



## پیش‌بینی عمر خستگی پلیمرهای تقویت‌شده با الیاف شیشه و الیاف گرافیت تحت بارگذاری‌های مختلف

عیسی احمدی<sup>۱\*</sup>، محمد خانمحمدی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، ایران

<sup>۲</sup> کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۶/۳۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۸/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۱/۰۱

### چکیده

شناخت دقیق رفتار پلیمرهای تقویت‌شده در بارگذاری خستگی به منظور طراحی سازه‌های قابل اعتماد حایز اهمیت است و با توجه به رفتار متفاوت این مواد نسبت به مواد سنتی، معرفی معیاری که نماینده واقعی عمر خستگی این مواد باشد بسیار مهم است. در این تحقیق، عمر خستگی برای ورق تقویت‌شده با الیاف شیشه و الیاف گرافیت که تحت بار خمشی قرار گرفته، برای دو حالت بارگذاری جانبی گسترده و متمرکز محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده است. برای مدلسازی مساله از تئوری کاهش استحکام و برای محاسبه مقدار تنش در لایه‌های ورق، از تئوری برشی مرتبه اول ورق‌ها استفاده شده و با استخراج توزیع تنش در هر لایه از ورق و با استفاده از تئوری کاهش تدریجی خواص، میزان کاهش استحکام برای هر لایه در هر مرحله از بارگذاری بدست آمده است. با ادامه بارگذاری، سرانجام استحکام لایه‌ها در اثر خستگی در راستای الیاف و ماتریس کاهش می‌یابد تا به مقدار تنش اعمال شده به لایه می‌رسد و لایه شکسته می‌شود. در این مرحله، از تئوری قاعده کاهش ناگهانی خواص برای مدلسازی شکست لایه استفاده می‌شود و با ادامه فرآیند حل، میزان عمر خستگی لایه‌ها و اثرات شکست یک لایه بر رفتار لایه‌های دیگر تا رسیدن به شکست نهایی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین در قسمت نتایج عددی، عمر خستگی برای ورق کامپوزیتی از دو جنس یاد شده با یکدیگر مقایسه شده است.

**کلمات کلیدی:** پلیمرهای تقویت شده، پیش‌بینی عمر، تئوری کاهش تدریجی خواص، تئوری کاهش ناگهانی خواص، تئوری مرتبه اول

برشی.

## Life Prediction of Reinforced Glass-Epoxy and Graphite-Epoxy Polymers Subjected to Various Loading Conditions

I. Ahmadi<sup>1,\*</sup>, and M. Khanmohammadi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Assistant Prof., Mech. Eng. Dept, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

<sup>2</sup> MSc Student, Faculty of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

### Abstract

Investigation of the fatigue behavior of reinforced polymer composites is necessary to design a reliable and durable structure. Due to the difference between the fatigue properties of reinforced polymers and traditional isotropic engineering materials, introducing a criteria for prediction of the fatigue life of reinforced polymers is very useful in design and analysis. This work is aimed at the life prediction of reinforced plates subjected to bending fatigue loads. The glass-epoxy and graphite-epoxy plates, which are subjected to the distributed and concentrated transverse loads, are studied based upon the strength degradation model. Distribution of the stresses at the plies of the plate subjected to transverse load is acquired using the first-order shear deformation plate theory. Then the strength degradation model is used to predict the strength reduction of each ply of the plates in the loading cycles. The degradation of plies and reduction of the strength in each loading stage are accumulated, and the residual strength of the plies is obtained as a function of the load cycles. This procedure is repeated until the plies fail, and the final catastrophic failure occurs in the plate.

**Keywords:** Reinforced Polymers, Life Prediction, Strength Degradation Theory, Sudden Death Theory, First Order Shear Deformation Theory.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۵۸ ۳۳۰۵۴ ۲۴ (+۹۸)؛ فکس: ۳۲۰۴ ۳۲۲۸ ۲۴ (+۹۸)

آدرس پست الکترونیک: i\_ahmadi@znu.ac.ir

## ۱- مقدمه

استفاده از مواد کامپوزیتی در سازه‌های صنعتی، روز به روز در حال گسترش است. گسترش استفاده از این مواد به علت ویژگی‌های خاص این مواد از جمله استحکام ویژه بالا و مدول ویژه بالا و مقاومت در برابر خوردگی و بعضی خواص ممتاز دیگر این مواد است. از طرف دیگر استفاده از این مواد، نیازمند تحلیل‌ها و بررسی‌های بیشتر در مورد رفتارهای آن‌ها در برابر بارگذاری‌های مختلف از جمله، بررسی رفتار آن‌ها در بارگذاری در زمان‌های طولانی است. از جمله پدیده‌هایی که با گذشت زمان و در اثر بارگذاری‌های متعدد سیکلی بوجود می‌آید، پدیده خستگی است. بارگذاری خستگی، یکی از مهمترین انواع بارگذاری‌هایی است که سازه‌های مورد استفاده در صنعت متحمل آن می‌شوند. با توجه به اهمیت خستگی در شکست مواد، خستگی مواد مرکب مدت‌هاست که مورد بررسی قرار می‌گیرد و مدل‌های مختلفی برای بررسی رفتار و پیش‌بینی عمر خستگی مواد کامپوزیتی ارائه شده است، اما برای ارزیابی عمر خستگی و رفتار خستگی در شرایط بارگذاری مختلف، به بررسی بیشتر فرایندها و عوامل موثر بر آن‌ها نیاز است. در اکثر روش‌های معرفی شده برای بررسی رفتار خستگی مواد کامپوزیت، لازم است آزمایش‌های فراوانی مانند، آزمایش‌های کشش-کشش و کشش-فشار صورت پذیرد. در این آزمایش‌ها، لایه‌های ماده مرکب تک-جنس و با الیاف هم‌جهت در معرض ایجاد و رشد یکسان آسیب قرار دارند. در بارگذاری خمشی، به علت توزیع تنش لایه‌ها بنا به جایگاه قرارگیری خود در لایه‌چینی، شرایط متفاوت دارند. در اثر بارگذاری خمشی، مقدار تنش در هر لایه علاوه بر زاویه آن به موقعیت هندسی قرارگیری آن در لایه‌چینی نیز بستگی دارد؛ بنابراین لایه‌ها با تقدم و تاخر خاصی نسبت به هم دچار شکست و واماندگی می‌شوند که به زاویه و محل قرارگیری لایه بستگی دارد. از طرف دیگر، در بارگذاری خمشی ورق، تنش‌ها بسته به شرایط مرزی در یک راستا نمی‌باشند و بارگذاری دوعبدهی به ورق وارد می‌شود؛ لذا در این مقاله، ورق کامپوزیتی لایه‌ای که تحت بار نوسانی عرضی است، مورد بررسی قرار گرفته است. بارگذاری متمرکز و گسترده ورق کامپوزیتی برای حالت‌های مختلف بارگذاری، مورد بررسی قرار گرفته است. از تئوری مرتبه اول برشی، برای مدل‌کردن ورق و محاسبه تنش‌های لایه‌ها استفاده

شده، در ادامه به منظور تعیین ترتیب شکست لایه‌ها، از تئوری کاهش تدریجی و ناگهانی خواص ماده در اثر خستگی، استفاده شده است. بر همین اساس در این مقاله، سعی بر آن شده تا ضمن بررسی ترتیب و راستای شکست هریک از لایه‌ها، اثر تغییر جنس و نیز تغییر نوع بارگذاری در عمر خستگی بررسی شود. به همین منظور، دو جنس شیشه-اپوکسی و گرافیت-اپوکسی تحت چیدمان ۴ لایه متقارن  $[0/45]_s$  به عنوان مواد کامپوزیتی و نیز دو نوع بارگذاری خستگی خمشی از نوع بار گسترده و بار متمرکز برای حل مساله در نظر گرفته شده است که نتایج حاصل از حل عددی در نرم افزار متلب<sup>۱</sup> در ادامه نشان داده شده است.

مطالعه روی تاریخچه و روند مطالعات انجام شده روی مدل‌سازی رفتار مواد کامپوزیتی نشان می‌دهد که مطالعه روی رفتار خستگی مواد مرکب تحت بارگذاری کششی و فشاری ساده نیز، همچنان ادامه دارد و بخش عمده‌ای از تحقیقات انجام شده در این زمینه، بیشتر صرف گسترش بعضی از مدل‌های خستگی برای استفاده در وضعیت‌های مختلف شده است. در ادامه، چند نمونه از مهمترین تئوری‌های ارائه شده در این رابطه بیان شده است.

جن<sup>۲</sup> و لی<sup>۳</sup>، معیار خستگی تسای-هیل<sup>۴</sup>، برای بارگذاری خستگی چند محوره در حالت تنش صفحه‌ای را تحت عنوان معیار واماندگی خستگی تسای-هیل تعمیم یافته تصحیح نمودند و آن را بصورت رابطه (۱) بیان کردند [۱،۲].

$$M_{11}^2 \left( \frac{\sigma_{xx}}{\bar{\sigma}_{11}} \right)^2 + M_{22}^2 \left( \frac{\sigma_{xx}}{\bar{\sigma}_{22}} \right)^2 - M_{11}M_{22} \left( \frac{\sigma_{xx}}{\bar{\sigma}_{11}} \right)^2 + M_{12}^2 \left( \frac{\sigma_{xx}}{\bar{\sigma}_{12}} \right)^2 = 1 \quad (1)$$

که در آن، همه مولفه‌های صفحه‌ای تنش برحسب، تنش محوری  $\sigma_{xx}$ ، پارامترهای نسبت تنش  $R_{xx}$ ،  $R_{yy}$ ،  $R_{xy}$  و نسبت‌های تنش  $\alpha$  و  $\beta$  بین  $(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})$  است. استحکام‌های خستگی  $\bar{\sigma}_{ii}$  توابعی از تعداد سیکل  $N$ ، فرکانس  $f$  و نسبت تنش  $R_{ij}$  هستند که به طریقه تجربی تعیین می‌شوند. این تئوری، به ورق کامپوزیتی کربن با چیدمان از نوع متقاطع و شبه ایزوتروپ اعمال گردید، اما اختلاف زیاد بین

<sup>1</sup> Matlab Software

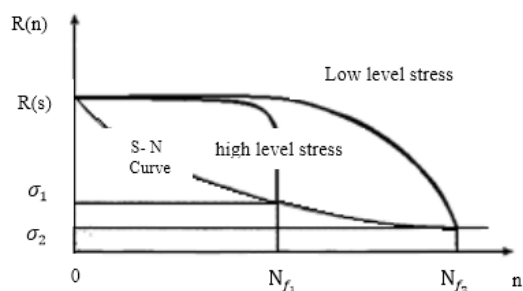
<sup>2</sup> Jen

<sup>3</sup> Lee

<sup>4</sup> Tsai-Hill

مطالعات خود به دنبال ارائه روابطی گشتند تا ضمن آنکه جواب مساله تا حد قابل قبولی دقیق و درست باشد، نیاز کمتری به پارامترهای تجربی داشته باشد.

در تئوری‌های مربوط به کاهش تدریجی خواص، استحکام باقی‌مانده کامپوزیت ( $R_n$ ) با افزایش شمار سیکل‌های بار خستگی کاهش می‌یابد و پس از تعداد مشخصی از سیکل بارگذاری که تعداد سیکل شکست نامیده می‌شود، استحکام کاهش‌یافته به مقدار تنش اعمال شده بر ماده که پایین‌تر از استحکام اولیه می‌باشد می‌رسد. در این لحظه لایه کامپوزیتی تحت اثر بار اعمال شده به آن دچار شکست می‌شود. بطور کلی کاهش خواص کامپوزیت به مقدار تنش اعمال شده به آن بستگی دارد و کاهش خواص در تمام راستاها از جمله در راستای الیاف و راستای عمود بر الیاف وجود دارد. در هر لحظه که تنش اعمالی بر لایه با استحکام مربوطه به آن تنش در لایه برابر شود و یا از آن بیشتر شود لایه مربوطه در مود شکست آن تنش دچار شکست می‌شود. تئوری کاهش تدریجی خواص تک لایه کامپوزیتی با افزایش تعداد سیکل‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است. همچنین نحوه شکست لایه که از برخورد دو منحنی استحکام کاهش-یافته با منحنی تنش بدست می‌آید در این شکل مشخص است.



شکل ۱- نمودار پیش‌بینی عمر خستگی به وسیله مدل کاهش استحکام، ورق تک‌جهته تحت دو سطح تنش مختلف

رابطه ارائه شده توسط ساها و بروتمن به دلیل فراگیری و عدم نیاز به انجام تست‌های تجربی زیاد به منظور استخراج پارامترهای ماده مورد استقبال قرار گرفته است و دارای دقت قابل قبول در محاسبه عمر خستگی می‌باشد. به همین منظور، در این مقاله تئوری ساها و بروتمن، برای محاسبه کاهش استحکام از تئوری فوق استفاده شده است که در ادامه

نتایج و پیش‌بینی تئوری برای لایه‌چینی  $4s[\pm 45]$  دلالت بر آن دارد که تصحیح بیشتری در تئوری نیاز است. کاربرا<sup>۱</sup> و همکاران، خمش مواد مرکب و صفحات ساندویچی تحت بارهای عرضی را با مقایسه بین نتایج حاصل از انواع تئوری‌ها به انجام رساندند[۳].

پرهی<sup>۲</sup> و همکاران، رفتار صفحات مرکب تحت خمش و ضربه را با در نظر گرفتن جدایش لایه‌ها بررسی کردند. تحلیل انجام شده توسط آن‌ها بر مبنای اولین واماندگی لایه-ای و با قراردادن جدایش در نقاط دلخواه انجام گردید. آنها همچنین در ادامه با تغییر اندازه و تعداد جدایش لایه‌ها، روی نتایج حاصل از اولین واماندگی لایه‌ای بحث کردند[۴].

سها و بروتمن<sup>۳</sup> [۵] یک رابطه بر اساس کاهش تدریجی خواص لایه کامپوزیتی با افزایش سیکل‌های بارگذاری ارائه کردند که خواص باقی‌مانده لایه کامپوزیتی را بر حسب تعداد سیکل انجام شده و خواص اولیه ارائه می‌نماید. رابطه ارائه شده توسط ساها و بروتمن در رابطه (۲) نشان داده شده است.

$$R(n, \sigma, N_f) = \left(1 - \frac{n}{N_f}\right) (R_s - \sigma) + \sigma \quad (2)$$

در رابطه فوق  $R(n, \sigma, N_f)$  استحکام باقیمانده،  $R_s$  استحکام استاتیکی،  $\sigma$  اندازه ماکزیمم تنش اعمالی،  $n$  شماره سیکل طی شده،  $N_f$  عمر خستگی در تنش اعمالی است. همانگونه که مشاهده می‌شود در تئوری ارائه شده توسط ساها و بروتمن، با افزایش شمار سیکل‌ها، استحکام خستگی تحت تنش اعمال شده ثابت ( $\sigma$ )، کاهش می‌یابد. شکریه و لسارد<sup>۴</sup> رابطه‌ای جدیدی به‌منظور محاسبه کاهش استحکام ارائه کردند و از آن برای پیش‌بینی عمر خستگی کامپوزیت‌ها استفاده نمودند [۱۰-۶]. این رابطه از لحاظ کلی شبیه رابطه ساها و بروتمن بوده و یک رابطه کاهش تدریجی خواص است ولی دارای ضرایب تجربی  $\alpha$  و  $\beta$  می‌باشد. استخراج این ضرایب از طریق انجام آزمایش‌های تجربی خستگی صورت می‌گیرد که کار زمان‌بر و پرهزینه‌ای است و باید برای مواد مختلف این آزمایش‌ها تکرار شود که نیازمند صرف هزینه و زمان زیادی خواهد بود است. بر همین اساس، پژوهشگران در

<sup>1</sup> Carrera

<sup>2</sup> Parhi

<sup>3</sup> Sahu & Brutman

<sup>4</sup> Shokrieh & Lessard

## ۲-۱- حل مساله

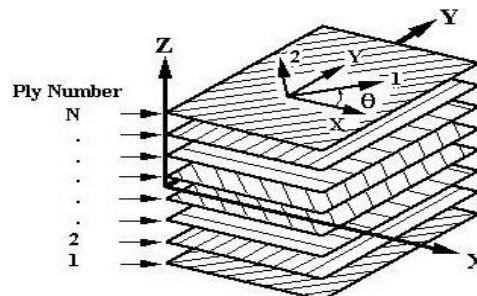
ورق که تحت بار متناوب جانبی قرار دارد و در اطراف دارای شرایط مرزی ساده است تحلیل شده است. برای تحلیل خستگی در ورق باید دامنه تنش اعمال شده به تمام لایه‌ها بدست آید. برای این منظور از تئوری‌های متداول ورق‌های کامپوزیتی استفاده می‌شود. یکی از معروفترین این تئوری‌ها تئوری مرتبه اول برشی ورق‌ها می‌باشد که در این مقاله از آن استفاده شده است. تئوری‌های مختلفی برای مدل سازی و حل ورق‌ها وجود دارد که می‌توان به تئوری‌های حل لوی و ناویر اشاره نمود که هرکدام از این تئوری‌ها دارای استفاده‌های مختلف می‌باشند. در این مقاله برای حل مساله نیاز به محاسبه تنش‌ها می‌باشد و با توجه به اینکه در هر سیکل خواص کاهش پیدا می‌کند باید در هر مرحله خواص ماده در حل مساله کاهش یابد. با توجه به شرایط مرزی از حل ناویر برای تحلیل ورق و محاسبه تنش در لایه‌های مختلف آن استفاده شده است.

برای محاسبه عمر خستگی به روش کاهش تدریجی خواص، به دلیل اینکه خواص فیزیکی از جمله استحکام و مدول لایه‌ها با افزایش تعداد سیکلها کاهش تدریجی می‌یابد لذا خواص لایه‌های مختلف ماده به افزایش سیکل‌های اعمالی تغییر می‌کنند، لذا هنگام حل مساله در هر بارگذاری سیکلی، مقداری از میزان سفتی و استحکام اولیه‌ی ماده کاهش یافته و این کاهش در حل بعدی باید در نظر گرفته شود. در نهایت با کاهش استحکام، یک یا چند لایه از سازه کامپوزیتی در راستای الیاف و یا عمود بر الیاف شکسته شود. این شکست منجر خواهد شد تا نمودار کاهش استحکام با شیب تندتری کاهش یابد. با افزایش تعداد شکسته‌ها سرعت کاهش خواص لایه‌های دیگر با سرعت بالاتری ادامه می‌یابد. در هر مرحله از شکست، از تئوری قاعده کاهش خواص ناگهانی برای مدلسازی لایه شکسته شده استفاده می‌شود که در ادامه به طور مختصر آمده است. در نهایت، کل لایه‌ها شکسته خواهند شد و عمر سازه به اتمام می‌رسد. در حل مساله به روش کاهش تدریجی خواص برای رسیدن به عمر خستگی نهایی، می‌بایست چند هزار سیکل طی شود، لذا استفاده از روش‌های عددی مانند روش المان محدود که حجم محاسبات بالایی دارد زمان حل مساله را بشدت افزایش خواهد داد چرا که باید به دفعات زیادی مساله حل شود و حجم محاسبات به

در قسمت حل مساله، توضیحات بیشتر در رابطه با این تئوری داده شده است. همچنین جنس ورق مورد بررسی در این تحقیق، از نوع گرافیت-اپوکسی و شیشه-اپوکسی است که در جدول شماره ۱، خواص اولیه این مواد نشان داده شده است [۱۱].

## ۲- مدل سازی مساله

در این مقاله، ورق کامپوزیتی که تحت بارگذاری خمشی سیکلی است، در دو نوع بارگذاری متمرکز و گسترده مورد مطالعه قرار خواهد گرفت و عمر یک ورق کامپوزیتی ۴ لایه با چیدمان متقارن  $[0/45]_s$  با دو جنس مختلف شیشه-اپوکسی و گرافیت-اپوکسی تحت بارگذاری متناوب خمشی که از نوع بار گسترده و متمرکز می‌باشند، با استفاده از تئوری‌های کاهش استحکام و کاهش ناگهانی خواص، پیش‌بینی خواهد شد. لازم به ذکر است، در این مطالعه فرض شده است که ورق توسط تکیه‌گاه ساده در هر ضلع مهار شده است. همچنین نحوه لایه‌چینی در شکل ۲، به طور شماتیک نشان داده شده است. [۱۲]



شکل ۲- چینش لایه‌ها در یک ورق چند لایه کامپوزیتی

ورق تحت دو نوع بارگذاری قرار گرفته است. در بارگذاری نوع اول، فرض شده است که ورق تحت بار گسترده جانبی یکنواخت  $q_0$  در سرتاسر آن قرار دارد و در حالت دوم فرض شده است که بار متمرکز  $P$  که معادل بار گسترده است در نقطه  $x=a/2$  و  $y=b/2$  وارد می‌شود که  $a$  و  $b$  به ترتیب طول و عرض ورق است. همچنین در این پژوهش دو جنس مختلف شیشه-اپوکسی و گرافیت-اپوکسی، مورد بررسی قرار گرفته است و اثر تغییر نوع بارگذاری بر ترتیب شکست لایه‌ها و عمر سازه با یکدیگر مقایسه شده است.

در حل این مساله، دو نوع بارگذاری جانبی برای مساله در نظر گرفته شده است. بارگذاری متمرکز به اندازه  $P$  در مرکز ورق و بارگذاری گسترده یکنواخت با شدت  $q_0$  که روی سطح ورق گسترده شده است که هر دو بصورت متناوب با زمان تغییر می‌کنند. بارگذاری متمرکز در نقطه  $x_0$  و  $y_0$  و همچنین بارگذاری گسترده به ترتیب با رابطه (۸) و (۹) نشان داده شده است [۱۵].

$$q(x, y) = P\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\sin(\omega t) \quad (۸)$$

$$q(x, y) = q_0\sin(\omega t) \quad (۹)$$

در روابط (۸-۹)  $\delta$  تابع دلتای دیراک بوده،  $P$  دامنه بار متمرکز و  $q_0$  دامنه شدت بار گسترده یکنواخت است.

با توجه به نوع شرط مرزی انتخاب شده، پاسخ ورق بصورت یک سری از توابع مثلثاتی مانند زیر قابل بیان است. همچنین بار اعمال شده خارجی بصورت بسط سری فوریه بصورت روابط (۱۰-۱۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (۱۰)$$

$$\psi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (۱۱)$$

$$\psi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (۱۲)$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (۱۳)$$

که در آن مقدار  $W_{mn}$ ،  $X_{mn}$  و  $Y_{mn}$  مقدار ضریب سری‌های فوق بوده، برای هر  $m$  و  $n$  از حل رابطه (۱۴) بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۱۴)$$

در رابطه ۱۴، مقادیر  $K_{ij}$  از قراردادن روابط (۱۰) الی (۱۳) در معادلات تعادل بر حسب جابجایی بدست می‌آید و در پیوست آمده است.

### ۲-۱-۲- بار متمرکز

برای بار متمرکز مقدار  $q_{mn}$  با استفاده از روابط (۸) و جایگذاری در رابطه (۱۳) و ضرب عبارت  $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$  و در نهایت انتگرال‌گیری از آن بصورت رابطه (۱۵) بدست می‌آید [۱۵].

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \quad (۱۵)$$

اگر بار متمرکز در مرکز ورق وارد شود برای حالتی که یکی از مقادیر  $m$  و  $n$  زوج باشد، مقدار  $q_{mn}$  برابر صفر خواهد بود؛ برای بار متمرکز که در مرکز ورق اعمال می‌شود، مقدار  $q_{mn}$  از رابطه (۱۶) بدست می‌آید.

شدت افزایش می‌یابد و نیاز به کامپیوترهای با سرعت حل بالا را اجتناب ناپذیر می‌کند. لذا در این پژوهش از حل سری با تعداد محدود جمله استفاده شده است که دارای دقت همگرایی بالایی در محاسبه تنش‌ها در ورق می‌باشد و لذا سرعت حل مساله افزایش یافته و زمان حل کاهش یافته است که از مزایای روش ارایه شده در این مقاله می‌باشد. همچنین کدنویسی در نرم افزار متلب انجام شده است. همچنین برای افزایش دقت محاسبات و پاسخ از تئوری برشی مرتبه اول برای مدلسازی و حل ورق استفاده شده است.

### ۲-۱-۱- فرمولبندی بر اساس تئوری مرتبه برشی

برای بدست آوردن مقدار تنش‌های ایجاد شده در هر لایه از ورق تقویت شده، از تئوری مرتبه اول برشی استفاده می‌شود. معادلات تعادل برای ورق با لایه‌گذاری متقارن که تحت بارهای جانبی  $q(x, y)$  قرار دارد با توجه به تئوری مرتبه اول برشی و بدون در نظر گرفتن ترم‌های مربوط به تغییرات دما و اثرات رطوبت با روابط (۳-۵) قابل نوشتن است [۱۳، ۱۴]:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) = I_1 \ddot{w}_0 \quad (۳)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_3 \ddot{\psi}_x \quad (۴)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = I_3 \ddot{\psi}_y \quad (۵)$$

که در آن و  $Q_x$ ،  $Q_y$ ،  $M_x$  و  $M_y$ ،  $M_{xy}$  منتجهای نیرو و منتجهای ممان می‌باشند که در پیوست تعریف شده است و  $w_0$  مقدار خیر و  $\psi_x$  و  $\psi_y$  مقدار زاویه‌های چرخش سطح مقطع ورق در تئوری مرتبه اول برشی می‌باشند. همچنین  $I_1$  و  $I_2$  بصورت رابطه (۶) تعریف می‌شود.

$$(I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z^2) \quad (۶)$$

همچنین  $q(x, y)$  بار جانبی خارجی وارده بر ورق است. با جایگذاری منتجهای نیرو و ممان بر حسب مولفه‌های جابجایی، معادلات حاکم بر ورق بر حسب مولفه‌های جابجایی بدست می‌آید که جزئیات آن در [۱۴] قابل مشاهده است.

در این مقاله برای بدست‌آوردن یک حل تحلیلی و اجتناب از حل المان محدود، شرط مرزی ورق بصورت تکیه-گاه ساده در نظر گرفته شده است. شرایط تکیه‌گاه ساده در روی مرزهای ورق بصورت رابطه (۷) است:

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0 \\ M_x(0, y) = M_x(a, y) = M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (۷)$$

استحکام و سفتی، سیکل خستگی دوباره از مرحله اول، اما این بار با استفاده از نتایج بدست آمده از مرحله قبل، تکرار شده تا زمانیکه این کاهش به میزانی برسد که منحنی تجربی تنش-برحسب سیکل طی شده را قطع نماید که نقطه برخورد منحنی کاهش استحکام و منحنی تنش-برحسب سیکل طی شده، عمر خستگی قطعه را در راستای موردنظر نشان خواهد داد. روابط کاهش استحکام و مدول که توسط پروتمن و ساها بدست آمده، در زیر نشان داده شده است [۱۱، ۱۷].

$$R = \left(1 - \frac{n}{N_f}\right)(R_0 - \sigma) + \sigma \quad (22)$$

$$E = \left(1 - \frac{n}{N_f}\right)\left(E_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_f}\right) + \frac{\sigma}{\varepsilon_f} \quad (23)$$

در روابط (۲۳) میزان استحکام کاهش یافته و E میزان سفتی کاهش یافته در هر سیکل از بارگذاری، n شماره سیکل، N تعداد سیکل خستگی، R<sub>0</sub> استحکام استاتیکی، E<sub>0</sub> مدول استاتیکی، ε<sub>f</sub> متوسط کرنش لحظه واماندگی و σ تنش می‌باشد.

روابط فوق با فرض اینکه تنش در طول حل مسئله ثابت است قابل استفاده می‌باشند؛ اما از آنجایی که در طول حل مساله این پژوهش دامنه تنش همواره در حال تغییر است، لذا برای ثابت فرض نمودن تنش، می‌بایست از مشتق روابط (۲۲) و (۲۳)، نسبت به دو پارامتر تنش و تعداد سیکل، استفاده کرد. مشتق معادله (۲۲) نسبت به n و σ عبارتست از:

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \left(1 - \frac{n}{N_f}\right)(-1) + 1 = \frac{n}{N_f} \quad (24)$$

$$\frac{\partial R}{\partial n} = \left(-\frac{1}{N_f}\right)(R_0 - \sigma) \quad (25)$$

از معادلات (۲۴) و (۲۵) رابطه (۲۶) قابل استخراج است

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial \sigma} \delta \sigma + \frac{\partial R}{\partial n} \delta n \quad (26)$$

از آنجایی که میزان دلتای تنش در یک سیکل ثابت فرض شده، لذا ترم اول معادله فوق صفر خواهد شد. در نتیجه معادله (۲۶) به صورت ساده شده (۲۷) تبدیل می‌شود؛

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial \sigma} \delta n \quad (27)$$

معادله (۲۷) به صورت رابطه (۲۸) قابل باز نویسی است؛

$$R(n + \delta n) = R(n) + \frac{\partial R}{\partial n} \delta n \quad (28)$$

همچنین در n = 1 داریم (R = R<sub>0</sub>)، لذا معادله فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$R(1) = R_0$$

$$R(2) = R(1) + \left[-\frac{1}{N_f}(R_0 - \sigma)\right]$$

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \quad (16)$$

که در آن m و n هر دو فرد هستند. با جاگذاری رابطه (۱۶) در رابطه (۱۴)، مقدار ضرایب بسط فوریه بدست می‌آید و سپس مقدار تنش‌ها از رابطه تنش-کرنش بصورت رابطه (۱۷) بدست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

که [Q̄] ماتریس سفتی مربوط به هر لایه است که برحسب خواص مکانیکی و زاویه هر لایه بدست می‌آید [۱۴]. همچنین کرنش‌های برشی برون صفحه‌ای از رابطه (۱۸) بدست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

که در آن روابط فوق مقدار کرنش‌های صفحه بعد از بدست آوردن مقادیر جابجایی از رابطه (۱۹) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xy} &= z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \end{aligned} \quad (19)$$

### ۲-۱-۳- بار گسترده یکنواخت

برای بار گسترده یکنواخت با استفاده از رابطه (۹) و (۱۳) مقدار ضرایب بسط بصورت رابطه (۲۰) بدست می‌آید [۱۵].

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) d\Omega \quad (20)$$

حال با انتگرال گیری از رابطه ۲۰ روی دامنه Ω مقدار ضرایب بسط برای مقادیر فرد m و n از رابطه (۲۱) بدست می‌آید و برای سایر مقادیر مقدار آن برابر صفر است.

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad (21)$$

با جاگذاری رابطه (۲۱) در رابطه (۱۴) و حل آن و استفاده از روابط (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) مقدار تنش‌ها ورق بدست می‌آید.

### ۳- محاسبه عمر

پس از محاسبه تنش‌های موجود در هر لایه، در گام بعدی از تئوری ساها و پروتمن برای تخمین میزان کاهش خواص در هر لایه استفاده شده است. با استفاده از این تئوری و با توجه به مقدار تنش موجود در هر لایه، میزان کاهش استحکام و سفتی بدست آمده است. در واقع این مرحله از حل مسئله، مرحله‌ی ماقبل نهایی است؛ زیرا پس از محاسبه کاهش

کشش و فشار است. لازم به ذکر است، مد شکست یک ورق در راستای الیاف در حالت بار فشاری و کششی، مد شکست نهایی (فاجعه‌بار) است. در اینصورت نمی‌توانند هیچ نوع ترکیبی از تنش را تحمل کنند، بنابراین بسیاری از خواص ماده کاهش پیدا کرده و به صفر می‌رسد. بر همین اساس در صورتیکه این مد از شکست اتفاق بیفتد، نیازی به تعیین دیگر مدهای شکست نمی‌باشد. همچنین در محاسبات کامپیوتری کاهش خواص به مقدار صفر، باعث ناپایداری عددی می‌شود. برای جلوگیری از این مشکل، خواص مواد به مقادیر بسیار کوچکی نزدیک به صفر کاهش می‌یابد. در شکل ۳، چارت کلی حل مساله نمایش داده شده است.

#### ۴- خواص فیزیکی

همانگونه که قبلا اشاره شد، جنس ورق کامپوزیتی مورد استفاده در این پژوهش، از نوع گرافیت-اپوکسی و شیشه-اپوکسی با در صد حجمی الیاف  $v_f=0.7$  است. در جدول ۲، خواص اولیه (کاهش نیافته) مربوط به این مواد بیان شده است [۱۱]. همچنین ابعاد ورق  $300 \times 300 \text{ mm}$ ، ضخامت هر لایه  $0.5 \text{ mm}$ ، میزان فشار اولیه  $0.2$  استحکام نهایی است و لایه‌گذاری  $[0/45]_s$  در نظر گرفته شده است.

#### جدول ۱- قوانین کاهش خواص مکانیکی در مدهای

##### مختلف تخریب لایه [۱۷]

شکل مد تخریب لایه	خواص مکانیکی تغییر یافته
تخریب الیاف در کشش	$[E_{xx}, E_{yy}, E_{xy}, v_{xy}, v_{yx}, X_t, Y_t, S_{xy}] \rightarrow [0]$
تخریب الیاف در فشار	$[E_{xx}, E_{yy}, E_{xy}, v_{xy}, v_{yx}, X_c, Y_c, S_{xy}] \rightarrow [0]$
تخریب ماتریس در کشش	$[E_{yy}, v_{yz}, v_{yx}, Y_t] \rightarrow [0]$
تخریب ماتریس در فشار	$[E_{yy}, v_{yz}, v_{yx}, Y_c] \rightarrow [0]$
تخریب الیاف و ماتریس در برش صفحه‌ای	$[E_{xy}, v_{xy}, v_{yx}, S_{xy}] \rightarrow [0]$

$$R(3) = R(2) + \left[-\frac{1}{N_f}(R_0 - \sigma)\right]$$

$$R(n) = R(n-1) + \left[-\frac{1}{N_f}(R_0 - \sigma)\right] \quad (29)$$

معادله (۲۹)، شکل نهایی مورد استفاده پس از مشتق-گیری است. برای معادله (۲۳) که معادله کاهش سفتی است، نظیر اثبات رابطه کاهش استحکام، با انجام مراحل فوق رابطه (۳۰) بدست خواهد آمد.

$$E(n) = E(n-1) + \left[-\frac{1}{N_f}(E_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_f})\right] \quad (30)$$

روابط فوق به خوبی نشان می‌دهد که میزان کاهش استحکام و سفتی در هر سیکل بارگذاری، به میزان استحکام و سفتی باقیمانده در مرحله بعدی وابسته است.

این مرحله که در واقع آخرین مرحله حل مساله است، عمر نهایی نمونه را تخمین خواهد زد. همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، با محاسبه عمر خستگی در هر لایه و در دو راستای الیاف و ماتریس، فرایند بارگذاری مجدد ادامه پیدا خواهد کرد تا زمانیکه یک لایه در راستای الیاف یا ماتریس خود شروع به خستگی و شکستن نماید که در اینصورت در این مرحله با استفاده از تئوری مربوط به قاعده کاهش ناگهانی، خواص مربوط به آن لایه کاهش یافته و خواص جدید کاهش یافته شده، جایگزین خواص قبلی خواهد شد. پس از جایگزینی خواص دوباره فرایند بارگذاری شروع شده تا سرانجام تک‌تک لایه‌ها شکسته شوند که در اینصورت در اثر شکست آخرین لایه، عمر خستگی نهایی نمونه محاسبه خواهد شد. در ادامه، تئوری قاعده کاهش ناگهانی به طور خلاصه بیان شده است.

#### ۳-۱- تئوری قاعده‌ی کاهش ناگهانی خواص

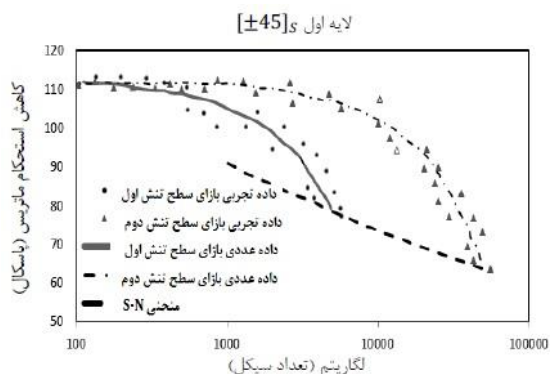
در این تئوری، پس از آنکه لایه‌ای در راستای الیاف و یا ماتریس شکسته شد، به جای حذف کامل لایه از محاسبات مربوط به استحکام و عمر خستگی ورق، لایه تخریب شده با لایه‌ای با خصوصیات مکانیکی ضعیف‌تر جایگزین می‌شود. بمنظور تغییر خواص مکانیکی لایه تخریب شده از یک سری قوانین بخصوصی استفاده می‌شود که در هر شکل مد تخریب متفاوت است و در جدول ۱، کاهش خواص مربوط به هر شکستی بطور خلاصه بیان شده است [۱۶ و ۱۷]. در این مقاله  $X$ ، نشان دهنده استحکام در راستای الیاف و  $Y$ ، نشان‌دهنده استحکام عمود بر الیاف و  $S_{xy}$ ، نشان‌دهنده استحکام برشی در صفحه  $xy$  است و زیر نویس  $t$  و  $c$  بترتیب، نشان‌دهنده

استحکام نهایی برای شیشه اپوکسی با خصوصیات بیان شده در جدول ۲ در شکل ۴ با یکدیگر مقایسه شده است [۶]. همانگونه که از مقایسه نتایج موجود در شکل ۵ مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده با دقت قابل قبولی به نتایج تجربی نزدیک است. لذا می‌توان به درستی نتایج بدست آمده در بخش بعدی، اطمینان کرد.

جدول ۲- خواص اولیه‌ی مربوط به گرافیت- اپوکسی و

شیشه- اپوکسی [۱۱]

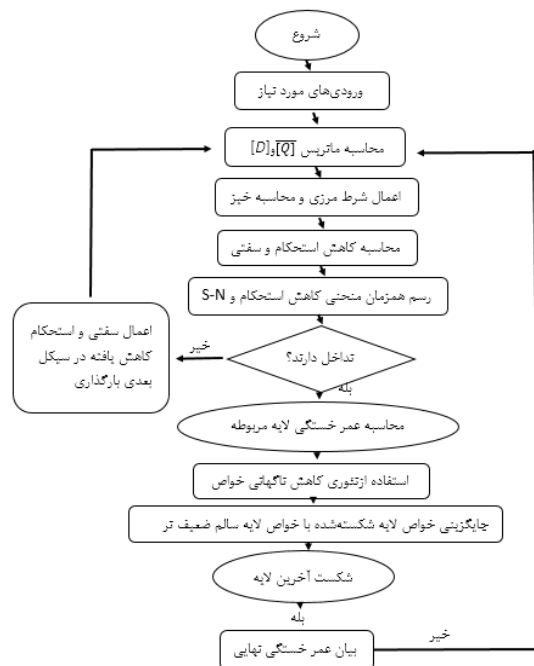
خواص اولیه	شیشه - اپوکسی	گرافیت - اپوکسی
زاویه (درجه)	۰	۴۵
$E_{xx}$ (GPa)	۱۳۷	۳۸/۶
$E_{yy}$ (GPa)	۹/۶	۸/۲۷
$G_{xy}$ (GPa)	۵/۲۴	۴/۱۴
$\nu_{xy}$	۰/۳	۰/۲۶
$X_t$ (MPa)	۱۸۳۶	۱۰۶۲
$X_c$ (MPa)	۱۸۳۶	۶۱۰
$Y_t$ (MPa)	۵۶/۹	۲۱۱
$Y_c$ (MPa)	۲۰/۷	۱۱۸
$S_{xy}$ (MPa)	۹۳	۷۲



شکل ۴- نمودار صحت سنجی نتایج حل بدست آمده از روش عددی با استفاده از تئوری ساها و پروتمن با نتایج تجربی موجود در مرجع برای نمونه  $S_{\pm 45}$

۵-۲- گرافیت- اپوکسی

همانگونه که در بخش‌های قبل بیان شد، در این پژوهش به منظور بررسی و مقایسه عمر خستگی و اثرات ناشی از تغییر جنس و تغییر نوع بارگذاری روی عمر خستگی، از دو جنس



شکل ۳- چارت کلی حل مساله

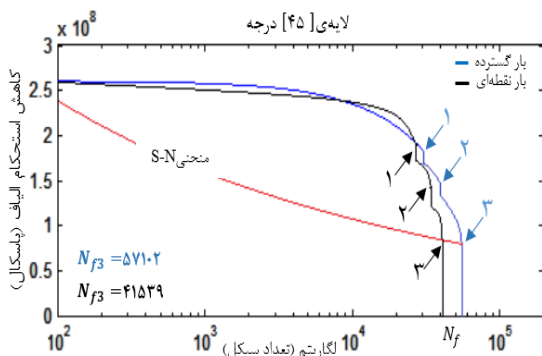
۵- نتایج عددی

در این بخش، به بررسی و مقایسه نتایج حاصل شده از عمر خستگی دو جنس شیشه-اپوکسی و گرافیت-اپوکسی تحت دو نوع بارگذاری متمرکز و گسترده یکنواخت با چیدمان زوایای (۰، ۴۵) پرداخته خواهد شد. همچنین در هر یک از نمونه‌ها، روند شکست تک‌تک لایه‌ها در راستای الیاف و ماتریس و ترتیب شکست آنها، مورد بررسی و در نمودارهای مجزا نشان داده شده است. توضیحات بیشتر در رابطه با هر نمونه در ادامه و در بخش مربوط به نتایج آن نمونه، شرح داده شده است. پیش از ارائه نتایج به منظور بررسی درستی و صحت نتایج حاصل شده از طریق محاسبات تحلیلی و عددی با نتایج تجربی، نمونه‌ی زیر مورد بررسی قرار گرفته است.

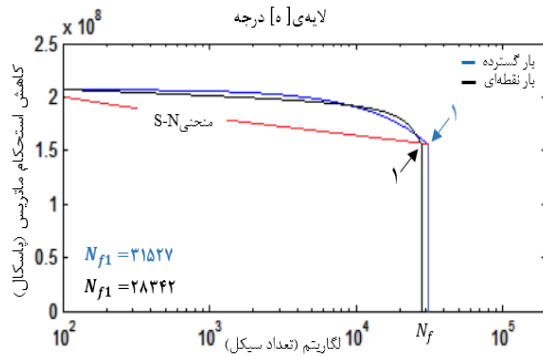
۵-۱- صحت سنجی نتایج

ورق کامپوزیتی، ۴ لایه متقارن با لایه‌چینی  $S_{\pm 45}$  در نظر گرفته شده است. در صورتی که ابعاد ورق  $250 \times 25$  mm و ضخامت هر لایه از ورق برابر  $0.152$  mm باشد، منحنی مربوط به کاهش استحکام و محاسبه‌ی عمر خستگی با استفاده از نتایج بدست آمده از حل عددی و نتایج تجربی موجود در مرجع به ازای دو سطح تنش ۸۰٪ و ۵۰٪

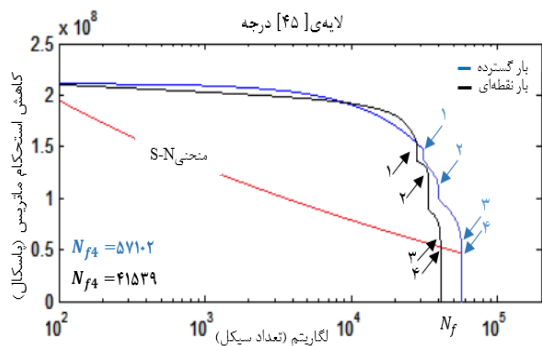




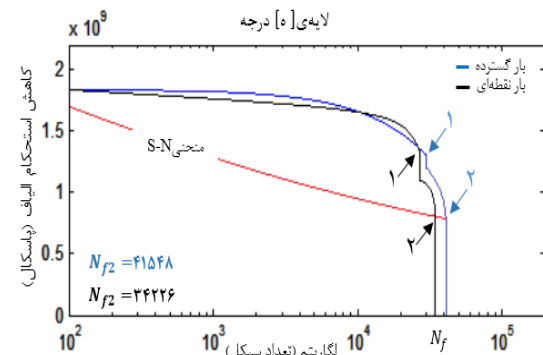
شکل ۷- نمودار محاسبه عمر خستگی گرافیت اپوکسی در مرحله سوم شکست



شکل ۵- نمودار محاسبه عمر خستگی گرافیت اپوکسی در مرحله اول شکست



شکل ۸- نمودار محاسبه عمر خستگی گرافیت اپوکسی در مرحله چهارم شکست

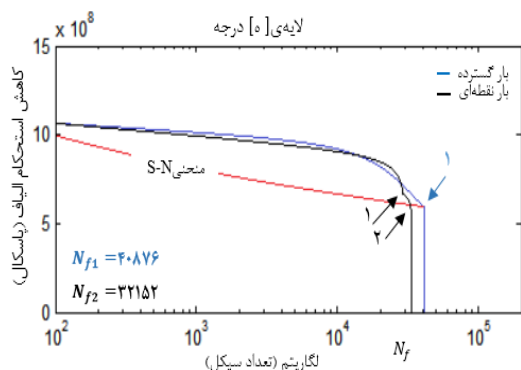


شکل ۶- نمودار محاسبه عمر خستگی گرافیت اپوکسی در مرحله دوم شکست

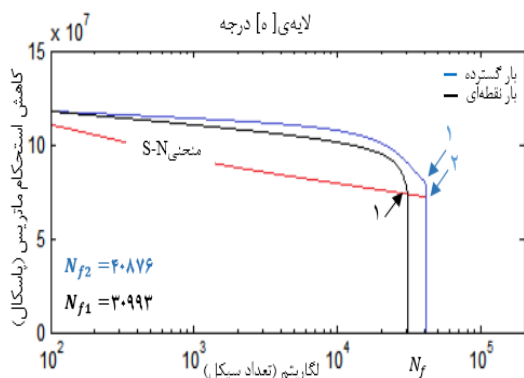
همچنین همانطور که در تک تک نمودارهای فوق مشاهده می‌شود، پس از گذشت تعداد زیادی از سیکل بارگذاری که در این بازه نرخ کاهش استحکام بسیار کوچک است، نرخ کاهش استحکام با شیب تندتری افزایش یافته، همین موضوع سبب شده تا ابتدا لایه‌های بیرونی این نمونه یعنی لایه ۰ درجه در راستای ماتریس شروع به شکسته شدن نماید که در شکل ۵، این شکست بازای دو نوع بارگذاری گسترده و متمرکز با شماره ۱ نشان داده شده است و این شکست در واقع آغاز شکست‌های بعدی در این نمونه خواهد بود؛ زیرا در اثر شکست هر لایه، لایه بعدی با نرخ کاهش استحکام بیشتری روبرو خواهد شد. پس از شکست این لایه در راستای ماتریس، در مرحله بعدی با استفاده از قاعده کاهش ناگهانی خواص، خصوصیات این لایه کاهش یافته و با جایگزینی خواص کاهش یافته جدید، فرایند بارگذاری مجدداً ادامه پیدا خواهد کرد تا اینکه مرحله دوم شکست یعنی شکست لایه ۰ درجه در راستای الیاف اتفاق

مختلف به نام شیشه - اپوکسی و گرافیت - اپوکسی تحت چیدمان ۴ لایه متقارن  $[0/45]_s$  استفاده شده است. بر همین اساس در اشکال ۵ تا ۸ نتایج حاصل شده از دو نوع بارگذاری متمرکز و گسترده یکنواخت روی گرافیت - اپوکسی، به ازای راستاهای شکست مختلف در نمودارهای مجزا از هم نشان داده شده است. همچنین نتایج حاصل شده از دو نوع بارگذاری برای هر راستا، بطور همزمان در نمودارها نشان داده شده تا بهتر بتوان تفاوت حاصل شده در میزان عمر خستگی را مشاهده کرد. همانگونه که در اشکال ۵ تا ۸ مشاهده می‌شود، در تمامی راستاها همواره میزان عمر خستگی در حالت بار متمرکز (خطوط مشکی رنگ)، نسبت به بار گسترده یکنواخت (خطوط آبی رنگ)، به نسبت قابل توجهی کاهش یافته و در حالت بار گسترده، عمر خستگی نهایی که در شکل ۸ بصورت  $N_{f4}$  با رنگ آبی نشان داده شده، نسبت به عمر خستگی نهایی در اثر بار متمرکز که بصورت  $N_{f4}$  با رنگ مشکی نشان داده شده، نزدیک به ۱۵۰۰۰ سیکل است.

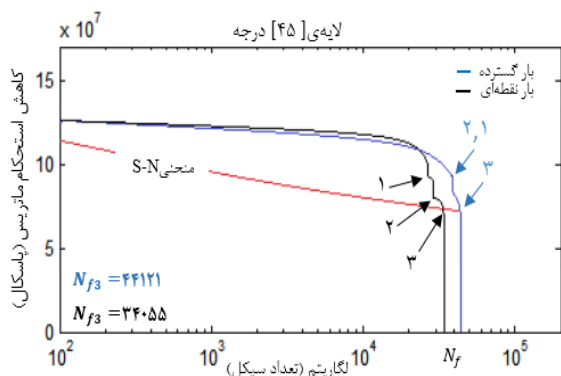
در شکل ۱۲ نشان داده شده، نزدیک به ۱۳۰۰۰ سیکل بیشتر از عمر نهایی در حالت بار متمرکز است.



شکل ۹- نمودار محاسبه عمر خستگی شیشه اپوکسی در مرحله اول شکست



شکل ۱۰- نمودار محاسبه عمر خستگی شیشه اپوکسی در مرحله دوم شکست



شکل ۱۱- نمودار محاسبه عمر خستگی شیشه اپوکسی در مرحله سوم شکست

خواهد افتاد که در شکل ۶ با شماره ۲ برای هر دو نوع بارگذاری نشان داده شده است. با شکست این لایه در راستای الیاف، در واقع عمر این لایه به پایان خواهد رسید و شکستگی‌هایی که با کاهش ناگهانی استحکام در نمودارهای فوق نشان داده شده، ناشی از اثرات شکست هر لایه روی لایه و یا راستای شکست لایه بعدی است. سرانجام پس از استفاده مجدد از تئوری کاهش ناگهانی خواص برای راستای الیاف لایه صفر درجه و بارگذاری مجدد این بار لایه‌های زیرین که همان لایه ۴۵ درجه می‌باشند، ابتدا در راستای الیاف شروع به شکسته شدن می‌نمایند و همانطور که در بخش معرفی تئوری کاهش قاعده ناگهانی خواص بیان شد، در صورتی که لایه‌ای ابتدا در راستای الیاف شکسته شود، دیگر نیازی به بررسی سایر مدهای شکست آن لایه نمی‌باشد و این مد شکست، شکست فاجعه‌بار نامیده می‌شود، لذا در این وضعیت با شکست لایه ۴۵ درجه در راستای الیاف، عمر نهایی آن لایه و در نهایت عمر نهایی نمونه به اتمام رسیده، دیگر نیازی به بررسی شکست لایه ۴۵ درجه در راستای ماتریس نخواهد بود. بر همین اساس، همانگونه که مشاهده می‌شود، میزان عمر خستگی نهایی در شکل ۷ و ۸ با عدد یکسانی نشان داده شده است. همچنین لازم به ذکر است، نقاط شکست هر لایه در راستاهای الیاف و یا ماتریس با استفاده از منحنی‌های S-N که از نتایج تجربی بدست آمده، استخراج شده و عمر خستگی مربوطه در هر شکل بیان شده است.

### ۵-۳- شیشه- اپوکسی

نمونه دومی که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته، نمونه‌ای کاملاً مشابه با نمونه‌ی قبل است که در آن ابعاد، تعداد و نحوه چیدمان لایه‌ها، نوع بارگذاری و سایر ویژگی‌های اولیه یکسان بوده، فقط جنس ماده کامپوزیتی تغییر کرده، از گرافیت - اپوکسی به شیشه - اپوکسی تبدیل شده است و در اشکال ۹ تا ۱۲، نتایج مربوط به این نمونه تحت دو نوع بارگذاری متمرکز و گسترده یکنواخت نشان داده شده است.

همانگونه که در اشکال ۹ تا ۱۲ مشاهده می‌شود، در تمامی راستاها همواره میزان عمر خستگی در حالت بار متمرکز نسبت به بار گسترده یکنواخت، به نسبت قابل توجهی کاهش یافته و در حالت بار گسترده، عمر خستگی نهایی که

## جدول ۳- مقایسه عمر خستگی و ترتیب شکست در

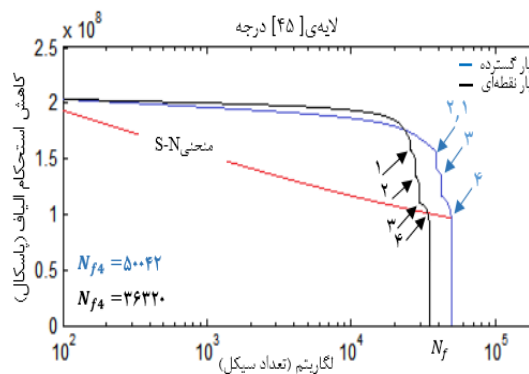
شیشه - اپوکسی و گرافیت - اپوکسی بازای  
بارگذاری متمرکز و گسترده

عمر خستگی	ترتیب شکست	نوع بارگذاری	جنس ورق
$N_{f1} = 31527$	۱- ماتریس [۰]	گسترده	گرافیت اپوکسی
$N_{f2} = 41548$	۲- الیاف [۰]		
$N_{f3} = 57102$	۳- الیاف [۴۵]		
$N_{f4} = 57102$	۴- ماتریس [۴۵]		
$N_{f1} = 28342$	۱- ماتریس [۰]	متمرکز	
$N_{f2} = 36226$	۲- الیاف [۰]		
$N_{f3} = 41529$	۳- الیاف [۴۵]		
$N_{f4} = 41529$	۴- ماتریس [۴۵]		
$N_{f1} = 40876$	۱- الیاف [۰]	گسترده	شیشه اپوکسی
$N_{f2} = 40876$	۲- ماتریس [۰]		
$N_{f3} = 44121$	۳- ماتریس [۴۵]		
$N_{f4} = 50042$	۴- الیاف [۴۵]		
$N_{f1} = 30993$	۱- ماتریس [۰]	متمرکز	
$N_{f2} = 32152$	۲- الیاف [۰]		
$N_{f3} = 34055$	۳- ماتریس [۴۵]		
$N_{f4} = 36320$	۴- الیاف [۴۵]		

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، رفتار خستگی کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با الیاف گرافیت و الیاف شیشه تحت بارگذاری از نوع بارگذاری جانبی متمرکز و گسترده، مورد مدلسازی قرار گرفته است و با استفاده از رفتار خستگی یک تک لایه تحت بار خستگی کششی ساده که از آزمایش استخراج می‌شود، عمر خستگی ورق چند لایه که تحت بارگذاری جانبی قرار گرفته و همه لایه‌های آن تحت تنش چند بعدی و غیریکنواخت است، محاسبه و تخمین زده شده است.

برای اولین بار، از تئوری کاهش خواص همراه با تئوری مرتبه اول برشی برای تخمین عمر خستگی ورق تحت بار جانبی استفاده شده است. همچنین خرابی‌های موضعی ناشی از شکست‌های لایه‌های مختلف ورق تقویت شده قبل از شکست نهایی پیش‌بینی شده است. برای بررسی اثر نحوه اعمال بار خارجی (متمرکز یا گسترده) بر عمر سازه، دو حالت بارگذاری متمرکز نقطه‌ای در وسط ورق و بارگذاری یکنواخت گسترده روی ورق، مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین برای بررسی اثر جنس تقویت‌کننده بر عمر سازه، پلیمر



شکل ۱۲- نمودار محاسبه عمر خستگی شیشه اپوکسی در مرحله چهارم شکست

همانگونه که نتایج نشان می‌دهد در این نمونه نیز، ابتدا لایه‌های بیرونی این نمونه یعنی لایه ۰ درجه شروع به شکسته شدن می‌نماید با این تفاوت که در این نمونه بر خلاف نمونه قبل یک تفاوت عمده در شروع اولین شکست رخ داده و این تفاوت عبارتست از اینکه در این نمونه اولین مرحله شکست در اثر بارگذاری متمرکز و گسترده با یکدیگر فرق دارد؛ بطوریکه در اثر بارگذاری گسترده، ابتدا لایه صفر درجه در راستای الیاف شکسته می‌شود، اما در اثر بار متمرکز شروع اولین شکست از راستای ماتریس لایه صفر درجه آغاز می‌شود؛ بر همین اساس، همانطور که در اشکال ۹ و ۱۰ مشاهده می‌شود، برای بار گسترده میزان عمر خستگی بر طبق تئوری کاهش ناگهانی خواص، یک عدد یکسان نوشته شده، اما برای بار متمرکز این عدد در اشکال ۹ و ۱۰ فرق کرده است. همچنین ادامه مراحل شکست نیز در این نمونه با نمونه گرافیت اپوکسی تفاوت پیدا کرده، برای لایه ۴۵ درجه ابتدا راستای ماتریس شکسته شده و سپس راستای الیاف شکسته که برای نمونه گرافیت - اپوکسی ترتیب شکست برعکس این نمونه است که این نقاط با شماره ۳ و ۴ در اشکال ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است و در نهایت، عمر خستگی این نمونه نیز با شکست لایه ۴۵ درجه در راستای ماتریس به پایان می‌رسد.

نتایج مربوط به عمر خستگی شیشه-اپوکسی و گرافیت-اپوکسی برای دو نوع بارگذاری گسترده، متمرکز در هر راستا در جدول ۳ با یکدیگر مقایسه شده است.

- [6] Shokrieh MM, Lessard LB (2003) Multiaxial fatigue behaviour of Unidirectional plies based on uniaxial fatigue experiments – I. Modelling. *Int J Fatigue* 19: 201–207.
- [7] Shokrieh MM, Taheri B (2010) Fatigue life Prediction of composite Materials Based on Progressive damage modeling. University of Science and Technology Iran, Woodhead Publishing 261-301 and 401-450.
- [8] Shokrieh MM, Lessard L B (2000) Progressive fatigue damage modeling of composite materials. Part I: Modeling *J Compos Mater* 34(13): 1056-1080.
- [9] Shokrieh MM, Lessard LB (2000) Progressive fatigue damage modeling of composite materials, Part II: Material characterization and model verification. *J Compos Mater* 34(13): 1081-1116.
- [10] Shokrieh MM, Taheri BF (2008) Fatigue life evaluation of unidirectional composites by using residual strain energy. *Iran J Polymer Sci Technol Chem* (21): 19-26. (in Persian)
- [11] Vassilopoulos AP, Keller T (2011) *Fatigue of Fiber-reinforced Composites*. Springer, New York.
- [12] Jones RM (1998) *Mechanics of composite materials*. 2nd edn. Professor of Engineering Science and Mechanics Virginia Poly technic institute and state university Blacksburg, virginia 24061-0219, 55-118 and 295-348.
- [13] Shakeri M, Aghdam MM (2008) *Mechanical Structure, Beam, plate and shell*. Tehran, Amirkabir University of Technology, 149-158. (in Persian)
- [14] KAW AK (2006) *Mechanics of Composite Materials*. 2nd edn. Taylor & Francis Group.
- [15] Abrate S (2005) *Impact on composite structures*. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York.
- [16] Shokrieh MM (1996) *Progressive fatigue damage modeling of composite materials*. A thesis submitted to the Faculty of Graduate Studies and Research in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Mechanical Engineering McGill University Montréal, Canada.
- [17] Harris B (1986) *Fatigue in composite*. WoodHead, New York.

#### ۸- پیوست

مؤلفه های ماتریس K در رابطه (۱۴) بصورت زیر قابل محاسبه است [۱۵].

$$K_{11} = A_{55} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + A_{44} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad K_{12} = A_{55} \frac{m\pi}{a},$$

$$K_{13} = A_{44} \frac{n\pi}{b}, \quad K_{22} = D_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_{66} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + A_{55},$$

$$K_{23} = D_{12} \frac{mn\pi^2}{ab} + D_{66} \frac{mn\pi^2}{ab},$$

تقویت شده گرافیت-اپوکسی و شیشه-اپوکسی، مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج عددی حاصل از تحلیل با یکدیگر مقایسه شده است. با بررسی نتایج عددی حاصل شده از تحلیل پدیده خستگی در پلیمرهای تقویت شده که در نمودارهای ۵ تا ۱۲ آمده است، به طور کلی نتایج زیر حاصل می‌شود.

- (۱) میزان عمر خستگی ورق تقویت شده با تغییر جنس تقویت‌کننده و تغییر نحوه بارگذاری از نوع متمرکز به گسترده تغییرات قابل توجهی می‌نماید.
- (۲) با تغییر جنس و یا تغییر نوع بارگذاری، ترتیب شکست لایه‌ها در برخی نمونه‌ها تغییر می‌کند.
- (۳) با تغییر نوع بارگذاری از بار گسترده به بار متمرکز در عمر خستگی، کاهش قابل توجهی مشاهده می‌شود.
- (۴) در دو نمونه مورد بررسی که کلیه شرایط حل مساله یکسان بوده، فقط جنس تغییر پیدا کرده مشاهده می‌شود، در حالت بارگذاری خستگی میزان عمر نمونه گرافیت-اپوکسی از شیشه اپوکسی بیشتر است.
- (۵) میزان کاهش استحکام در بارگذاری بار متمرکز در لحظه‌های شکست، از شیب بیشتری نسبت به بارگذاری بار گسترده برخوردار است.

#### ۷- مراجع

- [1] Jen MHR, Lee Ch (1998) Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. Part I: Experimental, *Int J fatigue* 20(9): 605-615.
- [2] Jen M. H. R, and Lee Ch (1998) Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. Part II: Formulation. *Int J fatigue* 20(9): 617-629.
- [3] Carrera E, Ciuffreda A (2005) Bending of composites and sandwich plates subjected to localized lateral loading: a comparison of various theories. *Compos Struct* 68(2): 185-202.
- [4] Parhi PK, Bhattacharyya SK, Sinha PK (2001) Failure analysis of multiple delaminated composite plates due to bending and impact. *Bull Mater Indian Academy scie* 24: 143-149.
- [5] Broutman LJ, Sahu S (1972) A new theory to predict cumulative fatigue damage in fiberglass reinforced plastics. in *Composite Materials: Testing and Design (2nd Conference)*, ASTM STP 497, American Society for Testing and Materials 170-188.

$$K_{33} = D_{66} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + A_{44}$$

که در آن ترم‌های سفتی کششی و خمشی بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

منتجه‌های نیرو و ممان در روابط (۳) الی (۵) بصورت زیر تعریف شده است.

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz$$