استفاده می‌شود. البته در شرایط وجود ناپیوستگی از سابروتینی برای تجزیه المان‌های حاوی ناپیوستگی (ترک) به مثلث استفاده می‌شود تا بتوان با دقت بالاتری انتگرال‌گیری نمود. به طور متوسط در هر مرحله حل مساله (متناسب با ابعاد مساله) بین  $40$  تا  $50$  المان درگیر ترک می‌شوند. همچنین برای مدل‌سازی رشد ترک لبه‌ای شامل مثال‌های ۶ تا ۱۰ از دامنه‌ای با عرض  $3$  و ارتفاع  $6$  استفاده شده است. تعداد کل المانها  $7200$  المان می‌باشد. همچنین برای تمامی مثال‌های حل شده مشخصات مصالح برای رفتار در محدوده مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM) از مقادیر  $E=1.07$ ،  $\nu=0.3$  برای نسبت پواسون و مدول یانگ در رفتار کرنش صفحه‌ای استفاده شده است. محدوده انتگرال‌گیری

مطالعه صورت گرفته مقدار فاکتور شدت تنش بحرانی در شروع رشد ترک در برنامه کامپیوتری به صورت (Inf) یعنی هر عددی گرفته شده است تا با هر ترکیبی از فاکتورهای شدت تنش رشد ترک اتفاق افتد. از این رو نیازی به یکسان سازی پارامترهای رفتار الاستیک مصالح در نمونه آزمایشگاهی و عددی وجود نداشت.

جدول ۲- مشخصات نمونه گچی آزمایشگاهی [۱۹]

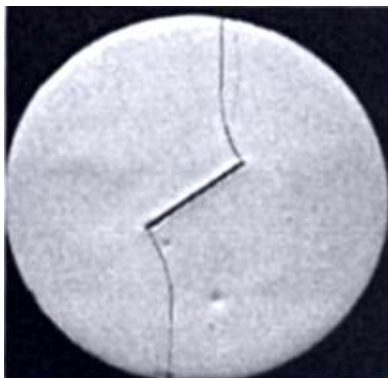
مقاومت فشاری تک محوری	۱۵٫۷ مگاپاسکال
مقاومت کششی	۳٫۱۷ مگاپاسکال
ضریب ارتجاعی	۳٫۳۳ گیگاپاسکال
ضریب پواسون	۰٫۱۹
چسبندگی	۵٫۳۲ مگاپاسکال
زاویه اصطکاک داخلی	۱۰ درجه



شکل ۱۰- رشد ترک وسط چین با زاویه ۴۵ نسبت به افق

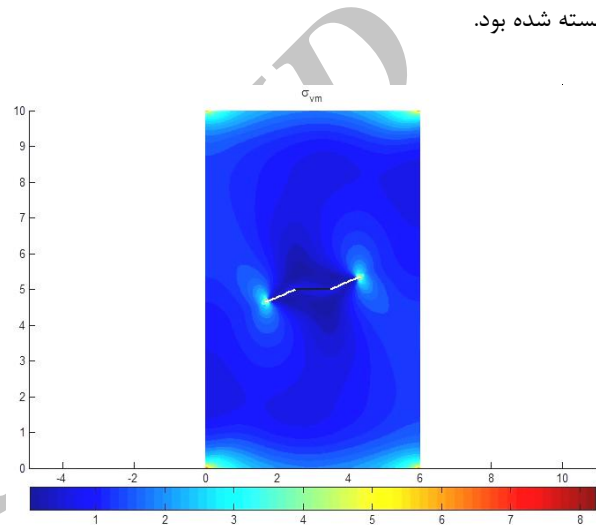
مسئلاً اختلافات اندکی که در نمایش رشد ترک وجود دارد ناشی از تقریب‌های عددی و نیز اندازه المان‌ها است که نمی‌توان اندازه المان را خیلی ریز فرض نمود. با بسیار ریز کردن المان‌ها خطاهای عددی دیگری ایجاد می‌شود. ولی در نمونه‌های آزمایشگاهی نیز رشد ترک به صورت قائم بر وجوه بالا و پایین مشهود است.

مثال پنجم گسترش ترک وسط چین مایل با زاویه ۱۵ درجه نسبت به افق را پیش‌بینی می‌نماید. این آنالیز در ۲۰ تکرار و در مدت



شکل ۱۱- نمایش آزمایشگاهی رشد ترک ۴۵ درجه

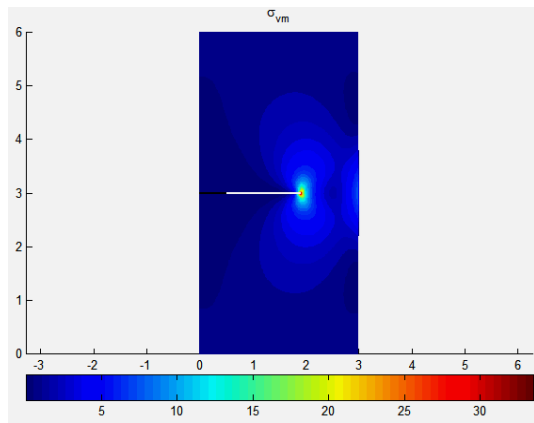
اختلاف بین نحوه گسترش ترک در مثال ۲ و ۱ نشان دهنده تغییر در محتوای انرژی جسم ترکدار به علت تغییر در نوع بارگذاری است. در ادامه برای مشاهده تاثیر شرایط مرزی بر نحوه رشد ترک مثال دوم با شرایط مرزی متفاوت مدلسازی می‌شود. همانطور که می‌دانیم نوع شرایط مرزی و تکیه‌گاه‌ها باعث تغییر در توزیع تنش‌ها شده و با تغییر در توزیع انرژی شرایط گسترش ترک را تغییر می‌دهند. در این بخش این مورد در قالب مثال سوم نشان داده می‌شود. در مثال سوم هر دو وجه سمت چپ و راست دامنه دارای تکیه‌گاه غلتکی بوده و درجه آزادی قائم گره گوشه سمت راست پایین نیز بسته شده است. نحوه بارگذاری مشابه مثال دوم است. این مثال در ۱۵ تکرار و در مدت زمان ۱۴۱٫۱ ثانیه انجام گرفته است. در مثال دوم دو درجه آزادی قائم و یک درجه آزادی افقی بسته شده بود.



شکل ۹- اثر شرایط مرزی بر گسترش ترک افقی

در مثال چهارم به گسترش ترک وسط چین مایل با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق پرداخته می‌شود. این آنالیز برای ۲۰ تکرار در مدت زمان ۱۹۳٫۷ ثانیه انجام شده است. همچنین نتیجه حاصل از رشد ترک عددی با نتیجه آزمایشگاهی مقایسه می‌شود. نتایج نمونه آزمایشگاهی دیسکی که در این قسمت از آن برای صحت سنجی نتایج حاصل از مدلسازی عددی مورد استدلال قرار می‌گیرد، بر روی نمونه دیسکی با قطر ۷۵ میلی‌متر، ضخامت ۳۰ تا ۳۲ میلی‌متر و با ترک مرکزی به طول ۲۲٫۵ میلی‌متر انجام گرفته است. نمونه آزمایش دیسکی با استفاده از دستگاه فشاری INSTRON با سلول بار به ظرفیت ۲۵ کیلو نیوتن تحت بار فشاری قرار گرفته است. جنس مصالح مورد آزمایش به گونه‌ای انتخاب شده‌اند تا رفتار در محدوده الاستیک خطی و ترد را تضمین نماید. نمونه‌های مورد آزمایش از ترکیب گچ و آب و با نسبت وزنی بترتیب ۳ به ۲ بوده است. ضخامت ترک ایجاد شده در نمونه حدوداً ۰٫۴ میلی‌متر می‌باشد. مشخصات مصالح گچی به کار رفته در نمونه دیسکی مورد آزمایش پس از انجام آزمایش‌های استاندارد بر روی نمونه استوانه‌ای با قطر ۵۴ میلی‌متر و طول ۱۳۰-۱۱۰ میلی‌متر به دست آمده که به شرح جدول ۲ است [۱۹]. البته ذکر این نکته لازم است که در

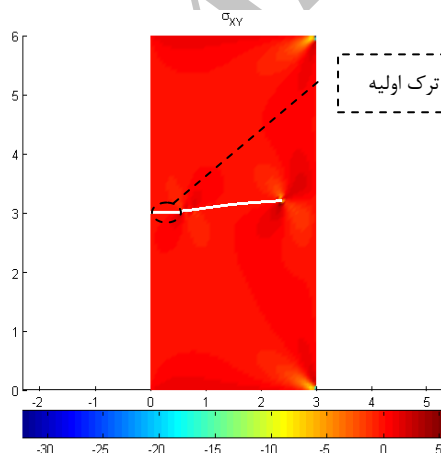




شکل ۱۴- چگونگی رشد ترک لبه‌ای تحت کشش

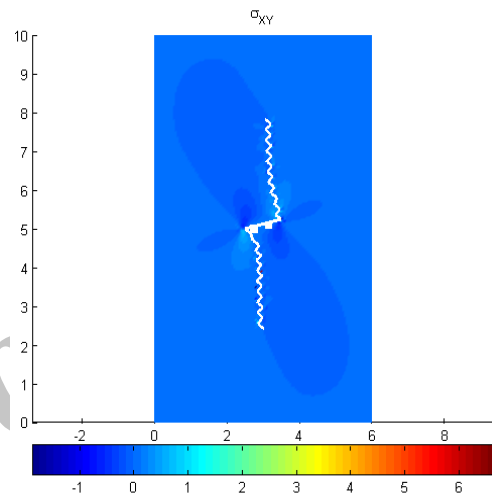
مثال هفتم مربوط است به بررسی گسترش ترک لبه‌ای تحت بارگذاری به صورت برشی و کشش بر وجه  $y$  (شکل ۱۵). این آنالیز برای ۲۰ تکرار در مدت زمانی ۳۲٫۷۴ ثانیه انجام گرفته است. هدف از بیان این مثال مقایسه‌ای با مثال ششم است. اختلاف به وجود آمده در نحوه رشد ترک از اختلاف در بارگذاری و در نتیجه تغییر در میزان رهایی انرژی کرنشی در جسم ترکدار و متعاقباً تشکیل فاکتورهای شدت تنش مربوط به هر دو مود شکست در نوک ترک می‌باشد. بنابراین رشد ترک به صورت کاملاً افقی نبوده و به صورت ترکیبی از هر دو مود شکست خواهد بود.

مثال هشتم به بررسی گسترش ترک لبه‌ای تحت کشش پرداخته می‌شود که در وسط دامنه قرار ندارد (شکل ۱۶). این مثال یکی از جنبه‌های توانمند روش در بررسی گسترش ترک است. همانگونه که می‌دانیم برای چنین حالتی روش تحلیلی در محاسبه فاکتورهای شدت تنش در حالت مود مرکب وجود ندارد. این آنالیز برای ۲۰ تکرار در مدت زمان ۳۲٫۴۴ ثانیه انجام شده است. در این مثال به علت وسط قرار نداشتن ترک لبه‌ای اولیه توزیع تنش در دامنه به گونه‌ای اتفاق می‌افتد که رشد ترک را به صورت منحنی‌وار و به سمت لبه‌ی نزدیک‌تر موجب می‌شود.



شکل ۱۵- نحوه رشد ترک لبه‌ای

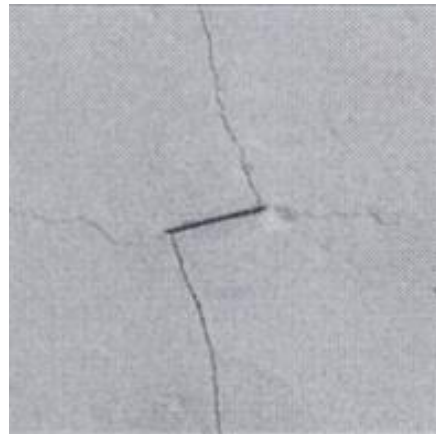
زمان ۲۱۶٫۵ ثانیه تحت بارگذاری فشاری واحد انجام شده است. نتایج نمونه آزمایشگاهی مکعب مستطیل که در این قسمت از آن برای صحت سنجی نتایج حاصل از مدلسازی عددی مورد استدلال قرار می‌گیرد بر روی نمونه مکعب مستطیل با ارتفاع ۲۰۰، عرض ۱۰۰ و ضخامت ۳۰ میلی‌متر انجام گرفته است. جنس مصالح مورد آزمایش به گونه‌ای انتخاب شده‌اند تا رفتار در محدوده الاستیک خطی و ترد را تضمین نماید. مشخصات مصالح گچی به کار رفته در نمونه مکعب مستطیل مورد آزمایش به شرح جدول ۲ است [۱۹]. مساله جالب در گسترش ترک با زاویه ۱۵ درجه نسبت به افق در آشفته‌گی ابتدایی آغاز رشد ترک از هر دو نوک اولیه ترک است که این مساله هم در نمونه آزمایشگاهی و هم در نمونه عددی مشاهده می‌شود.



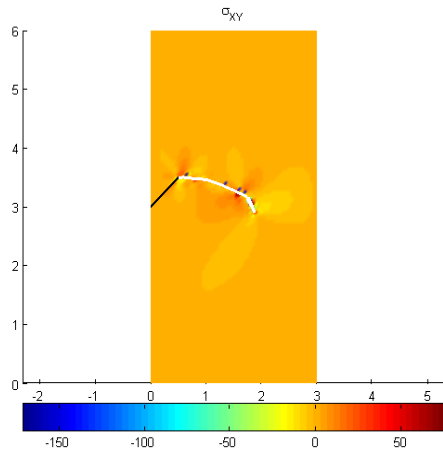
شکل ۱۶- رشد ترک مایل با زاویه ۱۵ درجه

### ۸-۲-۲- مدلسازی گسترش ترک لبه‌ای

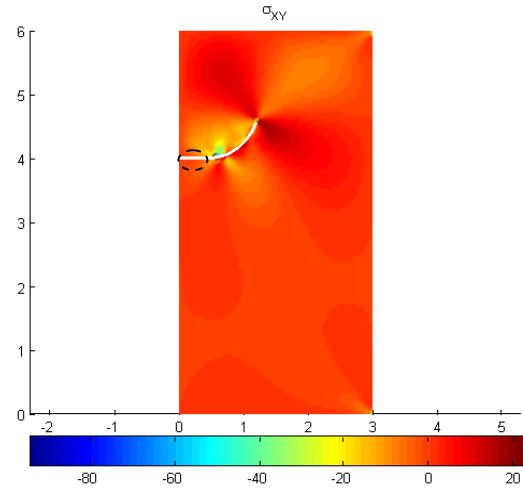
مثال ششم به مدلسازی رشد ترک لبه‌ای تحت کشش یکنواخت می‌پردازد. این مثال در ۱۵ تکرار و در مدت زمان ۳۲٫۵۸ ثانیه انجام شده است. در این حالت فاکتور شدت تنش مربوط به مود برشی صفر می‌باشد. بنابراین انتظار می‌رود تا ترک به صورت کاملاً افقی گسترش یافته و مود دوم شکست در رشد ترک تاثیری نداشته باشد.



شکل ۱۷- نمایش آزمایشگاهی رشد ترک با زاویه ۱۵ درجه [۱۹]



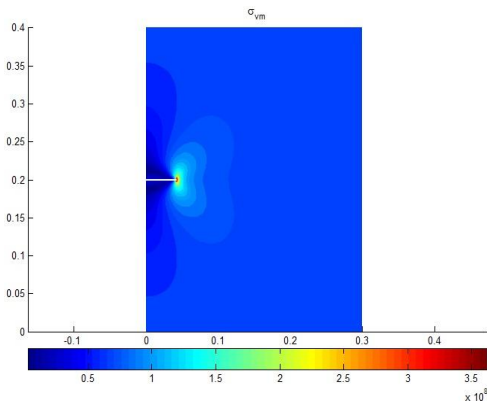
شکل ۱۸- مدلسازی رشد ترک لبه‌ای مایل نسبت به افق



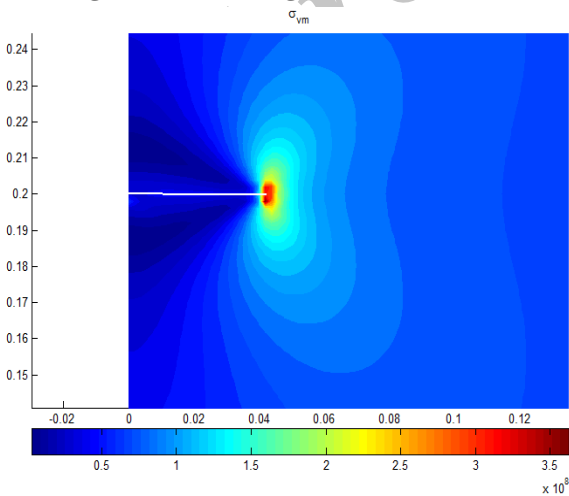
شکل ۱۶- نحوه رشد ترک لبه‌ای غیر وسطچین

### ۳-۸- مدلسازی رشد ترک خستگی

در این بخش بر اساس قانون پاریس در برآورد رشد کوچک ترک خستگی به مدلسازی رشد ترک خستگی پرداخته می‌شود. مثال رشد ترک خستگی با ۲۳۵ سیکل بارگذاری و در مدت زمان ۱۱۱۶٫۹۵۹۳ ثانیه انجام شده است. طول اولیه ترک ۰٫۱ و ابعاد دامنه ۰٫۳ در ۰٫۴ بوده همچنین اندازه المان‌ها ۱/۵۰۰ انتخاب شده است.



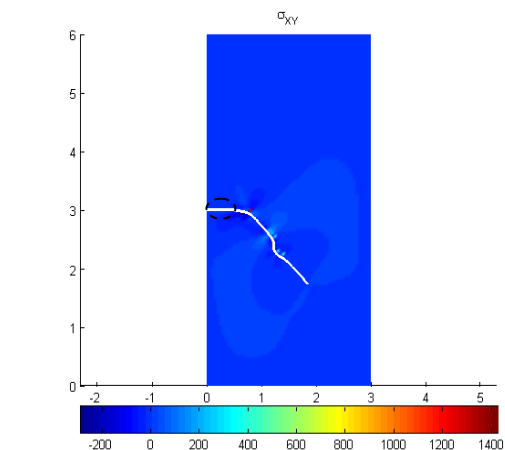
شکل ۱۹- تصویر کلی از رشد ترک خستگی



شکل ۲۰- تصویر بزرگنمایی شده رشد ترک خستگی

در این بخش حالتی از ترک لبه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد که شرایط مرزی متفاوتی برای دامنه در نظر گرفته شده است. در مثال نهم در حالتی که کف دامنه بسته شده است و بارگذاری به صورت برشی بر وجه  $y$  اعمال شده است، انجام گرفته است (شکل ۱۷). این آنالیز در ۴۰ تکرار و در مدت زمان ۵۰٫۱ ثانیه انجام شده است. به طور مسلم اعمال شرایط مرزی متفاوت باعث توزیع تنش به گونه‌ی دیگر خواهد شد. در نتیجه توزیع تنش متفاوت، محتوای انرژی جسم تغییر کرده، بنابراین فاکتورهای شدت تنش متفاوتی به دست خواهد آمد. نکته مشخص غالب بودن مود دوم شکست در رشد ترک است.

در مثال دهم به مدلسازی رشد ترک لبه‌ای با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق پرداخته می‌شود. در این مثال بارگذاری به صورت کشش یکنواخت بر وجه  $y$  می‌باشد. لازم به ذکر است این مثال با ۲۰ تکرار در مدت زمان ۳۸٫۳۹ ثانیه انجام شده است (شکل ۱۸). در این مثال حالتی خاص از ترکیب مودها در گسترش ترک اتفاق می‌افتد.



شکل ۱۷- رشد ترک لبه‌ای در شرایط مرزی متفاوت: درجات آزادی کف دامنه بسته شده‌اند

## ۹- نتیجه گیری

مطابق نتایج به دست آمده به توانایی های روش *XFEM* در بررسی مسائل شامل ناپیوستگی به ویژه ترک پی برده می شود. در این مطالعه، برای بارگذاری و اعمال شرایط مرزی دقیقاً همان شرایط و روشهای موجود در اجزای محدود استاندارد به کار گرفته می شود بنابراین هر مدلی به سادگی قابل بررسی است. همچنین مساله تکنیکی تنش در نوک ترک با اعمال توابع غنی سازی مربوط به نوک ترک برطرف می شود. به طور کلی با ایجاد درجات آزادی اضافی ترک یا هر ناپیوستگی به طور ضمنی به دامنه اجزای محدود اضافه می شوند. در نتیجه حرکت و تغییرات مربوط به ترک مستقل از تغییر شکل دامنه شبکه بندی شده اجزای محدود مدل شده است. مدت زمان به دست آمده در انجام محاسبات برای مدل سازی رشد ترک نشان دهنده قدرت روش در شبیه سازی گسترش ترک بدون شبکه بندی مجدد دامنه است. همچنین ترکیب روشهای مجموعه تراز و اجزای محدود توسعه یافته منتهی به یافتن مسیر رشد ترک به طور مناسب و صحیح می شود. همچنین رشد پایدار ترک خستگی با استفاده از قانون پاریسی نیز به درستی با این روش به دست آمده که یکی دیگر از ویژگیهای این مطالعه به شمار می آید. یکی دیگر از نتایج قابل توجه به دست آمده، در نحوه ی تاثیرگذار بودن نوع شرایط مرزی و قیدها در چگونگی مسیر رشد ترک است. شرایط مرزی و نوع تکیه گاه های مختلف با تغییر در محتوای انرژی، تغییر در مسیر رشد ترک را باعث می شوند. مقایسه بین نتایج عددی و آزمایشگاهی انطباق لازم را در گسترش ترک نشان می دهند، که این مساله اثبات کننده دقت نتایج عددی و توانایی روش مجموعه تراز در پیش بینی و برآورد مسیر رشد ترک است.

## ۱۰- ضمائم

در این بخش روابط استفاده شده به عنوان فضای کمکی تنش و جابجایی در محاسبه انتگرال متقابل  $M$  آورده می شود. فضای کمکی تنش به شرح زیر می باشند.

$$\sigma_{ij}^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad i, j = 1, 2$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$\left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$\left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\}$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$\left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\}$$

فضای کمکی جابجایی نیز به صورت زیر می باشد.

$$u_1 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \right\}$$

$$u_2 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ K_I \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \sin \theta) + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \right\}$$

## ۱۱- فهرست علائم

$\sigma_{ij}$	تانسور تنش
$\epsilon_{ij}$	تانسور کرنش
$w$	دانسیته انرژی کرنشی
$J$	انتگرال مستقل از مسیر
$I$	انتگرال متقابل
$h(x)$	تابع غنی سازی هویساید
$\phi_\alpha$	تابع غنی سازی نوک ترک
$\phi(x, t)$	تابع مجموعه تراز نوک ترک
$\psi(x, t)$	تابع مجموعه تراز بدنه ترک
$\theta_c$	زاویه رشد ترک
$E$	مدول الاستیسته
$\nu$	نسبت پواسون
$r$	فاصله از نوک ترک
$\theta$	زاویه نسبت به نوک ترک
$K_I$	فاکتور شدت تنش مود اول
$K_{II}$	فاکتور شدت تنش مود دوم
$N_j(x)$	توابع شکل اجزای محدود
$u^h(x)$	تقریب جابجایی

## ۱۲- مراجع

- [1] Babuska I, Melenk J (1997) The Partition of unity method. *International Journal for Numerical Method in Engineering*. 40: 727-758.
- [2] Belytschko T, Moes N, Usui S, Parimi C (2001) Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Method in Engineering* 50: 993-1013.
- [3] Fleming M, Chu A, Moran B, Belytschko T (1997) Enriched element-free methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40: 1483-1504.
- [4] Giner E, Sukumar N, Denia FD, Fuenmayor FJ (2008) Extended finite element method for fretting fatigue crack propagation. *International Journal of Solids and Structures*. 45: 5675-5687.

- [۱۳] نادری رضا، خادم الرسول عبدالغفور (۱۳۸۹) شبیه سازی گسترش ترک با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته. ۱۳۰۱۵۰. دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [14] K.Mysore OT, Morgan G (2011) NURBS representational strategies for tracking moving boundaries and topological changes during phase evolution. *Comput Methods Appl Mech. Engrg.* 200: 2594–2610.
- [۱۵] حسنی بهروز، گنجعلی احمد، خادم الرسول عبدالغفور (۱۳۹۰) برآورد خطای موجود در تحلیل ایزوژئومتری یک صفحه ترکدار تحت کشش.
- [16] Ritchie RO (1977) Influence of microstructure on near-threshold fatigue-crack propagation in ultra-high strength steel. *Metal Science.* 11:368–381.
- [17] Radhakrishnan VM (1979) Parameter representation of fatigue crack growth. *Engineering Fracture Mechanics.* 11: 359–372.
- [18] Spagnoli A (2005) Self-similarity and fractals in the Paris range of fatigue crack growth. *Mechanics of Materials.* 37:5 19–529.
- [۱۹] میرزایی نصیرآباد حسین، کاکایی رضا، حسنی بهروز (۱۳۸۷) نحوه رشد و اتصال ترک ها در محیط های سنگی با روش عددی بدون مش گالرکین و اعتبار سنجی آن با مطالعات آزمایشگاهی.
- [5] Sutradhar A, Glaucio HP (2004) Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed-mode cracks by the interaction integral method. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 28: 1335–1350.
- [6] Mohammadi S (2008) *Extended finite element method for fracture Analysis of structures.* Blackwell Publishing, Garsington Road, Oxford UK.
- [7] Chen FHK, Shield RT (1977) Conservation laws in elasticity of the J-integral type. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP).* 28: 1–22.
- [8] Yau JF, Wang SS, Corten HT (1980) A mixed mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics.* 47: 335–341.
- [9] Chen Y, Lee JD, Eskandarian Azim (2006) *Meshless methods in solid mechanics.* Springer Publishing, USA.
- [۱۰] جاویدراد فرهاد (۱۳۸۳) مکانیک شکست و کاربرد آن در مهندسی. انتشارات صنایع هوافضا، تهران.
- [11] Xiangqiao Y (2006) Stress intensives and propagation of mixed mode cracks. *Engineering Failure Analysis.* 31: 1022–1027.
- [12] Yang Z (2006) Fully automatic modeling of mixed-mode crack propagation using scaled boundary finite element method. *Engineering fracture mechanics.* 73: 1711–1731.

Archive of SID