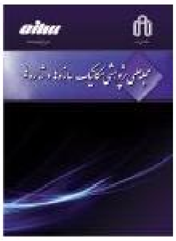
مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۵/ دوره ۶/ شماره ۱/ صفحه ۲۸۵-۳۰۴

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود



تسخیر موج ضربه‌ای توسط کنترل پخش عددی روی ایرفویل متقارن

میترا یادگاری[۱،*]، محمدحسین عبدالهی جهدی[۲]

[۱] کارشناس ارشد، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

[۲] استادیار، دانشگاه شهیدمدنی آذربایجان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۵/۲۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۹/۲۲

چکیده

در این پژوهش ، یک روش ترکیبی موثر بر اساس الگوریتم چگالی مبنا با حل‌کننده صریح برای حل معادلات تراکم پذیر اویلر در شبکه غیر متعامد با فرمول بندی حجم محدود ارائه شده. شارهای کمیت‌های هدایتی با استفاده از روش مشخصه‌ها بر اساس روش‌های جیمسون و TVD و ACM ، تقریب زده شده است. هدف کار حاضر آن است تا روشی بر پایه کنترل ترم پخش روش‌های کلاسیک بر اساس متغیرهای مشخصه در تسخیر امواج ضربه‌ای ارائه شود. بدین منظور، جریانی غیر لزج و فراصوت روی ایرفویل حل شده، نتایج از نظر دقت و وضوح تسخیر امواج ضربه‌ای و نیز همگرایی حل با روش‌های کلاسیک مقایسه شده است. معیار همگرایی برای معادلات پیوستگی و مومنتوم کوچکتر از 10^{-6} در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد، در الگوریتم چگالی مبنا، به علت تقویت محدود کننده، سرعتهای مشخصه همگراتر شده، روش TVD و ACM ، تسخیر و وضوح بهتری از امواج ضربه‌ای، نظیر امواج ساده، انعکاس امواج و برهم کنش امواج با یکدیگر نسبت به روش جیمسون ارائه می‌دهند. همچنین روش ACM روشی سودمند است که از کاهش دقت در ناپیوستگی‌ها جلوگیری کرده و تسخیر امواج ضربه‌ای را بهبود می‌بخشد.

کلمات کلیدی: موج ضربه‌ای؛ جریان تراکم پذیر؛ تسخیر؛ همگرایی؛ متغیرهای مشخصه.

Shock Capturing by Numerical Dissipation Control on Symmetric Airfoil

M. Yadegari[1,*], and M. H. Abdollahi Jahdi[2]

[1] MSc Student, Mech. Eng., Azarbaijan Shahidmadani Univ., Tabriz, Iran.

[2] Assoc. Prof., Mech. Eng., Azarbaijan Shahidmadani Univ., Tabriz, Iran.

Abstract

In this work, an efficient procedure is presented based on the density-based algorithm with explicit solver to solve the compressible Euler equations on a non-orthogonal mesh with a finite volume formulation. The fluxes of the convected quantities are approximated using the characteristic-based TVD, ACM, and Jameson methods. The aim of this work is to introduce a method based on the characteristic variables and control of the diffusion term in the classic methods in order to capture the shock waves. Hereby, an inviscid supersonic flow is solved, and the results obtained are compared together in view of the resolution and accuracy of the shock wave capturing and solution convergence. The convergence target for the mass and momentum equations is decrement of residuals from 10^{-6}. The results obtained show that in the density-based algorithm, the characteristic velocities are better converged due to the augmentation of the limiter, ACM, and TVD methods, capturing the shock waves with higher resolution relative to the Jameson method. Shock waves include simple waves reflected waves and waves interactions. Also the ACM method is a useful technique, which prevents the smearing of discontinuities and improves the resolution of shocks.

Keywords: Shock Wave; Compressible Flow; Capture; Convergence; Characteristic Variables.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۲۳۴۸۰۰۹۷۸

آدرس پست الکترونیک: mitra.yadegari@yahoo.com

۱- مقدمه

یکی از مشکلات روش‌های محاسباتی، تسخیر نواحی با گرادیان‌های شدید (تغییرات ناگهانی) است. این حالت در جریان، زمانی اتفاق می‌افتد که با تغییرات پله‌ای در متغیرهای جریان مواجه باشیم. این نوع تغییرات، به عنوان ناپیوستگی‌ها شناخته شده‌اند. روش‌های تقریبی مرتبه اول، ناپیوستگی‌های تیز را با خطای زیاد تسخیر کرده در حالی که، تسخیر این نواحی توسط روش‌های مرتبه بالا با نوسانات غیر فیزیکی همراه است. بدین منظور، روش‌های مرتبه بالای بدون نوسان طوری طراحی شده‌اند که با داشتن دقت قابل قبول، تا حد ممکن از نوسانات حل جلوگیری کنند. روش‌های محاسباتی کلاسیک نظیر TVD[1]، جیمسون و.... ازاین نوع می‌باشند که در کاربردهای آیرودینامیکی برای محاسبات جریان تراکم پذیر حاوی موج ضربه‌ای استفاده می‌شوند. از آن جایی که اساس کار این روش‌ها بر پایه افزایش پخش عددی در تغییرات ناگهانی و سریع متغیرهای جریان است، لذا شاهد کاهش نسبی دقت در این نواحی خواهیم بود. به جرأت می‌توان گفت، مهم ترین بخش در روش حجم محدود، محاسبه شار عبوری از دیواره‌های سلول است و اکثر محققان طی سال‌های اخیر، روش‌هایی ارائه کرده‌اند که بتوانند به شکل دقیق‌تری این شارها را محاسبه کنند که نتیجه آن افزایش دقت حل و کاهش زمان محاسبات است. گودنو[2] در سال ۱۹۵۹[۱]برای اولین بار از مساله ریمان در محاسبه شار استفاده کرد. مساله ریمان به شکل یک شاک تیوپ مطرح است که دارای دو فشار متفاوت است (دو سرعت متفاوت)که به وسیله یک دیافراگم از هم جدا شده است.گودنو، مساله ریمان را برای هر دیواره سلول حل کرد. در واقع روش گودنو، به جواب مساله ریمان احتیاج دارد و در یک محاسبه عملی، ملیون‌ها بار این مساله حل می‌شود. مشکل روش گودنو، استفاده مستقیم از مساله ریمان یا حل کامل آن است که وقتی این مساله ملیون‌ها بار حل شود، زمان محاسبات به شدت، افزایش می‌یابد. در روش دیگر که برای جریان‌های حاوی ناپیوستگی توسط هارتن (۱۹۷۷و۱۹۷۸)[۲-۳] ارائه گردید، از ترکیب یک اسکیم مرتبه اول به همراه یک سوییچ ACM[3] (روش متراکم سازی مصنوعی) استفاده شد که در این روش، سوییچ فوق در نقش یک تراکم مصنوعی است که در گرادیان‌های شدید ظاهر میشود. رو[4] در سال ۱۹۸۱[۴]، از روش تقریبی برای حل مساله ریمان استفاده کرد. روش رو بر مبنای روش گودنو است. رو برای این کار از نوعی روش میان گیری برای خطی سازی استفاده کرد که به روش میان گیری رو معروف شده است. پس از رو، افراد دیگری روش او را اصلاح کردند و طرح‌های متفاوتی بر مبنای روش رو ارائه کردند. جیمسون در سال ۱۹۸۱[۵]، از روش میان‌گیری و لزجت مصنوعی برای محاسبه شار استفاده کرد. در این روش، جیمسون برای گسسته سازی زمانی از رانگ کوتای مرتبه ۴ اصلاح شده استفاده کرد. بزرگترین مزیت این روش علاوه بر سادگی، استفاده در هندسه‌های پیچیده، دقت بالای تسخیر شاک در جریان‌های گذر صوتی است. کار جیمسون و همکاران، ترکیبی از اتلاف عددی مرتبه دوم و چهارم بر مبنای گرادیانهای جریان بود که به همراه دو پارامتر قابل تنظیم برای تفاضل مرکزی در نظر گرفته شد. اگر چه در این روش، بهبود قابل ملاحظه‌ای در نتایج حاصل گردید، اما تنظیم دو پارامتر به منظور استخراج نتایج قابل قبول در ناپیوستگی‌ها باید با سعی و خطا برای هر مساله پیدا شود. به عبارت دیگر، انتخاب جمله استهلاکی بهینه به تجربه فرد کار کننده با کد بستگی دارد. به علاوه جهت حرکت امواج که در جریان هذلولوی مطرح است، در روش فوق در نظر گرفته نمی‌شود. هارتن (۱۹۸۳) [۶] طراحی‌های مختلفی انجام داد که مقدار کلی نوسانات برای متغیرها یا مقدار خطای آن‌ها توسط ایده تغییرات کل(TVD) محاسبه و محدود شود. هارتن در سال۱۹۸۴[۷]، روش کاهش تغییرات کل یا TVD را با این هدف طراحی کرد که دارای خاصیت کاهندگی تغییرات کل برای قوانین پایستاری چه در شکل یک معادله اسکالر هذلولوی و چه در شکل معادلات هذلولوی با ضرایب ثابت است. یکی از معایب طرح‌های TVD، آن است که در ناپیوستگی‌ها به طرحهای مرتبه اول تغییر می‌یابند و تغییرات ملایم حل را در موج ضربه‌ای و دیگر ناپیوستگی‌ها سبب میگردند. لازم به یاد آوری است که روش‌های با دقت مرتبه

[1] Total Variation Dimimution
[2] Godunov
[3] Artificial Compression Method
[4] Roe

اول (که در عملیات تقریب زنی آن‌ها مشتق‌های مرتبه دوم و بالاتر در بسط سری تیلور حذف شده اند) خطاهای اتلاف ایجاد کرده، سپس می‌شوند جواب به سمت نقاط مجاور پراکنده شوند. کوللا و وودوارد (۱۹۸۴)[۸]، ایده استفاده از شار مرتبه اول را به همراه جمله‌ای به نام ضد پخش به عنوان محدودکننده شار، استفاده کردند. یی و همکاران (۱۹۸۵) [۹]، روش ACM مرتبه اول هارتن را با رویکردی متفاوت به روش TVD گسترش دادند. به طوری که به جای کاهش مرتبه در تسخیر امواج ضربه‌ای، مرتبه دقت در حد قابل قبولی باقی مانده، تسخیر نسبتاً مطلوبی را از گرادیان‌های شدید (شاک) ارائه دادند. مولدر و وان لیر (۱۹۸۵) [۱۰]، با استفاده از محدودکننده‌ها روی متغیرهای اولیه، بقایی و مشخصه که در جریان یک بعدی ناپایا، مورد آزمایش قرار گرفته، نشان دادند که بهترین متغیرها در محدودکننده‌ها از لحاظ دقت نتایج عددی، نوع مشخصه می‌باشند. مطالعه مقایسه‌ای توسط اسکیم‌های با دقت بالا[1] برای گازهای واقعی توسط مونتج و همکاران (۱۹۸۷) [۱۱] انجام شد، این مقایسه نشان داد که حل‌کننده‌های تقریبی ریمان برای گازهای واقعی نیز معتبر هستند. ارنن و اسوانسون (۱۹۸۸)[۱۲]، با استفاده از اسکیم جیمسون در الگوریتم چگالی مبنا، تسخیر موج ضربه‌ای را مورد بررسی قرار دادند. هیرچ (۱۹۹۰) [۱۳]، تغییرات متغیرهای اولیه و بقایی در نواحی ناپیوستگی تماسی و امواج ضربه‌ای را مورد بررسی قرار داد و به این نتیجه رسید که تغییرات متغیرهای اولیه و بقایی در نواحی ناپیوستگی تماسی و امواج ضربه‌ای قابل ملاحظه است و یکی از منابع تولید نوسان، همین تغییرات شدید است، اما متغیرهای مشخصه، تغییرات کمی را دارا میباشند و علت این است که چون متغیر مشخصه تابعی از تغییرات فشار، چگالی و سرعت بوده، در گذر از ناپیوستگی، افزایش یک متغیر ممکن است با کاهش و یا افزایش متغیر دیگر همراه باشد، در نتیجه اثر همدیگر را تا حدی خنثی کرده و باعث می‌شود که مشخصه‌ها تغییرات کمتری نسبت به دیگر متغیرها داشته باشند. لین و چاینگ (۱۹۹۱) [۱۴]، با اعمال محدودکننده‌ها روی متغیرهای اولیه، بقایی و مشخصه که در جریان یک بعدی ناپایا مورد آزمایش قرار گرفته بودند، نشان دادند که بهترین متغیرها در محدودکننده‌ها از لحاظ دقت نتایج عددی، نوع مشخصه می‌باشند. ترکل و همکاران (۱۹۹۷) [۱۵]، روشی به نام پری کاندیشنینگ[2] را به الگوریتم چگالی مبنا اعمال کرده، نشان دادند که با توسل به رویکرد جدید، حل معادلات جریان سیال که براساس رژیم تراکم‌پذیر است، نتایج قابل قبول و دقیقی از جریان تراکم ناپذیر و جریان با اعداد ماخ پایین را نتیجه می‌دهند. در تحقیقی دیگر، یی و همکاران (۱۹۹۹) [۱۶]، سوییچ ACM را مستقیماً به جمله پخش عددی (فیلتر) روش TVD اعمال نمودند. در این کار، اسکیم پایه یعنی، عبارت مربوط به جمله تفاضل مرکزی در تقریب شار در سطح سلول از مرتبه‌های دو، چهار و شش بوده، عبارت مربوط به ACM که در ناپیوستگی‌ها خود را نشان داده، ظاهر می‌شود. بدین ترتیب در ناحیه‌هایی از جریان که ناپیوستگی وجود ندارد، تقریب تفاضل مرکزی بالا بوده و در برخورد با تغییرات ناگهانی در جریان، پخش عددی که مقدار کمتری نسبت به پخش عددی TVD مرتبه دوم دارد، به جمله تفاضل مرکزی اضافه می‌شود. از جمله تحقیقات دیگری که بر مبنای ایده TVD است، می‌توان به کار دورو و تناد (۲۰۰۱) [۱۷] اشاره کرد. در تحقیقی که توسط جوارشکیان و رضازاده (۲۰۰۱) [۱۸] انجام گرفته، به جای بی‌بعدسازی یا محدودکنندگی متغیرهای اولیه، تکنیک بی‌بعد سازی به شارهای عبوری از سطح سلول، اعمال شده که بهبود نسبی در نتایج حاصل شده است. راسو (۲۰۰۳) [۱۹]، روش مخلوط کردن فشارمبنا و چگالی مبنا را ارائه کرده است که انتقال از فشارمبنا به چگالی مبنا را امکان‌پذیر می‌سازد. در این کار، حلگر ریمان در رژیم تراکم‌ناپذیر، بررسی شده است و اساس الگوریتم حل نیز فشارمبنا است که تلفیق آن با روش چگالی مبنا، گذار از رژیم تراکم‌ناپذیر به تراکم‌پذیر را فراهم کرده و امکان حل در هر دو رژیم را برقرار می‌سازد. لای و نول (۲۰۰۳) [۲۰]، سوییچ ACM را در نقش یک محدود کننده[3] برای تقریب مرتبه دوم نشان داده‌اند. در این کار، روش ACM به میدانهای خطی، اعمال شده و نشان داده شده که اگر به میدان‌های غیرخطی هم اعمال شود، خطرناک است زیرا

[1] High Resolution

[2] Preconditioning

[3] Limiter

امواج انبساطی را فشرده کرده و باعث انحراف از قانون یا شرط آنتروپی[1]می‌شود. همچنین در پژوهشی که توسط رضوی و زمزمیان (۲۰۰۸) [۲۱] انجام گرفته، روش جدیدی بر اساس الگوریتم چگالی‌مبنا و روش مشخصه‌ها با اعمال روش تراکم پذیری مصنوعی برای حل معادلات جریان سیال تراکم‌ناپذیر ارائه شده است. اهوارد و اسپناری (۲۰۱۰) [۲۲]، از روش تراکم پذیری مصنوعی برای حل معادلات ناویر استوکس در رژیم تراکم ناپذیر استفاده کردند. در این روش، برای گسسته سازی مکانی از مرتبه ۴ و برای گسسته سازی زمانی از مرتبه ۲ استفاده شده است. ان گوین و پرایس و تان (۲۰۱۲) [۲۳]، جریان‌های تراکم پذیر با سرعت بالا را با استفاده از روش حجم محدود روی شبکه‌های بی سازمان شبیه سازی کردند. در این روش، شاک‌های شدید با استفاده از طرح مرتبه دوم Hllc بدون محدودکننده‌های مختلف، تسخیر شده‌اند. آی سوپا و گواردون وکوارانتا (۲۰۱۵) [۲۴]، از روش حجم محدود جدید برای حل معادلات ناپایدار تراکم پذیر اویلر برای شبکه‌های تطبیقی دوبعدی و هندسه‌های وابسته به زمان استفاده کردند. در این روش، انطباق شبکه با استفاده از ترکیبی مناسب از تغییر شکل شبکه، درج گره‌ها وتکنیک‌های حذف گره به منظور تطابق با جابه‌جایی از مرز دامنه محاسباتی و برای حفظ کیفیت المان‌های شبکه انجام شده است. یکی از مشکلات اساسی در گسسته سازی معادلات، تخمین جملات جابجایی (مشتقات مرتبه اول) روی وجوه سلول با استفاده از گره‌های مجاور است. حال بایستی روشی طرح کرد تا با دقت کافی، جملات جابه‌جایی را محاسبه کرده و علاوه بر این، پایداری عددی با بالا رفتن دقت،کاهش نیابد. روش‌های با دقت مرتبه اول به دلیل پخش عددی [2]زیاد، نتایج غیر دقیقی را درگرادیان‌های شدید نتیجه می‌دهند. از طرفی روش‌های مرتبه بالا چون محدود نیستند ممکن است، نوسانات غیرفیزیکی در گرادیان‌های شدید ایجاد نمایند. در چند دهه اخیر برای جریان‌های آیرودینامیکی در رژیم تراکم‌پذیر که شامل ناپیوستگی‌هایی مثل شاک[3]بودند، روش‌هایی با دقت بالا بر پایه حل ریمان بنا شده بود که امروزه در روش‌های حجم محدود و تفاضل محدود، ایجاد و توسعه داده شده‌اند. تحمیل خواص محدودکنندگی[4]به این روش‌ها منجر به دقت بالا میشود که نتایج خوبی را در گرادیان‌های شدید و شاک‌ها بدون تولید توسان ارائه میدهند. از روش‌های محدودکننده‌ای که برمبنای حل ریمان و متغیرهای مشخصه معرفی شده و عمدتاً در الگوریتم‌های چگالی‌مبنا استفاده شده‌اند ، می‌توان به روش‌های TVD و ENO اشاره کرد. این روش‌ها به طور گسترده در حل جریان‌های تراکم‌پذیر استفاده شده و تسخیر نسبتاً قابل قبول و بدون نوسانی از ناپیوستگی ناشی از امواج ضربه‌ای ارائه داده‌اند. نظر به این که اساس کار این روش‌ها بر پایه کاهش مرتبه حل در تغییرات ناگهانی و سریع متغیرهای جریان است، بنابراین در عبور از ناپیوستگی‌های جریان، شاهد افزایش پخش عددی خواهیم بود که کاهش نسبی دقت را در پی خواهد داشت. در این جا به دنبال روشی هستیم که تا حدودی کاهش دقت را جبران کرده (اعمال تابع ضدپخش در تغییرات شدید) و در عین حال، خاصیت محدودکنندگی و غیرنوسانی روش‌های مذکور را مختل نکند. در این مقاله، اعمال یک تابع ضدپخش به محدودکننده TVD مورد مطالعه قرار گرفته و به عبارتی، یک محدودکننده جدید با پخشندگی عددی کمتری نسبت به TVD برای کنترل شارهای جابجایی درنظر گرفته شده است. این روش در یک شبکه حجم‌محدود و در الگوریتم چگالی مبنا با حل کننده صریح برای محاسبه جریان تراکم‌پذیر غیرلزج حاوی ناپیوستگی اعمال شده و تاثیر آن بر دقت حل، روند همگرایی و همچنین هزینه محاسبات مورد بررسی قرار گرفته است. بنابراین در حالت کلی می‌توان گفت، هدف از کار حاضر، اعمال روش متراکم سازی مصنوعی (ACM) در یک محدودکننده شار TVD[5] بر مبنای متغیرهای مشخصه و توسعه آن در الگوریتم چگالی مبنا جهت تسخیر امواج ضربه‌ای و دیگر امواج ناپیوسته در جریان تراکم‌پذیر است. در این کار، نظر به اینکه جریان تراکم‌پذیراست به منظور تقریب مقادیر متغیرهای جریان در سطح سلول محاسباتی، الگوریتم چگالی مبنا با حل ریمان تلفیق یافته تا با روش مشخصه‌ها همخوانی داشته باشد.

[1] Entropy Violating Shock
[2] Dissipation
[3] Shock
[4] Boundedness
[5] TVD Flux Limiter

معادلات جریان غیرلزج[1] و تراکم‌پذیر[2] به روش حجم محدود[3] حل شده‌اند و برخلاف کار یی و همکاران (۱۹۸۵) [۱۰]که در آن، معادلات مربوط به روش مشخصه‌ها در مختصات موضعی تعریف شده است، معادلات مربوط به حل ریمان در دستگاه مختصات عمومی[4] است. همچنین نوآوری کار حاضر بدین صورت است که به جای اعمال مستقیم روش ACM به جمله پخش عددی (یی و همکاران(۱۹۹۹)) [۱۶]، این روش به محدود کننده اعمال شده است که اولاً جمله پخش را مستقیماً تحت تاثیر قرار ندهد و به جز در مقادیر بزرگ برای ضرایب ACM (تابع فیزیک جریان می‌باشد) مشکلی از لحاظ پایداری حل به وجود نمی‌آورد، ثانیاً ACM به عنوان سوییچ عمل کرده و هنگام تغییرات ناگهانی در متغیرهای جریان (در عبور از امواج ضربه‌ای، انبساطی و ناپیوستگی تماسی) وارد محاسبات شده و باعث تقویت تابع محدودکننده[5] می‌شود. در در نتیجه، اعمال ACM سبب می‌شود که جمله پخش برای روش ACM، پخشندگی کمتری نسبت به جمله پخش روش TVDکلاسیک دارا باشد و تسخیر ناپیوستگی‌ها وضوح[6] بهتری نسبت به TVDداشته باشند. علاوه بر این، برخلاف کار لای و تول [۲۰]، که در آنACM به عنوان محدودکننده منظور شده بود و فقط به میدان‌های خطی اعمال می‌شد، در این مقاله، ACM نقش کنترل اتلاف عددی در محدود کننده داشته و در گرادیان‌های شدید وارد محاسبات می‌شود تا تسخیر ناپیوستگی با پخشندگی کمتری انجام گیرد. همچنین ضرایب ACM نه تنها به میدان‌های خطی، بلکه به میدان‌های غیرخطی نیز اعمال می‌شود. در ضمن در کارهای گذشته، یی و همکاران، روش ACM را برای حل جریان لزج به کار برده اند که این حل در حضور لزجت فیزیکی بوده، از آن جایی که در روش ACM ، پخشندگی حل کاهش می‌یابد و ممکن است باعث ناپایداری در حل شود، آن‌ها برای پایداری حل، روش شکافت آنتروپی را به کار برده‌اند. یکی از نوآوری‌های کار حاضر علاوه بر تسخیر شاک با وضوح بهتر، این است که در جریان اویلری و بدون حضور لزجت فیزیکی، تسخیر خیلی دقیق و بدون نوسانی را با یک روند حل کاملاً پایدار، نتیجه داده است. یکی از دلایل پایداری در کار حاضر این است که از روش هیرچ برای تجزیه شارها در هر مرحله حل در شبکه غیرمتعامد استفاده شده است. در روش‌های قبلی، شارها معمولاً در شبکه موضعی حساب شده و در آخر حل، در امتداد محورهای اصلی تجزیه می‌شدند که باعث انباشت خطا در حل می‌شد. همچنین در کار مربوط به یی و همکاران، هیچ گزارشی در مورد همگرایی و هزینه محاسبات برای روش ACM با وجود افزایش محاسبات ارائه نشده است. در حالی که در کار حاضر بدان پرداخته شده. در توضیح کاربردی بودن این مقاله می‌توان به این موارد اشاره کرد، همان طور که از عنوان مقاله مشخص است، هدف در این کار این است که موج ضربه‌ای با کنترل پخش عددی با وضوح و کیفیت بهتری تسخیر شود از آن جایی که متغیرهای جریان ، هنگام عبور از موج ضربه‌ای با تغییرات پله‌ای و شدید، مواجه هستند و باعث ایجاد خطای حل در ناپیوستگی‌ها می‌شوند، این کار پژوهشی انجام شده است تا در مرحله اول از ایجاد نوسانات جلوگیری شود و در مرحله دوم با کاهش پخش عددی، ناپیوستگی بهتر تسخیر شود تا باعث تسریع در همگرایی و روند حل جریان های فراصوت شده و هزینه محاسبات را کاهش دهد.

۲- معادلات اساسی حاکم

در این قسمت، به فرمول‌بندی ریاضی معادلات حاکم بر جریان تراکم پذیر غیر لزج می‌پردازیم که در همه رژیم‌های جریان استفاده شده و به معادلات اویلر[7] معروف است. معادلات اویلر برای جریان عبوری از حجم Ω و محدود به سطح Γ در حالت انتگرالی به صورت معادلات ۱ و ۲و ۳ نوشته می‌شود: [۱۹]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}^{1}\rho d\Omega+\oint\rho\vec{v}d\vec{\Gamma}=\mathbf{0} \quad (۱)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}^{1}\rho\vec{v}d\Omega+\oint(\rho\vec{v}\otimes\vec{v}+p)d\vec{\Gamma}=\int_{\Omega}^{1}\rho\vec{f_e}d\Omega \quad (۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}^{1}\rho E d\Omega+\oint\rho H\vec{v}.d\vec{\Gamma}=\int_{\Omega}^{1}\rho\vec{f_e}.\vec{v}d\Omega \quad (۳)$$

[1] Inviscid
[2] Collocated
[3] Finite Volume
[4] General Coordinate System
[5] Limiter Function
[6] Resolution
[7] Euler Equations

که در این روابط، ρ عبارت است از چگالی، $\vec{v}$ بردار سرعت، p فشار، $\vec{f_e}$ نیروهای خارجی، E انرژی داخلی و H آنتالپی کل سیال است که از فرمول ۴ به دست می‌آید. [۹]

$$h = c_p T,\ H = h + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \qquad (۴)$$

انرژی داخلی کلی E به صورت $E = e + \frac{|\vec{v}|^2}{2}$ تعریف می شود که در آن $e = c_v T$ بوده و c_v گرمای ویژه در حجم ثابت است. معادلات ۴-۱ را می‌توان به صورت کلی و فشرده تعریف کرد. به طوری که اگر $\vec{U}$ معرف بردار و یا تانسور متغیرهای بقایی، $\vec{F}$ معرف بردار شارهای[1] بقایی و $\bar{I}$ ماتریس واحد باشد، می‌توان فرمول ۵ را به این صورت تعریف کرد : [۱۹]

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\vec{v} \\ \rho E \end{bmatrix} \text{ و } \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho\vec{v} \\ \rho\vec{v} \otimes \vec{v} + p\bar{I} \\ \rho\vec{v}H \end{bmatrix} \text{ و } \vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho\vec{f_e} \\ \rho\vec{f_e}\cdot\vec{v} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}^{1} \vec{U}\, d\Omega + \oint \vec{F}\, d\vec{\Gamma} = \int_{\Omega}^{1} \vec{Q}\, d\,\Omega \qquad (۵)$$

اگر معادله ۵ را به صورت دیفرانسیلی و در حالت برداری بنویسیم، به معادله ۶خواهیم رسید: [۱۹]

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \vec{Q} \qquad (۶)$$

در جریان دوبعدی و ناپایا، مولفه‌های دکارتی بردار $\vec{U}$ و همچنین بردار $\vec{F}$ توسط روابط ۷ تعریف می‌شوند: [۱۹]

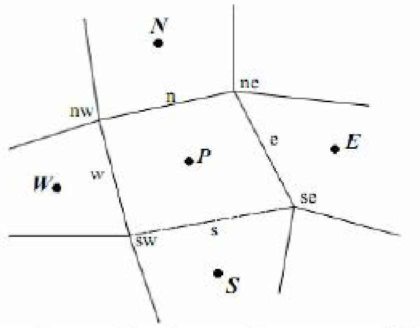
$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \text{ و } \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{bmatrix} \text{ و } \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

که u و v مولفه‌های بردارسرعت $\vec{v}$ می‌باشند.در این صورت معادله۶ را می‌توان در دستگاه مختصات دکارتی به صورت معادله ۸ نوشت: [۱۹] معادله ۸ به معادله اویلر معروف است.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = \vec{Q} \qquad (۸)$$

۳- محاسبه شار در سطح مورب

با توجه به مسائل کاربردی، شبکه‌های محاسباتی همیشه متعامد نبوده و خطوط شبکه در امتداد جریان نیستند، در نتیجه شار عبوری از سطح سلول به ازای هر جهت موضعی، می‌تواند در هر دو جهت xوy مولفه داشته باشد. لذا باید تغییراتی را در شکل معادلات و نحوه محاسبه شار ایجاد کرد تا محاسبات در شبکه‌های غیر متعامد نیز انجام گیرد. در اکثر تحقیقاتی که توسط هارتن و دیگر پژوهشگران انجام گرفته، نظر به این که روش مورد استفاده روش تفاضل محدود بوده و محاسبات در شبکه محاسباتی انجام می‌گیرد و با شبکه فیزیکی متفاوت است در نتیجه ماتریس بردارهای ویژه چپ و راست و همچنین دیگر پارامترهای شار در جهات کارتزین x و y به صورت مجزا و بدون تغییر به کار برده شده‌اند و در نهایت بعد از محاسبات، تبدیل از مختصات موضعی به مختصات اصلی به آن‌ها اعمال می‌شود ولی چون در کار حاضر، شبکه وگسسته‌سازی معادلات حاکم بر اساس حجم محدود بوده و شبکه محاسباتی همان شبکه فیزیکی است، روشی که برای محاسبه شار در پیش گرفته شده، اساسا بر مبنای روش هیرچ بوده و به این صورت است که تمامی جملات شار و اجزاء آن در جهات موضعی $\zeta = \zeta(x,y)$ و $\eta = \eta(x,y)$ به مولفه‌های x ، y تجزیه شده و با هم جمع می‌شوند. برای این کار لازم است که هندسه شبکه و موقعیت سطح سلول نسبت به مراکز سلولهای مجاور مورد بررسی قرار گیرد که این هندسه در شکل ۱ نشان داده شده است.

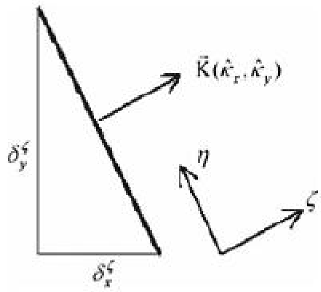


شکل۱ هندسه و علائم مورد استفاده در محاسبه شار

۳-۱- محاسبه شار در سطح e

برای محاسبه شار عبوری از سطح سلول e، سطح مذکور از شکل ۱ درنظر گرفته می‌شود. اگر این سطح به صورت مجزا بررسی شود، طرز قرار گرفتن یک حالت اختیاری از آن سطح در مختصات موضعی ζ و η و ارتباط آن با مختصات اصلی x و y به صورت شکل ۲ نشان داده شده است.

[1] Fluxes



شکل۲ سطح سلول در مختصات موضعیe

روابط هندسی برای حالت فوق می‌تواند به صورت معادله ۹ نوشته شود. [۱۴]

$$\vec{K}=\frac{\vec{\nabla}\xi}{|\vec{\nabla}\xi|}=\hat{k}_x i+\hat{k}_y j$$
$$l=\sqrt{(\delta_x^\xi)^2+(\delta_y^\xi)^2}$$
$$\hat{k}_x=\frac{\delta_x^\xi}{l}$$
$$\hat{k}_y=\frac{\delta_y^\xi}{l} \qquad (۹)$$

به طوری که ملاحظه می‌شود، $\hat{k}_x$ و $\hat{k}_y$ مولفه‌های دکارتی بردار واحد $\vec{k}$ می‌باشند. بردار واحد $\vec{k}$ عمود بر سطح سلول بوده و در امتداد جهت موضعی قرار دارد که در معادله ۹ می‌توان δ_y^ξ و δ_x^ξ را براساس علائم شکل ۲ به صورت معادله ۱۰نوشت. [۱۴]

$$\delta_x^\xi=y_{ne}-y_{se}$$
$$\delta_y^\xi=-(x_{ne}-yx_{se}) \qquad (۱۰)$$

شار بردار سرعت در جهت ζ را می‌توان با رابطه ۱۱ تعریف کرد: [۱۴]

$$\vec{V}^\zeta=\vec{u}\delta_x^\zeta+\vec{v}\delta_y^\zeta \qquad (۱۱)$$

بردار بقایی متغیرها را با $\vec{U}$نشان می‌دهیم و بردارهای بقایی شار جرم، مومنتوم و انرژی (F^ζ) در هر یک از مراکز سلول همسایه سطح e به صورت فرمول۱۲می‌باشند: [۱۳و۱۶]

$$\vec{U}=(\rho,\rho\vec{u},\rho\vec{v},\rho E)^T$$
$$\overrightarrow{F^\zeta}=\begin{bmatrix}\rho V^\zeta\\ \rho V^\zeta u+p\delta_x^\zeta\\ \rho V^\zeta v+p\delta_y^\zeta\\ \rho V^\zeta H\end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

شار در سطح e برای هر سلول دلخواه به صورت فرمول ۱۳محاسبه می‌شود : [۱۳]

$$\overrightarrow{F_e}=\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(F_L^\zeta+F_R^\zeta\right)-\tfrac{1}{2}\Sigma_{i=1}^4\,\alpha_i r_i|\lambda|_i \qquad (۱۳)$$

که در معادله ۱۳ در دستگاه معادلات هذلولوی برای جریان دو بعدی، چهار مقدار ویژه از روابط ۱۴ به دست می آیند که عبارتند از : [۱۳]

$$\lambda_1=\tilde{V}^\xi*1$$
$$\lambda_2=\tilde{V}^\xi*1$$
$$\lambda_3=(\tilde{V}^\xi+\tilde{c})*1$$
$$\lambda_4=(\tilde{V}^\xi-\tilde{c})*1$$
$$\tilde{V}^\xi=\tilde{u}\hat{k}_x+\tilde{v}\hat{k}_y \qquad (۱۴)$$

و همچنین متغیرهای مشخصه α در سطح e از ضرب هر ردیف از ماتریس بردار ویژه چپ $\tilde{p}^{-1}$ درمتغیرهای بقایی ΔU به صورت فرمول۱۵محاسبه می‌شود : [۱۳]

$$\Delta U=((\rho_R-\rho_L),(\rho_R u_R-\rho_L u_L),(\rho_R v_R-\rho_L v_L),(\rho_R E_R-\rho_L E_L))^T$$
$$\alpha_1=\tilde{p}_e^{-1}(1,:)\Delta U$$
$$\alpha_2=\tilde{p}_e^{-1}(2,:)\Delta U$$
$$\alpha_3=\tilde{p}_e^{-1}(3,:)\Delta U$$
$$\alpha_4=\tilde{p}_e^{-1}(4,:)\Delta U \qquad (۱۵)$$

که روابط۱۵ را می‌توان در حالت کلی و برداری به صورت معادله ۱۶ نوشت: [۱۳]

$$\alpha_e=\tilde{p}_e^{-1}(U_E-U_P) \qquad (۱۶)$$

در روابط ۱۵، زیرنویس R و L به ترتیب، مربوط به مرکز سلول سمت راست و چپ سطح سلول e بوده، همچنین $\tilde{p}_e^{-1}(i,:)$ نشان دهنده ردیف i ام ماتریس بردار ویژه چپ $\tilde{p}^{-1}$است و علامت "بار" به این معنی است که ماتریس در سطح سلول e تعریف شده و درایه‌های آن همگی بر اساس میانگین‌گیری رو می‌باشند. لازم به یادآوری است که $\tilde{p}^{-1}$ معکوس ماتریس $\tilde{P}$ است و r_i در رابطه ۱۳ I امین ستون ماتریس $\tilde{P}$ است. ماتریس $\tilde{P}$ به صورت فرمول ۱۷ است : [۱۳]

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{c}} & \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{c}}\\ \tilde{u} & \tilde{\rho}\hat{\kappa}_y & \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{c}}(\tilde{u}+\tilde{c}\hat{\kappa}_x) & \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{c}}(\tilde{u}-\tilde{c}\hat{\kappa}_x)\\ \tilde{v} & -\tilde{\rho}\hat{\kappa}_x & \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{c}}(\tilde{v}+\tilde{c}\hat{\kappa}_y) & \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{c}}(\tilde{v}-\tilde{c}\hat{\kappa}_y)\\ \frac{\tilde{\vec{V}}^2}{2} & \tilde{\rho}(\tilde{u}\hat{\kappa}_y-\tilde{v}\hat{\kappa}_x) & \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{c}}(\tilde{H}+\tilde{c}\tilde{\vec{V}}\cdot\vec{K}) & \frac{\tilde{\rho}}{2\tilde{c}}(\tilde{H}-\tilde{c}\tilde{\vec{V}}\cdot\vec{K})\end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

که در روابط فوق بردار و اندازه سرعت سیال و همچنین عدد ماخ در سطح سلول بر اساس رابطه ۱۸ محاسبه می‌شود: [۱۳]

$$\tilde{V}^2 = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2$$
$$\tilde{\vec{V}} = \tilde{u}\vec{i} + \tilde{v}\vec{j}$$
$$\tilde{M} = \left|\tilde{\vec{V}}\right| / \tilde{c} \qquad (۱۸)$$

بنابراین، با درنظر گرفتن روابط فوق و با اعمال آن‌ها در معادله ۱۳ شار عبوری از سطح e محاسبه می‌شود که برای سطح سلول w نیز صادق است با این تفاوت که در محاسبات، مقادیر متغیرها در مراکز سلول P و W جایگذاری شده، همچنین در محاسبه مقادیر بر اساس بردار واحد عمود بر سطح، در این جا سطح سلول w را در مختصات موضعی درنظر می‌گیریم. همچنین برای محاسبه شارهای عبوری از سطح n، روابط حاکم بر مسئله همان روابط مربوط به محاسبه شار در سطح e خواهد بود با این تفاوت که بردار یکه عمود بر سطح سلول n را در امتداد η در نظر گرفته و مولفه شارها و متغیرهای دیگر براساس این سطح تجزیه خواهند شد. متغیرهای بقایی، همان U بوده، ولی شار متغیرها براساس جهت η به صورت معادله ۱۹خواهند بود. [۱۳]

$$U = (\rho\,,\, \rho u\,,\, \rho v\,,\, \rho E)^T$$
$$F^\eta = \begin{bmatrix} \rho V^\eta \\ \rho V^\eta u + P\delta_x^\eta \\ \rho V^\eta v + P\delta_y^\eta \\ \rho V^\eta H \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

به طوری که مولفه‌های سطح عمود بر η (δ_y^η , δ_x^η) و همچنین سرعت در جهت η یعنی V^η بر اساس علائم به کار رفته در شکل ۲ مطابق معادله ۲۰ عبارتند از: [۱۳]

$$V^\eta = u\,\delta_x^\eta + v\,\delta_y^\eta$$
$$\delta_x^\eta = -(y_{ne} - y_{nw})$$
$$\delta_y^\eta = x_{ne} - x_{nw} \qquad (۲۰)$$

مولفه‌های بردار یکه ($\hat{K}_y$, $\hat{K}_x$) و نیز طول سطح سلول (l) براساس δ های جدید، مانند حالت قبل حساب می‌شوند و شار در سطح n برای هر سلول دلخواه به صورت معادله ۲۱ محاسبه می‌شود : [۱۳]

$$F_n = \frac{1}{2}(F_P^\eta + F_N^\eta) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} r_i |\lambda_i| \alpha_i \qquad (۲۱)$$

تغییرات متغیرهای بقایی و متغیرهای مشخصه موجود در جمله پخش عددی برای سطح سلول n براساس مراکز سلول در طرفین سطح مذکور می‌باشند. این مقادیر همچنین برمبنای میانگین‌گیری رو محاسبه می‌شوند که این میانگین-گیری با احتساب مقادیر در مراکز سلول Nو P انجام می شود. بنابراین، متغیرهای مشخصه در این حالت، مطابق معادله ۲۲عبارتند از : [۱۳]

$$\Delta U = ((\rho_N - \rho_P), (\rho_N u_N - \rho_P u_P), (\rho_N v_N - \rho_P v_P), (\rho_N E_N - \rho_P E_P))^T$$
$$\alpha_1 = \tilde{p}_n^{-1}(1,:)\Delta U$$
$$\alpha_2 = \tilde{p}_n^{-1}(2,:)\Delta U$$
$$\alpha_3 = \tilde{p}_n^{-1}(3,:)\Delta U$$
$$\alpha_4 = \tilde{p}_n^{-1}(4,:)\Delta U \qquad (۲۲)$$

ماتریس‌های بردارهای ویژه $\tilde{P}^{-1}$, $\tilde{P}$ مثل حالت قبل طبق معادله ۱۷ می‌باشند که برای سطح n باید براساس $\hat{K}_y$, $\hat{K}_x$ مربوط به این سطح، محاسبه شوند. در محاسبه شار در سطح سلول s نیز، معادلات همان معادلات فوق میباشند، با این تفاوت که مقادیر مراکز سلول در طرفین این سطح در نظر گرفته می‌شود. همچنین مشخصات سطح نیز بر اساس هندسه مربوط به خود سطح محاسبه می‌شوند. به طوری که ملاحظه می‌شود، شارهای عبوری از هر چهار سطح را برای سلول P می‌توان طبق محاسبات فوق براساس روش رو محاسبه کرد که در یک شبکه محاسباتی برای شبیه-سازی و محاسبه جریان سیال تراکم‌پذیر به کار می‌رود. براساس تقریب TVDروش بالادست مرتبه دوم[1]برای گسسته-سازی مکانی، یی (۱۹۸۵) [۹] و یی و همکاران (۱۹۹۹) [۱۶]، رابطه ۲۳ را برای جمله پخش پیشنهاد کرده‌اند: [۹]

$$\phi_e^l = \frac{1}{2}\psi(\lambda_e^l)(g_E^l + g_P^l) - \psi(\lambda_e^l + \gamma_e^l)\alpha_e^l \qquad (۲۳)$$

تابع γ نیز به شکل رابطه ۲۴ پیشنهاد شده است : [۹]

$$\gamma_e^l = \frac{1}{2}\Psi(\lambda_e^l)\begin{bmatrix} \frac{g_E^l - g_P^l}{\alpha_e^l} & \alpha_e^l \neq 0 \\ 0 & \alpha_e^l = 0 \end{bmatrix}(g_E^l + g_P^l) - \Psi(\lambda_e^l + \gamma_e^l)\alpha_e^l \qquad (۲۴)$$

در رابطه ۲۳، λ_e^l مقدار مشخصه مربوط به l امین مشخصه در سطح سلول e، g_e^l تابع محدودکننده مربوط بهl امین مشخصه در مرکز I امین سلول، α_e^l متغیر مشخصه در سطح سلول e بوده که برابر است با l امین ستون ماتریس $\tilde{p}^{-1}\Delta U$ و بالاخره تابع Ψ عبارتست از تابع آنتروپی.

هارتن (۱۹۸۳) [۶] شرط ارائه شده در معادله ۲۴ را به صورت رابطه ۲۵پیشنهاد داده است : [۶]

[1] 2nd order-UpwindTVD

$$\Psi(\alpha_e^l)=\begin{bmatrix} |\alpha_e^l| & |\alpha_e^l| \geq \varepsilon_1 \\ [\varepsilon_l^2 + (\alpha_e^l)^2] & |\alpha_e^l| < \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

که در رابطه ۲۵، ε_1 برای مسائلی که شامل امواج ضربه‌ای متحرک می‌باشند، معمولاً صفر بوده و برای امواج ساکن یک مقدار کوچکی در نظر گرفته می‌شود. برای تابع محدودکننده g_i^l در مرکز سلول، می‌توان توابع مختلفی را انتخاب کرد. یی و همکاران (۱۹۹۹) [۱۶]، تعدادی از این توابع را پیشنهاد داده‌اند که در کار حاضر، یکی از این توابع به کار برده شده است و به صورت رابطه۲۶ است : [۱۶و۶]

$$g_p^l = \mathrm{minmod}(\alpha_e^l, \alpha_w^l)$$
Where $\mathrm{minmod}(x,y) =$
$$\mathrm{sign}(x).\max\{0, min[|x|, y.sign(x)]\} \quad (۲۶)$$

همچنین به منظور جلوگیری از بروز هرگونه مشکل در اجرای برنامه کامپیوتری، یی و همکاران (۱۹۹۹) [۱۶] روابط ۲۷را برای تابع آنتروپی و تابع گاما معرفی کرده‌اند که در تمام محاسبات $\varepsilon = 10^{-7}$ بوده و $\delta = .0625$ در نظر گرفته شده است. [۱۶]

$$\Psi(z)=\sqrt{(\delta + z^2)}$$
$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^l = \frac{1}{2}\frac{\Psi(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^l)(g_{i+1}^l - g_i^l)\alpha_{i+\frac{1}{2}}^l}{(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^l)^2+\varepsilon} \quad (۲۷)$$

در کار حاضر، به جهت نوآوری و به منظور افزایش دقت و کاهش پخشندگی در ناپیوستگی‌ها، روش دیگری برای اعمال ACM (روش متراکم سازی مصنوعی) به جمله پخش TVD (روش کاهش تغییرات کل) در نظر گرفته شده است. به دلایلی که قبلا نیز ذکر شد، نمی‌توان ACM را مستقیما به جمله پخش اعمال کرد و بدین جهت به جای اعمال مستقیم آن به جمله پخش TVD ، در این جا تابع ضد پخش به تابع محدود کننده که داخل جمله پخش قرار دارد و آن را غیرمستقیم تحت تاثیر قرار می‌دهد، اعمال شده است. روش به کار برده شده به صورت معادله ۲۸ است: [۶ و ۹]

$$\hat{g}_i^l = (1 + \omega^l\theta_i^l)g_i^l \qquad \omega > 0 \quad (۲۸)$$

به طوری که ملاحظه می‌شود، در جمله پخش TVD به جای تابع g، تابع محدود کننده جدید جایگذاری می‌شود که بر اساس رابطه بالا است. در این رابطه، ω ضریب ACM بوده، نظر به این که هر موج عددی (موج‌های خطی و غیر خطی) پخشندگی منتسب به خود را دارد، بنابراین به ازای هر مشخصه، ضرایب متفاوتی را نسبت به دیگر مشخصه‌ها خواهیم داشت. θ_i^l تابع ضد پخش در سلول i به ازای هر مشخصه l به صورت رابطه ۲۹ تعریف می‌شود: [۶و۹]

$$\theta_i^l = \frac{\left|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^l - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^l\right|}{\left|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^l\right| + \left|\alpha_{i-\frac{1}{2}}^l\right| + \varepsilon} \quad (۲۹)$$

که α متغیرهای مشخصه بوده و در سطح سلول محاسبه میشود. همچنین ω ضریبی است که علاوه بر متفاوت بودن برای مشخصه‌های مختلف، تابع فیزیک جریان است و برای جریان موردی خاصی متفاوت با جریان با مشخصات دیگر است و لذا در محاسبات برای جریان خاص، به روش آزمون و خطا به دست می‌آید. با توجه به روابط فوق، تابع محدود کننده جدید ($\hat{g}$) بزرگتر از تابع محدود کننده روش TVD خواهد بود. در نتیجه، با تقویت محدود کننده، احتمال افزایش دقت و افزایش همگرایی روند حل وجود دارد که در بهبود تسخیر امواج ضربه‌ای موثر خواهد بود. ولی با افزایش بیش از حد ω و متعاقبا افزایش تابع محدود کننده که کاهش شدید پخشندگی را به دنبال خواهد داشت، احتمال اختلال در روند همگرایی حل وجود دارد. بنابراین، در یک جریان خاص برای ضریب ω باید یک محدوده یا مقدار بهینه‌ای را مشخص کرد که در آن مقادیر، افزایش دقت با کاهش بیشتر همگرایی و افزایش هزینه محاسبات همراه نباشد که این مورد در قسمت نتایج بررسی خواهد شد.

۴- محاسبه شارهای غیرلزج

در طول چند دهه اخیر روش‌های گوناگونی جهت تخمین هر چه بهتر شارهای غیر لزج ارائه شده است. ساده‌ترین روشی که برای مدل‌سازی شارهای جابجایی می‌توان به کار برد، استفاده از روش جداسازی مرکزی درجه دوم است. در این روش، مقدار متغیر بقایی روی وجوه حجم کنترل، با استفاده از متوسط گیری از مقادیر متغیرهای بقایی نقاط کنترلی المان‌های مجاور به صورت معادله ۳۰ محاسبه می‌شود: [۱۹]

$$w_i = \frac{1}{2}(w_R + w_L) \quad (۳۰)$$

که در آن R و L نشان دهنده المان‌های سمت راست و چپ ضلع i می‌باشند. روش‌های مبتنی بر جداسازی مرکزی درجه

دوم[1] فاقد ترم اتلاف و پراکندگی‌اند لذا زمانی که با ترم‌های جابه‌جایی معادلات به کار می‌روند، نوساناتی نامیرا ایجاد می‌کنند که اثرات نامطلوبی بر روند همگرایی حل معادلات می‌گذارند. از این رو نتایج بدست آمده، از پیوستگی لازم برخوردار نبوده و حل قابل قبولی برای جریان پیوسته نخواهیم داشت. این نوع نوسانات را نوسانات پس‌زمینه[2] میخوانند. روش‌های عددی که جهت حل نوسانات میدان و ناپیوستگی‌ها ارائه شدند به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند. روش‌های بالادست[3] که از نوعی گسسته‌سازی غیر مرکزی بهره می‌برند و روش‌هایی که به همراه گسسته‌سازی مرکزی از ترمهای استهلاک مصنوعی کمک می‌گیرند. در روش‌های بالادست، با توجه به خواص فیزیکی جریان از یک گسسته سازی وابسته به جهت جریان برای ترم مکانی در معادلات استفاده می‌شود. این گونه روش‌ها به دلیل داشتن ترم استهلاک ذاتی، از ایجاد نوسانات ناخواسته در میدان، جلوگیری نموده و مانع از رشد آنها می‌شوند. این روش‌ها برای جریان‌های غیر لزج تک بعدی نسبت به سایر روش‌ها از امتیازات بالایی برخوردار می‌باشند. با این حال، زمانی که پیچیدگی‌های جریان افزایش می‌یابد، مزیت‌های آنها کاهش می‌یابد. در روش مستقیم و بدون واسطه دوم که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است از مقداری استهلاک مصنوعی به همراه گسسته‌سازی مرکزی شارهای جابه‌جایی استفاده میشود. از پیشگامان این کار، ون نیومن و ریچمیر هستند، که تلفیقی از مشتقات چهارم متغیرهای جریان را به عنوان استهلاک مصنوعی به معادلات گسسته شده، اضافه نمودند. در اصل، تمام روش‌های استهلاک مصنوعی متفاوتی هم که بعد از این، ارائه و توسعه داده شدند بر مبنای مشتقات چهارم متغیرهای بقایی بنا شده‌اند. از موفق‌ترین روش‌ها، روش‌های ارائه شده توسط مک کورمک و بالدوین در سال ۱۹۷۵ و جیمسون و همکارانش در سال ۱۹۸۱ را می‌توان نام برد. در دهه‌های اخیر، روش جیمسون توسط محققان بسیاری به کار گرفته شده است. به طوری که این روش برای جریان‌های لزج گذرصوت و مافوق صوت به خوبی جریان‌های غیرلزج عمل کرده و اعمال آن در الگوریتم‌های ضمنی پیشروی در زمان، به راحتی و کارایی الگوریتم‌های صریح بوده است. در مقاله حاضر، به دلیل انعطاف‌پذیری، کارایی و قدرت این روش، همچنین اعمال و کاربرد آسان آن، جهت مدل‌سازی ترم‌های جابه‌جایی معادلات متوسط، از روش جیمسون استفاده شده است. این رابطه به صورت فرمول ۳۱ نشان داده شده است. [۵]

$$\frac{d}{dt}(w_i A_i) + R_i(w) - D_i(w) = 0 \qquad (۳۱)$$

که در رابطه ۳۱، $D_i(w)$، اتلاف مصنوعی اضافه شده به شارها جهت جلوگیری از نوسانات و $R_i(w)$ شار جابجایی است. همچنین A مساحت حجم کنترل و W بردار متغیرهای بقایی است.

۵- گسسته زمانی معادلات اویلر به روش حجم محدود

گسسته‌سازی‌های وابسته به زمان را می‌توان به دو دسته روش‌های صریح و ضمنی تقسیم کرد. در روش صریح که در این مقاله به آن پرداخته شده است، یک متغیر در هر معادله در طرف چپ معادله و قدم زمانی جدید قرار می‌گیرد و بقیه متغیرها در طرف دیگر تساوی و قدم زمانی قبل قرار میگیرند که حل معادلات در این شرایط آسان است. در روش‌های ضمنی بیشتر از یک متغیر در هر معادله در قدم زمانی جدید باید محاسبه شود و معمولاً سعی می‌شود که ماتریس معادلات گسسته شده به صورت سه ، پنج یا هفت قطر شود که حل آن حافظه کمتری را اشغال می‌کند. این روش نیاز به عملیات بیشتری دارد. در این مقاله، برای گسسته‌سازی زمانی صریح از روشی به نام روش چند مرحله‌ای رانگ کوتا مرتبه چهار استفاده شده است که در معادله۳۲نشان داده شده است. [۵]

$$\begin{aligned}
\omega_i^{(0)} &= \omega_i^{(n)} \\
\omega_i^{(1)} &= \omega_i^{(0)} - -\frac{\alpha_1 \Delta t_i}{A_i} R_i'(\omega_i^{(0)}) \\
\omega_i^{(2)} &= \omega_i^{(0)} - -\frac{\alpha_2 \Delta t_i}{A_i} R_i'(\omega_i^{(1)}) \\
\omega_i^{(3)} &= \omega_i^{(0)} - -\frac{\alpha_3 \Delta t_i}{A_i} R_i'(\omega_i^{(2)}) \\
\omega_i^{(4)} &= \omega_i^{(0)} - -\frac{\alpha_4 \Delta t_i}{A_i} R_i'(\omega_i^{(3)}) \\
\omega^{n+1} &= \omega_i^{(4)}
\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

[1] Second Order Central Scheme
[2] Background Oscillation
[3] Upwind Methods

۶- روش عددی

روش حل مورد استفاده، بر اساس روش Time Marching to steady state است. به این صورت که در هر مرحله زمانی بر اساس مقادیر اولیه، شارها (شار جرم، شارهای مومنتوم در جهات x ,y و شار انرژی) به صورت صریح محاسبه شده، متغیرهای جریان محاسبه می‌شوند. برای محاسبه مقادیر در گام زمانی بعدی، روش رانگ کوتا مرتبه ۴ به کار می‌رود. اگر اختلاف مقادیر در دو گام متوالی، دقت موردنظر را ارضا کرده باشد، محاسبات در آن گام متوقف می‌شود ولی اگر خطا از معیار دقت موردنظر، بیشتر باشد، گام نهایی، گام قدیمی گرفته شده و شارها برای کل شبکه محاسبه و مقادیر در گام جدید محاسبه می‌شوند. این مراحل تا ارضای دقت موردنظر برای جواب‌های پایا، ادامه می‌یابد. پس می‌توان مراحل را در حالت کلی بدین صورت نوشت: ۱- مرحله شروع (در نظر گرفتن مقادیر اولیه) ۲- محاسبه شارها و جملات مربوط به تلفات[1]است، لازم به ذکر است که تفاوت سه روش (جیمسون و TVD و ACM)، در جمله مربوط به تلفات است.۳- محاسبه متغیرهای بقایی به روش رانگ کوتا مرتبه ۴ و یافتن این متغیرها در قدم زمانی کاذب جدید برای هر چهار جهت۴- محاسبه مجموع خطاها در دو مرحله زمانی جدید و قدیم، بدین صورت که اگر خطا کمتر از معیار مورد نظر باشد، مقادیر این مرحله را به عنوان جواب قبول می‌کنیم و اگر خطا بیشتر از معیار باشد، جواب‌های اخیر را مقادیر قدیمی محسوب کرده و به مرحله ۲ می‌رویم و محاسبات دوباره تا مرحله ۴ ادامه می‌یابد تا روند حل به دقت موردنظر همگرا شود. همچنین برای گسسته سازی مکانی معادلات اویلر از روش حجم محدود استفاده شده است.

۷- الگوریتم حل

یک نوع، تقسیم بندی که برای حل مسائل جریان سیال مطرح است، در ارتباط با متغیرهای وابسته در معادلات جبری میباشد. به عبارت دیگر، اگر مولفه‌های سرعت، چگالی و دما به عنوان متغیرهای اصلی در نظر گرفته شوند، الگوریتم حل را چگالی مبنا[2] (کارحاضر) گویند. این الگوریتم برای جریان‌های تراکم‌پذیر استفاده می‌شود بدین ترتیب که چگالی از معادله پیوستگی، مولفه‌های سرعت از معادلات مومنتوم، دما از معادله انرژی و فشار از معادله حالت محاسبه می‌شود. این روش برای جریان‌های با عدد ماخ پایین بدون اصلاحات نمی‌تواند استفاده شود زیرا در جریان‌های تراکم ناپذیر، چگالی نمی‌تواند در تغییرات فشار، نقش بازی کند. اگر مولفه‌های سرعت، فشار و دما به عنوان متغیرهای اصلی فرض شوند، الگوریتم را فشارمبنا[3]گویند. به عبارت دیگر در این روش از تلفیق معادلات پیوستگی و مومنتوم معادله‌ای تحت عنوان معادله فشار یا تصحیح فشار بدست می‌آید که از معادله مذکور برای محاسبه فشار استفاده می‌شود. الگوریتم روش چگالی مبنا بدین صورت است: ۱- به روز رسانی پارامترهای سیال براساس حل فعلی (در تکرار اول از مقادیر اولیه، محاسبات شروع می‌شود)، ۲- حل معادلات جرم، مومنتوم و در صورت لزوم، انرژی به صورت همزمان، ۳- محاسبه متغیرهای مورد نیاز و ۴- چک کردن همگرایی حل.

۸- بررسی عدم وابستگی حل به شبکه محاسباتی

اثر تعداد نقاط شبکه بر عدد ماخ و فشار در جدول ۱ و ۲ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که برای عدم وابستگی مسأله به تعداد نقاط شبکه، شبکه بندی ۳۰×۹۰ کفایت میکند. شرط همگرایی برای مسأله حاضر، کوچکتر شدن باقیمانده از 10^{-6} در هر حجم کنترل منظور شده است. همچنین برای بررسی صحت کد نوشته شده، نتایج تسخیر موج ضربه‌ای توسط روش‌های جیمسون و TVD و ACM در کار حاضر با نتایج ارنن و اسوانسون (۱۹۸۸) [۱۲] که جریان فوق را در شبکه‌ای با تعداد سلول‌های ۳۳*۱۴۵ با استفاده از الگوریتم چگالی‌مبنا و اسکیم جیمسون محاسبه کردند، در جدول ۳ نشان داده شده است، درضمن کانتور ماخ مرجع [۱۲] و کانتورهای ماخ توسط سه روش جیمسون و TVD و ACM در کار حاضر در ماخ ورودی ۱/۴ در شکل‌های ۲۴ تا ۲۷ نشان داده شده است.

همانطور که مشاهده می‌شود، جواب‌ها از دقت مناسبی برخوردار هستند. تطابق خوب نتایج حاصل از این مقایسه، تأییدی بر صحت کد نوشته شده است.

---
[1] Dissipation
[2] Density-Based
[3] Pressure-Based

جدول ۱ تأثیر تعداد نقاط شبکه بر عدد ماخ

روش ACM	روش TVD	روش جیمسون	تعداد گره X×Y
۱/۴۰۱۰	۱/۳۹۰۲	۱/۴۰۲۰	۸۰X۲۰
۱/۴۲۶۴	۱/۴۱۸۴	۱/۳۸۱۷	۹۰X۳۰
۱/۴۲۰۱	۱/۴۱۷۷	۱/۳۸۱	۱۲۰X۴۰

جدول ۲ تأثیر تعداد نقاط شبکه بر فشار

روش ACM	روش TVD	روش جیمسون	تعداد گره $X \times Y$
۱۴۲۴۶۸/۴۱۴۳	۱۴۴۶۵۵/۳۵	۱۴۲۷۵۱/۴۱۱	۸۰X۲۰
۱۳۶۸۲۰/۴۳۵۸	۱۳۷۹۶۹/۰۹	۱۴۷۶۶۳/۱۵۷	۹۰X۳۰
۱۳۷۴۲۸/۲۹۹۳	۱۳۷۷۹۶/۵۸	۱۴۸۱۵۳/۴۱۸۳	۱۲۰X۴۰

جدول ۳ مقایسه عدد ماخ از مطالعه حاضر با مرجع [۱۲]

خطا (٪) مرجع [۱۲] و جیمسون کار حاضر	مرجع [۱۲]	روش ACM کار حاضر	روش TVD کار حاضر	روش جیمسون کارحاضر
۰	۱/۶۵۰۰	۱/۶۵۰۱	۱/۶۵۰۰	۱/۶۵۰۰
/۰۲۴	۱/۶۴۹۸	۱/۶۵۰۱	۱/۶۵۰۰	۱/۶۴۹۴
/۱۰۴۷	۱/۶۲۳۵	۱/۶۵۰۱	۱/۶۵۰۰	۱/۶۲۱۸
/۱۲۱۱	۱/۴۰۳۷	۱/۴۰۱۰	۱/۳۹۰۲	۱/۴۰۲۰

۹- نتایج و بحث

پس از اطمینان از عملکرد صحیح برنامه کامپیوتری، در این قسمت، نتایج به دست آمده از حل جریان‌های غیر لزج در ماخ های ورودی ۱/۴و۱/۶۵ توسط روش‌های TVD و ACM و جیمسون ارائه می‌شود. نتایج حاصل از این سه روش، TVDکلاسیک (روش کاهش تغییرات کل) و ACM (روش متراکم سازی مصنوعی) و جیمسون با همدیگر مقایسه شده و در مورد تاثیر کاهش پخش عددی بر نتایج بحث خواهد شد. موضوع، جریان دو بعدی فراصوت روی ایرفویل متقارن است. در شکل ۳، شبکه مورد استفاده روی ایرفویل نشان داده شده است که تعداد سلول‌ها در جهت افقی ۹۰ و در جهت قائم ۳۰ عدد است، همچنین در شکل ۴، توزیع ماخ روی دیواره پایینی، در شکل ۵، توزیع ماخ روی دیواره بالایی، در شکل ۶، توزیع فشار روی دیواره پایینی، در شکل ۷، توزیع فشار روی دیواره بالایی توسط هر سه روش مذکور مشاهده می‌شود.

۹-۱- جریان فراصوتی با ماخ ورودی ۱/۴

در این بخش، جریان فراصوتی روی یک برآمدگی به ضخامت ۴٪ ارائه مـی‌شود. این جریان پایا و غیر لزج بوده و ابعاد کانال انتخاب شده استاندارد است(۳۰*۹۰) در این حالت، عــدد مــاخ جریان ورودی به کانال برابر با ۱/۱۴است، همچنین ثابت جهانی گازها ۲۸۷/۰۴، چگالی ورودی۱/۲۲۵، فشار ورودی ۱۰۱۳۰۰ پاسکال و نسبت گرماهای ویژه ۱/۴ در نظرگرفته شده است و پارامترهای عمومی بصورت زیر است :

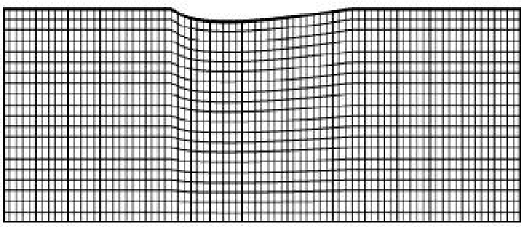
طول شبکه محاسباتی: ۳ m

عرض شبکه محاسباتی: ۱ m

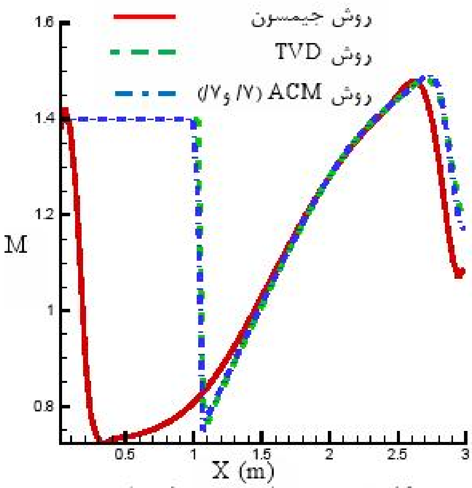
تعداد گره‌ها: ۳۰*۹۰ (۳۰ گره در جهت y و ۹۰ گره در جهت x)

محل برآمدگی : وسط مرز شمالی

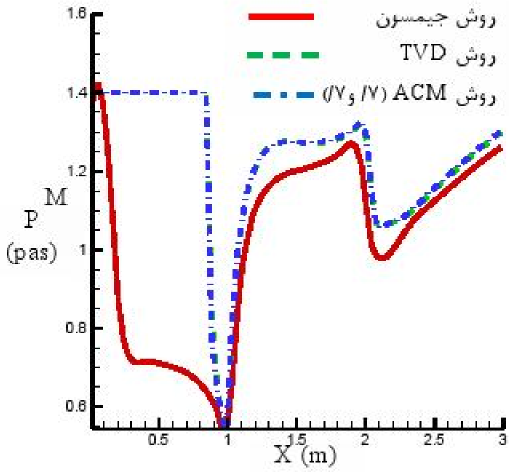
شبکه محاسباتی جبری بوده که در شکل ۳ نشان داده شده است. منظور از برآمدگی، بالاترین ارتفاع برجستگی نسبت به ارتفاع کانال است.



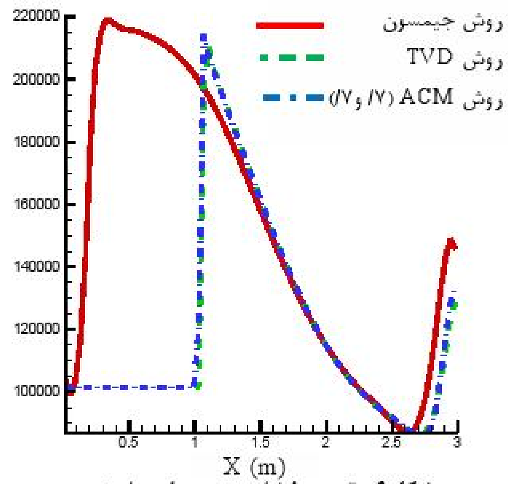
شکل ۳ شبکه مورد استفاده روی ایرفویل



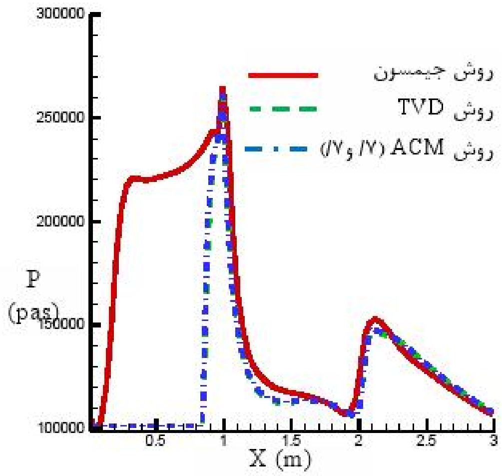
شکل ۴ توزیع ماخ روی دیواره پایینی



شکل ۵ توزیع ماخ روی دیواره بالایی

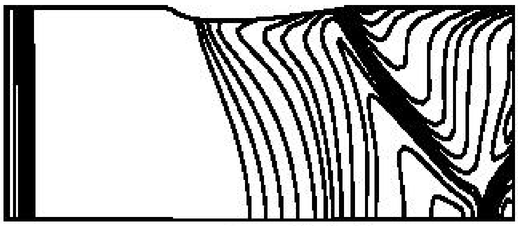


شکل ۶ توزیع فشار روی دیواره پایینی

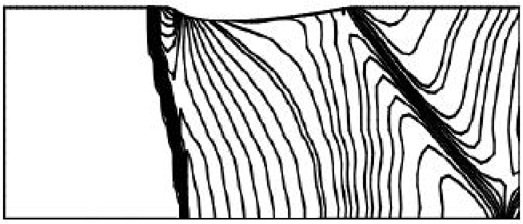


شکل ۷ توزیع فشار روی دیواره بالایی

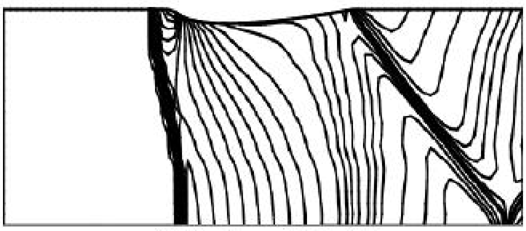
به طوری که در نمودارهای ۷-۴ ملاحظه می‌شود، کاهش پخش عددی (روش ACM)، باعث افزایش دقت در محاسبه عدد ماخ و فشار در مکان‌هایی شده است که انعکاس امواج اتفاق افتاده است. برای مشاهده افزایش دقت محاسبه در کل میدان محاسباتی، نمودارهای مربوط به کانتورهای ماخ در شکل‌های ۱۰- ۸ آورده شده است.



شکل ۸ کانتور ماخ جیمسون



شکل ۹ کانتور ماخ TVD



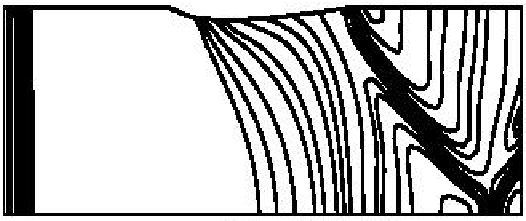
شکل ۱۰ کانتور ماخ ACM

با مقایسه شکل‌های فوق می‌توان تاثیر روش ACM و عملکرد آن را در ناپیوستگی‌ها ملاحظه کرد. به طوری که در شکل‌های فوق مشاهده می‌شود، به علت زیاد بودن پخش عددی در روش TVD و جیمسون، کانتورهای ماخ در محل موج ضربه‌ای پراکنده بوده و موج ضربه‌ای با وضوح[1] کمتری

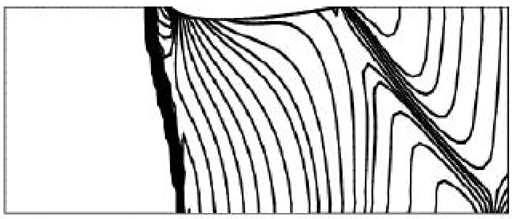
[1] Resolution

تسخیر شده است، ولی در روش ACM به علت کم شدن پخشندگی عددی، پراکندگی در تسخیر موج کمتر بوده و موج ضربه‌ای با وضوح بهتری نسبت به روش TVD و جیمسون تسخیر شده است. منظور از وضوح، دقت (کیفیت) تسخیر امواج ضربه‌ای هنگام عبور از ناپیوستگی‌ها است. لازم به توضیح است که تمام شرایط فیزیکی و محاسباتی در هر سه روش محاسباتی یکسان بوده و تنها، تفاوت در اعمال ضرایب و تابع ضدپخش روی تابع محدودکننده در روش ACM است. کانتورهای فشار نیز برای روش‌های جیمسون و TVD و ACM در کارحاضر، در شکل های ۱۳-۱۱ نشان داده شده اند.

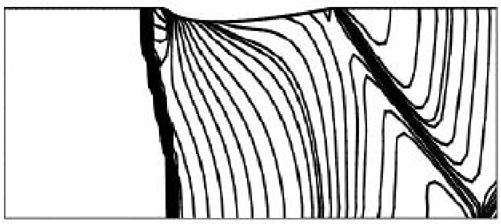
همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، در روش ACM نسبت به روش TVD و جیمسون، تمامی موج‌ها که شامل انتشار امواج ضربه‌ای، بر هم کنش امواج با هم دیگر و انعکاس از دیواره‌ها است با کیفیت بهتری تسخیر شده‌اند که نشان دهنده نوآوری و دقت کار حاضر است.



شکل ۱۱ کانتور فشار جیمسون



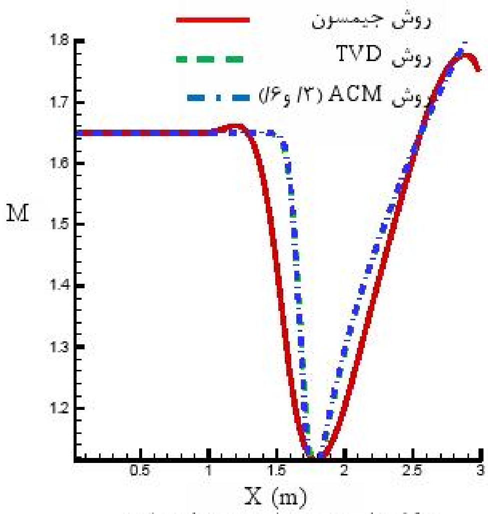
شکل ۱۲ کانتور فشار TVD



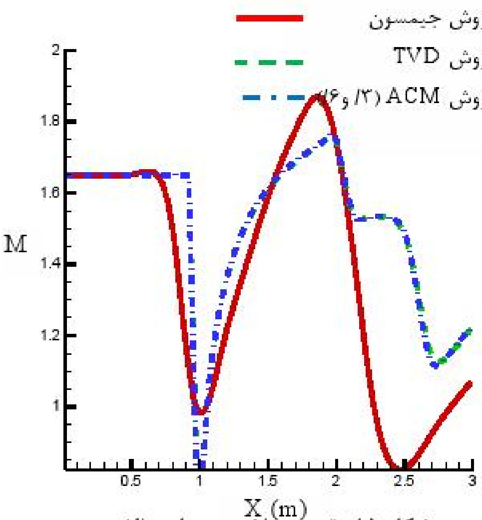
شکل ۱۳ کانتور فشار ACM

۹-۲- جریان فراصوتی با ماخ ورودی ۱/۶۵

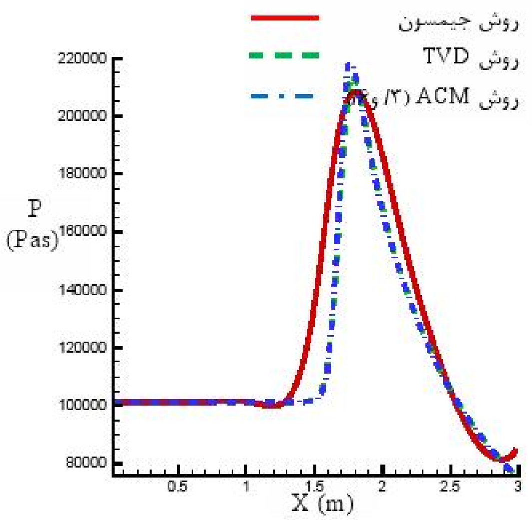
در این حالت نیز ابعاد شبکه، نوع شبکه و تعداد سلول‌ها مشابه حالت قبل مطابق با شکل ۳ بوده، با این تفاوت که عدد ماخ جریان ورودی بیشتر از آن است. شکل‌های ۱۴ و ۱۵، نشانگر نتایج محاسبه توزیع عدد ماخ و شکل‌های ۱۶ و ۱۷، نشانگر توزیع فشار بی بعد در مرز پایینی و بالایی کانال می‌باشند. شکل‌های ۲۰-۱۸، مربوط به کانتورهای ماخ داخل کانال بوده، شکل‌های ۲۱ تا ۲۳ نیز مربوط به نتایج کانتورهای فشار محاسبه شده توسط روش‌های جیمسون و TVD و ACM درکار حاضر است.



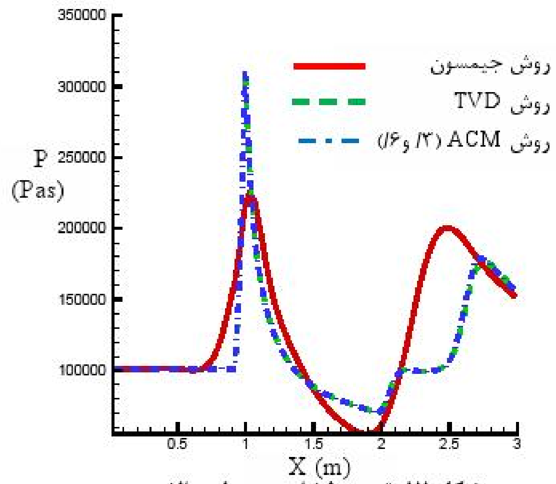
شکل ۱۴ توزیع ماخ در دیواره پایینی



شکل ۱۵ توزیع ماخ در دیواره بالایی

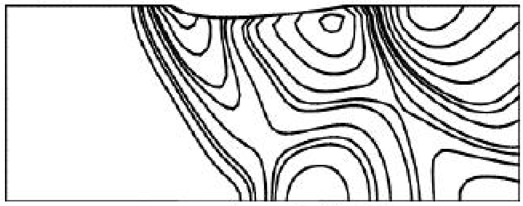


شکل ۱۶ توزیع فشار روی دیواره پایینی

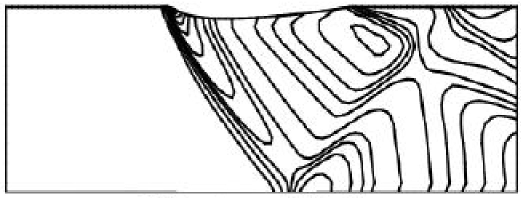


شکل ۱۷ توزیع فشار در دیواره بالایی

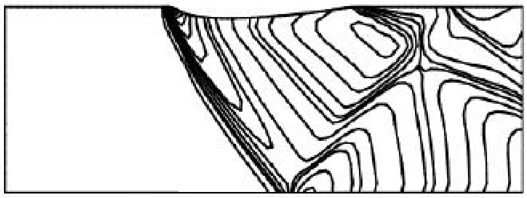
با این که الگوریتم چگالی مبنا برای محاسبات جریان تراکم پذیر مناسب است، ولی شکل ۱۸ تسخیر خیلی مطلوبی از امواج ضربه‌ای ارائه نکرده است. همچنین در خروج از کانال به علت مناسب نبودن شرط مرزی و یا پایین بودن مرتبه آن، شکستگی درموج خروجی مشاهده می‌شود در حالی که در روش TVD و ACM کار حاضر، مشکل شکستگی موج در مرز خروج حل شده و نیز تمامی موج‌ها که شامل انتشار امواج ضربه‌ای، بر هم کنش امواج با همدیگر و انعکاس از دیواره‌ها است با کیفیت بهتری نسبت به کارهای قبلی تسخیر شده‌اند. با توجه به نتایج، ملاحظه می‌شود که با اعمال تابع ضدپخش در روش ACM ، تسخیر موج ضربه‌ای انعکاسی از دیواره بالایی و نیز تسخیر امواج خروجی از ایرفویل نسبت به نتایج حاصل از روش TVD و جیمسون،



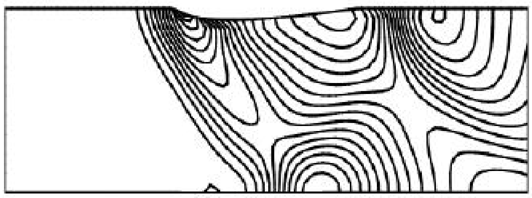
شکل ۱۸ کانتور ماخ جیمسون



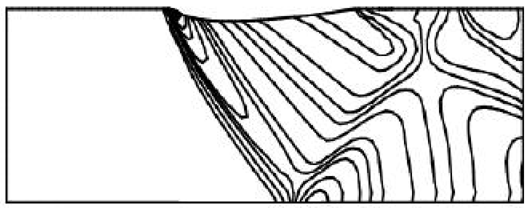
شکل ۱۹ کانتور ماخ TVD



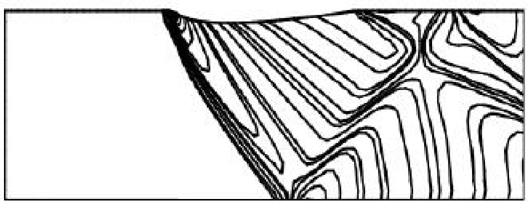
شکل ۲۰ کانتور ماخ ACM



شکل۲۱ کانتور فشار جیمسون



شکل ۲۲ کانتور فشار TVD



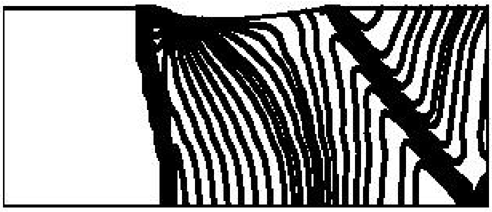
شکل ۲۳ کانتور فشار ACM

بهبود قابل ملاحظه‌ای پیدا کرده است. همچنین برای ارزیابی کار حاضر، نتایج به دست آمده با کارهای عددی دیگر محققان مقایسه شده است. ارئن و اسوانسون (۱۹۸۸) [۱۲]، جریان فوق را در شبکه‌ای با تعداد سلول‌های ۳۳*۱۴۵ با استفاده از الگوریتم چگالی‌مبنا و اسکیم جیمسون در عدد ماخ ورودی ۱/۴ محاسبه کردند که نتیجه حاصل در شکل ۲۴ نشان داده شده است و شکل‌های ۲۷-۲۵، کانتورهای ماخ در کار حاضر هستند. در ضمن، همان طور که قبلا اشاره شد، نتایج این مقایسه در قالب اعداد و ارقام در جدول ۳ آورده شده، میزان خطا نیز محاسبه و مشاهده میشود که موج ضربه‌ای در ایرفویل متقارن در روش ACM با وضوح و کیفیت بیشتری نسبت به روش TVD و در روش TVD، بهتر از روش جیمسون در این پژوهش وکار انجام شده توسط دانشمندان، تسخیر شده است. همچنین مقایسه عددی بین کانتور ماخ توسط دانشمندان و کانتور ماخ جیمسون در کار حاضر، نمایانگر آن است که جواب‌ها از دقت مناسبی برخوردار هستند و تطابق خوب نتایج حاصل از این مقایسه، تأییدی بر صحت کد نوشته شده است.

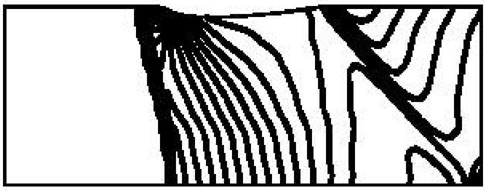
۹-۳- مقایسه همگرایی حل و هزینه محاسبات برای روش‌های TVD وجیمسون و ACM با ضرایب مختلف در اعمال تابع ضد پخش

در این بخش از کار حاضر، به بررسی روند همگرایی حل و هزینه محاسبات در آزمایش‌های عددی مربوط به جریان‌های فراصوتی در دو عدد ماخ ورودی ۱/۴ و ۱/۶۵ در ایرفویل برای منحنی‌های همگرایی که برای هر جریان خاص مقایسه شده اند، می‌پردازیم. تنها تفاوت فقط در اعمال تابع ضد پخش با ضرایب مختلف برای روش ACM است و دیگر پارامترهای محاسبه، نظیر مقادیر مربوط به شرایط مرزی، اندازه شبکه برای محاسبه متغیرهای مختلف جریان، یکسان است. درشکل ۲۸، نمودار همگرایی حل برای مولفه سرعت در جریان فراصوتی با ماخ ورودی ۱/۶۵ نشان داده شده است. به طوری که ملاحظه می‌شود، به علت افزایش عملیات و کاهش پخش عددی بیش از حد روش ACM در این جریان، همگرایی حل در دقت مورد نظر، در تکرارهای حل بیشتری نسبت به روش TVD انجام گرفته است. لازم به توضیح است که در کلیه شکل‌های مربوط به همگرایی حل، اولین مقدار در عبارت داخل پرانتز، مربوط به روش ACM ، ضریب تابع ضد پخش برای میدان‌های خطی بوده، دومین مقدار، عبارت است از مقدار ضریب، برای همان تابع برای میدان‌های غیرخطی.

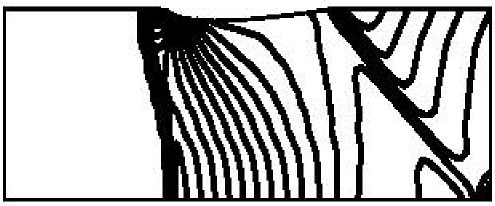
همان طور که در شکل ۲۹ مشاهده می شود، با انتخاب $\omega=۶/$ برای میدان‌های خطی و $\omega=۳/$ برای میدان‌های غیرخطی همگرایی به طور نسبی بهتر شده است. می‌توان گفت که با افزایش ضریب ACM ، پخشندگی در تسخیر ناپیوستگی‌ها کم شده و کیفیت تسخیر، بهتر می‌شود، ولی نمی‌توان ادعا کرد که در این صورت همگرایی نیز بهتر خواهد بود. زیرا کاهش بیش از حد پخش عددی بر روند همگرایی



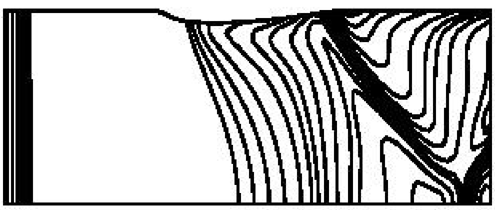
شکل۲۴ کانتور ماخ دانشمندان



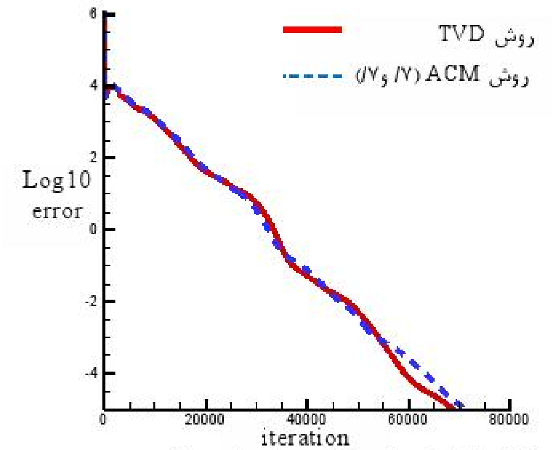
شکل۲۵ کانتور ماخ TVD در کار حاضر



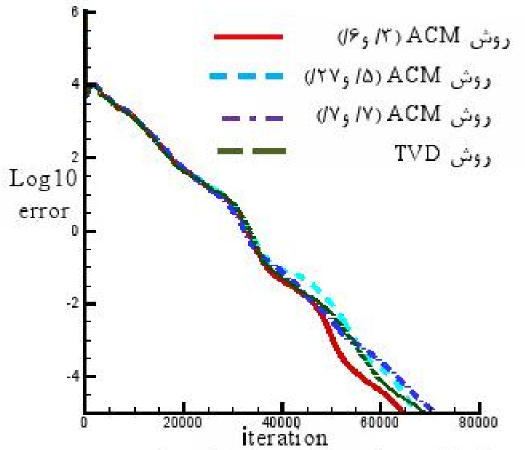
شکل ۲۶ کانتور ماخ ACM در کار حاضر



شکل۲۷ کانتور ماخ جیمسون در کار حاضر



شکل ۲۸ نمودار همگرایی حل برای مولفه سرعت در جریان فراصوتی با ماخ ورودی ۱/۶۵



شکل۲۹ نمودار همگرایی حل برای مولفه سرعت در جریان فراصوتی با ماخ ورودی۱/۶۵

تاثیر منفی گذاشته، آن را مختل خواهد کرد. بنابراین برای بهترین همگرایی لازم است که مقادیر بهینه‌ای را برای ضرایب تابع ضد پخش در هر جریان خاصی تعیین کرد. برای حل جریان با روش ACM و با ضرایب بهینه بدون به کارگیری آزمون و خطا، نیاز به اعمال کنترل پخش عددی از نوع آشکارکننده[1] است که به جمله تلفات، اعمال شده و به طور هوشمند، حل بهینه‌ای با حداقل پخشندگی ممکن، ارائه میدهد که کار مستقل جداگانه‌ای محسوب می‌شود. در حالی که هدف این مقاله، تاثیر روش ACM در بهبود تسخیر شاک[2] مطرح شده است.

در این قسمت از مقاله لازم است که هزینه محاسبات را که به صورت زمان اجرای برنامه بر حسب ثانیه در دقت یا تعداد تکرار مشخصی است، برای روش‌های مورد نظر مقایسه کنیم. نتایج مربوط به هزینه محاسبات به صورت جداولی تنظیم شده‌اند که در آن‌ها زمان اجرای برنامه در محاسبات با ضرایب مختلف روش ACM و زمان روش TVD با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان طور که در جداول ۴و۵ مشاهده میشود، برنامه برای روش TVD و روش ACM با ضرایب خطی و غیرخطی مختلف در عدد ماخ ورودی ۱/۴ و۱/۶۵ با شرط همگرایی 10^{-6} تا رسیدن به تکرار حل ۳۰۰۰ اجرا شده است و زمان اجرای برنامه (مدت زمانی که طول کشیده است تا برنامه اجرا شود) برحسب ثانیه در سطر سوم هر دو جدول نشان داده شده است. به عنوان مثال، در جدول ۴، مدت زمان اجرای برنامه برای رسیدن به تکرار حل برابر۳۰۰۰ با ضریب خطی ۱/۵ و ضریب غیرخطی۱ به صورت ACM (۱ و۱/۵) ،۴۲۶ ثانیه در حالی که در روش TVD ، مدت زمان برای اجرای برنامه تا رسیدن به تکرار مورد نظر،۴۰۹ ثانیه استخراج شده است. لازم به توضیح است که در این جداول، منظور از ضریب خطی روشACM ، ضریب تابع ضدپخش برای میدان‌های خطی و منظور از ضریب غیرخطی، مقدار ضریب برای همان تابع برای میدان‌های غیرخطی است. در این جداول، معیار مقایسه یک تکرار حل مشخص بوده، در نتیجه، افزایش زمان اجرای برنامه در روش ACM به معنی افزایش زمان اجرا در دقت مشخصی نبوده، بلکه به این معنی است که در روش ACM با افزایش عملیات مواجه هستیم. در ضمن در نتایج مربوط به دو جدول۴و۵ زمان‌های اجرای برنامه در تعداد تکرار برابر، افزایش ۵ درصدی عملیات در روش ACM را نشان می‌دهند، ولی با مراجعه به نمودارهای مربوط به همگرایی، مشاهده می‌شود که برای یک دقت خاص (مانند شکل ۲۹)، همگرایی برای روشهای ACM سریع‌تر از روش TVD می‌باشند. همچنین لازم به توضیح است که به منظور جلوگیری از ناپایداری در روند حل، مقادیر بهینه ضرایب تابع ضدپخش برای میدان‌های غیرخطی، نباید بیشتر از ضرایب مربوط به میدان‌های خطی باشد.

[1] Wavelet Detection Function
[2] Shock Resolution

جدول ۴ زمان اجرای برنامه برای جریان فراصوتی $M_{in} = ۱/۴$ تا رسیدن به تکرار حل برابر ۳۰۰۰

	ACM	ACM	ACM	ACM	ACM	TVD
ضرایب خطی	۱/۵	۱/۵	/۷	/۶	/۶	——
ضرایب غیر خطی	۱	/۸	/۷	/۶	/۵	——
زمان (ثانیه)	۴۲۶	۴۲۱	۴۲۱	۴۲۷	۴۲۶	۴۰۹

جدول ۵ زمان اجرای برنامه برای جریان فراصوتی $M_{in} = ۱/۶۵$ تا رسیدن به تکرار حل برابر ۳۰۰۰

	ACM	ACM	ACM	ACM	ACM	TVD
ضرایب خطی	۱	/۹	/۸	/۷	/۷	——
ضرایب غیر خطی	۱	/۸	/۷	/۶	/۲	——
زمان (ثانیه)	۳۹۸	۳۹۳	۳۹۴	۳۹۵	۳۹۶	۳۷۴

۱۰- نتیجه گیری

با توجه به مطالب گفته شده در مورد حل جریان تراکم پذیر با اعمال روش‌های TVD و ACM و جیمسون به الگوریتم چگالی مبنا، نتایج حاصل از کار حاضر در چند قسمت این گونه خلاصه می‌شود: ۱) با اعمال روش ACM و TVD به الگوریتم چگالی مبنا محدودیت استفاده از این الگوریتم و گسترش آن دررژیم‌های تراکم پذیر از لحاظ دقت تسخیر امواج ذره‌ای، تا حدودی برطرف می‌شود. ۲) به علت تقویت محدود کننده، سرعت‌های مشخصه همگراتر شده، در نتیجه برای یک الگوریتم حل یکسان، روش TVD و ACM تسخیر و وضوح بهتری از امواج ضربه‌ای در شرایط نشان داده شده تظیر امواج ساده، انعکاس امواج و برهم کنش امواج با یکدیگر نسبت به روش جیمسون ارائه می‌دهند. ۳)کیفیت تسخیر امواج ضربه‌ای با روش TVD و ACM ، در مقایسه با دیگر نتایج منتشر شده مربوط به الگوریتم چگالی مبنا(مانندروش جیمسون) از بهبود قابل ملاحظه‌ای برخوردار است۴) در شبکه‌های نسبتاً درشت برای پایدار نگهداشتن حل و بهبود روند همگرایی، ضرایب ACM برای میدان‌های غیرخطی باید کمتر از ضرایب مربوط به میدان‌های خطی باشد. با این کار، از طرفی پخش عددی کافی برای پایداری حل تامین شده و از طرف دیگر، کاهش سلول‌های محاسباتی، کاهش عملیات را درپی داشته، درنتیجه، بهبود همگرایی حل را خواهیم داشت. ۵) بهبود همگرایی به علت رویکرد متفاوتی است که در این مقاله در محاسبه و تجزیه بردارهای ویژه، مقادیر ویژه و شارهای عبوری از سطوح مورب به مولفه‌های مختصات اصلی استفاده شده است. ۶) تسخیر امواج ضربه‌ای در روش ACM، وضوح بهتری (پخشندگی کمتر) نسبت به TVD و وضوح خیلی بهتری نسبت به روش جیمسون دارد.

۱۱- علایم، نشانه‌ها

A	مساحت حجم کنترل ، m^2
c_p	گرمای ویژه در فشار ثابت ، $\frac{j}{kg.k}$
c_v	گرمای ویژه در حجم ثابت ، $\frac{j}{kg.k}$
$D_i(\omega)$	اتلاف مصنوعی
E	انرژی داخلی، $m^{+2}s^{-2}$
$\vec{F}$	بردار شار
f_e	نیروهای خارجی، $kgm^{+1}s^{-2}$
H	آنتالپی کل سیال، $m^{+2}s^{-2}$
$\bar{I}$	ماتریس واحد
$\vec{K}$	بردار واحد عمود بر سطح
$\hat{k}_x$	مولفه دکارتی بردار واحد، بدون واحد
$\hat{k}_y$	مولفه دکارتی بردار واحد، بدون واحد
L	مرکز سلول سمت چپ سطح سلولe
M	عدد ماخ
P	فشار، $kgm^{-1}s^{-2}$
R	مرکز سلول سمت راست سطح سلول e
$R_i(\omega)$	شارهای جابه جایی
t	زمان، s
T	دما ، K
u	سرعت، ms^{-1}
U	تانسور متغیرهای بقایی
V	سرعت، ms^{-1}
$\vec{v}$	بردار سرعت، ms^{-1}
w	متغیر بقایی
x	مختصات اصلی ، m

y	مختصات اصلی ، m

علایم یونانی

α	متغیر مشخصه، بدون واحد
η	مختصات محلی ، m
θ_j^l	تابع ضد پخش
λ	مقادیر ویژه
λ_e^l	مقدار مشخصه l امین مشخصه در سطح سلول e
ζ	مختصات محلی ، m
ρ	چگالی ، kgm^{-3}
τ	سطح، m^2
Ψ	تابع آنتالپی
Ω	حجم ، m^3
ω	ضریب ای سی ام

۱۲- مراجع

[1] Godunov SK (1959) A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations. Math Sbornic, English translation in U.S joint publications 47: 271-306.

[2] Harten A (1977) The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities. I. single conservation laws. Commun Pur Appl Math 30: 611-637.

[3] Harten A (1978) The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities. III. Self-Adjusting hybrid schemes. Math Comput 32(142): 363-389.

[4] Roe PL (1981) Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. J Comput Phys 43: 357-372.

[5] Jameson A, Schmidt W, Turkel E(1981) Numerical solutions of the euler equations by finite-volume methods using runge-kutta time-stepping schemes. AIAA 81-1259.

[6] Harten A (1983) High resolution scheme for Hyperbolic conservation laws. J Comput Phys 49(3): 357-393.

[7] Harten A (1984) On a class of high resolution total variation stable finite difference schemes. SIAM J 21(1): 1-23.

[8] Colella P, Woodward PR (1984) The piecewise Parabolic method (PPM) for gas dynamical simulations. J Comput Phys 54: 174-201.

[9] Yee HC, Warming RF, Harten A(1985), Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady state calculations. J Comput Phys 57(2): 327-360.

[10] Mulder WA,Van Leer B (1985) Experiments with implicit upwind methods for the euler equations. J Comput Phys 59: 232-246.

[11] Montagne JL, Yee HC, Vinokur M (1987) Comparative study of high-resolution shock-capturing schemes for a real gas. AIAA 27(19): 1332-1346.

[12] Arnone A ,Swanson RC (1988) A navier-stokes solver for cascade flows. NASA CR 181682, ICASE Report No. 88-32.

[13] Hirsch C (1990) Numerical computation of internal and external flows. John Wiley & Sons.

[14] Lin H, Chieng CC (1991) Characteristic-based flux limiters of an essentially third-order flux-splitting method for hyperbolic conservation laws. Int J Numer Meth Fl 13(3): 287-307.

[15] Turkel E, Radespiel R, Kroll N(1997) Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamics. Comput Fluids 26(6): 613-634.

[16] Yee HC, Sandham ND, Djomeri MJ (1999) Low dissipative High-order shock-capturing methods using characteristic-based filters. J Comput Phys 150: 199-238.

[17] Duru V, Tenaud C (2001) Evaluation of TVD high resolution schemes for unsteady viscous shocked flows. Comput Fluids 30: 89-113.

[18] Javareshkian MH (2001) The role of limiter based on characteristic variable annual. ISME Conference. thcheme, 8Sith TVD.

[19] Rossow CC (2003) A blended pressure/density Based method for the computation of incompressible and compressible flows. J Comput Phys 185(2): 375-398.

[20] Lie KA, Noelle S (2003) On the artificial compression method for second-order non-oscillatory central difference schemes for systems of conservation laws. Siam J Sci Comput 24(4): 1157-1174.

[21] Zamzamian K, Razavi SE(2008) Multidimen sional upwinding for incompressible flows based on characteristics. J Comput Phys 227(19): 8699-8713.

[22] Ohwada T, Asinari P(2010) Artifical compressibility method revisited: Asymptotic numerical method for incompressible Navier-Stokes equations. J Comput Phys 229: 1698-1723.

[23] Nguyen VT, Nguyen HH, price MA, Tan JK (2012) Shock capturing schemes with local mesh adaptation for high speed compressible flows on three dimensional unstructured grids. Comput Fluids 70: 126- 135.

[24] Isoia D, Guardone A, Quaranta G(2015) Finite-volume solution of two-dimensional compressible flows over dynamic adaptive grids. J Comput Phys 285: 1-23.

[۲۵] اردکانی م ع (۱۳۸۸) تونل باد با سرعت پایین، اصول طراحی و کاربرد. انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.