



## مدل سازی عددی جریان آرام و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی به همراه اثرات ناحیه ورودی

علی جلالی<sup>۱\*</sup>، محمد حسن کیهانی<sup>۲</sup> و محمود نوروزی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

<sup>۲</sup>دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

<sup>۳</sup>استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

### چکیده

در تحقیق حاضر، با استفاده از معادله متشکله گزیکس به مدل سازی سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال های مستطیلی پرداخته شده است. اکثر تحقیقات انجام شده در این زمینه، معطوف به ناحیه توسعه یافته جریان می باشد که با توجه به فقدان تحقیقی جامع در زمینه جریان سیالات ویسکوالاستیک در حال توسعه، این تحقیق ضروری به نظر می رسد. معادلات حاکم بر مسئله معادلات بقا و همچنین معادله متشکله گزیکس در حالت دائم می باشند که با استفاده از روش تفاضل محدود، گسسته سازی شده و با به کارگیری روش های شبکه جابجا شده و تراکم پذیری مصنوعی مورد تحلیل قرار گرفته اند. با استفاده از معادله متشکله مورد استفاده که در آن اختلاف تنش نرمال دوم غیر صفر می باشد، جریان های ثانویه در مقاطع عرضی کانال تشکیل شده و قادر به مدل سازی می باشد. از دیگر مزیت های این تحقیق فرض برخی از خواص سیال به صورت تابعی از دما می باشد. زیرا با توجه به اینکه گروه غالبی از سیالات ویسکوالاستیک، مذاب های پلیمری می باشند و در این حالت تفاوت دمای زیادی مشاهده می شود و از طرفی با توجه به حساسیت برخی خواص مواد ویسکوالاستیک به دما، در حل معادله انرژی این فرضیه ضروری به نظر می رسد. نتایج به دست آمده در ناحیه توسعه یافته از هماهنگی خوبی با دیگر نتایج گزارش شده در این زمینه برخوردار می باشد.

**کلمات کلیدی:** سیال ویسکوالاستیک؛ مدل سازی سه بعدی؛ معادله متشکله گزیکس؛ ناحیه در حال توسعه؛ خواص تابع دما.

### ۱- مقدمه

نیوتنی و در پی آن وقوع پدیده هایی خاص، معادلات حاکم بر سیالات نیوتنی قادر به مدل سازی آنها نمی باشد. سیالات غیر نیوتنی خود به گروه های مختلفی تقسیم می شوند که از میان

سیالات غیر نیوتنی، شاخه ای متفاوت از سیالات بوده که به دلیل وجود برخی خواص فیزیکی غیر مشابه با سیالات

\* نویسنده مسئول. تلفن: ۰۹۱۲۲۷۳۰۰۰۳

آدرس پست الکترونیک: Ali\_Jalali@Shahroodut.ac.ir

وجود اختلاف در مقادیر تنش‌های نرمال و در پی آن تشکیل جریان‌های ثانویه در مقاطع عمود بر جریان اصلی در کانال-های غیر دایروی می‌شود که این مطلب ویژگی‌های خاصی از جمله افزایش انتقال حرارت و جرم را در جریان سیال ویسکوالاستیک ایجاد کرده است [۱ و ۲]. تاکنون تحقیقات زیادی به منظور مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در هندسه‌های مختلف با استفاده از معادلات متشکله متنوعی ارائه شده است که از این میان می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

در سال ۱۹۶۵ گزیکس [۳] به بررسی جریان‌های ثانویه در کانال‌های بیضوی پرداخت و در ادامه محققین دیگری جریان سیال ویسکوالاستیک و جریان‌های ثانویه را در کانال-های مستطیلی مدل‌سازی نمودند که در تمامی آنها جریان-های ثانویه از نواحی با تنش برشی زیاد به سمت نواحی با تنش برشی کم جریان می‌یابد و همچنین طبق نتایج ارائه شده در تحقیقات ایشان، در کانال‌هایی با سطح مقطع بیضوی، چهار جریان ثانویه و در کانال‌های مستطیلی، هشت جریان ثانویه شکل می‌گیرد. دبات و همکارانش [۴] با استفاده از روش‌های تجربی به مشاهده و بررسی جریان‌های ثانویه پرداختند و همچنین در تحقیقی دیگر [۵] جریان سیال ویسکوالاستیک را با استفاده از معادله متشکله گزیکس مدل‌سازی نمودند که هماهنگی خوبی بین نتایج به دست آمده از دو تحقیق گزارش شده است. در سال ۲۰۰۷ ژو و همکارانش [۶] به بررسی عوامل تشکیل و جهت چرخش جریان‌های ثانویه در جریان سیالات ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی پرداختند. در تحقیقات ایشان که با استفاده از معادله متشکله گزیکس انجام شده است، اختلاف تنش نرمال دوم عامل اصلی بوجود آمدن جریان‌های ثانویه و نحوه تغییرات آن نسبت به لزجت برشی عامل موثر در جهت چرخش جریان‌های ثانویه بیان شده‌اند. تحقیقات بیشمار دیگری نیز مربوط به جریان سیال ویسکوالاستیک و مدل-سازی جریان‌های ثانویه انجام شده است که از جمله می‌توان به بوتوا [۷] و تانو [۸] و غیره اشاره نمود. اکثر تحقیقات انجام شده در زمینه جریان سیال ویسکوالاستیک معطوف به ناحیه توسعه یافته می‌باشد و در تحقیقات معدودی که در ناحیه در حال توسعه انجام شده است [۹ و ۱۰]، تحقیقات به صورت دوبعدی بوده که در این حالت مدل‌سازی جریان‌های

آنها سیالات ویسکوالاستیک به دلیل افزایش موارد استفاده در صنعت، به خصوص صنایع پتروشیمی و پلیمر، بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته است و از اینرو جریان اینگونه سیالات در هندسه‌ها و شرایط مختلفی مورد تحلیل عددی و تجربی محققین واقع شده است.

تاکنون معادلات متشکله مختلفی جهت مدل‌سازی عبارت تنش سیالات ویسکوالاستیک پیشنهاد شده است که هر کدام بنا به قابلیت مدل‌سازی آنها، در شرایط متفاوتی و برای سیالات خاصی مورد استفاده قرار می‌گیرند. البته در این بین بعضی از معادلات فقط در مقاصد خاص قابل استفاده بوده و در بقیه شرایط بعضاً منجر به جواب‌های غیر فیزیکی می‌شود.

از میان ساده‌ترین معادلات متشکله پیشنهاد شده مربوط به سیالات ویسکوالاستیک، می‌توان به معادلات متشکله نیوتنی تعمیم یافته<sup>۱</sup> که در آن لزجت سیال به جای ثابت بودن، تنها تابعی از نرخ برش می‌باشد، اشاره کرد که از این معادله متشکله بیشتر جهت مدل‌سازی خاصیت سیال رقیق شونده<sup>۲</sup> در سیالات ویسکوالاستیک استفاده می‌شود. معادله متشکله ماکسول<sup>۳</sup> نیز یکی از معادلات متشکله خطی می‌باشد که جهت مدل‌سازی جریان سیالات ویسکوالاستیک غیر دائم که تغییرات سیال از شرایط اولیه‌اش زیاد نمی‌باشد، استفاده می‌شود. با گذشت زمان، معادلات متشکله غیرخطی و کامل-تری جهت مدل‌سازی سیالات ویسکوالاستیک مورد استفاده قرار گرفته است که از میان آنها می‌توان به معادلات متشکله اولدروید<sup>۴</sup>، کریمینال اریکسون فیبلی<sup>۵</sup>، راینر-ریولین<sup>۶</sup>، گزیکس<sup>۷</sup> و فن تین<sup>۸</sup> اشاره نمود. این معادلات نسبت به معادلات متشکله خطی معادلات کامل‌تری بوده و قادر به مدل‌سازی پدیده‌های بیشتری از سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد.

همانطور که گفته شد، درشت ملکول بودن سیالات ویسکوالاستیک باعث وقوع برخی پدیده‌های خاص مانند

<sup>1</sup> Generalized Newtonian Constitutive Equation

<sup>2</sup> Shear Thinning

<sup>3</sup> Maxwell

<sup>4</sup> Oldroyd

<sup>5</sup> Criminal Erikson Fibly

<sup>6</sup> Reiner-Rivlin

<sup>7</sup> Giesekus

<sup>8</sup> Phan-Thien-Tanner

$$\tau + \lambda_h \tau_{p(1)} + \alpha \frac{\lambda_h}{\eta_p} (\tau_p \cdot \tau_p) = \eta_p \gamma_{(1)} \quad (4)$$

$$\gamma_{(1)} = (\bar{\nabla} \bar{V} + \bar{\nabla} \bar{V}^T)$$

که در آن  $\eta_p$  لزجت محلول،  $\lambda_h$  زمان آسودگی<sup>۱</sup> محلول و  $\alpha$  ضریب پویایی<sup>۲</sup> محلول می‌باشد.

با فرض مقادیر پایه برای سرعت، طول، لزجت، ظرفیت حرارتی و ضریب رسانش، معادلات بقا و معادله متشکله در حالت جریان دائم و تراکم ناپذیر به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V}^* = 0 \quad (5)$$

$$\bar{V}^* \cdot \bar{\nabla} \bar{V}^* = \frac{1}{Re} (-\bar{\nabla} P^* +$$

$$\frac{\beta}{1-\beta} \bar{\nabla}^2 \bar{V}^* + \bar{\nabla} \cdot \tau_p^*) \quad (6)$$

$$\bar{V}^* \cdot \bar{\nabla} T^* = \frac{1}{Re \cdot Pr} (\bar{\nabla}^2 T^* + Br \sigma^* : \bar{\nabla} \bar{V}^*)$$

$$Re = \frac{\rho W_{ref} D_h}{\eta}, Pr = \frac{C_p \eta}{K}, Br = \frac{\eta W_{ref}^2}{K(T_{in} - T_{wall})} \quad (7)$$

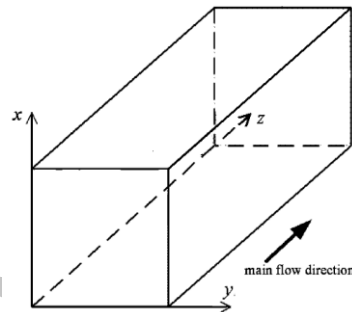
$$\tau_p^* = -W \alpha (\tau_{(1)}^* + \alpha (\tau_p^* \cdot \tau_p^*)) + \gamma_{(1)}^*$$

$$\gamma_{(1)}^* = (\bar{\nabla} \bar{V}^* + \bar{\nabla} \bar{V}^{*T}) \quad (8)$$

$$We = \frac{\lambda_h W_{ref}}{D_h}, \beta = \frac{\eta_s}{\eta}, \eta = \eta_s + \eta_p$$

که در آن  $We$  عدد وایزنبرگ<sup>۳</sup>،  $Br$  عدد برینکمن<sup>۴</sup>،  $Re$  عدد رینولدز<sup>۵</sup>،  $Pr$  عدد پرانتل<sup>۶</sup>،  $\beta$  نسبت لزجت حلال به لزجت کل و بالانویس<sup>\*</sup>، نشان دهنده مقادیر بی‌بعد کمیت‌ها می‌باشد. همچنین در معادله انرژی<sup>۷</sup>، طرف سمت چپ معادله، معرف اثر جابجایی<sup>۸</sup>، جمله اول سمت راست معادله، معرف اثر پخش<sup>۸</sup> و قسمت دوم سمت راست معرف کار نیروی تنش می‌باشد. این قسمت در معادله انرژی به صورت یک منبع تولید یا ذخیره انرژی ظاهر می‌شود که اثرات آن در ادامه بیان خواهد شد.

ثانویه مقدور نمی‌باشد. بدین منظور در این تحقیق، مدل-سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه با استفاده از معادله متشکله گزیکس که بر اساس دیدگاه مولکولی به-دست آمده و قادر به ارائه رفتار توانی برای مقادیر ویسکوزیته و ضرایب اختلاف تنش نرمال اول و دوم و همچنین پیش-بینی جریان‌های ثانویه می‌باشد، مدنظر قرار گرفته است.



شکل ۱- هندسه مورد بررسی در تحقیق حاضر

## ۲- معادلات حاکم

در شکل ۱، هندسه مورد بررسی در این تحقیق نشان داده شده است که در این حالت ابعاد سطح مقطع کانال با هم برابر بوده و طول کانال در حدود ۱۰ برابر طول مشخصه در نظر گرفته شده است. همچنین معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر شامل معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla}) \bar{V} \right) = -\bar{\nabla} p + \eta_s \nabla^2 \bar{V} + \bar{\nabla} \cdot \tau_p \quad (2)$$

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} T \right) = \bar{\nabla} \cdot (k \bar{\nabla} T) + \sigma : \bar{\nabla} \bar{V} \quad (3)$$

که در آن  $\eta_s$  لزجت حلال،  $\tau_p$  تنش حلال، تنش ماده حل شونده (پلیمری)،  $\bar{V}$  بردار سرعت،  $\rho$  چگالی سیال،  $p$  فشار استاتیکی،  $c$  ظرفیت ویژه حرارتی و  $k$  ضریب رسانش سیال در نرخ برش صفر می‌باشد. همچنین معادله متشکله گزیکس جهت مدل‌سازی عبارت تنش به شکل زیر نشان داده شده است.

<sup>1</sup> Relaxation Time

<sup>2</sup> Mobility Parameter

<sup>3</sup> Weissenberg Number

<sup>4</sup> Brinkman Number

<sup>5</sup> Reynolds Number

<sup>6</sup> Prandtl Number

<sup>7</sup> Convection Term

<sup>8</sup> Diffusion Term

## ۳- روش عددی

همانطور که در معادلات فوق دیده می‌شود، هیچ ارتباط صریحی بین معادلات حاکم وجود نداشته و تنها راه حل موجود، حل ضمنی معادلات می‌باشد که با توجه به غیر خطی بودن آنها، این کار نسبتاً غیر ممکن به نظر می‌رسد. بدین منظور با استفاده از روش تراکم‌پذیری مصنوعی، یک عبارت گذرای سرعت  $(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t})$  به معادلات ممنتوم و یک عبارت گذرای فشار  $(\frac{\partial p}{\partial t})$  به معادله پیوستگی اضافه می‌نماییم. در این حالت معادلات ظاهراً به صورت گذرا تبدیل شده است ولی با رسیدن به حل دائم مسئله، تمامی جمله‌های افزوده شده، به سمت صفر میل کرده و جواب دائم مسئله به دست می‌آید. از طرف دیگر هیچ شرط مرزی مناسبی بر روی مرزها برای فشار موجود نمی‌باشد که برای رهایی از این مشکل نیز، از روش شبکه جابجا شده استفاده شده است که در این حالت با تعریف دو شبکه در دامنه حل، سرعت در جهت  $x$  بر روی گره‌های فرد راستای  $x$ ، سرعت در جهت  $y$  بر روی گره‌های فرد راستای  $y$  و سرعت در جهت  $z$  بر روی گره‌های فرد راستای  $z$  و بقیه مقادیر بر روی گره‌های زوج تعریف می‌شود. با توجه به تقارن دامنه حل و به منظور صرفه‌جویی در هزینه محاسبات، فضای محاسباتی را به یک چهارم دامنه حل کاهش می‌دهیم که در این حالت شرایط مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی کانال به صورت زیر تعریف می‌شود. (جدول ۱)

جدول ۱- شرایط مرزی جریان و انتقال حرارت اعمال شده

در مسئله					
	دیوار	صفحه تقارن	صفحه تقارن	ورودی	خروجی
	مرز جامد	$x=a$	$y=a$		
$\frac{\partial u}{\partial z}=0$	0	$u^+ = u^-$	$u^+ = -u^-$	0	u
$\frac{\partial v}{\partial z}=0$	0	$v^+ = -v^-$	$v^+ = v^-$	0	v
$\frac{\partial w}{\partial z}=0$	0	$w^+ = w^-$	$w^+ = w^-$	1	w
$\frac{\partial p}{\partial z}=cte$	-	$p^+ = p^-$	$p^+ = p^-$	-	p
$\frac{\partial T}{\partial z}=0$	T = cte	$T^+ = T^-$	$T^+ = T^-$	T = T <sub>0</sub>	T

در مورد تنش‌های الاستیک هم شرایط تقارن در مرزهای تقارن اعمال شده است. لازم بذکر است که معادله انتقال حرارت با فرض دمای دیواره‌ها ثابت و در اعداد برینکمن بزرگتر از یک، که به معنی بیشتر بودن دمای ورودی سیال از دمای دیواره‌ها می‌باشد، حل شده است.

## ۴- نتایج

در ابتدای تحلیل، دامنه حل با شبکه‌بندی‌های متفاوتی با استفاده از یک کامپیوتر ۲ هسته با پردازشگر ۳.۲ گیگا هرتز و حافظه اصلی ۴ گیگا بایت، همانند جدول ۲ مورد بررسی قرار گرفت که از یک طرف استقلال نتایج از شبکه‌بندی لحاظ شود و از طرف دیگر جواب‌های به دست آمده دارای دقت قابل قبولی باشند. در این میان، شبکه  $34 \times 34 \times 34$  که به علت هندسه یکنواخت مسئله، تمامی سلول‌های آن مستطیلی بوده، به عنوان شبکه بهینه مدنظر قرار گرفته است. لازم بذکر است که بیشینه خطا بر حسب معادله پیوستگی و پایستگی مقدار دبی ورودی، حدود یک درصد است که ریزتر کردن شبکه و در پی آن کمتر کردن خطا از حد مورد نظر، باعث افزایش چشمگیر هزینه محاسبات می‌شود.

جدول ۲- مقادیر خطا و زمان محاسبه برای شبکه‌بندی‌های

زمان محاسبه (Second*GHz)	مختلف	
	تعداد سلول‌های شبکه	درصد خطا
۲۸۱۰	$14 \times 14 \times 104$	۱۳/۵۱
۱۳۵۳۷۰	$24 \times 24 \times 204$	۳/۲۲
۲۵۷۶۲۰	$34 \times 34 \times 304$	۱/۱۰۲
۵۳۵۷۸۰	$44 \times 44 \times 404$	۰/۷۱۵

همانطور که گفته شد، یکی از پدیده‌های متفاوت در جریان سیال ویسکوالاستیک در مقاطع غیر دایروی، تشکیل جریان‌های ثانویه در مقاطع عمود بر جریان اصلی می‌باشد. در ذیل به اختصار به علت بوجود آمدن این جریان‌ها و بعضی از شروط مربوطه اشاره می‌شود [۶].

حال با توجه به معادله (۱۳)، جریان‌های ثانویه وابسته به یک نیروی خارجی که به علت وجود اختلاف تنش نرمال دوم می‌باشد، نوشته شده است.

حال اگر  $f$  را به عنوان یک نیروی پایستار فرض نماییم در این حالت داریم  $\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$  که در این شرایط کار انجام شده توسط  $f$  در هر چرخه بسته صفر می‌شود که این بدان معنی است که هیچ جریان ثانویه‌ای باقی نمی‌ماند و در نهایت همه آنها حذف می‌شوند. حال اگر فرض نماییم

$$\begin{aligned} C &= \nabla \times f = \nabla M \times \nabla w \\ M &= \nabla \cdot (\psi_2(\dot{\gamma}) \nabla w) \end{aligned} \quad (15)$$

همچنین با تعریف پارامتری دیگر به شکل  $\theta(\dot{\gamma}) = \frac{\psi_2(\dot{\gamma})}{\mu_s(\dot{\gamma})}$  خواهیم داشت:

$$M = \theta(\dot{\gamma}) \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_s(\dot{\gamma}) \theta'(\dot{\gamma}) \nabla \dot{\gamma} \cdot \nabla w \quad (16)$$

معادله (۱۵) دو شرط کافی برای مستقیم بودن جریان و یا به عبارت دیگر عدم وجود جریان‌های ثانویه را در مسیر جریان بیان می‌نماید. در حالت اول اگر  $\psi_2$  ضریبی ثابت از  $\mu$  باشد،  $\theta'(\dot{\gamma})$  برابر با صفر می‌شود و در نهایت  $C$  صفر شده و هیچ جریان ثانویه تشکیل نمی‌شود که این یکی از شرایط اولدرویید<sup>۱</sup> [۱۱] می‌باشد. حالت دیگر در هندسه‌های متقارن محوری مانند مقاطع مدور اتفاق می‌افتد. که در آنها  $M$  تنها تابعی از  $\dot{\gamma}$  است. در این حالت تمامی بردارهای  $\vec{M}$  و  $\vec{\nabla} \dot{\gamma}$  در راستای قطری می‌باشند که ضرب خارجی آنها برابر صفر بوده و  $C$  در نهایت صفر می‌شود. همانطور که گفته شد، عدم تطابق شرایط در این تحقیق، با شرایط مذکور بررسی شده است و جریان‌های ثانویه قابل مشاهده می‌باشند.

#### ۴-۲- نتایج حاصل از حل عددی

به منظور حصول اطمینان از توسعه یافته‌گی جریان، همانطور که گفته شد طول کانال در حدود ۱۰ برابر قطر هیدرولیکی آن در نظر گرفت شده است و ضرایب ثابت فرض شده به شرح زیر می‌باشد.

#### ۴-۱- مکانیزم تشکیل جریان‌های ثانویه

با فرض جریان توسعه یافته و با صرف نظر از اینرسی و دیگر نیروهای حجمی، معادله ممنتوم در راستای  $X$  و  $Y$  به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} 0 &= -\vec{\nabla} p + \mu_s \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}^2 + \vec{\nabla} \cdot \tau_p \\ \vec{\nabla} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \vec{V} = (u, v), \quad \tau_p = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

حال فرض می‌نماییم که  $\tau_p^*$  نشانگر تانسور تنش در محورهای اصلی باشد، در اینصورت داریم:

$$\tau_p^* = \begin{bmatrix} \tau_{22} & 0 \\ 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} = \tau_{33} I + \begin{bmatrix} \psi_2 \dot{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در آن  $I$  تانسور واحد،  $\dot{\gamma} = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$  و  $\psi_2 = \frac{\tau_{22} - \tau_{33}}{\dot{\gamma}^2}$  ضریب اختلاف تنش نرمال دوم می‌باشد. حال می‌توان تانسور تنش را به حالت زیر بازنویسی کرد:

$$\tau_p = R \cdot \tau_p^* \cdot R^T = \tau_{33} I + \begin{bmatrix} \psi_2 w_x^2 & \psi_2 w_x w_y \\ \psi_2 w_x w_y & \psi_2 w_y^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در آن  $R$  تانسور چرخش بوده و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (12)$$

و  $\varphi$  زاویه بین تانسور تنش و محورهای اصلی می‌باشد. با تعریف  $\vec{p} = p - \tau_{33}$  و جایگذاری تنش به شکل معادله (۱۱)، معادله ممنتوم به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} 0 &= -\vec{\nabla} \vec{p} + \mu_s \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \vec{f} \\ \vec{f} &= \vec{\nabla} \cdot (\tau_p - \tau_{33} I) = \vec{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \psi_2 w_x^2 & \psi_2 w_x w_y \\ \psi_2 w_x w_y & \psi_2 w_y^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

و همچنین معادله ممنتوم در جهت  $Z$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \vec{\nabla} \cdot (\mu_s \vec{\nabla} w) \quad (14)$$

<sup>1</sup> Oldroyd Conditions

چنانچه پیشتر بیان شد، در جریان سیال ویسکوالاستیک توسعه یافته، به علت وجود اختلاف تنش نرمال دوم، علاوه بر جریان اصلی، جریان‌های ثانویه‌ای در مقاطع عمود بر جریان اصلی شکل می‌گیرند. به منظور مشخص شدن شدت جریان‌های عرضی نسبت به جریان محوری، پارامتری را با عنوان  $S$  به شکل زیر تعریف می‌نماییم.

$$S = \frac{\sqrt{(u^2 + v^2)}}{w_m} \quad (17)$$

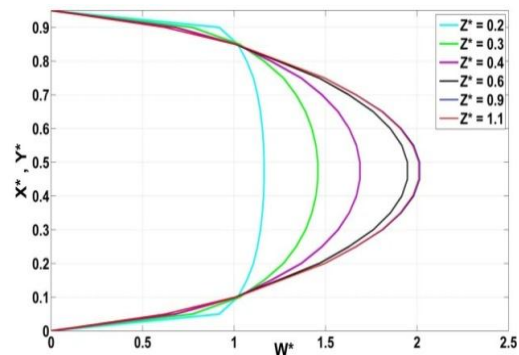
همانطور که در شکل‌های ۳ و ۴ مشخص است، شدت جریان‌های عرضی از مقداری در حدود ۰.۹ جریان اصلی در اوایل کانال که ناحیه در حال توسعه می‌باشد شروع شده و با پیشروی در راستای محور کانال و شکل‌گیری لایه مرزی از شدت این جریان‌های عرضی کاسته شده و در نهایت به مقدار ثابتی رسیده و تا انتهای کانال با همین مقدار ادامه می‌یابد. لازم به ذکر است که با توجه به اینکه شدت این جریان‌های عرضی در اوایل کانال بسیار زیاد است، ولی در این ناحیه و تا رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، هیچ جریان ثانویه‌ای در کانال شکل نمی‌گیرد. اندکی پس از رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، در هر یک چهارم کانال دو جریان ثانویه متقارن ناهمگرد شکل گرفته و تا انتهای کانال در شدت و شکل ظاهری آنها هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود. در جریان سیال نیوتنی نیز در اوایل کانال و در محدوده در حال توسعه، شدت جریان‌های عرضی به همین مقدار بوده ولی با رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافتگی، مقدار اختلاف تنش نرمال دوم به حدود  $10^{-7}$  رسیده و هیچ جریان ثانویه‌ای شکل نگرفته و همچنین شدت جریان‌های عرضی به حدود  $10^{-10}$  جریان اصلی می‌رسد.

مطلب قابل ذکر دیگر، تغییر شدت جریان‌های عرضی با توجه به تغییرات  $\alpha$  و  $\beta$  می‌باشد. در حقیقت با افزایش  $\beta$  درصد لزجت حلال به لزجت کل بیشتر شده و به این دلیل خواص الاستیک کم می‌شود و از طرف دیگر با افزایش  $\alpha$ ، که در حقیقت تاثیر معکوس بر مقدار  $\lambda_H$  دارد [۴]، مقدار خواص الاستیک کم می‌شود. از اینرو همانطور که در جدول ۴ نشان داده شده است، با افزایش این پارامترها مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و در نهایت شدت جریان‌های عرضی کاهش می‌یابد که این موضوع نیز در مرجع [۶] نیز بیان شده

جدول ۳- مقادیر فرض شده کمیت‌ها در این تحقیق

۰.۱	$D_h$ (m)	۰.۰۸	$k_0$ ( $\frac{W}{mK}$ )	۰.۴	$w_{ref}$ ( $\frac{m}{s}$ )
۱۰	Re	۰/۰۰۱۸	$k_s^*$ ( $\frac{1}{C}$ )	۳۰	$T_{wall}$ (C)
۰/۰۴	We	۰/۴	$C_{p0}$ ( $\frac{J}{kgK}$ )	۱۲۵	$\rho$ ( $\frac{kg}{m^3}$ )
۱۷۲۰	$\alpha$ (K)	۱/۲۱۲۲	$C_{p0}^*$ ( $\frac{1}{C}$ )	۰/۱	$\eta_0$ (Pas)
۰/۷۷۵	$k_0^*$ ( $\frac{1}{C}$ )	-۰/۰۰۱۱۲	$C_{ps}^*$ ( $\frac{1}{C}$ )	۰/۰۱	$\lambda_0$ (s)

همانطور که در شکل ۲ دیده می‌شود، پروفیل سرعت محوری، از ابتدای کانال که به صورت یکنواخت فرض شده است شروع شده و با پیشروی در راستای کانال و تشکیل لایه مرزی، به تدریج به حالت سهمی شکل خود می‌رسد. با کامل شدن لایه مرزی و رسیدن به ناحیه توسعه یافته که این حالت در حدود  $z^* = 1$  اتفاق می‌افتد، پروفیل سرعت محوری به حالت دائم خود رسیده و تا پایان کانال به همین شکل باقی می‌ماند. لازم به ذکر است که به دلیل تقارن هندسی موجود در دو راستای  $X$  و  $Y$ ، پروفیل سرعت محوری در راستای این دو محور کاملاً شبیه به هم می‌باشد. مطلب مهم دیگر فرض عدم لغزش برای جریان بر روی دیواره‌ها می‌باشد. در مورد سیالات ویسکوالاستیک، شرط مرزی عدم لغزش لزوماً در همه موارد درست نبوده [۱۲] و [۱۳] و شرایط مرزی دیگری هم از جمله شرط سرعت ثابت و یا سرعت ضربی از تنش بر روی مرزهای جامد قابل فرض می‌باشد [۱۴ و ۱۵]. ولی در این تحقیق شرط مرزی سرعت صفر برای مرزهای جامد در نظر گرفته شده است که شرط مناسبی می‌باشد.



شکل ۲- پروفیل سرعت محوری در مقاطع مختلف کانال

جریان توسعه یافته و لزجت اصلی سیال که حاصل تقسیم تنش برشی بر نرخ برش می‌باشد، نشان داده شده است. همانطور که مشخص است، نرخ برش در اطراف دیواره‌ها که محدوده لایه مرزی می‌باشد، از شدت بیشتری نسبت به مرکز کانال برخوردار می‌باشد ولی در مقابل با توجه به خاصیت سیال رقیق شونده در این سیالات، بیشترین مقدار لزجت سیال در وسط کانال که کمترین مقدار نرخ برش را دارا می‌باشد، مشاهده می‌شود.

#### جدول ۴- مقادیر بیشینه اختلاف تنش نرمال دوم در

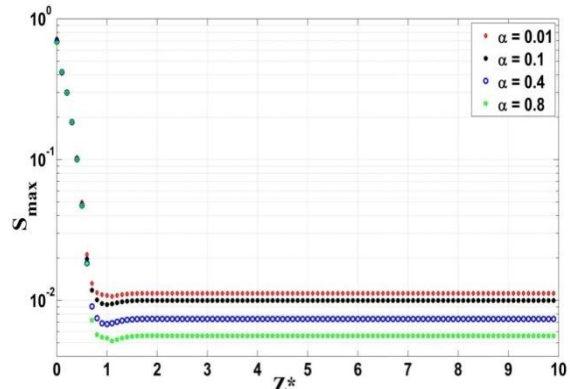
ناحیه توسعه یافته به ازای تغییرات  $\alpha$  و  $\beta$

$\alpha$	0.01	0.1	0.2	0.6	0.8
$\text{Max}(\frac{N_2 \times \lambda}{\mu})$	0.288	0.265	0.244	0.182	0.158
$\beta$	0.01	0.1	0.2	0.5	0.9
$\text{Max}(\frac{N_2 \times \lambda}{\mu})$	0.251	0.244	0.241	0.224	0.205

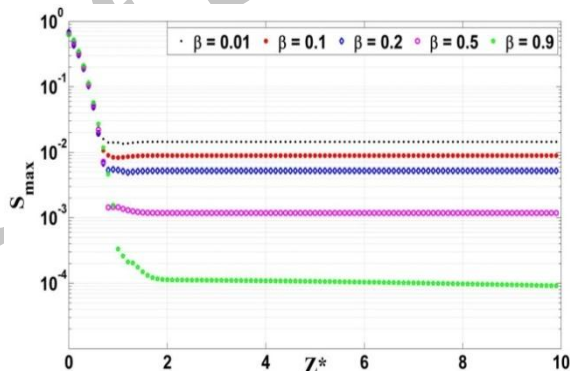
تغییرات اختلاف تنش نرمال دوم سیال نیز در راستای کانال از ابتدا تا ناحیه توسعه یافته در شکل‌های ۶ نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود، نواحی اطراف دیواره‌ها دارای تمرکز بیشتری از اختلاف تنش نرمال دوم بوده و این تمرکز، با پیشروی در راستای کانال به سمت مرکز کانال کشیده شده ولی از شدت کلی اختلاف تنش نرمال دوم کاسته می‌شود. مطلب دیگر یکسان بودن اندازه و تفاوت ضریب اختلاف تنش نرمال دوم در محدوده‌های مختلف مقاطع عرضی کانال بوده که دقیقاً همین مطلب باعث بوجود آمده جریان‌های ثانویه می‌باشد. در جریان سیال نیوتنی مشابه در یک کانال، اولاً شدت اختلاف تنش نرمال دوم در مقاطع عرضی کانال بسیار کم بوده و همچنین این اختلاف تنش‌ها هیچ‌گونه مناسبتی جهت تشکیل جریان‌های ثانویه ندارند.

همانطور که گفته شد، در این تحقیق علاوه بر حل هم-زمان معادله انرژی به همراه معادلات بقا، برخی از خواص سیال از قبیل لزجت، ضریب رسانش، ظرفیت حرارتی ویژه و زمان مشخصه، تابعی از دمای نقطه‌ای سیال در نظر گرفته

است. البته این کاهش به دلیل شدت بالای جریان‌های عرضی در ناحیه در حال توسعه، چندان مشهود نمی‌باشد.

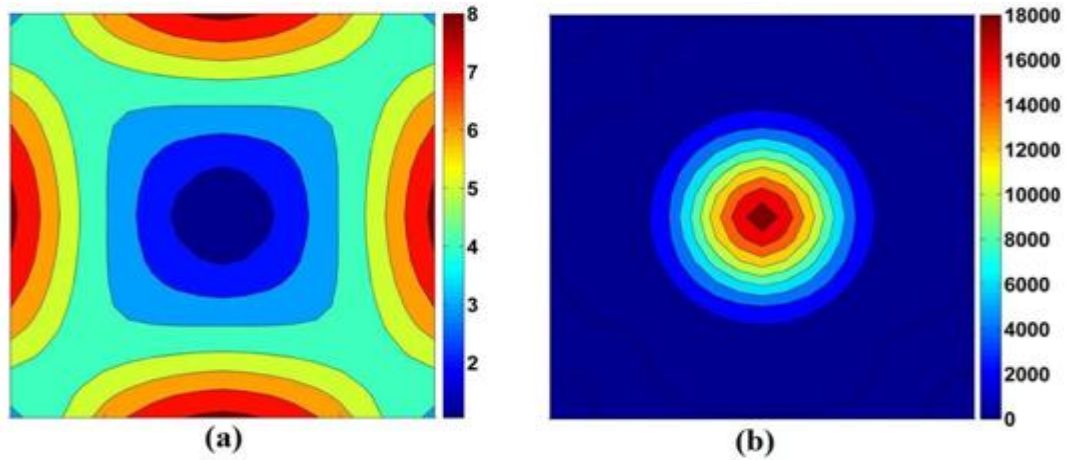


شکل ۳- تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال بازای تغییرات  $\alpha$

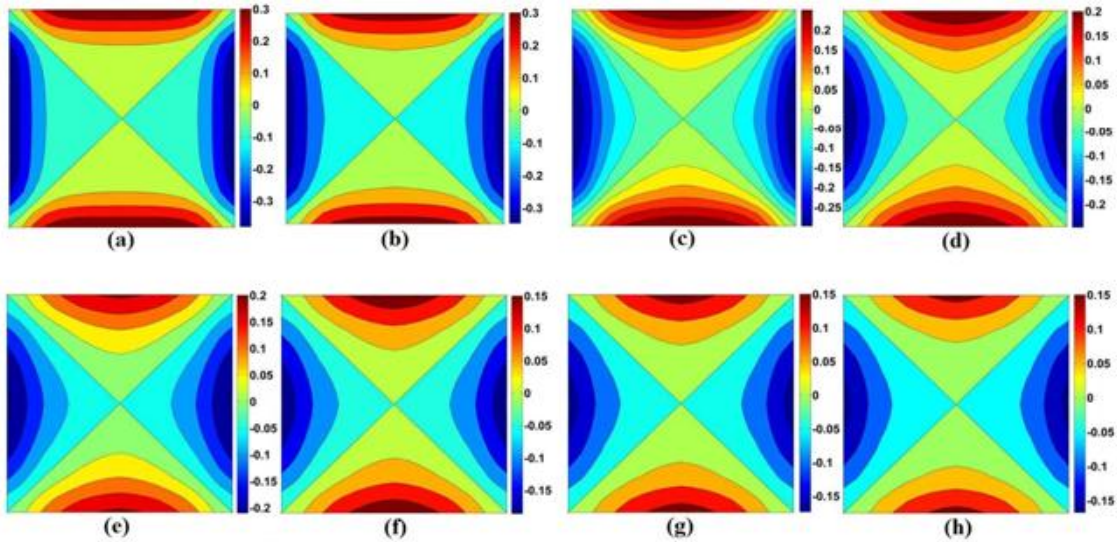


شکل ۴- تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال بازای تغییرات  $\beta$

یکی از مسائل قابل توجه در مورد سیالات ویسکوالاستیک، کم شدن لزجت آنها با افزایش نرخ برش می‌باشد که به این سیال، سیال رقیق شونده می‌گویند. به عبارت دیگر هرچه نرخ برش و تغییر شکل در این سیالات شدت بیشتری داشته باشد، لزجت این سیالات بیشتر کاهش پیدا می‌کند که دلیل فیزیکی این پدیده از هم گسیختگی پیوند بین ملکول‌ها در اثر افزایش نرخ برش و در پی آن کاهش لزجت می‌باشد. این پدیده فیزیکی در مدل‌سازی سیال ویسکوالاستیک با استفاده از معادله متشکله گزیکس قابل مشاهده می‌باشد. در شکل ۵، شدت برش در یک مقطع



شکل ۵- (a) کانتورهای نرخ برش و (b) لزجت سیال در مقطعی مشابه در محدوده توسعه یافته



شکل ۶- کانتورهای اختلاف تنش نرمال دوم در مقاطع عرضی کانال

a)  $z^* = 0.1$ , b)  $z^* = 0.2$ , c)  $z^* = 0.3$ , d)  $z^* = 0.4$ ,  
e)  $z^* = 0.5$ , f)  $z^* = 0.6$ , g)  $z^* = 0.8$ , h)  $z^* = 1$ ,

$$k(T) = k_0(k_0^* + k_s^* T) \quad (20)$$

$$C_p(T) = C_{p0}(C_{p0}^* + C_{ps}^* T) \quad (21)$$

با این فرضیات، کمیت‌های مذکور بعد از هر مرحله با دماهای جدید به دست آمده دوباره مورد محاسبه قرار می‌گیرند.

همانطور که گفته شد، در این تحقیق شرایط دمایی دیواره‌ها ثابت به عنوان شرایط مرزی حرارتی در نظر

شده است. بدین منظور از توابع پیشنهادی توسط مارک<sup>۱</sup> [۱۶] به شرح زیر استفاده شده است.

$$\eta(T) = \eta_0 a(T), \quad (18)$$

$$a(T) = \text{Exp}\left[\alpha\left(\frac{1}{T+273.15} - \frac{1}{T_{in}+273.15}\right)\right]$$

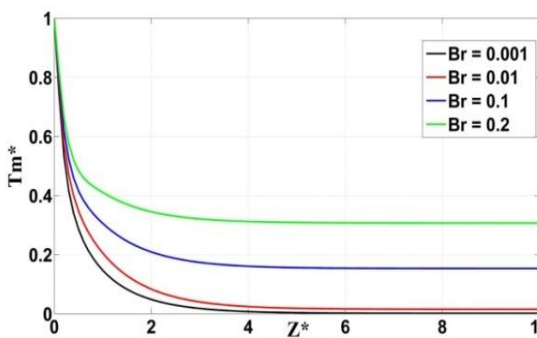
$$\lambda(T) = \lambda_0 a(T) \quad (19)$$

<sup>1</sup> Mark J.E

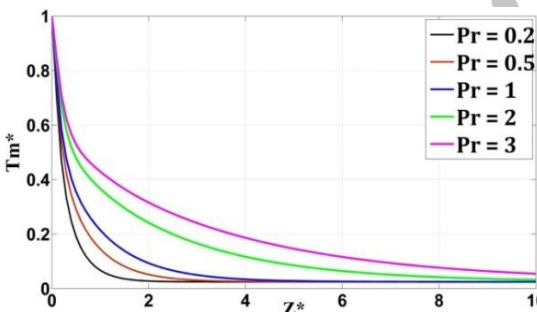


در نزدیکی این نقاط دمای بی‌بعد در حدود صفر بوده و عدد ناسلت<sup>۱</sup> بی‌نهایت می‌شود.

تغییرات عدد پرانتل نیز تاثیر بسزایی در طول توسعه یافتگی حرارتی دارد. همانطور که در شکل ۹ دیده می‌شود، با افزایش عدد پرانتل، نسبت پخش هیدرودینامیکی به پخش حرارتی بیشتر شده و لایه مرزی حرارتی در فاصله بیشتری از ابتدای کانال تکمیل یافته و جریان به توسعه یافتگی حرارتی می‌رسد.



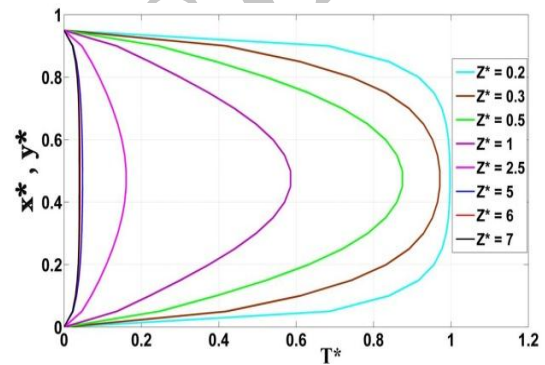
شکل ۸- تغییرات دمای میانگین سیال در راستای کانال به ازای تغییرات عدد برینکمن



شکل ۹- تغییرات دمای میانگین سیال در راستای کانال به ازای تغییرات عدد پرانتل

همانطور که در شکل ۱۰ دیده می‌شود، انتقال حرارت کلی سیال نیز با دیواره‌ها که با  $q''$  نشان داده شده است، در ابتدای کانال و تا قبل از تشکیل لایه مرزی و به علت شدت بالای جریان‌های عرضی، شدت زیادی داشته و در راستای کانال با تشکیل لایه مرزی هیدرودینامیکی و

گرفته شده است. در این حالت سیال در ابتدای کانال با دمای یکنواخت وارد کانال شده و بعد از تماس با دیواره‌ها و تشکیل لایه مرزی حرارتی، رفته رفته دمای آن به دمای دیواره‌ها نزدیک می‌شود. با رسیدن به شرایط توسعه یافته حرارتی، پروفیل دمای سیال به حالت دائم خود رسیده و بدون تغییر باقی می‌ماند. لازم به ذکر است که در این حالت، انتقال حرارت سیال با دیواره‌ها دقیقاً برابر با مقدار حرارت تولید شده توسط اتلافات میدان تنش می‌باشد. تغییرات پروفیل دما در مقاطع عرضی کانال از ابتدا تا رسیدن به شرایط توسعه یافته در شکل ۷ نشان داده شده است.

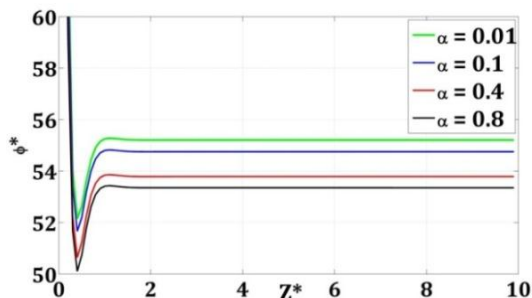


شکل ۷- تغییرات پروفیل دما در مقاطع عرضی کانال

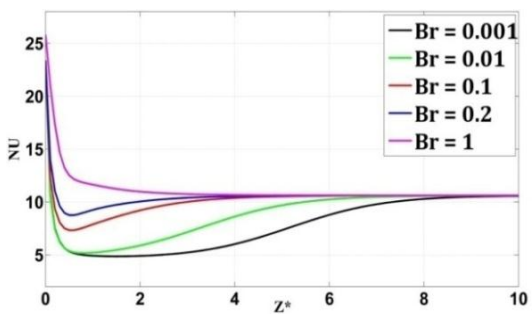
دمای بی‌بعد میانگین سیال ( $T_m^*$ ) نیز همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده است، در ابتدا از یک شروع شده و در راستای کانال در پی انتقال حرارت با دیواره‌ها کاهش پیدا کرده تا در نهایت به مقداری ثابت می‌رسد. لازم به ذکر است که شیب تغییرات دما به ازای تغییرات عدد برینکمن تغییر می‌کند و در اعداد برینکمن بیشتر شیب تغییرات دما کاهش می‌یابد. از طرف دیگر در اعداد برینکمن کمتر از صفر که دمای ورودی سیال کمتر از دمای دیواره‌ها می‌باشد، به علت فعالیت عبارت مربوط به تلفات میدان تنش، دمای سیال بیشتر از دمای دیواره‌ها شده و شار حرارتی دیواره‌ها در قسمتی از کانال به صورت عکس درآمده و حرارت از طرف سیال به دیواره‌ها می‌باشد.

<sup>1</sup> Nusselt Number

توسعه یافته، جریان‌های ثانویه‌ای در مقاطع عمود بر جریان اصلی شکل گرفته که این جریان‌های ثانویه باعث افزایش تلفات میدان تنش و همچنین افزایش عدد ناسلت جریان می‌شوند. البته نرخ تلفات میدان تنش از مقدار ۱۱۰ شروع شده ولی به دلیل وضوح بیشتر تغییرات، تمرکز بر روی ناحیه تغییر حالت جریان قرار داده شده است.



شکل ۱۱- تغییرات کار میدان تنش در راستای کانال به ازای تغییرات  $\alpha$

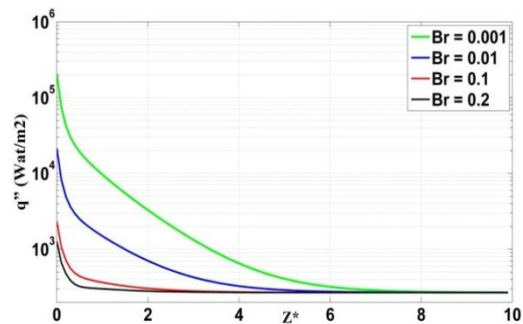


شکل ۱۲- تغییرات عدد ناسلت متوسط در راستای کانال به ازای تغییرات Br

##### ۵- نتیجه گیری

در این تحقیق مدل‌سازی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی با در نظر گرفتن اثرات ناحیه ورودی با استفاده از معادله متشکله گزیکس و خواص تابع دما مورد مطالعه قرار گرفته است. در ناحیه ورودی، جریان‌های ثانویه شکل نمی‌گیرد ولی شدت جریان‌های عرضی و در پی آن شدت افت فشار و تلفات نسبت به ناحیه توسعه یافته بسیار بیشتر می‌باشد. با استفاده از معادله متشکله مذکور، اختلاف تنش نرمال دوم

حرارتی و همچنین کم شدن شدت جریان‌های ثانویه، از مقدار آن کاسته شده و در نهایت به مقدار ثابتی می‌رسد. در ابتدای کانال به ازای انتقال حرارت انجام شده مقداری از دمای سیال کاسته شده ولی با رسیدن به ناحیه توسعه یافته و بدون تغییر در دمای متوسط سیال، انتقال حرارت انجام شده از دیواره‌ها، تنها به میزان نرخ تلفات حرارتی که به عنوان یک مولد گرما در سیال عمل می‌کند، می‌باشد.



شکل ۱۰- تغییرات شار حرارتی از دیواره‌ها در راستای کانال

شدت تلفات حرارتی مربوط به میدان تنش نیز که با عبارت  $\phi^*$  نمایش داده شده است، وابستگی زیادی به شدت جریان‌های عرضی در مقطع کانال دارد به طوری که در ابتدای کانال و ناحیه در حال توسعه به علت شدت بالای جریان‌های عرضی، مقدار افت فشار سیال و همچنین نرخ تلفات حرارتی بسیار بالا بوده و با پیشروی در راستای کانال و کاهش شدت جریان‌های عرضی، از مقدار تلفات نیز کاسته می‌شود. همانطور که در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود، نمودار تلفات و یا همان کار میدان تنش، بعد از رسیدن به ناحیه توسعه یافته مقداری افزایش داشته و بعد با همان مقدار ثابت تا انتهای کانال بدون تغییر باقی می‌ماند. علت این افزایش مجدد که دقیقاً در تغییرات عدد ناسلت هم تاثیر گذار می‌باشد، را می‌توان در تشکیل جریان‌های ثانویه در ناحیه توسعه یافته دانست. زیرا همان‌طور که پیشتر بیان شد، در ناحیه در حال توسعه، علی‌رغم شدت بالای جریان‌های عرضی، هیچ جریان ثانویه‌ای شکل نمی‌گیرد ولی با رسیدن جریان به حالت

- pipes of noncircular cross section, *J. Rheol.* 52(1): 315–332.
- [7] Boutabaa M, Helin L, Mompean G, Thais L (2009), Numerical study of Dean vortices in developing Newtonian and viscoelastic flows through a curved duct of square cross-section, *J. Comptes Rendus Mechanique.* 337: 40–47.
- [8] Tanoue S, Naganawa T and Iemoto Y (2006), Quasi-three-dimensional simulation of viscoelastic flow through a straight channel with a square cross section, *J. Soc. Rheol., Jpn.* 34: 105–113.
- [9] Robert E, Gaidos, Darby R (1988), Numerical simulation and change in type in the developing flow of a nonlinear viscoelastic fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 29: 59–79.
- [10] Nikoleris T, Darby R (1989), Numerical simulation of the non-isothermal flow of a nonlinear viscoelastic fluid in a rectangular channel, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 31: 193–207.
- [11] Oldroyd JG (1956), Some steady flows of the general elastico-viscous liquid, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 283: 115–133.
- [12] Hatzikiriakos SG, Dealy JM (1991), Wall slip of molten high-density polyethylene, Sliding plate rheometer studies, *J. Rheology*, 35: 497–523.
- [13] Hatzikiriakos SG and Dealy JM (1992), Wall slip of molten high-density polyethylene, II Capillary rheometer studies, *Journal of Rheol.* 36: 703–741.
- [14] Denn MM (1992), Surface-induced effects in polymer melt flow, *Theoretical and Applied Rheology*, Elsevier, New York: 45–49.
- [15] Hill DA, Hasegawa T and Denn MM (1990), On the apparent relation between adhesive failure and melt fracture, *J. Rheol.* 34: 891–918.
- [16] Mark JE (1996), Physical properties of polymers Handbook, American Institute of Physics, New York.

که عامل اصلی تشکیل جریان‌های ثانویه بوده، غیر صفر می‌باشد و با تغییر خواصی از قبیل  $\alpha$  و  $\beta$  تغییر می‌کند. همچنین خاصیت سیال رقیق شونده، با استفاده از این معادله متشکله قابل رویت می‌باشد. به علت تشکیل جریان‌های ثانویه و در پی آن افزایش کار نیروی تنش، افزایشی در عدد ناسلت جریان بوجود می‌آید که با تغییر عدد برینکمن، شیب این نمودار تغییر می‌یابد.

### مراجع

- [1] Gao SX, Hartnett JP (1996), Heat transfer behavior of reiner-rivlin fluids in rectangular ducts, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39: 1317–1324.
- [2] Syrjälä S (1998), Laminar flow of viscoelastic fluids in rectangular ducts with heat transfer, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 25: 191–204.
- [3] Giesekus H (1965), Sekundärströmungen in viskoelastischen Flüssigkeiten bei stationärer und periodischer Bewegung, *Rheol. Acta* 4: 85–101.
- [4] Debbaut B, Avalosse T, Dooley J, Hughes K (1997), On the development of secondary motions in straight channels induced by the second normal stress difference: experiments and simulations, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 69: 255–271.
- [5] Debbaut B, Dooley J (1999), Secondary motions in straight and tapered channels: Experiments and three dimensional finite element simulation with a multimode differential viscoelastic model, *J. Rheol.* 43: 1525–1545.
- [6] Yue P, Dooley J, Feng JJ (2007), A general criterion for viscoelastic secondary flow in