ሐ

مکانیک سازهها و شارهها/ سال ۱۳۹۵/ دوره ۶/ شماره ۲/ صفحه ۱۵۵–۱۶۶

مجله علمی بژو،شی مکانیک سازه ماو شاره م



تحلیل ار تعاشات و پایداری ورقهای مرکب چند لایه تحت اثر رطوبت و دما

حسین قدیریان'، محمد رضا قضاوی' و کوروش خورشیدی^{۳.*}

^۱ کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران ^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران ^۳ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۵/۱۶: تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۱۱/۲۸

چکیدہ

ورقهای مرکب در بسیاری از کاربردها مانند، صنایع دریایی و صنایع هستهای، تحت شرایطی قرار میگیرند که دما و رطوبت محیط، باعث ایجاد کرنش در ورق میشود؛ به طوریکه این کرنشها روی رفتار ارتعاشی ورق تأثیر گذار هستند. به همین دلیل در این مقاله، رفتار ارتعاشی ورقهای مرکب چند لایه متقارن تحت اثر کرنشهای رطوبتی و دمایی، مورد بررسی قرار میگیرد. برای تحلیل، ابتدا معادلات حرکت ورق مرکب با استفاده از تئوری کلاسیک ورق و با روش نیوتن استخراج شدهاند و در ادامه با استفاده از روش انرژی، مسئله مقدار ویژه به دست میآید. مسئله مقدار ویژه با استفاده از روش ریتز مثلثاتی مورد ارزیابی قرار گرفته، فرکانسهای طبیعی و شکل مودهای ویژه محاسبه میشوند. برای اعتبارسنجی روش حل، نتایج به دست آمده در این مقاله در چند حالت مختلف با نتایج سایر مقالات مقایسه میشوند. در نهایت اثر پارامترهای مختلف شامل، شرایط مرزی، مقادیر گرادیان دما و درصد رطوبت، ابعاد هندسی ورق و زاویه الیاف روی ویژگیهای مودال ورق بررسی شده، نتایج در قالب چند نمودار ارائه میشوند.

كلمات كليدى: ارتعاش آزاد؛ ريتز مثلثاتى؛ ورق مركب لايهاى؛ كرنش رطوبتى و حرارتى.

Vibration and Stability Analysis of Laminated Composite Plates with Hygrothermal Effects

H. Ghadirian¹, M. R. Ghazavi², K. Khorshidi^{3,*}

¹ MSc., Mech. Eng., Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
 ² Assoc. Prof., Mech. Eng., Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
 ³ Assis. Prof., Mech. Eng., Arak university., Arak, Iran.

Abstract

In many applications such as marine and nuclear industries, laminated composite plates are subjected to the hygrothermal environment which developed expansion strain in the plate; in such that the expansion strain influence on vibrational behavior of the plate. So in this paper vibration of symmetric laminated composite plates under strain due to moisture and temperature are studied. For analysis, first using the classical theory of plate and Newton's method, equations of motion of plate are extracted and then using the energy method, eigenvalue problem is achieved. Then the eigenvalue problem is solved using trigonometric Ritz method and frequencies and mode shapes of plate are calculated. For validation of solving method, the results are compared with results that are presented in some papers by others. Finally the effect of different parameters such as boundary conditions, thermal gradient and percent of moisture, geometrical dimensions of plate and fiber orientation on modal behavior of plate are investigated and the results are presented in some tables and graphs.

Keywords: Free Vibration; Trigonometric Ritz Method; Laminated Composite Plate; Hygrothermal Strains.

^{*} نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۰۹۸۸۶۳۲۶۲۵۷۲۰؛ فکس: ۰۰۹۸۸۶۳۴۱۷۳۴۵۰

آدرس پست الكترونيك: k-khorshidi@araku.ac.ir

169

قدیریان و همکاران

خارجى اتفاقى روى پاسخ ديناميكى ورق هاى مسطح تقويت

۱– مقدمه

امروزه مواد مرکب، به دلیل نسبت مقاومت به وزن و سفتی به وزن بالا، مقامت به خوردگی و طول عمر خستگی زیاد و سایر ویژگیها، به طور گستردهای در صنایع هوا و فضا، دریایی و سازههای مهندسی با کارایی بالا استفاده میشوند. در کاربردهای مختلف، اغلب سازههای مرکب در معرض تغییرات دما و رطوبت قرار دارند. با افزایش شدت دما و غلظت رطوبت، سفتی و مقاومت چند لایههای مرکب به علت ایجاد میکنند که در نهایت این امر، روی مشخصات دینامیکی، خمشی و بارهای کمانشی سازهها اثر میگذارد؛ بنابراین برای استفاده از پتانسیل کامپوزیتهای پیشرفته، لازم است که اثرات رطوبت و دما در سازههای مرکب، مورد تجزیه و تحلیل قرار بگیرند.

از آنجایی که آنالیز رطوبتی همانند آنالیز حرارتی است، در تحقیقاتی که پژوهشگران انجام دادهاند، هر دو اثر تغییر درجه حرارت و تغییر درصد رطوبت را به طور همزمان مورد بررسی قرار دادهاند. اکثر مطالعات موجود روی ارتعاش ورق-های مرکب چند لایه، در شرایط دما و رطوبت محیط انجام شده، در مقالات کمتر به بحث اثر تغییرات دما و رطوبت روی ارتعاش ورق های چند لایه پرداخته شده است. ویتنی و اشتون [1]، اثر کرنشهای انبساطی را روی پاسخ الاستیک ورقهای چند لایه مرکب با استفاده از شکل تعمیم یافته دوهامل-نيومن قانون هوک مطالعه کردند. دوتارد و گانسان[۲]، اثر گرادیان دما را روی فرکانس طبیعی ورق مستطیلی، با استفاده از روش اختلاف محدود و المان محدود، تحلیل کردند. گاندهی و همکاران [۳]، ارتعاش غیرخطی ورق-های مرکب چند لایه نسبتاً ضخیم را تحت تغییرات دما و رطوبت بررسی کردند. در این کار، تئوری ورق با تغییر شکل برشی را به طوری اصلاح کردند که کشش صفحه میانی ورق ناشی از تغییر شکلهای بزرگ و تغییر ابعاد در محیط حرارتی-رطوبتی لحاظ شود. چن و لی [۴]، ارتعاش ناشی از تغییر دما که به یک ورق مستطیلی ارتوتروپیک وارد شده است را تحلیل کردند. چن و چن [۵]، ارتعاش آزاد یک ورق مرکب چند لایه مستطیلی را را مطالعه کردهاند که در معرض محيط حرارتي-رطوبتي پايا قرار دارد. كانستنتينوس و دیمیتری[۶]، اثر افزایش دما، رطوبت جذب شده و تحریک

شده از جنس کامپوزیت چند لایه را با استفاده از روش تحلیلی، مورد ارزیابی قرار دادند. سایرم و سینها [۷]، اثرات رطوبت و دما را روی ارتعاش آزاد ورقهای مرکب چند لایه با استفاده از FEM بررسی کردند. نور و برتون[۸]، پاسخ تحلیلی برای ارتعاش آزاد و کمانش ورقهای مرکب چند لایه تحت اثر تنش حرارتی ارائه کردند. ادامز و سینگ[۹]، مشخصات دینامیکی کامپوزیتهای اپوکسی تقویت شده با فيبر كه در آب دريا غوطهور شدهاند را از طريق آزمايشات تجربی بررسی کردهاند. لیو و هانگ[۱۰]، ارتعاش آزاد ورقهای مرکب چند لایه تحت اثر تغییرات دمایی را با استفاده از FEM، تحلیل و فرکانسهای طبیعی ورق متقارن متعامد را محاسبه کردند. اسلامی و مارز[۱۱]، ارتعاش یک ورق چند لایه متعامد متقارن تحت اثر دمای ناپایدار و محیط مرطوب ناپایدار برای حالت تکیه گاه ساده را مورد مطالعه قرار دادند. چن و چو[۱۲]، تحلیل ارتعاش آزاد کامپوزیتهای دارای فیبر متعامد را با استفاده از روش تحلیلی الاستو-دینامیک یک بعدی ارائه دادند. رائو و سینها [۱۳]، اثرات دما و رطوبت را روی پاسخ ارتعاش آزاد و گذرای کامپوزیتهای چند جهته، با استفاده از تحلیل اجزای محدود سه بعدی، مورد بررسی قرار دادند. یانگ وان[۱۴]، مشخصات ارتعاشی ورقهای سرامیکی و مستطیلی FG در محیط حرارتی را با استفاده از روش ریلی ریتز تحلیل کرده، معادله فرکانسی سیستم را به دست آورد. ماتسوناگا[۱۵]، ارتعاش آزاد و مسئله پایداری ورقهای ساندویچی و مرکب چند لایه ضربدری که تحت بارگذاری دمایی قرار دارد را با استفاده از روش بسط سری توانی، مورد ارزیابی قرار داد. گوپتا و همکاران [۱۶]، اثر گرادیان دما روی ارتعاش یک ورق مستطیلی غیر همگن با ضخامت متغیر را با روش ریلی ریتز مطالعه کرده، اولین فرکانس طبیعی سیستم را به دست آوردند. گوپتا و شارما[۱۷]، به تحلیل اثر گرادیان خطی دما روی ارتعاش ورقهای ذوزنقهای با ضخامت متغیر پرداختند که در این مقاله نیز، از روش ریلی ریتز در حل مسئله استفاده كردند.

چنانچه از بررسی سایر پژوهشها مشاهده میشود، محققان جز در موارد معدودی [۱, ۱۶, ۱۷]، در تحلیل رفتار ارتعاشی ورقهای مرکب از روش ریتز استفاده نکردهاند. این بر مسائل که N_i و N_i به ترتیب، نیرو و گشتاور برآیند کل میباشند. ارتعاش با جایگذاری مقادیر تنش ها برحسب کرنش در معادله (۱)، ی که در معادلات ساختاری ورق به شکل روابط (۲–۳) به دست می-وابع قابل آیند: $N_i = A_{ij}\varepsilon_j^0 + B_{ij}\kappa_j - \overline{N}_i$ (۲)

$$M_i = B_{ij}\varepsilon_j^0 + D_{ij}\kappa_j - \overline{M}_i \tag{(1-1,2,0)}$$

که B_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} به ترتیب، مؤلفههای ماتریسهای سفتی کششی، کوپلینگ کشش–خمش و سفتی خمشی ورق مرکب هستند[۱۸] و \overline{N}_i و \overline{M}_i نیز به ترتیب، برآیند نیرو و گشتاور ناشی از کرنشهای حرارتی و رطوبتی میباشند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz$$
 (*)

$$(\bar{N}_{i},\bar{M}_{i}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \bar{\varepsilon}_{j}(1,z) dz \qquad (\Delta)$$

طبق تئوری کلاسیک ورقهای چند لایه:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x}^{0} + 1/2(w_{,x})^{2} \\ v_{,y}^{0} + 1/2(w_{,y})^{2} \\ u_{,y}^{0} + v_{,x}^{0} + w_{,x}w_{,y} \end{bmatrix}$$
(9)
$$\begin{bmatrix} \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \end{bmatrix}$$
(9)

$$\lfloor -W,_{xy} \rfloor$$
 که U^0 و V^0 به ترتیب، جابجایی های صفحه میانی در امتداد
x و y، w تغییر شکل عرضی و کاما، نشانه مشتق جزئی است.
با اعمال روش نیوتن و استفاده از معادلات (۲)-(۶) معادلات
حرکت در تئوری ورق چند لایه (با صرفنظر از اینرسی دورانی

و اعمال اثر نیروی صفحهای اولیه)، به صورت روابط (۸–۱۰) به دست میآیند:

$$L_{1}u^{\prime} + 2A_{16}u_{,xy} + L_{2}v^{\prime} - L_{4}w_{,x} - L_{5}w_{,y}$$
$$-\bar{N}_{x,x} - \bar{N}_{xy,y} = Pu_{,tt}^{0} \qquad (A)$$

$$L_{2}u^{\circ} + 2A_{26}v_{,xy}^{\circ} + L_{3}v^{\circ} - L_{6}w_{,x} - L_{7}w_{,y}$$

$$-\bar{N}_{y,y} - \bar{N}_{xy,x} = Pv_{,tt}^{0}$$
(9)

$$-L_{4}u_{,x}^{0} - L_{5}u_{,y}^{0} - L_{6}v_{,x}^{0} - L_{7}v_{,y}^{0} + L_{8}w_{,xx}$$

$$+4D_{16}w_{,xxxy} + 4D_{26}w_{,xyyy} + D_{22}w_{,yyyy}$$

$$+\bar{M}_{x,xx} + 2\bar{M}_{xy,xy} + \bar{M}_{y,yy} + Pw_{,tt} = q$$

$$+N^{i}w_{,xx} + 2N^{i}w_{,xx} + N^{i}w_{,xx}$$
()...)

$$+i\nabla_{x}W_{,xx} + 2i\nabla_{xy}W_{,xy} + i\nabla_{y}W_{,yy} \qquad (1)$$

که P انتگرال چگالی جرمی در امتداد ضخامت ورق، p توزیع فشار روی سطح ورق، N_x^i ، N_y^i ، N_x^i برآیند تنشهای

روش به دلیل سادگی و کارایی خوبی که در حل سایر مسائل دارد، میتواند به عنوان یک روش حل مؤثر در تحلیل ارتعاش ورق مرکب نیز، مورد استفاده قرار گیرد. نکته مهمی که در استفاده از روش ریتز باید مد نظر قرار داد، انتخاب توابع قابل قبول متناسب با شرایط مرزی مسئله است که در این صورت میتوان به پاسخ مناسبی دست یافت. به عنوان یک گزینه برای توابع قابل قبول، میتوان توابع ریتز مثلثاتی را پیشنهاد کرد و کارایی این توابع را در تحلیل ارتعاش ورق مرکب تحت شرایط متغیر محیطی، مورد بررسی قرار داد. به همین منظور در این مقاله برای اولین بار مسئله ارتعاش ورق مرکب تحت اثر گرادیان دما و محیط مرطوب، با استفاده از روش ریتز مثلثاتی، مورد تجزیه و تحلیل قرار میگیرد. در همین راستا، اثر پارامترهای مختلف شامل، شرایط مرزی، ابعاد هندسی ورق، جنس ورق و چیدمان لایهها روی رفتار ارتعاشی ورق

۲- معادلات حاکم بر سیستم

به منظور استخراج معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد یک ورق مرکب چند لایه تحت اثر کرنشهای رطوبتی و گرمایی، یک ورق چند لایه مرکب با ضخامت یکنواخت h در نظر گرفته شده که هر لایه آن در جهت دلخواه θ نسبت به جهت مثبت محور x در دستگاه مختصات کارتزین قرار دارد (شکل ۱). برآیند نیرو و گشتاور کل روی ورق با رابطه (۱) تعریف می-شوند:

$$(N_{i}, M_{i}) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{i}(1, z) dz$$
 (1)



و دستگاه مختصات

اولیه در صفحه میانی هستند و عملگرهای L_i به شکل روابط (۱۸–۱۸) تعریف میشوند:

$$L_{1} = A_{11} ()_{,xx} + A_{66} ()_{,yy}$$
 (11)

$$L_2 = A_{16} ()_{xx} + A_{26} ()_{yy} + (A_{12} + A_{66}) ()_{xy}$$
(17)

$$L_{3} = A_{66}(),_{xx} + A_{22}(),_{yy}$$
(1°)

$$L_4 = B_{11}()_{,xx} + (B_{12} + 2B_{66})()_{,yy}$$
(14)

$$L_{5} = 3B_{16}()_{,xx} + B_{26}()_{,yy}$$
(10)

$$L_{6} = B_{16}()_{,xx} + 3B_{26}()_{,yy}$$
(19)

$$L_{7} = (B_{12} + B_{66})()_{,xx} + B_{22}()_{,yy}$$
(1Y)

$$L_8 = D_{11} ()_{xx} + 2(D_{12} + 2D_{66}) ()_{yy}$$
 (1A)

لازم به توضیح است که معادلات (۸)، اساساً معادلات خطی شده منبع [۱۹] هستند؛ با این تفاوت که برآیند نیروهای ناشی از انبساط حرارتی و رطوبتی \overline{N}_i و \overline{N}_i ، جایگزین برآیند نیروهای ناشی از کرنش حرارتی M_i^T و M_i^T و شدهاند؛ بنابراین با تعمیم مفهوم برآیند نیرو و ممان حرارتی، می توان مفهوم کرنشهای انبساطی را در قالب تئوری ورق چند لایه وارد کرد.

۳- حل معادلات حاکم با بکارگیری روش انرژی ریتز

برای ورق های چند لایه با خواص الاستیک که هم از نظر هندسی و هم از نظر خواص مادی نسبت به سطح میانی متقارن هستند، تمام مؤلفههای ماتریس سفتی کوپلینگ کشش-خمش B_{ij} صفر خواهند شد، به همین دلیل، مسئله تغییر شکل صفحهای از تغییر شکل عرضی مجزا می شود. در حالتی که کرنشهای انبساطی در هر لایه یکنواخت باشند، مقادیر ثابت \overline{N}_i از حل مسئله تغییر شکل صفحهای به دست مى آيند؛ بنابراين براى تبيين اثرات كرنشهاى انبساطى روى رفتار ورقهای مرکب چند لایه، تنها افزایش دمای یکنواخت در کرنش حرارتی و محیط مرطوب یکنواخت در شرایط کرنش رطوبتی مدنظر قرار گرفتهاند. با صفر شدن مؤلفههای ، تحلیل ورق چند لایه متقارن به تحلیل یک ورق B_{ij} \overline{N}_{xv} و \overline{N}_{v} ، \overline{N}_{x} ، \overline{N}_{x} ناهمسانگرد با بار صفحهای یکنواخت، تبدیل میشود. رفتار ارتعاشی، خمشی و پایداری چنین ورقی را می توان از معادله انرژی با استفاده از روش ریتز، مورد بررسی قرار داد.

تابعی انرژی کل سیستم برابر است با تفاضل بین حداکثر انرژیهای پتانسیل و جنبشی ورق که به شکل رابطه (۱۹) بیان میشود:

$$\Pi = V_{\max} + U_{\max} - T_{\max} \tag{19}$$

که در رابطه (۱۹)، ۷ انرژی پتانسیل یا انرژی کرنشی ناشی از خمش ورق، U انرژی پتانسیل بارهای درون صفحهای ناشی از کرنشهای حرارتی و رطوبتی و T انرژی جنبشی سیستم هستند. انرژی جنبشی T طبق رابطه (۲۰) به دست میآید که ρ چگالی ورق و A سطح ورق در صفحه x-y میباشند:

$$T = \frac{1}{2} \iint_{A} \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{2} dA \qquad (\Upsilon \cdot)$$

عبارات U و V طبق رابطه $P_E = \frac{1}{2} \int_{v}^{v} \sigma^k \varepsilon dv$ و با استفاده از روابط تنش-کرنش و معادلات ساختاری کرنش محاسبه میشوند[۲۰]؛ به طوری که توابع انرژی پتانسیل ورق چند لایه متقارن به شکل روابط (۲۱–۲۲) به دست میآیند:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial x^{2}} \right)^{2} + 2D_{12} \left(\frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial y^{2}} \right) \right. \\ &+ D_{22} \left(\frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial y^{2}} \right)^{2} + 4D_{16} \left(\frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial x \partial y} \right) + \\ &4 D_{26} \left(\frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial y^{2}} \frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^{2} w_{0}}{\partial x \partial y} \right)^{2} \right] dy dx \tag{(1)} \\ &U^{h} = \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \left\{ \left(-\Delta M \right) \left[A_{11}^{h} \left(\frac{\partial w_{0}}{\partial x} \right)^{2} + A_{12}^{h} \left(\frac{\partial w_{0}}{\partial y} \right)^{2} \right. \\ &+ 2A_{16}^{h} \left(\frac{\partial w_{0}}{\partial x} \frac{\partial w_{0}}{\partial y} \right) + A_{21}^{h} \left(\frac{\partial w_{0}}{\partial x} \right)^{2} + A_{22}^{h} \left(\frac{\partial w_{0}}{\partial y} \right)^{2} \\ &+ 2A_{26}^{h} \left(\frac{\partial w_{0}}{\partial x} \frac{\partial w_{0}}{\partial y} \right) + 2A_{61}^{h} \left(\frac{\partial w_{0}}{\partial x} \right)^{2} + 2A_{62}^{h} \left(\frac{\partial w_{0}}{\partial y} \right)^{2} \\ &+ 4A_{66}^{h} \left(\frac{\partial w_{0}}{\partial x} \frac{\partial w_{0}}{\partial y} \right) \right] \right\} dy dx \tag{(Y7)} \end{aligned}$$

$$A_{11}^{h} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_{k}} (\bar{Q}_{11}\beta_{xx}) dz \qquad A_{12}^{h} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_{k}} (\bar{Q}_{12}\beta_{xx}) dz A_{21}^{h} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_{k}} (\bar{Q}_{12}\beta_{yy}) dz \qquad A_{22}^{h} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_{k}} (\bar{Q}_{22}\beta_{yy}) dz$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int_0^b \int_0^a W^2(x, y) dx dy$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$(\gamma \lambda)$$

$$+D_{22}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{16}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right) \\ +4D_{26}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right) + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2 \right] dydx$$
(19)

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \int_{0}^{b} \left\{ \left(-\Delta M \right) \left[A_{11}^{h} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^{2} + A_{12}^{h} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^{2} \right. \\ \left. + 2A_{16}^{h} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + A_{21}^{h} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^{2} + A_{22}^{h} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^{2} \right. \\ \left. + 2A_{26}^{h} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + 2A_{61}^{h} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^{2} \right. \\ \left. + 2A_{62}^{h} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^{2} + 4A_{66}^{h} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \right\} dy dx$$

با جایگذاری
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$
 و $\frac{y}{b} = \eta$ در معادلات (۲۸)–(۳۰)
میتوان این معادلات را بیبعد کرد. برای اعمال روش ریتز از
پاسخ تقریبی رابطه (۳۱) استفاده میشود:

$$W(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_i(\xi) q_j(\eta)$$
(٣١)

 $P_i(\xi)$ و $P_i(\xi)$ و $P_i(\xi)$ و $P_i(\xi)$ و $P_i(\xi)$ و $P_i(\xi)$ و $P_i(\xi)$ توابع قابل قبول مناسبی هستند که حداقل شرایط مرزی هندسی مسئله را ارضا میکنند. پس از جایگذاری رابطه (۳۱) در روابط انرژیهای (۳۱) در روابط (۲۸)–(۳۰) و قرار دادن روابط انرژیهای جنبشی و پتانسیل در تابعی انرژی، میتوان ضرایب مجهول I_i را با مینیمم کردن تابعی انرژی Π ، نسبت به I_{ij} به دست آورد:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_{ij}} = 0 \tag{(TT)}$$

در نهایت معادله (۳۲) به مسئله مقدار ویژه (۳۳) منتهی

مىشود:
$$\sum_{i}^{M} \sum_{j}^{N} \left[K_{ijkl} - \Omega^{2} M_{ijkl} \right] a_{ij} = 0$$
 (٣٣)

$$A_{61}^{h} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_{k}} \left(\overline{Q}_{16} \beta_{xy} \right) dz \qquad A_{62}^{h} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_{k}} \left(\overline{Q}_{26} \beta_{xy} \right) dz$$
$$A_{16}^{h} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_{k}} \left(\overline{Q}_{16} \beta_{xx} \right) dz \qquad A_{26}^{h} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_{k}} \left(\overline{Q}_{26} \beta_{yy} \right) dz$$
$$A_{66}^{h} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_{k}} \left(\overline{Q}_{66} \beta_{xy} \right) dz \qquad (\Upsilon\Upsilon)$$

$$\frac{1}{k=1}$$
 در معادلات فوق به صورت روابط (۲۴–۲۶) ضرایب eta در معادلات فوق به صورت روابط (۲۴–۲۶)

$$\beta_{xx} = \beta_1 \cos^2 \theta + \beta_2 \sin^2 \theta \tag{(14)}$$

$$\beta_{yy} = \beta_1 \sin^2 \theta + \beta_2 \cos^2 \theta \tag{7a}$$

$$\beta_{xy} = (\beta_1 - \beta_2)\cos\theta\sin\theta \tag{(YF)}$$

که ${}_{I}\beta$ و ${}_{2}\beta$ ، ضرایب انبساط رطوبتی و ${}_{M}\Delta$ درصد رطوبت هستند. با جایگذاری ضریب انبساط حرارتی α به جای β و گرادیان دما Δ به جای Δ در معادله (۲۲)، می توان انرژی پتانسیل ورق تحت اثر گرادیان دما را نیز محاسبه کرد. لازم به توضیح است که در حالتی که خواص محاسبه کرد. لازم به توضیح است که در حالتی که خواص جنس لایه به رطوبت یا دما وابسته باشد و یک گرادیان (۳.) مطوبت یا گرادیان دما در لایه وجود داشته باشد، ماتریس سفتی دیگر ثابت نخواهد بود. اگر دما یا رطوبت افزوده شده می در امتداد ضخامت لایه ثابت باشد(حالت اشباع شده)، مقادیر می می در امتداد ضخامت لایه ثابت باشد(حالت اشباع شده)، مقادیر می می در امتداد ضخامت لایه ثابت خواهند بود، ولی احتمالاً این مقادیر به ماتریس سفتی را از انتگرال خارج کرد، ولی باید برای ماتریس معتی را از انتگرال خارج کرد، ولی باید برای محاسبه برآیند نیرو و گشتاور آن را تحت علامت جمع قرار داد.

از معادلات به دست آمده در قسمت قبل میتوان دریافت که ارائه یک حل دقیق برای این مسئله ممکن نیست. حتی برای ارتعاش یک ورق مستطیلی در خلأ نیز، نمیتوان حل دقیقی به دست آورد، به جز در حالات خاصی که دو لبه مقابل ورق دارای تکیهگاه ساده باشند؛ بنابراین برای تحلیل میبایست از روشهای حل عددی استفاده کرد[۲۱].

طبق روش جداسازی متغیرها و با فرض تابع تغییر شکل عرضی $w_0(x,y,t)$ به شکل هارمونیک میتوان نوشت: $w_0(x,y,t) = W(x,y) \exp(i\omega t)$ (۲۷)

با استفاده از (*x,y,t*) از معادله (۲۷)، حداکثر انرژیهای جنبشی و پتانسیل ورق به صورت روابط (۲۸–۳۰) به دست میآیند:

که در معادله ۳۳، $\Omega^2 = \rho \omega^2 \frac{a^4}{h^2 E_2}$ ۳۳ و مؤلفه های ماتریس های $\Omega^2 = \rho \omega^2 \frac{a^4}{h^2 E_2}$ ۳۶ معارتند از: $K_{ijkl} = \overline{D}_{11} P_{ik}^{(2.2)} Q_{jl}^{(0.0)} + r^2 \overline{D}_{12} \left(P_{ik}^{(2.0)} Q_{jl}^{(0.2)} + P_{ik}^{(0.2)} Q_{jl}^{(0.2)} + r^4 \overline{D}_{22} P_{ik}^{(0.0)} Q_{jl}^{(2.2)} + 2r \overline{D}_{16} \left(P_{ik}^{(2.1)} Q_{jl}^{(0.1)} + P_{ik}^{(1.2)} Q_{jl}^{(1.0)} \right) + 2r^3 \overline{D}_{26} \left(P_{ik}^{(0.1)} Q_{jl}^{(2.1)} + P_{ik}^{(1.0)} Q_{jl}^{(1.2)} \right) + 4r^2 \overline{D}_{66} P_{ik}^{(1.1)} Q_{jl}^{(1.1)} + (-\Delta M) \left[\delta^2 \left(\overline{A}_{11}^h + \overline{A}_{21}^h + 2\overline{A}_{61}^h \right) P_{ik}^{(1.1)} Q_{jl}^{(0.0)} + r^2 \delta^2 \left(A_{12}^h + A_{22}^h + 2A_{62}^h \right) P_{ik}^{(0.0)} Q_{jl}^{(1.1)} + r \delta^2 \left(A_{16}^h + A_{26}^h + 2A_{66}^h \right) \left(P_{ik}^{(0.0)} Q_{jl}^{(1.0)} + P_{ik}^{(1.0)} Q_{jl}^{(0.0)} \right) \right]$ (٣f)

$$M_{ijkl} = P_{ik}^{(0,0)} Q_{jl}^{(0,0)} \tag{7a}$$

که
$$r = \frac{a}{b}$$
 ، $\overline{A}_{ij} = \frac{1}{hE_2}A_{ij}$ ، $\overline{D}_{ij} = \frac{1}{h^3E_2}D_{ij}$ که عرض ورق و $\delta = \frac{a}{h}$ نسبت ضخامت ورق هستند.

هریک از عبارات انتگرالی در روابط (۳۴–۳۵) به شکل روابط (۳۶–۳۷)تعریف می شوند:

$$P_{ik}^{(r,s)} = \int_0^1 \frac{d^r p_i(\xi)}{d\xi^r} \frac{d^s p_k(\xi)}{d\xi^s} d\xi \qquad (\Im)$$

$$Q_{jl}^{(r,s)} = \int_0^1 \frac{d^r q_j(\eta)}{d\eta^r} \frac{d^s q_l(\eta)}{d\eta^s} d\eta$$
(٣Y)

روش ریتز مثلثاتی، مبتنی بر توابع قابل قبول رابطه (۳۸) است[۲۲]:

$$\psi_i(\xi) = \sin(a_i(2\xi-1)+b_i)\sin(c_i(2\xi-1)+d_i) \quad (\text{TA})$$

که ضرایب a_i , b_i , a_i و b_i در جدول ۱ ارائه شدهاند. برای استفاده از تابع ریتز مثلثاتی در حل مسئله ارتعاش ورق مستطیلی لازم است که توابع قابل قبول در دو جهت x و y تعریف شوند. به همین منظور، میتوان برای یک جهت از تابع (۳۸) استفاده کرد و در جهت دیگر کافی است، به جای گ و i به ترتیب π و j جایگذاری شوند. در رابطه (۳۸) توابع اول و سوم $(\xi)_1 \psi$ و $(\xi)_W$ به ترتیب، در $0 = \xi$ و $1 = \xi$ به ورق امکان جابجایی آزاد میدهند. از طرفی توابع دوم و چهارم $(\xi)_2 \psi$ و $(\xi)_4 \psi$ نیز، امکان شیب آزاد به لبههای $0 = \xi$ و $1 = \xi$ میدهند؛ بنابراین برای ارضای

شرایط مرزی کلاسیک آزاد، ساده و گیردار، میبایست از بین چهار تابع اول $(\xi)_1 \psi$ ، $(\xi)_2 \psi$ ، $(\xi)_3 \psi$ و $(\xi)_4 \psi$ ، یک ترکیب مناسب را انتخاب کرد. به عنوان مثال، در تحلیل یک ورق با تکیه گاه آزاد (FFFF)، هر چهار تابع در مجموعه نهایی استفاده میشوند، در حالی که اگر یکی از لبهها دارای تکیه گاه ساده باشد (FFFS)، تابع $(\eta)_8 \psi$ از مجموعه حذف خواهد شد و یا در مورد یک ورق با تکیه گاه گیردار (CCCC)، هر چهار تابع اول در هر دو جهت ξ و η میبایست حذف شوند. ۹ حالت متفاوت از ترکیبات مختلف شرایط مرزی کلاسیک در

جدول ۲ آورده شدهاند که علامت دایره توپر، نشان می-دهد که آن تابع باید در مجموعه نهایی نگه داشته شود. حرف اول در جدول، نوع تکیهگاه را در لبه $0 = \xi$ یا $0 = \eta$ مشخص می کند و حرف دوم، نوع تکیهگاه در لبه مقابل آن را نشان می دهد. لازم به تذکر است که حرف F، نماد تکیهگاه آزاد، حرف R، تکیهگاه ساده و حرف D، تکیهگاه گیردار می-باشند. نمادی که در اینجا برای نمایش تکیهگاه ها استفاده شده، به این صورت است که حرف اول نماد تکیهگاه در لبه شده، به این صورت است که حرف اول نماد تکیهگاه در لبه شده، به این صورت است که حرف اول نماد تکیهگاه در لبه مدای به ترتیب، نوع تکیهگاه در سایر لبهها را مشخص می-کنند.

۴- اعتبارسنجی و بحث و بررسی نتایج عددی ۴-۱- اعتبار سنجی نتایج عددی

در این قسمت، به منظور اعتبارسنجی و تایید مدل ارائه شده در این مقاله و نشان دادن کارایی و دقت روش توسعه داده شده در حل، معادله (۳۳) در چند حالت ساده مورد بررسی قرار گرفته، نتایج تحلیل با نتایج قابل استناد ارائه شده در سایر مقالات منتشر شده در مجلات معتبر مقایسه شدهاند. در همین راستا در جدول ۳ و جدول ۴، پارامترهای فرکانسی بیبعد Ω برای ورق مرکب مستطیلی چهار لایه متقارن متعامد [0,90] تحت اثر کرنشهای رطوبتی و دمایی با تکیهگاههای دارای شرایط مرزی ساده محاسبه شدهاند، نتایج به دست آمده با پاسخ مقالات ویتنی و اشتون [۱]، رام و سینها [۷]، شن و همکاران [۲۳] و راث و ساهو [۲۴]، مقایسه شده است.

مکانیک سازهها و شارهها/ سال ۱۳۹۵/ دوره ۶/ شماره ۲

قدیریان و همکاران ۱۶۱

نز مثلثاتی	ِ توابع ريت	و ،d) در	$c_i \cdot b_i \cdot a_i$	جدول ۱- ضرایب(
------------	-------------	----------	---------------------------	----------------	--

i	a_i	\boldsymbol{b}_i	<i>C</i> _{<i>i</i>}	d_i
١	π/4	3π/4	π/4	3π/4
٢	π/4	3π/4	-π/2	-3π/2
٣	π/4	-3π/4	π/4	-3π/4
۴	π/4	-3π/4	π/2	-3π/2
>۴	π/2(i-4)	π/2(i-4)	π/2	π/2

جدول ۲ - ترکیب چهار تابع اول در مجموعه مثلثاتی به گونهای که شرایط مرزی مربوطه ارضا شوند.

				• •
ψ_4	ψ_3	ψ_2	ψ_1	شرايط مرزى
•	•	•	٠	FF
•	-	•	•	FS
-	-	•	•	FC
•	•	•	-	SF
•	-	•	-	SS
-	-	•	-	SC
•	•	-	-	CF
•	-	-	-	CS
-	-	-	-	CC

جدول ٣- مقايسه فركانسهاي بيبعد ورق مربعي [0,90]

	و درصد رطوبت $\Delta M\!=\!0.1\%$					
	۴	٣	٢	١		شماره مود
	40/2100	۳۹/۵۲۸۱	19/9118	۹/۴۱۱۱	c	مدل ارائه شده
<u>،</u>	40/210	۳۹/۵۲۸	۱۹/۹۱۱	٩/۴۱۱	فركانس	
	<u> </u>	-•/•••٢	-•/••1۵	-•/••)	درصد اختلاف	ویتنی و اشتون[۱]
	46/192	۴۰/۰۶۸	۲۰/۶۷۹	٩/۴٢٩	فر کانس	1
	- ۲/۰۰۳	1/841	٣/٧١٢	•/19•7	درصد اختلاف	رام و سينها[٧]
	40/011	41/11	۱۹/۸۶۲	۹/۴۱۳	فر کانس	
	-•/۶۵۳۵	-•/۶۳۹۳	-•/۲۲۲۹	•/•٢•١	درصد اختلاف	سن و همکاران[۲۳]
	۴۶/۷۰۸	4.1.76	۲۰/۵۹۷	٩/۴۲۲	فر کانس	١
	١/٩١٠	۱/۳۸۶	٣/٣٢٩	•/1168	درصد اختلاف	رات و ساهو[۲۴]

لازم به توضیح است که ویتنی و اشتون [۱]، از روش ریتز، رام و سینها [۷]، از روش اجزای محدود مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDPT)، شن و همکاران [۲۳]، از روش تحلیلی مبتنی بر تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی (HSDPT) و راث و ساهو [۲۴]، هم از

روش اجزای محدود در تحلیل این مسئله استفاده کردهاند. در تحلیل از ماده مرکب گرافیت *پ*وکسی استفاده شده که $E_2 = 9.5$ GPa ، $E_1 = 130$ GPa ، $G_{12} = 9.5$ GPa ، $F_1 = 0.3$ ، $G_{12} = 6$ GPa $\alpha_2 = 28.1 \times 10^{-6}$ ، $\nu_{12} = 0.3$ ، $G_{12} = 6$ GPa $\alpha_2 = 28.1 \times 10^{-6}$ ، $\kappa_1 = -0.3 \times 10^{-6}$ 1 / *K* هستند. همان طور که از جدول ۳ و جدول ۴ مشاهده میشود، توافق خوبی بین نتایج به دست آمده با روش ارائه شده در این مقاله و نتایج موجود در سایر مقالات وجود دارد. در ادامه نتایج بیشتری از تحلیل ارائه می شود.

جدول ۴- مقایسه فرکانسهای بیبعد ورق مربعی [0,90] و گرادیان دما $25 = \Delta T$

		. 0. 7			
ماره مود		١	٢	٣	۴
دل ارائه ىدە		٨/•۶46	۱۸/۳۷۸۰	۳۸/۷۷۸۴	44/118
	فر کانس	۸/•۶ λ	۱۸/۳۷۸	۳۸/۷۷۸	44/111
ویتنی و اشتون[۱]	درصد اختلاف	•/••۴٩	•	• / • • ١	•/••١٣
، ما	فركانس	λ/•λλ	19/198	377/47	40/421
رام و سينها[٧]	درصد اختلاف	•/٢۵٢٢	4/221	١/٣٨٧	1/478
. · ^.	فركانس	۷/۷۰۲	۱۷/۶۵۸	۳۸/۳۱۲	46/•22
سن و مکاران[۲۳]	درصد اختلاف	-۴/۷۴۶	-۴/•۷۷	-1/514	-1/881
ا ش	فر کانس	٨/٠٧٩	۱۹/۱۰۰	34/220	۴۵/۳۵۰
رات و ساهو[۲۴]	درصد اختلاف	•/1۴11	۳/۷۸۰	۱/۴۱۵	١/٢۵٩

۲-۴- فرکانسها و شکل مودهای ارتعاشی

در این قسمت فرکانس های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی ورق مرکب چند لایه تحت اثر کرنش های انبساطی ناشی از وجود رطوبت یا گرادیان دما ارائه می شود. در جدول ۵ و جدول ۶، مقادیر فرکانس های طبیعی ورق مرکب چهار لایه متقارن ₂[0,90] در هر شکل مود ارتعاشی ارائه شده است. در این جدول ها، رفتار ارتعاشی ورق برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. چنانچه مشاهده می شود، کمترین فرکانس ها در هر مود، مربوط به شرایط مرزی SSSS بوده، بیشترین مقادیر در شرایط مرزی کرک به دست می آیند که علت آن بالاتر بودن سفتی کل ورق در 188

قدیریان و همکاران

حالت CCCC است. در حالت کلی، شرط مرزی گیردار نسبت به تکیهگاه ساده و شرط مرزی ساده نسبت به تکیهگاه آزاد، مقیدتر هستند که افزایش قید، باعث افزایش سفتی سیستم میشود[۲۵]. در شکل ۲ شش شکل مود اول ورق مرکب میشود[۲۵]. در شکل ۲ شش شکل مود اول ورق مرکب مرطوب با چیدمان متقارن لایهها [0,90] تحت اثر محیط مرطوب با درصد رطوبت M = 0.1% و شرایط مرزی ساده SSSS نمایش داده شدهاند.

جدول ۵- ده فرکانس اول بی بعد ورق مرکب مربعی [0,90] تحت اثر گرادیان دما ۵2=Δ۲ با شرایط مرزی مختلف

SCSC	CCCC	SSSS	سمارة مود
17/1929	22/21/24	٨/•۶٧٧	١
22/2661	30/2020	18/341	٢
4.1.849	۵٩/۵٠٣٢	371/11/4	٣
۵۰/۳۱۳۵	87/27.4	4./4842	۴
۵۵/۵۱۵۱	89/V129	44/118	۵
VT/1807	٨٧/٣١٧٣	8.14118	۶
አ ٩/٣٣٩۶	٩۴/۶٨٩١	V7/771V	٧
97/•737	118/9988	XX/۳۹V۲	٨
٩۶/۶۳۳۳	171/8099	XX/8384	٩
1.0/8228	150/4005	۹۳/۴۸۲۳	۱۰

جدول ۶- ده فرکانس اول بی بعد ورق مرکب مربعی [0,90] تحت اثر رطوبت با ۵/۵/۵M با شرایط مرزی مختلف

			-
	شرايط مرزى		
SCSC	CCCC	SSSS	سماره مود
13/2229	24/19.9	٩/٤١١٢	١
T9/8N9T	36/2226	19/9118	٢
۴۰/۸۲۱۰	8.18.20	347014	٣
۵۱/۳۰۸۴	82/8212	41/26.1	۴
58/889r	۲۰/۴۹۳۵	401100	۵
V٣/٢٩۵.	11/2940	۶١/٩۵۶۰	۶
٩ • / • • ۵ ١	۹۵/۸۳۵۱	۲۳/۶۹۸۶	٧
٩٣/١٩٠ •	۱۱۸/۰۸۹۹	አ ٩/۲٩۶۳	٨
97/4020	122/1926	$A9/V1\Delta V$	٩
۱ • ۶/۸ • ۵ ۱	178/1221	94/2952	١.

۴-۳- اثر رطوبت و دما روی فرکانسهای طبیعی تغییرات فرکانسهای ارتعاشی یک ورق چند لایه متقارن

مرکب تحت اثر محیط مرطوب، نسبت به درصد رطوبت و

گرادیان دما در شکل ۳ ارائه شدهاند. در شکل ۳، تغییرات فرکانس مبنای ورق مرکب از جنس گرافیت/اپوکسی در مقابل درصد رطوبت/گرادیان دما و با در نظر گرفتن شرایط مرزی کاملاً ساده(SSSS)، کاملاً گیردار(CCCC) و ترکیبی از تکیهگاه ساده و گیردار(SCSC)، مورد بررسی قرار گرفتهاند.



شکل ۲- شکل مودهای ارتعاشی برای ورق مرکب [0,90] با شرایط مرزی SSSS تحت اثر رطوبت ΔM=0.1% 188

قدیریان و همکاران

از نتایج ارائه شده در شکل ۳ مشاهده می شود که با افزایش درصد رطوبت/گرادیان دما، فرکانس های کاهش مییابند که این امر، ناشی از کاهش سفتی ورق در اثر وجود کرنش های انبساطی است. روند نزولی فرکانس ها تا جایی ادامه دارد که نمودارها به محور افقی می رسند که در این نقطه، رفتار ارتعاشی ورق ناپایدار می شود. در این حالت فرکانس ها صفر می شوند و در اثر وجود کرنش های انبساطی، ورق شروع به کمانش می کند. در رابطه با پایداری سیستم در بخش های بعد بیشتر بحث خواهد شد.

در جدول ۷، دماهای بحرانی حاصل از تحلیل حاضر با نتایج مقاله شاطرزاده و همکاران [۲۶]، در چند حالت چیدمان مختلف لایهها با شرایط مرزی CCCC و نسبت طول به عرض ورق 1=a/b مقایسه شدهاند، همانطور که ملاحظه میشود، توافق خوبی بین نتایج وجود دارد. لازم به توضیح است که نتایج حاصل از [۲۶]، مبتنی بر تحلیل کمانشی ورقهای کامپوزیتی مستطیلی تحت اثر بار حرارتی با تغییرات یکنواخت دما با استفاده از روش اجزاء محدود است.

در منبع [۲۶]، برای تحلیل کمانشی ورق و محاسبه دماهای بحرانی، از ماده مرکب از جنس ایگلس *پ*وکسی استفاده شده که خواص مکانیکی و حرارتی ماکروسکوپی آن $v_{12} = 0.3$, $G_{12} = 3$ GPa, $E_2 = 6$ GPa, $E_1 = 15$ GPa $\omega_{12} = 0.3 \times 10^{-5} 1 / °C$ هستند.

جدول ۷- گرادیان دمای بحرانی ورق مرکب چند لایه با شرایط مرزی CCCC و چیدمان مختلف لایهها

-	0		
	چيدمان لايەھا		
[90,-90] _s	[45,-45] _s	[0,90] _s	
۲١/۵	24/1	۳/۲۲	Ref[26]
22/2125	26/492V	22/11/22	تحقيق حاضر
4/94	٩/•٢	۶/۰۱	درصد اختلاف

۴–۴– اثر پارامترهای هندسی ورق

در این قسمت، اثر پارامترهای هندسی ورق شامل نسبت جانبی یا نسبت طول به عرض ورق $\delta = a/b$ ، نسبت ضخامت $\delta = a/h$ و زاویه الیاف روی فرکانسهای طبیعی سیستم، مورد بررسی قرار می گیرند. در شکل ۴، تغییرات فرکانس طبیعی اول ورق برحسب نسبت جانبی r = a/b

نمایش داده شده است. از این شکل مشاهده می شود که فرکانس های طبیعی ورق در سه حالت تکیه گاهی SSSS، فرکانس های طبیعی ورق در سه حالت میابند. افزایش می یابند. در واقع هر قدر ورق از حالت مستطیلی به حالت مربعی نزدیک تر می شود، فرکانس های طبیعی افزایش می یابند. در شکل ۵، فرکانس طبیعی مبنای ورق مرکب مربعی [0,90]با درصد رطوبت $\Delta M = 0.1\%$ ، بر حسب نسبت ضخامت با درصد رطوبت $\Delta M = 0.1\%$ ، بر حسب نسبت ضخامت کاهش یدا می کنند که کاهش فرکانس ها، ناشی از کم شدن سفتی ورق است.



شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی مبنا ورق مرکب _[[0,90] با شرایط مرزی مختلف بر حسب (الف)گرادیان دما و (ب)درصد رطوبت

برای مطالعه اثر زاویه الیاف روی رفتار مودال ورق مرکب، یک ورق تک لایه مرکب با تکیهگاههای مختلف و تحت اثر محیط مرطوب با رطوبت $\Delta M = 0.1\%$ ، مورد بررسی قرار

گرفته است که نتایج آن در شکل ۶ ارائه شدهاند. همان طور که از شکل ۶ مشاهده میشود، تغییرات فرکانس برای شرایط مرزی SSSS و CCCC، حول زاویه ۴۵ درجه متقارن بوده، بر حسب شماره مود ارتعاشی، فرکانسها از زاویه صفر تا ۴۵ درجه افزایش یا کاهش پیدا میکنند؛ اما برای شرایط مرزی SSSC به دلیل متغیر بودن تکیهگاهها در حالت کلی، نمودار بدست آمده متقارن نیست. در مورد تغییرات فرکانس در مودهای دیگر یا در حالتی که کرنش انبساطی ناشی از وجود گرادیان دما باشد، هم میتوان نتایج مشابهی دریافت کرد که برای جلوگیری از تکرار، از آوردن این نتایج خودداری شده است.



۴–۵– پایداری ورق

در این بخش، پایداری ورق مرکب مستطیلی تحت اثر گرادیان دما و محیط مرطوب، مورد بررسی قرار می گیرد و نواحی ناپایدار ورق بدست میآیند. چنانچه در بخش قبل در شکل ۳ مشاهده شد، با افزایش گرادیان دما و درصد رطوبت فرکانسهای طبیعی کاهش مییابند تا در نقطه بحرانی فرکانس ها صفر می شوند. این نقاط بحرانی در واقع مرز پایداری سیستم هستند و در این نقاط، نیروهای صفحهای ناشی از کرنشهای انبساطی به قدری زیاد میشود که سیستم دیگر قادر به تحمل آنها نبوده، شروع به کمانش مى كند. از اين رو تحليل و محاسبه اين مقادير بحراني مهم است. برای بدست آوردن این مقادیر بحرانی از معادله (۳۳) با توجه به اینکه فرکانس طبیعی صفر می شود، می توان نتیجه گرفت که $0 = \frac{1}{K_{ijkl}^{p}}$ که اگر در این عبارت ماتریس سفتی بر حسب ماتریس سفتی ناشی از انرژی کرنشی خمشی ورق و کار نیروهای صفحهای نوشته شود، میتوان به یک مسئله مقدار ویژه رسید که مقادیر ویژه آن، همان مقادیر بحرانی دما و یا رطوبت هستند.



در جدول ۸، مقادیر بحرانی گرادیان دما که به ازای آنها ورق ناپایدار میشود به ازای شرایط مرزی مختلف، چیدمان متفاوت لایهها از نظر زاویه الیاف و تعداد لایهها ارائه شدهاند. چنانچه از این جدول مشاهده میشود، کمترین مقدار گرادیان دمای بحرانی، مربوط به ورق سه لایه [0,90,0] با

مقدار ۴۳/۶۴ و بیشترین مقدار، مربوط به ورق چهار لايه [0,90] با مقدار ١٥٢/۶٢ ميباشند. چيدمان لايهها نيز، روی محدوده پایداری اثر می گذارد که بیشتر این تغییرات، ناشی از تغییر زاویه الیاف است. برای مقادیر بحرانی رطوبت نیز، می توان جدول مشابهی ارائه کرد. در شکل ۷، مقادیر بحرانی دما و رطوبت که در آنها ورق ناپایدار میشود، برای یک ورق تک لایه به ازای شرایط مرزی مختلف بر حسب مقادیر زاویه الیاف ارائه شده است. همان طور که در شکل مشاهده میشود، برای شرایط مرزی کاملاً ساده و کاملاً گیردار، مقادیر بحرانی تا زاویه ۴۵ درجه افزایش پیدا می کنند و بعد از آن سیر نزولی دارند. در مورد تکیه گاه CSCS نیز می توان گفت، مقادیر بحرانی تقریباً در زاویه ۳۵ درجه به حداكثر مقدار خود مىرسند. چنانچه انتظار مىرود، بيشترين مقادیر بحرانی مربوط به ورق با تکیهگاه کاملاً گیردار به علت قیود بیشتر و کمترین مقادیر بحرانی نیز، مربوط به ورق با تكيه گاه كاملاً ساده است.

می توان برای اجتناب از ایجاد رطوبت و تغییرات ناخواسته دما و در نتیجه پیشگیری از پدیده ناپایداری در سازههای کامپوزیتی از عایقهای مناسب استفاده کرد. با این وجود، همواره می بایست در طراحیها این موضوع مدنظر قرار گیرد که افزایش دما و رطوبت از محدودهای خاص نباید متجاوز گردند.

جدول ۸- گرادیان دمای بحرانی ورق مرکب چند لایه با شرایط مرزی، جنس و چیدمان مختلف لایهها

چيدمان لايەھا					شرايط
[45,-45,45]	[0,90,0]	$[30, -30]_{s}$	[45,-45] _s	[0,90] _s	مرزى
۵۲/۱۵	47/84	54/12	۵۸/۹۱	40/28	SSS S
114/4	۱۰۴/۰۱	११४/४९	184/18	107/87	CCC C
۸۷/۲۶	۵۲/۶۸	88/88	٩۵/۵٩	۶۵/۴۸	SCS C

۵- نتیجهگیری

هدف از این مقاله، تحلیل رفتار ارتعاشی ورقهای مرکب تحت اثر کرنشهای انبساطی دمایی و رطوبتی بوده است. به همین منظور، رفتار ارتعاشی ورق توسط روش انرژی مدلسازی شده، با استفاده از روش ریتز مثلثاتی، مورد بررسی



Archive of SID



شکل ۷- مقادیر بحرانی (الف)گرادیان دما (ب)درصد رطوبت؛ برای ورق مرکب تک لایه بر حسب زاویه الیاف

قرار گرفت. در همین راستا، فرکانسهای طبیعی سیستم، _ شکل مودها و محدوده پایداری بر حسب پارامترهای مختلف سیستم از جمله، گرادیان دما و درصد رطوبت، ویژگیهای، ⁻ ابعاد هندسی ورق و چیدمان لایهها بدست آمدند. چنانچه - مشاهده شد، وجود رطوبت و دما باعث ایجاد نیروهای صفحهای فشاری در ورق مقید میشوند. در اثر وجود این عوامل، فرکانسهای طبیعی ورقهای چند لایه با افزایش _ درصد رطوبت و گرادیان دما کاهش پیدا میکنند که دلیل آن، کاهش سفتی ورق است. در مورد پایداری ورق مرکب اثها روی پایداری بررسی شدند و محدوده پایداری ورق تحت اثر کرنشهای انبساطی ارائه گردید. از تحلیل ارائه شده میتوان نتیجه گرفت که روش تحلیل ارائه شده تحت عنوان ریتز مثلثاتی، از همگرایی و پایداری عددی خوبی برخوردار

- [12] Chen B, Chou TW (1999) Free vibration analysis of orthogonal-woven fabric composites. Compos Part A-Appl S 30(3): 285-297.
- [13] Rao V, Sinha P (2004) Dynamic response of multidirectional composites in hygrothermal environments. Compos Struct 64(3): 329-338.
- [14] Kim YW (2005) Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. J Sound Vib 284(3): 531-549.
- [15] Matsunaga H (2007) Free vibration and stability of angle-ply laminated composite and sandwich plates under thermal loading. Compos Struct 77(2): 249-262.
- [16] Gupta AK, Panwar V, Vats R (2010) Vibrations of non-homogeneous rectangular plate of variable thickness in both directions with thermal gradient effect. Int J Appl Math Mech 6(16): 19-37.
- [17] Gupta AK, Sharma P (2012) Effect of linear thermal gradient on vibrations of trapezoidal plates whose thickness varies parabolically. J Vib Control 18(3): 395-403.
- [18] Kaviani F, Mirdamadi HR (2012) Free vibration analysis of laminated composite plate by a novel four variable refined theory. Modares Mech Eng 12(6) 147-158. (In Persion)
- [19] Halpin J, Pagano N (1967) Consequences of environmentally induced dilatation in solids. Technical rept 1969.
- [20] Reddy JN (2003) Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press,
- [21] Leissa A (1973) The free vibration of rectangular plates. J Sound Vib 31(3): 257-293.
- [22] Beslin O, Nicolas J (1997) A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. J Sound Vib 202(5): 633-655.
- [23] Shen HS, Zheng JJ, Huang XL (2004) The effects of hygrothermal conditions on the dynamic response of shear deformable laminated plates resting on elastic foundations. J Reinf Plast Comp 23(10): 1095-1113.
- [24] Rath M, Sahu S (2012) Vibration of woven fiber laminated composite plates in hygrothermal environment. J Vib Control 18(13): 1957-1970.
- [25] Meirovitch L (1967) Analytical methods in vibration. New York, NY.: The Mcmillan Company.
- [26] Shaterzadeh A, Abolghasemi S, Rezaei R (2014) Finite element analysis of thermal buckling of rectangular laminated composite plates with circular cut-out. J Therm Stresses 37(5): 604-623.

است و علی رغم اینکه روش های عددی برای تحلیل مودهای مرتبه بالا مناسب نیستند، توسط روش ارائه شده می توان با دقت و سرعت محاسباتی خوبی فرکانس ها و شکل مودهای مرتبه بالا را تخمین زد. به عنوان یک پیشنهاد می توان با استفاده از تئوری های برشی در تحلیل حرکت ورق برای اعمال اثر برش و اینرسی دورانی در معادلات، دقت تحلیل را بالا برد؛ در این حالت می توان، رفتار ارتعاشی ورق های ضخیم را نیز مورد بررسی قرار داد.

6- مراجع

- [1] Whitney J, Ashton J (1971) Effect of environment on the elastic response of layered composite plates. AIAA 9(9): 1708-1713.
- [2] Dhotarad M, Ganesan N (1979) Influence of thermal gradient on natural frequency of rectangular plate vibration. Nucl Eng Des 52(1): 71-81.
- [3] Gandhi MV, Usman M, Chao L (1988) Nonlinear vibration of laminated composite plates in hygrothermal environments. J Eng Mater-T ASME 110: 140.
- [4] Chen LW, Lee JH (1989) Vibration of thermal elastic orthotropic plates. Appl Acoust 27(4): 287-304.
- [5] Chen LW, Chen Y (1988) Vibrations of hygrothermal elastic composite plates. Eng Fract Mech 31(2): 209-220.
- [6] Lyrintzis CS, Bofilios DA (1990) Hygrothermal effects on structure-borne noise transmission of stiffened laminated composite plates. J Aircraft 27(8): 722-730.
- [7] Ram K, Sinha P (1992) Hygrothermal effects on the free vibration of laminated composite plates. J Sound Vib 158(1): 133-148.
- [8] Noor AK, Burton WS (1992) Three-dimensional solutions for the free vibrations and buckling of thermally stressed multilayered angle-ply composite plates. J Appl Mech-T ASME 59: 868-877.
- [9] Adams R, Singh M (1995) The effect of immersion in sea water on the dynamic properties of fibrereinforced flexibilised epoxy composites. Compos Struct 31(2): 119-127.
- [10] Liu CF, Huang CH (1996) Free vibration of composite laminated plates subjected to temperature changes. Comput Struct 60(1): 95-101.
- [11] Eslami H, Maerz S (1995) Thermally induced vibration of a symmetric cross-ply plate with hygrothermal effects. AIAA 33(10): 1986-1988.