



# تحلیل ترموهیدرودینامیک جریان درون کانال با استفاده از روش شبکه بولتزمن

احد ضرغامی<sup>ا\*</sup>، محمد جواد مغربی<sup>۲</sup>

ٔ دانشجوی دکتری، دانشکده مکانیک ، دانشگاه صنعتی شاهرود <sup>۱</sup>دانشیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

### چکیدہ

در این مقاله ترکیب روش حجم محدود با روش شبکه بولتزمن برای تحلیل رفتار ترمو-هیدرودینامیک جریان سیال تراکم ناپذیر ارائه شدهاست. بدین منظور از مدل تابع توزیع دوگانه برای معادلات گرمایی بولتزمن استفاده شدهاست. به منظور افزایش پایداری و همگرایی معادلات فاکتورهای تصحیح مرتبه دوم در محاسبه جملات شار مورد استفاده قرار گرفتهاند. علاوه بر آن، شرایط مرزی مختلف بر مبنای طرح مرکزیت سلول معرفی شدهاند که برای این منظور از یک شبکه اضافی بر روی گرههای مرزی استفاده شده است. توابع توزیع مجهول انرژی نیز در مرزها به دو بخش تعادلی و غیرتعادلی تجزیه شدهاند که بخش غیرتعادلی با استفاده از برونیابی بخشهای غیرتعادلی گرههای همسایه محاسبه گردیدهاند که این امر موجب افزایش سرعت همگرایی و پایداری حل گردیده است. نتایج عددی برای جریان سیال تراکم ناپذیر درون کانال دوبعدی نشان داده شده است که مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج معتبر بیانگر دقت بالای روش مورد استفاده میباشد.

كلمات كليدى: روش شبكه بولتزمن؛ حجم محدود؛ تابع توزيع دوگانه؛ سيال تراكم ناپذير؛ ترمو-هيدروديناميك.

۱– مقدمه

در تحلیل جریان سیال سه دیدگاه میکروسکوپیک، مزوسکوپیک و ماکروسکوپیک به کار میروند. از دیدگاه میکروسکوپیک، حرکت منفرد ذرات در مسافت آزاد متوسط آنها بررسی میشود. این روش مدلسازی برای حل مسایل مهندسی غیرممکن بوده و یا مقرون به صرفه نیست. دیدگاه مزوسکوپیکی میان دو دیدگاه میکروسکوپیکی و ماکروسکوپیکی قرار دارد و به جای یک مولکول یا یک ذره منفرد از سیال، مجموعهای از مولکولها به عنوان یک ذره در

نظر گرفته می شوند. این ذرات می توانند در هر جهتی حرکت کنند، بطوریکه معادله حرکت آنها به صورت آماری و بوسیله معادلات توزیع بیان می گردد. روش شبکه بولتزمن یکی از مهمترین روشهای مزوسکوپیک در تحلیل جریان سیالات می باشد. در این روش، تعداد ذرات توزیع شده در میدان، با تعداد مولکولها نسبتی ندارد و فقط به شبکه و تعداد گرهها بستگی دارد.

در سالهای اخیر روش شبکه بولتزمن بعنوان روشی جایگزین برای شبیهسازی جریانهای مختلف سیال مورد توجه

<sup>\*</sup> نویسنده مسئول. تلفن: ۰۹۳۷۸۹۵۶۴۳۰

آدرس پست الكترونيك: fsriau.ac.ir@fsriau.ac.ir

بسیاری از محققین قرار گرفته است [۱-۵]. برتری ویژه این روش نسبت به روشهای متداول، برنامه نویسی ساده آن می-باشد که منجر به نوشتن کدهای ساده تر و در نهایت سرعت بیشتر شبیهسازیها می شود. در عین حال استفاده از روش شبکه بولتزمن دارای محدودیتهایی نیز میباشد. از آن جمله می توان به این موضوع اشاره کرد که این روش بطور کلی برای شبکه های کارتزین یکنواخت بنا شدهاست. اما همانطورکه میدانیم، استفاده از شبکههای یکنواخت در بسیاری از مسایل مهندسی مشکل و شاید غیرممکن میباشد. به همین دلیل در سالهای اخیر، محققان بسیاری سعی در استفاده از شبکههای بی سازمان یا استفاده از طرحهای گوناگون نمودهاند تا به نحوی بر این مشکل غلبه کنند که برای مطالعه بیشتر می توان به مراجع ذکر شده در [۶] رجوع کرد. اما در نهایت می توان گفت که امروزه ترکیب روش حجم محدود با روش شبکه بولتزمن بدلیل توانمندی، انعطاف پذیری زیاد و سازگاری فیزیکی آن در تحلیل مسایل پیچیده، مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است [۷-۱۱].

نکتهای که میبایست به آن اشاره نمود این است که برخلاف رشد قابل توجه تحلیل جریانهای مختلف با استفاده از روش شبکه بولتزمن، تحلیل مسائل توام با انتقال گرما به تازگی مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است و این مبحث بعنوان یک موضوع جدید در این زمینه معرفی میشود. بطورکلی مدلهای گرمایی مورد استفاده در روش شبکه بولتزمن را میتوان به مدلهای چندسرعتی، اسکالر غیر فعال و تابع توزیع دوگانه تقسیم بندی نمود.

در روش چند سرعتی از یک تابع توزیع برای جریان سیال و انتقال گرما استفاده میشود و سپس از جملات مرتبه بالاتر سرعت در تقریب تابع توزیع تعادلی استفاده میشود [۱۲]. به دلیل استفاده از یک زمان آرامش، این روش محدود به عدد پرانتل برابر با نیم بوده که این موضوع مهمترین ضعف این مدل میباشد [۱۳]. همچنین تحقیقات برخی از محققین نشان داد که پایداری عددی این روش کم میباشد [۱۴]. فورنیر<sup>1</sup> و همکاران [۱۵] در تحقیقی به بهبودی قابل توجهی در پایداری عددی این روش برای اعداد ماخ پایین دست

یافتند اما همچنان محدودیت این روش برای پرانتل پابرجاست.

در روش اسکالر غیرفعال از یک تابع توزیع مجزا برای حل معادلات گرما استفاده میشود [۱۲]. این روش دارای پایداری عددی بهتری نسبت به روش چند سرعتی میباشد اما پنگ<sup>7</sup> و همکاران [۱۶] در تحقیقی نشان دادند که این روش محدود به جریاناتی است که در آنها میتوان از اتلافات ناشی از لزجت سیال و همچنین کار تراکمی ناشی از تغییرات فشار صرفنظر کرد. شی<sup>7</sup> و همکاران [۱۷] در تحقیقی مدلی از این روش پیشنهاد دادند که با استفاده از آن میتوان اتلافات ناشی از لزجت سیال را در محدوده تراکمناپذیری در محاسبات در نظرگرفت.

روش تابع توزیع دوگانه در واقع شکل تکامل یافته روش اسکالر غیر فعال میباشد که در آن اتلافات ناشی از لزجت سیال و همچنین کار تراکمی ناشی از تغییرات فشار در معادله انرژی بولتزمن در نظر گرفته میشود [۱۸ و ۱۹]. در این روش دو تابع توزیع مجزا برای میدانهای جریان و انرژی در نظر گرفته شده و بطور همزمان حل میشوند. همچنین برای هر تابع توزیع یک زمان رهایش جداگانه تعریف میشود که این موضوع محدودیت روش چند سرعتی را نیز مرتفع می سازد و دارای پایداری بسیار خوبی نیز میباشد. استفاده از این روش بعنوان یک روش موفق در تحقیقات جدید مورد استفاده بسیاری از محققان قرار گرفتهاست [۲۰ و ۲۲].

انگیزه اصلی انجام این تحقیق ارائه یک مدل پایدار و دقیق جهت تحلیل ترمو-هیدرودینامیک جریان سیال تراکم ناپذیر میباشد. بدین منظور، روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول بر روی شبکه  $D_2Q_9$  اعمال و از آن برای گسستهسازی معادلات جریان و انرژی بولتزمن استفاده خواهد شد. همچنین به منظور افزایش پایداری از مدل تابع توزیع دوگانه برای تحلیل میدان دما استفاده شده است. استفاده از فاکتورهای تصحیح شار در معادلات جریان و انرژی منجر به افزایش پایداری و سرعت همگرایی شبیهسازی در مقایسه با دیگر روشهای متداول حجم محدود – شبکه بولتزمن میشود. بنابراین با استفاده از این طرحها، دقت حل

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Peng Y

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Shi Y

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Fournier R.

و پایداری آن افزایش و در عین حال تعداد گام محاسباتی لازم برای رسیدن به دقت مورد نظر، کاهش خواهد یافت. در نهایت به منظور ارزیابی روش مورد استفاده، نتایج برای جریان درون کانال دوبعدی ارائه و با نتایج تحلیلی و عددی معتبر مقایسه خواهندشد.

### ۲- روش شبکه بولتزمن

معادلات جریان و انرژی بولتزمن با استفاده از تقریب BGK بصورت زیر می باشند [۲۲]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla f = -\frac{1}{\tau_f} (f - f^{eq}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla g = -\frac{1}{\tau_g} (g - g^{eq}) \tag{(Y)}$$

در معادلات فوق، f و g به ترتیب بیانگر توابع توزیع ذره و انرژی در جهت سرعتهای گسسته  $v_i$  میباشند،  $\tau_r$  و  $\tau_r$ نیز به ترتیب معرف زمان آرامش برای جریان و انرژی می-باشند که در واقع نرخ رسیدن جریان به حالت تعادل را کنترل می کنند. همچنین،  $f^{eq}$  و  $g^{eq}$  بیانگر توابع توزیع تعادل ذره و انرژی میباشند. تابع توزیع تعادلی ذرات،  $f^{eq}$  ، برای شبکه دوبعدی متداول  $D_2Q_9$  (شکل ۱) بصورت زیر میباشد:

$$F_{i}^{eq}\left(\vec{x},t\right) = w_{i}\rho\left[c_{1}+c_{2}\left(\vec{v}_{i},\mathbf{u}\right)+c_{3}\left(\vec{v}_{i},\mathbf{u}\right)^{2}+c_{4}\left(\mathbf{u},\mathbf{u}\right)\right] \qquad (\texttt{``})$$

ho و  $c_1 = 1, c_2 = 1/2c_s^2, c_3 = 1/2c_s^4, c_4 = -1/2c_s^2$  و  $\varphi$ چگالی میباشد. همچنین  $w_i$  تابع وزنی است که دارای مقادیر زیر برای شبکه  $D_2Q_9$  میباشد:

$$v_i = \begin{cases} 4/9 \dots i = 0\\ 1/9 \dots i = 1 \sim 4\\ 1/36 \dots i = 5 \sim 8 \end{cases}$$
(f)



شکل ۱- سرعت های گسسته در مدل D<sub>2</sub>Q<sub>9.</sub>

تابع توزیع تعادلی انرژی، f<sup>eq</sup> ، نیز بصورت زیر میباشد [۲۳]:

$$g_{0}^{eq} = -\frac{2\rho\varepsilon}{3} \frac{\mathbf{u}^{2}}{c^{2}}$$

$$g_{1-4}^{eq} = \frac{\rho\varepsilon}{9} \left[ \frac{3}{2} + \frac{3}{2c^{2}} \, \bar{v}_{i} \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^{4}} \left( \bar{v}_{i} \cdot \mathbf{u} \right)^{2} - \frac{3}{2c^{2}} \, \mathbf{u}^{2} \right]$$

$$g_{5-8}^{eq} = \frac{\rho\varepsilon}{36} \left[ 3 + \frac{6}{c^{2}} \, \bar{v}_{i} \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^{4}} \left( \bar{v}_{i} \cdot \mathbf{u} \right)^{2} - \frac{3}{2c^{2}} \, \mathbf{u}^{2} \right]$$
( $\Delta$ )

در معادلات فوق، DRT/2 انرژی داخلی، D بعد مساله و arepsilon = DRT/2 انرژی داخلی، D بعد مساله و R ثابت جهانی گازها میباشد. همچنین، لزجت سینماتیک و ضریب پخش حرارتی نیز به ترتیب با روابط  $v = c_s^2 au_f$  و  $c_s = c/\sqrt{3}$  بیان میشوند که در این روابط  $lpha = 2c_s^2 au_g$ سرعت صوت میباشد [۲۳].

سرعتهای گسسته نیز با توجه به شکل ۱ برای شبکه  $D_2Q_9$  برابر با  $\overline{v}_i = \lambda_i (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$  و  $\overline{v}_i = 1$  میاشد که  $\lambda_i = 1, \theta_i = (i-1)\pi/2$  مقادیر 1 = 1 - 4 میاشد که  $\lambda_i = 1, \theta_i = (i-1)\pi/2$  مقادیر  $2 - \pi/4$  میات 4 برای  $\lambda_i = \sqrt{2}, \theta_i = (i-5)\pi/2 + \pi/4$  میاشد. در روش شبکه بولتزمن، کمیتهای ماکروسکوپی با محموع گیری از توابع توزیع محاسبه میشوند. بهعبارت دیگر، محموع گیری از توابع توزیع محاسبه میشوند. بهعبارت دیگر، محموع گیری از توابع توزیع محاسبه میشوند. بهعبارت دیگر، میاشد. و از رژی داخلی  $\overline{c}_i = 1, \overline{c}_i$  و بصورت  $\overline{c}_i = 1, \overline{c}_i$  و از رژی داخلی گازهای ایدهآل و بصورت  $\rho = c_s^2 \rho$  بدست میآید [۲۴].

در این قسمت گسسته سازی معادلات با استفاده از روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول ارائه خواهند شد. شکل ۲ شماتیک طرح مرکزیت سلول را بر روی شبکه چهارضلعی نشان میدهد. برای سهولت، شکل انتگرالی معادله بولتزمن را نشان میدهد. برای سهولت، شکل انتگرالی معادله بولتزمن را وشان میدهد. برای سهولت، شکل انتگرالی معادله بولتزمن (ک برورت زیر در نظر گرفته می شود: (۶)

که در معادله فوق اگر f = f باشد، معادله بولتزمن برای جریان و اگر g = g باشد، معادله بولتزمن برای انتقال می-باشد. تقریب جمله اول معادله فوق برای سلول (I,J)بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{abcd} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} dA \approx \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right]_{I,J} A_{I,J} \tag{Y}$$

فاکتورها بر این اصل استوار میباشد که در جریان سیال، فشار عامل اصلی انتقال جریان از یک سلول به سلول دیگر میباشد و به همین ترتیب، دما عامل اصلی انتقال گرما بین سلولهای مختلف شبکه میباشد. این ضرایب بصورت زیر تعریف میشوند [۲۷]:

$$\begin{aligned} \xi_{ab-Left} &= \frac{\theta_{I-1,J}}{\theta_{I-1,J} + \theta_{I,J}}, \\ \xi_{ab-Right} &= \frac{\theta_{I,J}}{\theta_{I,J} + \theta_{I+1,J}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \\ \xi_{ab} &= \frac{\xi_{ab-Left} + \xi_{ab-Right}}{2} \\ \xi_{bc-Bottom} &= \frac{\theta_{I,J-1}}{\theta_{I,J} + \theta_{I,J-1}}, \\ \xi_{bc-Bottom} &= \frac{\xi_{bc-Bottom} + \xi_{bc-Top}}{2} \\ \xi_{bc-Right} &= \frac{\theta_{I+1,J}}{\theta_{I,J} + \theta_{I+1,J}}, \\ \xi_{cd-Right} &= \frac{\theta_{I+1,J}}{\theta_{I,J} + \theta_{I+1,J}}, \\ \xi_{cd-Right} &= \frac{\theta_{I,J+1}}{2} \\ \xi_{da-Top} &= \frac{\theta_{I,J+1}}{\theta_{I,J} + \theta_{I,J+1}}, \\ \xi_{da-Bottom} &= \frac{\theta_{I,J}}{\theta_{I,J} + \theta_{I,J-1}} \\ \Rightarrow \\ \xi_{da} &= \frac{\xi_{da-Top} + \xi_{da-Bottom}}{2} \end{aligned}$$

$$(11)$$

در معادله فوق اگر p = p باشد، ضرایب تصحیح برای معادله جریان و اگر  $T = \theta$  باشد، ضرایب تصحیح برای معادله انتقال گرما مورد استفاده قرار می گیرند. بنابراین جمله شار بصورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\begin{split} S_{i} &\approx \vec{v}_{i} \cdot N_{ab} \left( \xi_{ab} \left[ f_{i} \right]_{I,J} + \left( 1 - \xi_{ab} \right) \left[ f_{i} \right]_{I+1,J} \right) \\ &+ \vec{v}_{i} \cdot N_{bc} \left( \xi_{bc} \left[ f_{i} \right]_{I,J} + \left( 1 - \xi_{bc} \right) \left[ f_{i} \right]_{I,J+1} \right) + \\ &\vec{v}_{i} \cdot N_{cd} \left( \xi_{cd} \left[ f_{i} \right]_{I,J} + \left( 1 - \xi_{cd} \right) \left[ f_{i} \right]_{I-1,J} \right) + \\ &\vec{v}_{i} \cdot N_{da} \left( \xi_{da} \left[ f_{i} \right]_{I,J} + \left( 1 - \xi_{da} \right) \left[ f_{i} \right]_{I,J-1} \right) \end{split}$$
(17)

با فرض رفتار خطی  $f_i, f_i^{eq}$  در هر سلول داخلی، انتگرال-گیری از جمله برخورد در معادله بولتزمن بصورت زیر می-باشد [۲۸]:

$$\begin{split} Q_{i} &= -\int_{abcd} \frac{1}{\tau_{\varphi}} (\varphi_{i} - \varphi_{i}^{eq}) dA = -\frac{A_{I,J}}{\tau_{\varphi}} \left[ \frac{1}{4} \left[ \varphi_{i}^{ne} \right]_{I,J} + \right. \\ & \left. \frac{1}{8} \left\{ \left[ \varphi_{i}^{ne} \right]_{I+1,J} + \left[ \varphi_{i}^{ne} \right]_{J,J+1} + \left[ \varphi_{i}^{ne} \right]_{J-1,J} + \left[ \varphi_{i}^{ne} \right]_{J,J-1} \right\} + \right. \tag{15} \\ & \left. \frac{1}{16} \left\{ \left[ \varphi_{i}^{ne} \right]_{I+1,J-1} + \left[ \varphi_{i}^{ne} \right]_{I+1,J+1} + \left[ \varphi_{i}^{ne} \right]_{I-1,J+1} + \left[ \varphi_{i}^{ne} \right]_{I-1,J-1} \right\} \right] \end{split}$$

$$\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right]_{I,J} = \frac{\left(\varphi_i\right)_{I,J}^{n+1} - \left(\varphi_i\right)_{I,J}^n}{\Delta t} \tag{A}$$

گسسته سازی جمله شار بصورت زیر میباشد:  

$$\int v_i \cdot \nabla \varphi_i \, dA = \int \{ v_{ix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \} dA \qquad (9)$$

$$\int_{abcd} v_{i} \nabla \varphi_{i} \, dA = \int_{abcd} \left\{ \frac{\partial (v_{ix} \cdot \varphi_{i})}{\partial x} + \frac{\partial (\varphi_{i} \cdot v_{iy})}{\partial y} \right\} dx \, dy = \\
\int_{around \, I,J} (v_{ix} \, \varphi_{i} \, dy - v_{iy} \, \varphi_{i} \, dx) \approx \left\{ \frac{[\varphi_{i}]_{I,J} + [\varphi_{i}]_{I+J,J}}{2} \, v_{i} \cdot N_{ab} + \frac{[\varphi_{i}]_{I-1,J} + [\varphi_{i}]_{I,J}}{2} \, v_{i} \cdot N_{bc} + \frac{[\varphi_{i}]_{I,J} + [\varphi_{i}]_{I,J+1}}{2} \, v_{i} \cdot N_{cd} + \frac{[\varphi_{i}]_{I,J-1} + [\varphi_{i}]_{I,J}}{2} \, v_{i} \cdot N_{da}$$
(1.)

در این معادله،  $N_k = (\Delta y \overline{i} - \Delta x \overline{j})_k$  بردار نرمال اضلاع  $N_k = (\Delta y \overline{i} - \Delta x \overline{j})_k$  میاندی به روش k = ab, bc, cd, da میانگین گیری شار معروف میباشد. این تقریب دارای دقت مرتبه دوم در شبکه کارتزین میباشد ولی در حالت کلی پایداری آن کم میباشد [۲۵ و ۲۶].



## شکل ۲- شماتیک گسسته سازی به روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول

در این تحقیق به منظور افزایش دقت و پایداری جمله شار از فاکتورهای تصحیح مبتنی بر فشار و دما برای معادلات جریان و انرژی بولتزمن و استفاده خواهد شد. معرفی این

در رابطه فوق  $\varphi_i^{ne} = \varphi_i - \varphi_i^{eq}$  بیانگر بخش غیرتعادلی تابع توزیع میباشد. خطا یا معیار همگرایی برای جریان و گرما نیز توسط روابط زیر محاسبه میشوند:

$$E_{hydro} = \frac{\sum_{I,J} \left| \sqrt{\left(u_{I,J}^2 + v_{I,J}^2\right)^{n+1}} - \sqrt{\left(u_{I,J}^2 + v_{I,J}^2\right)^n} \right|}{\sum_{I,J} \left| \sqrt{\left(u_{I,J}^2 + v_{I,J}^2\right)^{n+1}} \right|}$$
(14)

## ۴- شرایط مرزی

در این تحقیق به منظور اعمال شرایط مرزی، یک گره اضافی بر روی مرزها در نظر گرفته شده است. بنابراین هر گره مرزی همانند گرههای داخل دامنه محاسباتی رفتار میکند به جز اینکه جمله شار در مرزها بایستی به نحو صحیحی تعیین شوند.

برای نشان دادن نحوه اعمال شرایط مرزی، شکل ۳ را در نظر بگیرید. با معلوم بودن مقادیر ماکروسکوپی در مرز ورودی، برای هر سلول در مرز ورودی (I = 1, J) توابع توزیع در سه جهت ۱، ۵ و ۸ مجهول میباشند که بصورت زیر از توابع توزیع معلوم بدست میآیند:

$$f_{1} = f_{3} + 2(\rho_{inlet} \cdot u_{inlet})/3$$
  

$$f_{5} = f_{7} + 0.5(f_{4} - f_{2}) + (\rho_{inlet} \cdot u_{inlet})/6$$
  

$$f_{8} = f_{6} + 0.5(f_{2} - f_{4}) + (\rho_{inlet} \cdot u_{inlet})/6$$
  
(1 $\Delta$ )

رابطه فوق به روش *زو* و هی موسوم میباشد، چرا که توسط این دو محقق برای اولین بار معرفی شد [۳۰]. توجه شود که دیگر توابع توزیع در مرز ورودی که تحت عنوان توابع توزیع معلوم از آنها یاد می شود با استفاده از برونیابی از درون دامنه تعیین می شوند:

 $f_i(I=1,J) = 1.5f_i(I=2,J) - 0.5f_i(I=3,J)$ :: i = 0,2,3,4,6,7 (19)

در مرز خروجی، یعنی  $N_x = I = i$  نیز معمولاً از شرط مرزی فشار استفاده میشود. بدینمنظور از توابع توزیع تعادلی برای تعیین توابع مجهول ( جهت های ۳، ۶ و ۷) در خروجی استفاده میشود، یعنی  $f_i^{eq} = f_i^{eq}$ . دیگر توابع توزیع نیز همانند ورودی با برونیابی از گره های مرزی و بصورت زیر بدست میآیند [۳1]:

$$f_i(I = N_x, J) =$$

$$1.5f_i(I = N_x - 1, J) - 0.5f_i(I = N_x - 2, J)$$
(1Y)

در بسیاری از مسایل شرط مرزی دیوار صلب یا بدون لغزش وجود دارد. اعمال شرط دیوار صلب در روش شبکه بولتزمن تحت عنوان قانون بازگشت به عقب انجام می گیرد. این قانون بیان می کند که در مرز دیوار صلب، توابع توزیع مجهول از توابع توزیع معلومی که در خلاف جهت آنها در گره مرزی وجود دارند، بدست می آیند [۳۰]. برای درک بهتر این موضوع، مرز پایینی کانال شکل ۳ را که بیانگر شرط مرزی دیوار صلب می باشد در نظر گرفته می شود. توابع توزیع مجهول بصورت زیر بدست می آیند:

, 
$$f_2 = f_4$$
 ,  $f_5 = f_7 f_6 = f_8$  (1)

این روابط بیان میکنند که ذرات پس از برخورد به مرز به همان گرهای که از آن منتشر شده اند، باز میگردند.



شکل ۳- شرایط مرزی جریان در دامنه محاسباتی

در این تحقیق از روش مطرح شده توسط تانگ<sup>۱</sup> و همکاران [۳۲] برای اعمال شرایط مرزی گرمایی استفاده خواهد شد. در این روش، توابع توزیع مجهول انرژی در گره مرزی به دو بخش تعادلی و غیرتعادلی تجزیه شده و سپس قسمت غیرتعادلی با استفاده از برونیابی از گرههای مجاور درون دامنه تعیین میشود. در [۳۲] ثابت شده است که این روش دارای دقت مرتبه دوم برای مرزهای صاف میباشد. بنابراین تابع توزیع انرژی *ig* در گره مرزی بصورت زیر محاسبه میشود:

1 Tang GH

 $g_i(x_b) = g_i^{eq}(x_b, \rho_b, \varepsilon_b) + \left[g_i(x_f) - g_i^{eq}(x_f, \rho_f, \varepsilon_f)\right]$ (19)

در رابطه فوق زیرنویس های  $b \in f$  به ترتیب بیانگر گره مرزی  $\rho_b$  و نزدیک ترین گره همسایه به مرز می باشند. همچنین  $\rho_b$  و نزدیک ترین گره مرزی است که با یک تقریب مناسب چگالی جریان در گره مرزی است که با یک تقریب مناسب می توان چگالی در نقطه  $x_f$  را به جای آن درنظر گرفت. همچنین در رابطه فوق  $x_f = c_v T_b + u_b^2/2$  است که  $T_b$  دمای دیواره می باشد.

## ۵- نتایج

جریان بین دو صفحه یا پوازیه صفحهای علاوه بر حل تحلیلی، بطور وسیعی به روشهای مختلف دینامیک سیالات محاسباتی حل شده است. بنابراین شبیه سازی این جریان و مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج تحلیلی و عددی معتبر، می تواند بیانگر دقت و صحت روش مورد استفاده باشد.

برای شروع شبیه سازی، یک جریان سیال با سرعت یکنواخت L = 0.8 وارد یک کانال با طول L = 0.8 و عرض  $U_{avr} = 0.1$  می شود. عدد رینولدز بصورت H = 0.06 تعریف می شود که در آن V لزجت سینماتیکی سیال و H عرض کانال می باشد. توجه شود که از ماکزیمم سرعت درون کانال،  $U_{max}$ ، و عرض کانال بعنوان سرعت مشخصه و طول مشخصه برای بی بعد سازی نتایج استفاده شده است. البته در بعضی از موارد نیز از نیم عرض کانال، h بعنوان طول مشخصه استفاده خواهد شد.

همانطور که اشاره شد، حل تحلیلی برای این جریان وجود دارد [۳۴]. حل تحلیلی بیان میکند که توزیع پروفیل سرعت در ناحیه توسعه یافته، برای جریان بین دو صفحه که در فاصله H = 2h از یکدیگر قرار گرفتهاند، بصورت سهمی شکل بوده و با رابطه زیر بیان میشود:

$$u(y) = U_{\max} \left( 1 - (y/h)^2 \right) = 1.5 U_{ave} \left( 1 - (y/h)^2 \right)$$
 (7.)

قابل ذکر است که تحقیقات تجربی مختلفی نیز برای بدست آوردن یک رابطه جهت محاسبه طول توسعهیافتگی انجام گرفته است که مهمترین آنها تحقیقی است که توسط چن [۳۵] انجام گرفته است و در آن یک رابطه تحلیلی –

تجربی بصورت معادله زیر برای محاسبه این طول در رینولدزهای پایین ارائه داده است.

$$\frac{l_{developing}}{H} = \frac{0.63}{0.035 \,\text{Re} + 1} + 0.044 \,\text{Re}$$
(71)

در شبیه سازی های عددی، نقطه ای را که در آن سرعت خط مرکزی کانال به ۰.۹۹ سرعت خروجی یا  $U_{c.L} = 0.99 U_{\text{max}}$  طول توسعه یافتگی معرفی میکنند.

شکل ۴ بردارهای سرعت را در قسمتی از دامنه جریان برای  $\mathrm{Re} = 29$  نشان میدهد. اندازه سرعت یکنواخت در ورودی برابر با  $U_{avr} = 0.1$  در نظر گرفته شدهاست. در این شکل، رشد لایه مرزی بر روی دیوارها به خوبی قابل مشاهده میباشد.

<u> </u>		-		-		-	-	-		•	-	-			-	-
		_	_	_	_	_	_	-	-	-	-	-	_	-	_	-
<u> </u>			<u> </u>		-	_	-	-	-	-	-	-	_	_	-	-
				_	-	_			_	_	_	_	_	_	_	_
_	_		_		_	-	_	_	_	_	_	_				_
						-		-	-	-	-					
	$\rightarrow$		$\rightarrow$		$\rightarrow$	-		_			_	_				_
	_		_			_										_
	=				_											
	_	_			_											
	=			_	_											
<u> </u>	=		_	_	_									<	<i< td=""><td><u> </u></td></i<>	<u> </u>
<u> </u>	_					_			_				-		-	
<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	_	-	-	$\rightarrow$	<u> </u>	_	-		<u> </u>	_		š —	š — i	<u> </u>
<u> </u>			`			· — `	- <u> </u>									
÷.		<u> </u>	<u></u>			· — `	_			_		_	_		-	<u> </u>
<u>⊢</u> ÷-	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$				-	_	_	_		÷ —	÷ —	<u> </u>
<u> </u>	$\rightarrow$			$\rightarrow$	$\rightarrow$	·	· —	• — •	· — ·	· — i	- <del></del>		-	-		
┝━			_		$\rightarrow$	·	$\rightarrow$	·	·	· — •	· — •	$\rightarrow$	· —	-	•	$\rightarrow$
<u>⊢</u> +			>		$\rightarrow$		$\rightarrow$	·	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	-	$\rightarrow$	$\rightarrow$		
⊢.		>			$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	>	$\rightarrow$	$\rightarrow$						
⊢+				_		$\rightarrow$	-	$\rightarrow$	-	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
<b>⊢</b> ,			_	_	$\rightarrow$		-	$\rightarrow$	<b>→</b>	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$			
<b>⊢</b> →					-	$\rightarrow$	$\rightarrow$					$\rightarrow$	<b>→</b>			<b>→</b>
<b>⊢</b>	-		_		_	<u> </u>	-	<b>→</b>	-	-	-	<b>→</b>	-	<b>→</b>	<b>→</b>	<b>→</b>
⊢→.			_	-	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-	-
<b>⊢</b>	-	_	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>⊢</b>	_	-	-	-	-	-	-	-		-	-	•	-		-	-
															_	_

شکل ۴- بردارهای سرعت حاصل از شبیه سازی در قسمتی از دامنه در 29 = Re

شکل ۵ پروفیل مولفه افقی بردار سرعت جریان را در ایستگاههای مختلف نشان می دهد. همانطور که مشاهده می-شود، مولفه افقی سرعت با فاصله گرفتن از مقطع ورودی به شکل سهمی شکل در می آید که در واقع همان شکل پروفیل سرعت در ناحیه کاملاً توسعه یافته می باشد. مقایسه نتایج عددی با حل تحلیلی جریان در ناحیه توسعه یافته نیز در شکل ۶ نشان داده شده است که بیانگر دقت بالای روش شبیه سازی می باشد. قابل ذکر است که حداکثر خطای اندازه گیری شده با حل تحلیلی در حدود ۳٪ می باشد.

همچنین شکل ۷ نشان میدهد که مقدار مولفه عمودی سرعت با فاصله گرفتن از مقطع ورودی، کاهش مییابد، بطوریکه در ناحیه توسعه یافته میتوان از مقدار آن صرفنظر کرد.





شکل ۹ توزیع فشار را در خط مرکزی کانال نشان می-دهد. ملاحظه میشود که در ناحیه جریان در حال توسعه، توزیع فشار خطی نیست اما در ناحیه توسعه یافته رفتار توزیع فشار خطی شده با یک شیب ثابت کاهش مییابد.



شکل ۹- توزیع فشار در خط مرکزی کانال در 29 = Re

حال به بررسی نحوه تاثیر فاکتورهای تصحیح بر پایه فشار بر روی دقت شبیهسازی می پردازیم. شکل ۱۰ نمودار همگرایی را در رینولدز برابر با ۱۰۰ نشان می دهد که با توجه به روش میانگین گیری و روش مبتنی بر فاکتورهای تصحیح



شکل ۵- پروفیل مولفه سرعت *u* در ایستگاههای مختلف



شکل ۶- توزیع سرعت در ناحیه توسعه یافته و مقایسه آن با حل تحلیلی [۳۴]



شکل ۷- پروفیل مولفه سرعت ۷ در ایستگاههای مختلف Re = 29 در

شکل ۸ تغییرات سرعت خط مرکزی را تا ناحیه کاملاً توسعهیافته برای 29 = Re نشان میدهد. برای بدست آوردن این طول، فاصله نقطهای را که در آن سرعت به ۰.۹۹

رسم شده است. ملاحظه می شود که استفاده از ضرایب تصحیح، تاثیر قابل توجهی در پایداری و افزایش سرعت همگرایی حل دارد که در نهایت منجر به کاهش زمان شبیه-سازی برای رسیدن به دقت مطلوب نیز می شود. بنابراین می توان گفت که استفاده از روش محاسبه شار با استفاده از فاکتورهای تصحیح منجر به افزایش پایداری و دقت شبیه-سازی و در نتیجه کاهش تکرار محاسبات برای رسیدن به دقت مطلوب خواهد شد.



در ادامه این بخش تحلیل حرارتی جریان درون کانال را با شرایط مرزی مختلف مد نظر قرار می دهیم. در اینجا نسبت منظری کانال برابر با 10 = L/H انتخاب شده است که طول صفحه های ثابت یا دیوارها می باشد. به مرز ورودی، طول صفحه های ثابت یا دیوارها می باشد. به مرز ورودی، سیال با سرعت یکنواخت 0.01 =  $U_{in}$  و دمای یکنواخت اعمال می شود. شبیه سازی برای دو شرط مرزی گرمایی مختلف انجام گرفته است که نتایج آن با نتایج تحلیلی و عددی معتبر مقایسه شده اند.

حالت ۱: دیوارها هر دو در شار ثابت الت ۱: م $q_{low} = 1.5 q_{up} = 0.015$ 

حالت ۲: دیوار پایینی در دمای ثابت  $T_{low}=1$  قرار دارد در حالت ۲: دیوار پایینی در شار ثابت  $q_{up}=0.002$  قرار دارد.

توجه شود که دمای یکنواخت ورودی در حالت ۲ برابر با  $T_{in} = 1$  و در حالت ۱ برابر با  $T_{in} = 5$  میباشد. همچنین، در تمام شبیه سازی های انجام شده، عدد پرانتل برابر با  $\Pr = v/\alpha = 0.7$ 

شکل های ۱۱- الف و ۱۱- ب توزیع عدد ناسلت را در دیوار پایینی کانال بصورت تابعی از عدد گراتز نشان میدهد که با نتایج [۳۲] مقایسه شده است. توجه شود که عدد گراتز و ناسلت بصورت زیر تعریف میشوند:

$$G_{z} = (x/H) \operatorname{Re} \cdot \operatorname{Pr}$$
 (11)

$$Nu_{x} = D_{h}q_{w,x} / [k(T_{w,x} - T_{b,x})]$$
(17)

در رابطه فوق،  $D_h$  قطر هیدرولیکی، k ضریب رسانش گرمایی،  $(D_k - k)_w = q_{w,x}$  شار گرمایی دیوار و  $T_b$  دمای بالک می،اشد. نتایج نشان داده شده بیانگر تطابق خوب بین روش مورد استفاده با نتایج [۳۲] می باشد. ملاحظه می شود که طول گرمایی ورودی به خوبی با استفاده از روش مورد استفاده، پیش بینی شده است.



الف) حالت ۱ و ب) حالت ۲

در انتها به بررسی نحوه تاثیر فاکتورهای تصحیح بر پایـه دما (یعنی T = T) بر روی حل می پردازیم. برای این منظور بیانگر دقت بالای روش پیشنهادی در مقایسه با دیگر روشها می باشد.

مراجع

- [1] Succi S (2001) The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond. Clarendon, Oxford.
- [2] Benzi R, Succi S, Vergassola M (1992) The lattice Boltzmann equation: theory and applications. Phys Rep 222: 145–197.
- [3] Bella G, Ubertini S, Bertolino M (2003) Computational fluid dynamics for low and moderate Reynolds numbers through the lattice Boltzmann method. Int J Comp Num Analy Appl 3(1): 83–115.
- [4] Rothman DH, Zaleski S (1994) Lattice-gas model of phase separation: interfaces, phase transitions, and multiphase flow. Rev Mod Phys 66(4): 1417– 1479.
- [5] Chen S, Doolen G (1998) Lattice Boltzmann method for fluid flows. Ann Rev Fluid Mech 30: 329–364.
- [6] Zarghami A, Maghrebi MJ, Ghasemi J (2011) Finite volume-lattice Boltzmann modeling of viscous flows. Majlesi J Mech Eng 4(2): 11–19.
- [7] Barth TJ, Jespersen DC (1989) The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. AIAA Paper 89:0366.
- [8] Tamamidis P (1995) A new upwind scheme on triangular meshes using the finite volume method. Comput Methods Appl Mech Eng 124: 15–21.
- [9] Sofonea V, Sekerka RF (2005) Boundary conditions for the upwind finite difference lattice Boltzmann model: evidence of slip velocity in micro-channel flow. J Comput Phys 207: 639–659.
- [10] Patil DV, Lakshmisha KN (2009) Finite volume TVD formulation of lattice Boltzmann simulation on unstructured mesh. J Comput Phys 228: 5262– 5279.
- [11] Premnath KN, Pattison MJ, Banerjee S (2009) Dynamic subgrid scale modeling of turbulent flows using lattice-Boltzmann method. Physica A 338: 2640–2658.
- [12] He X, Chen S, Doolen GD (1998) A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit. J Comput Phys 146: 282-289.
- [13] Alexanders F, Chen S, Sterling J (1993) Lattice Boltzmann thermo-hydrodynamics. Phys Rev E 47: 2249–2252.
- [14] Pavlo P, Vahala G, Vahala L (1998) Linear stability analysis of thermo-lattice Boltzmann models. J Comput Phys 1391: 79–91.

رابطـه (۲۰) را مـد نظـر قـرار مـیدهـیم. شـکل ۱۲ نمـودار همگرایی دمـا را در Re = 100 بـرای شـرط مـرزی گرمـایی حالت ۲ نشان میدهد. ملاحظه میشود کـه اسـتفاده از ایـن ضرایب تصحیح، تـاثیر قابـل تـوجهی در پایـداری و افـزایش سرعت همگرایی در مقایسه با روش میانگین گیری دارد.



همگرایی حل در جریان درون کانال برای Re = 100

#### ۶- نتیجهگیری

در این مقاله از روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول برای گسسته سازی معادلات جریان و انرژی بولتزمن استفاده گردید. از مدل تابع توزیع دوگانه برای توصیف میدان دما برای جریان گرمایی دوبعدی تراکم ناپذیر بهره گرفته شد. جهت افزایش دقت و سرعت همگرایی از فاکتورهای تصحیح مبتنی بر فشار و دما برای معادلات مومنتوم و انرژی بولتزمن استفاده شد. با توجه به موارد فوق، دقت روش مورد استفاده بهبود قابل توجهی یافته و واگرایی که یکی از مشکلات توام با شبیه سازی گرمایی با استفاده از روش شبکه بولتزمن است، به نحو مطلوبی برطرف گردید و در عین حال تعداد گامهای زمانی برای رسیدن به دقت مورد نظر نیز کاهش یافت.

علاوه بر موارد فوق، اعمال شرایط مرزی جریان با در نظر گرفتن شبکه اضافی درهر سلول مرزی، کارائی خوبی را نشان میدهد. همچنین اعمال شرط مرزی گرما با تجزیه تابع توزیع انرژی به بخش های تعادلی و غیر تعادلی که از روش های دقیق میباشد، در روش پیشنهادی مورد استفاده قرار گرفت. علاوه بر محاسبه لزجت جریان، نتایج شبیهسازی برای جریان سیال تراکم ناپذیر درون کانال دوبعدی بررسی گردید که مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج تحلیلی و عددی معتبر

- [25] Hirsch C, (1998) Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. I: Fundamentals of Numerical Discretization, Wiley, Chichester.
- [26] Stiebler M, Tolke J, Krafczyk M (2006) An upwind discretization schem for the finite volume lattice boltzamnn method. Computer Fluids 35: 814–819.
- [27] Ghasemi J, Razavi SE (2010) On the finite volume lattice boltzmann modeling of thermohydrodynamics. Comput Math Appl 60: 1135– 1144.
- [28] Xi H, Peng G, Chou SH (1999) Finite-volume lattice Boltzmann method. Phys Rev E 59(5): 6202–6205.
- [29] Tanehill JC, Anderson DA, Pletcher RH (1997) Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. 2nd Edition. Taylor & Francis.
- [30] Zou Q, He X (1997) On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. Phys Fluids 9: 1591–1598.
- [31] Guo Z, Zheng C, Shi B (2002) An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method. Phys Fluids 14(6): 2007– 2010.
- [32] Tang GH, Tao WQ, He YL (2005) Thermal boundary condition for the thermal lattice Boltzmann equation. Phys Rev E 72:016703.
- [33] Chen CK, Tzu-Shuang Y, Yue-Yzu Y (2006) Lattice Boltzmann method of backward facing step on convective heat transfer with field synergy principle. Int J Heat Mass Trans 49: 1195–1204.
- [34] Schlichting H (2005) Boundary Layer Theory. 3rd Ed. Springer-Verlag.
- [35] Chen RY (1973) Flow in the entrance region at low Reynolds numbers. J Fluid Eng 95: 153–158.

- [15] Piaud B, Blanco S, Fournier R, Clifton MJ (2005) Energy conserving of lattice Boltzmann thermal model in two dimensions. J Stat Phys 121(1-2:119–131.
- [16] Peng Y, Shu C, Chew YT (2003) Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flows. Phys Rev E 68: 026701.
- [17] Shi Y, Zhao TS, Guo ZL (2004) Thermal lattice Bhatnagar-Gross-Krook model for flows with viscous heat dissipation in the incompressible limit. Phys Rev E 70: 066310.
- [18] Van der Sman RGM (1997) Lattice Boltzmann scheme for natural convection in Porous media. Int J Modern Phys C 8:879–888.
- [19] Palmer BJ, Rector DR (2000) Lattice Boltzmann algorithm for simulating thermal flow in compressible fluids. J Comput Phys 161: 1–20.
- [20] Onishi J, Chen Y, Ohashi H (2001) Lattice Boltzmann simulation of natural convection in a square cavity. JSME Int J Ser B 44: 53–62.
- [21] Zheng L, Guo Z, Shi B, Zheng C (2010) Kinetic theory based lattice Boltzmann equation with viscous dissipation and pressure work for axisymmetric thermal flows. J Comput Physics 229(16): 5843–5856.
- [22] Bhatnagar PL, Gross EP, Krook M (1954) A model for process in gases, Phys Rev 94: 511– 525.
- [23] Peng Y, Shu C, Chew YT (2003) Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flows. Phys Rev E 68: 026701.
- [24] Ubertini S, Succi S (2005) Recent advances of lattice Boltzmann techniques on unstructured grids. Prog Comput Fluid Dyn 5: 85–96.