



## تحلیل ارتعاشات و پایداری ورق‌های مرکب چند لایه تحت اثر رطوبت و دما

حسین قدیریان<sup>۱</sup>، محمد رضا قضاوی<sup>۲</sup> و کوروش خورشیدی<sup>۳\*</sup>

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

<sup>۳</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۵/۱۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۱۱/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۲/۱۶

### چکیده

ورق‌های مرکب در بسیاری از کاربردها مانند، صنایع دریایی و صنایع هسته‌ای، تحت شرایطی قرار می‌گیرند که دما و رطوبت محیط، باعث ایجاد کرنش در ورق می‌شود؛ به طوری که این کرنش‌ها روی رفتار ارتعاشی ورق تأثیر گذار هستند. به همین دلیل در این مقاله، رفتار ارتعاشی ورق‌های مرکب چند لایه متقارن تحت اثر کرنش‌های رطوبتی و دمایی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای تحلیل، ابتدا معادلات حرکت ورق مرکب با استفاده از تئوری کلاسیک ورق و با روش نیوتن استخراج شده‌اند و در ادامه با استفاده از روش انرژی، مسئله مقدار ویژه به دست می‌آید. مسئله مقدار ویژه با استفاده از روش ریتز مثلثاتی مورد ارزیابی قرار گرفته، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق محاسبه می‌شوند. برای اعتبارسنجی روش حل، نتایج به دست آمده در این مقاله در چند حالت مختلف با نتایج سایر مقالات مقایسه می‌شوند. در نهایت اثر پارامترهای مختلف شامل، شرایط مرزی، مقادیر گرا دیان دما و درصد رطوبت، ابعاد هندسی ورق و زاویه الیاف روی ویژگی‌های مودال ورق بررسی شده، نتایج در قالب چند نمودار ارائه می‌شوند.

**کلمات کلیدی:** ارتعاش آزاد؛ ریتز مثلثاتی؛ ورق مرکب لایه‌ای؛ کرنش رطوبتی و حرارتی.

## Vibration and Stability Analysis of Laminated Composite Plates with Hygrothermal Effects

H. Ghadirian<sup>1</sup>, M. R. Ghazavi<sup>2</sup>, K. Khorshidi<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup> MSc., Mech. Eng., Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Assis. Prof., Mech. Eng., Arak university., Arak, Iran.

### Abstract

In many applications such as marine and nuclear industries, laminated composite plates are subjected to the hygrothermal environment which developed expansion strain in the plate; in such that the expansion strain influence on vibrational behavior of the plate. So in this paper vibration of symmetric laminated composite plates under strain due to moisture and temperature are studied. For analysis, first using the classical theory of plate and Newton's method, equations of motion of plate are extracted and then using the energy method, eigenvalue problem is achieved. Then the eigenvalue problem is solved using trigonometric Ritz method and frequencies and mode shapes of plate are calculated. For validation of solving method, the results are compared with results that are presented in some papers by others. Finally the effect of different parameters such as boundary conditions, thermal gradient and percent of moisture, geometrical dimensions of plate and fiber orientation on modal behavior of plate are investigated and the results are presented in some tables and graphs.

**Keywords:** Free Vibration; Trigonometric Ritz Method; Laminated Composite Plate; Hygrothermal Strains.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۰۹۸۸۶۳۲۶۲۵۷۲۰؛ فکس: ۰۰۹۸۸۶۳۴۱۷۳۴۵۰

آدرس پست الکترونیک: [k-khorshidi@araku.ac.ir](mailto:k-khorshidi@araku.ac.ir)

## ۱- مقدمه

امروزه مواد مرکب، به دلیل نسبت مقاومت به وزن و سفتی به وزن بالا، مقامت به خوردگی و طول عمر خستگی زیاد و سایر ویژگی‌ها، به طور گسترده‌ای در صنایع هوا و فضا، دریایی و سازه‌های مهندسی با کارایی بالا استفاده می‌شوند. در کاربردهای مختلف، اغلب سازه‌های مرکب در معرض تغییرات دما و رطوبت قرار دارند. با افزایش شدت دما و غلظت رطوبت، سفتی و مقاومت چند لایه‌های مرکب به علت ایجاد تنش‌های اولیه داخلی (تنش‌های پسماند) کاهش پیدا می‌کنند که در نهایت این امر، روی مشخصات دینامیکی، خمشی و بارهای کمانشی سازه‌ها اثر می‌گذارد؛ بنابراین برای استفاده از پتانسیل کامپوزیت‌های پیشرفته، لازم است که اثرات رطوبت و دما در سازه‌های مرکب، مورد تجزیه و تحلیل قرار بگیرند.

از آنجایی که آنالیز رطوبتی همانند آنالیز حرارتی است، در تحقیقاتی که پژوهشگران انجام داده‌اند، هر دو اثر تغییر درجه حرارت و تغییر درصد رطوبت را به طور همزمان مورد بررسی قرار داده‌اند. اکثر مطالعات موجود روی ارتعاش ورق‌های مرکب چند لایه، در شرایط دما و رطوبت محیط انجام شده، در مقالات کمتر به بحث اثر تغییرات دما و رطوبت روی ارتعاش ورق‌های چند لایه پرداخته شده است. ویتنی و اشتون [۱]، اثر کرنش‌های انبساطی را روی پاسخ الاستیک ورق‌های چند لایه مرکب با استفاده از شکل تعمیم یافته دوهمال-نیومن قانون هوک مطالعه کردند. دوتارد و گانسان [۲]، اثر گرادیان دما را روی فرکانس طبیعی ورق مستطیلی، با استفاده از روش اختلاف محدود و المان محدود، تحلیل کردند. گاندهی و همکاران [۳]، ارتعاش غیرخطی ورق‌های مرکب چند لایه نسبتاً ضخیم را تحت تغییرات دما و رطوبت بررسی کردند. در این کار، تئوری ورق با تغییر شکل برشی را به طوری اصلاح کردند که کشش صفحه میانی ورق ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ و تغییر ابعاد در محیط حرارتی-رطوبتی لحاظ شود. چن و لی [۴]، ارتعاش ناشی از تغییر دما که به یک ورق مستطیلی ارتوتروپیک وارد شده است را تحلیل کردند. چن و چن [۵]، ارتعاش آزاد یک ورق مرکب چند لایه مستطیلی را مطالعه کرده‌اند که در معرض محیط حرارتی-رطوبتی پایا قرار دارد. کانستنتینوس و دیمیتیری [۶]، اثر افزایش دما، رطوبت جذب شده و تحریک

خارجی اتفاقی روی پاسخ دینامیکی ورق‌های مسطح تقویت شده از جنس کامپوزیت چند لایه را با استفاده از روش تحلیلی، مورد ارزیابی قرار دادند. سای‌رم و سینها [۷]، اثرات رطوبت و دما را روی ارتعاش آزاد ورق‌های مرکب چند لایه با استفاده از FEM بررسی کردند. نور و برتون [۸]، پاسخ تحلیلی برای ارتعاش آزاد و کمانش ورق‌های مرکب چند لایه تحت اثر تنش حرارتی ارائه کردند. ادامز و سینگ [۹]، مشخصات دینامیکی کامپوزیت‌های اپوکسی تقویت شده با فیبر که در آب دریا غوطه‌ور شده‌اند را از طریق آزمایشات تجربی بررسی کرده‌اند. لیو و هانگ [۱۰]، ارتعاش آزاد ورق‌های مرکب چند لایه تحت اثر تغییرات دمایی را با استفاده از FEM، تحلیل و فرکانس‌های طبیعی ورق متقارن متعامد را محاسبه کردند. اسلامی و مارز [۱۱]، ارتعاش یک ورق چند لایه متعامد متقارن تحت اثر دمای ناپایدار و محیط مرطوب ناپایدار برای حالت تکیه‌گاه ساده را مورد مطالعه قرار دادند. چن و چو [۱۲]، تحلیل ارتعاش آزاد کامپوزیت‌های دارای فیبر متعامد را با استفاده از روش تحلیلی الاستو-دینامیک یک بعدی ارائه دادند. راثو و سینها [۱۳]، اثرات دما و رطوبت را روی پاسخ ارتعاش آزاد و گذرای کامپوزیت‌های چند جهته، با استفاده از تحلیل اجزای محدود سه بعدی، مورد بررسی قرار دادند. یانگ وان [۱۴]، مشخصات ارتعاشی ورق‌های سرامیکی و مستطیلی FG در محیط حرارتی را با استفاده از روش ریلی ریتز تحلیل کرده، معادله فرکانسی سیستم را به دست آورد. ماتسونگا [۱۵]، ارتعاش آزاد و مسئله پایداری ورق‌های ساندویچی و مرکب چند لایه ضربدری که تحت بارگذاری دمایی قرار دارد را با استفاده از روش بسط سری توانی، مورد ارزیابی قرار داد. گوپتا و همکاران [۱۶]، اثر گرادیان دما روی ارتعاش یک ورق مستطیلی غیر همگن با ضخامت متغیر را با روش ریلی ریتز مطالعه کرده، اولین فرکانس طبیعی سیستم را به دست آوردند. گوپتا و شارما [۱۷]، به تحلیل اثر گرادیان خطی دما روی ارتعاش ورق‌های دوزنقه‌ای با ضخامت متغیر پرداختند که در این مقاله نیز، از روش ریلی ریتز در حل مسئله استفاده کردند.

چنانچه از بررسی سایر پژوهش‌ها مشاهده می‌شود، محققان جز در موارد معدودی [۱، ۱۶، ۱۷]، در تحلیل رفتار ارتعاشی ورق‌های مرکب از روش ریتز استفاده نکرده‌اند. این

که  $M_i$  و  $N_i$  به ترتیب، نیرو و گشتاور برآیند کل می‌باشند. با جایگذاری مقادیر تنش‌ها برحسب کرنش در معادله (۱)، معادلات ساختاری ورق به شکل روابط (۲-۳) به دست می‌آیند:

$$N_i = A_{ij}\epsilon_j^0 + B_{ij}\kappa_j - \bar{N}_i \quad (i=1,2,6) \quad (2)$$

$$M_i = B_{ij}\epsilon_j^0 + D_{ij}\kappa_j - \bar{M}_i \quad (3)$$

که  $A_{ij}$ ،  $B_{ij}$  و  $D_{ij}$  به ترتیب، مؤلفه‌های ماتریس‌های سفتی کششی، کوپلینگ کشش-خمش و سفتی خمشی ورق مرکب هستند [۱۸] و  $\bar{N}_i$  و  $\bar{M}_i$  نیز به ترتیب، برآیند نیرو و گشتاور ناشی از کرنش‌های حرارتی و رطوبتی می‌باشند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (4)$$

$$(\bar{N}_i, \bar{M}_i) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}\bar{\epsilon}_j(1, z) dz \quad (5)$$

طبق تئوری کلاسیک ورق‌های چند لایه:

$$[\epsilon^0] = \begin{bmatrix} u_{,x}^0 + 1/2(w_{,x})^2 \\ v_{,y}^0 + 1/2(w_{,y})^2 \\ u_{,y}^0 + v_{,x}^0 + w_{,x}w_{,y} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[\kappa] = \begin{bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -w_{,xy} \end{bmatrix} \quad (7)$$

که  $u^0$  و  $v^0$  به ترتیب، جابجایی‌های صفحه میانی در امتداد  $x$  و  $y$ ، تغییر شکل عرضی و کاما، نشانه مشتق جزئی است. با اعمال روش نیوتن و استفاده از معادلات (۲)-(۶) معادلات حرکت در تئوری ورق چند لایه (با صرفنظر از اینرسی دورانی و اعمال اثر نیروی صفحه‌ای اولیه)، به صورت روابط (۸-۱۰) به دست می‌آیند:

$$L_1 u^0 + 2A_{16} u_{,xy}^0 + L_2 v^0 - L_4 w_{,x} - L_5 w_{,y} - \bar{N}_{x,x} - \bar{N}_{xy,y} = P u_{,tt}^0 \quad (8)$$

$$L_2 u^0 + 2A_{26} v_{,xy}^0 + L_3 v^0 - L_6 w_{,x} - L_7 w_{,y} - \bar{N}_{y,y} - \bar{N}_{xy,x} = P v_{,tt}^0 \quad (9)$$

$$-L_4 u_{,x}^0 - L_5 u_{,y}^0 - L_6 v_{,x}^0 - L_7 v_{,y}^0 + L_8 w_{,xx} + 4D_{16} w_{,xxx} + 4D_{26} w_{,xyy} + D_{22} w_{,yyy} + \bar{M}_{x,xx} + 2\bar{M}_{xy,xy} + \bar{M}_{y,yy} + P w_{,tt} = q + N_x^i w_{,xx} + 2N_{xy}^i w_{,xy} + N_y^i w_{,yy} \quad (10)$$

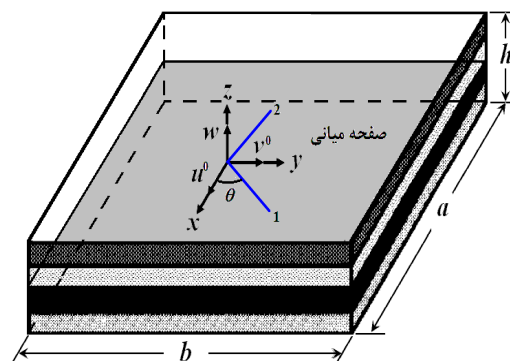
که  $P$  انتگرال چگالی جرمی در امتداد ضخامت ورق،  $q$  توزیع فشار روی سطح ورق،  $N_x^i$ ،  $N_y^i$  و  $N_{xy}^i$  برآیند تنش‌های

روش به دلیل سادگی و کارایی خوبی که در حل سایر مسائل دارد، می‌تواند به عنوان یک روش حل مؤثر در تحلیل ارتعاش ورق مرکب نیز، مورد استفاده قرار گیرد. نکته مهمی که در استفاده از روش ریتز باید مد نظر قرار داد، انتخاب توابع قابل قبول متناسب با شرایط مرزی مسئله است که در این صورت می‌توان به پاسخ مناسبی دست یافت. به عنوان یک گزینه برای توابع قابل قبول، می‌توان توابع ریتز مثلثاتی را پیشنهاد کرد و کارایی این توابع را در تحلیل ارتعاش ورق مرکب تحت شرایط متغیر محیطی، مورد بررسی قرار داد. به همین منظور در این مقاله برای اولین بار مسئله ارتعاش ورق مرکب تحت اثر گرادیان دما و محیط مرطوب، با استفاده از روش ریتز مثلثاتی، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. در همین راستا، اثر پارامترهای مختلف شامل، شرایط مرزی، ابعاد هندسی ورق، جنس ورق و چیدمان لایه‌ها روی رفتار ارتعاشی ورق مرکب چند لایه متقارن ارزیابی می‌شوند.

## ۲- معادلات حاکم بر سیستم

به منظور استخراج معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد یک ورق مرکب چند لایه تحت اثر کرنش‌های رطوبتی و گرمایی، یک ورق چند لایه مرکب با ضخامت یکنواخت  $h$  در نظر گرفته شده که هر لایه آن در جهت دلخواه  $\theta$  نسبت به جهت مثبت محور  $x$  در دستگاه مختصات کارتزین قرار دارد (شکل ۱). برآیند نیرو و گشتاور کل روی ورق با رابطه (۱) تعریف می‌شوند:

$$(N_i, M_i) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z) dz \quad (1)$$



شکل ۱- هندسه یک ورق چند لایه مرکب، ابعاد و دستگاه مختصات

تابعی انرژی کل سیستم برابر است با تفاضل بین حداکثر انرژی‌های پتانسیل و جنبشی ورق که به شکل رابطه (۱۹)

بیان می‌شود:

$$\Pi = V_{\max} + U_{\max} - T_{\max} \quad (19)$$

که در رابطه (۱۹)،  $V$  انرژی پتانسیل یا انرژی کرنشی ناشی از خمش ورق،  $U$  انرژی پتانسیل بارهای درون صفحه‌ای ناشی از کرنش‌های حرارتی و رطوبتی و  $T$  انرژی جنبشی سیستم هستند. انرژی جنبشی  $T$  طبق رابطه (۲۰) به دست می‌آید که  $\rho$  چگالی ورق و  $A$  سطح ورق در صفحه  $x-y$  می‌باشند:

$$T = \frac{1}{2} \iint_A \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA \quad (20)$$

عبارات  $U$  و  $V$  طبق رابطه  $P_E = \frac{1}{2} \int_V \sigma^k \epsilon dv$  و با استفاده از روابط تنش-کرنش و معادلات ساختاری کرنش محاسبه می‌شوند [۲۰]؛ به طوری که توابع انرژی پتانسیل ورق چند لایه متقارن به شکل روابط (۲۱-۲۲) به دست می‌آیند:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{16} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{26} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dy dx \quad (21)$$

$$U^h = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ (-\Delta M) \left[ A_{11}^h \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + A_{12}^h \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2A_{16}^h \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + A_{21}^h \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + A_{22}^h \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2A_{26}^h \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 2A_{61}^h \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{62}^h \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 4A_{66}^h \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \right\} dy dx \quad (22)$$

در معادله (۲۲)، ضرایب  $A_{ij}^h$  به شرح رابطه (۲۳) هستند:

$$A_{11}^h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{11} \beta_{xx}) dz \quad A_{12}^h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{12} \beta_{xx}) dz$$

$$A_{21}^h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{12} \beta_{yy}) dz \quad A_{22}^h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{22} \beta_{yy}) dz$$

اولیه در صفحه میانی هستند و عملگرهای  $L_i$  به شکل روابط (۱۱-۱۸) تعریف می‌شوند:

$$L_1 = A_{11} ( )_{,xx} + A_{66} ( )_{,yy} \quad (11)$$

$$L_2 = A_{16} ( )_{,xx} + A_{26} ( )_{,yy} + (A_{12} + A_{66}) ( )_{,xy} \quad (12)$$

$$L_3 = A_{66} ( )_{,xx} + A_{22} ( )_{,yy} \quad (13)$$

$$L_4 = B_{11} ( )_{,xx} + (B_{12} + 2B_{66}) ( )_{,yy} \quad (14)$$

$$L_5 = 3B_{16} ( )_{,xx} + B_{26} ( )_{,yy} \quad (15)$$

$$L_6 = B_{16} ( )_{,xx} + 3B_{26} ( )_{,yy} \quad (16)$$

$$L_7 = (B_{12} + B_{66}) ( )_{,xx} + B_{22} ( )_{,yy} \quad (17)$$

$$L_8 = D_{11} ( )_{,xx} + 2(D_{12} + 2D_{66}) ( )_{,yy} \quad (18)$$

لازم به توضیح است که معادلات (۸)، اساساً معادلات خطی شده منبع [۱۹] هستند؛ با این تفاوت که برآیند نیروهای ناشی از انبساط حرارتی و رطوبتی  $\bar{M}_i$  و  $\bar{N}_i$  جایگزین برآیند نیروهای ناشی از کرنش حرارتی  $M_i^T$  و  $N_i^T$  شده‌اند؛ بنابراین با تعمیم مفهوم برآیند نیرو و ممان حرارتی، می‌توان مفهوم کرنش‌های انبساطی را در قالب تئوری ورق چند لایه وارد کرد.

### ۳- حل معادلات حاکم با بکارگیری روش انرژی ریتز

برای ورق‌های چند لایه با خواص الاستیک که هم از نظر هندسی و هم از نظر خواص مادی نسبت به سطح میانی متقارن هستند، تمام مؤلفه‌های ماتریس سختی کوپلینگ کشش-خمش  $B_{ij}$  صفر خواهند شد، به همین دلیل، مسئله تغییر شکل صفحه‌ای از تغییر شکل عرضی مجزا می‌شود. در حالتی که کرنش‌های انبساطی در هر لایه یکنواخت باشند، مقادیر ثابت  $\bar{N}_i$  از حل مسئله تغییر شکل صفحه‌ای به دست می‌آیند؛ بنابراین برای تبیین اثرات کرنش‌های انبساطی روی رفتار ورق‌های مرکب چند لایه، تنها افزایش دمای یکنواخت در کرنش حرارتی و محیط مرطوب یکنواخت در شرایط کرنش رطوبتی مدنظر قرار گرفته‌اند. با صفر شدن مؤلفه‌های  $B_{ij}$ ، تحلیل ورق چند لایه متقارن به تحلیل یک ورق ناهمسانگرد با بار صفحه‌ای یکنواخت،  $\bar{N}_x$ ،  $\bar{N}_y$  و  $\bar{N}_{xy}$  تبدیل می‌شود. رفتار ارتعاشی، خمشی و پایداری چنین ورقی را می‌توان از معادله انرژی با استفاده از روش ریتز، مورد بررسی قرار داد.

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int_0^b \int_0^a W^2(x, y) dx dy \quad (28)$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{16} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{26} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dy dx \quad (29)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ (-\Delta M) \left[ A_{11}^h \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + A_{12}^h \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + 2A_{16}^h \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + A_{21}^h \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + A_{22}^h \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + 2A_{26}^h \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + 2A_{61}^h \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + 2A_{62}^h \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + 4A_{66}^h \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \right\} dy dx \quad (30)$$

با جایگذاری  $\xi = \frac{x}{a}$  و  $\eta = \frac{y}{b}$  در معادلات (۲۸)-(۳۰) می‌توان این معادلات را بی‌بعد کرد. برای اعمال روش ریتز از پاسخ تقریبی رابطه (۳۱) استفاده می‌شود:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} p_i(\xi) q_j(\eta) \quad (31)$$

که ضرایب ثابت مجهول هستند و  $p_i(\xi)$  و  $q_j(\eta)$  توابع قابل قبول مناسبی هستند که حداقل شرایط مرزی هندسی مسئله را ارضا می‌کنند. پس از جایگذاری رابطه (۳۱) در روابط (۲۸)-(۳۰) و قرار دادن روابط انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در تابعی انرژی، می‌توان ضرایب مجهول  $a_{ij}$  را با مینیمم کردن تابعی انرژی  $\Pi$ ، نسبت به  $a_{ij}$  به دست آورد:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_{ij}} = 0 \quad (32)$$

در نهایت معادله (۳۲) به مسئله مقدار ویژه (۳۳) منتهی می‌شود:

$$\sum_i^M \sum_j^N [K_{ijkl} - \Omega^2 M_{ijkl}] a_{ij} = 0 \quad (33)$$

$$A_{61}^h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{16} \beta_{xy}) dz \quad A_{62}^h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{26} \beta_{xy}) dz$$

$$A_{16}^h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{16} \beta_{xx}) dz \quad A_{26}^h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{26} \beta_{yy}) dz$$

$$A_{66}^h = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{66} \beta_{xy}) dz \quad (23)$$

ضرایب  $\beta$  در معادلات فوق به صورت روابط (۲۴-۲۶) هستند:

$$\beta_{xx} = \beta_1 \cos^2 \theta + \beta_2 \sin^2 \theta \quad (24)$$

$$\beta_{yy} = \beta_1 \sin^2 \theta + \beta_2 \cos^2 \theta \quad (25)$$

$$\beta_{xy} = (\beta_1 - \beta_2) \cos \theta \sin \theta \quad (26)$$

که  $\beta_1$  و  $\beta_2$ ، ضرایب انبساط رطوبتی و  $\Delta M$  درصد رطوبت هستند. با جایگذاری ضریب انبساط حرارتی  $\alpha$  به جای  $\beta$  و گرادیان دما  $\Delta T$  به جای  $\Delta M$  در معادله (۲۲)، می‌توان انرژی پتانسیل ورق تحت اثر گرادیان دما را نیز محاسبه کرد. لازم به توضیح است که در حالتی که خواص جنس لایه به رطوبت یا دما وابسته باشد و یک گرادیان رطوبت یا گرادیان دما در لایه وجود داشته باشد، ماتریس سفتی دیگر ثابت نخواهد بود. اگر دما یا رطوبت افزوده شده در امتداد ضخامت لایه ثابت باشد (حالت اشباع شده)، مقادیر  $[\bar{Q}_{ij}]_k$  در لایه ثابت خواهند بود، ولی احتمالاً این مقادیر به دلیل وجود دما یا رطوبت، کاهش خواهند یافت؛ لذا می‌توان ماتریس سفتی را از انتگرال خارج کرد، ولی باید برای محاسبه برآیند نیرو و گشتاور آن را تحت علامت جمع قرار داد.

از معادلات به دست آمده در قسمت قبل می‌توان دریافت که ارائه یک حل دقیق برای این مسئله ممکن نیست. حتی برای ارتعاش یک ورق مستطیلی در خلأ نیز، نمی‌توان حل دقیقی به دست آورد، به جز در حالات خاصی که دو لبه مقابل ورق دارای تکیه‌گاه ساده باشند؛ بنابراین برای تحلیل می‌بایست از روش‌های حل عددی استفاده کرد [۲۱].

طبق روش جداسازی متغیرها و با فرض تابع تغییر شکل عرضی  $w_0(x, y, t)$  به شکل هارمونیک می‌توان نوشت:

$$w_0(x, y, t) = W(x, y) \exp(i\omega t) \quad (27)$$

با استفاده از  $w_0(x, y, t)$  از معادله (۲۷)، حداکثر انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ورق به صورت روابط (۲۸-۳۰) به دست می‌آیند:

شرایط مرزی کلاسیک آزاد، ساده و گیردار، می‌بایست از بین چهار تابع اول  $(\xi)$ ،  $\psi_1(\xi)$ ،  $\psi_2(\xi)$ ،  $\psi_3(\xi)$  و  $\psi_4(\xi)$ ، یک ترکیب مناسب را انتخاب کرد. به عنوان مثال، در تحلیل یک ورق با تکیه‌گاه آزاد (FFFF)، هر چهار تابع در مجموعه نهایی استفاده می‌شوند، در حالی که اگر یکی از لبه‌ها دارای تکیه‌گاه ساده باشد (FFFS)، تابع  $\psi_3(\eta)$  از مجموعه حذف خواهد شد و یا در مورد یک ورق با تکیه‌گاه گیردار (CCCC)، هر چهار تابع اول در هر دو جهت  $\xi$  و  $\eta$  می‌بایست حذف شوند. ۹ حالت متفاوت از ترکیبات مختلف شرایط مرزی کلاسیک در

جدول ۲ آورده شده‌اند که علامت دایره توپر، نشان می‌دهد که آن تابع باید در مجموعه نهایی نگه داشته شود. حرف اول در جدول، نوع تکیه‌گاه را در لبه  $\xi=0$  یا  $\eta=0$  مشخص می‌کند و حرف دوم، نوع تکیه‌گاه در لبه مقابل آن را نشان می‌دهد. لازم به تذکر است که حرف F، نماد تکیه‌گاه آزاد، حرف S، تکیه‌گاه ساده و حرف C، تکیه‌گاه گیردار می‌باشند. نمادی که در اینجا برای نمایش تکیه‌گاه‌ها استفاده شده، به این صورت است که حرف اول نماد تکیه‌گاه در لبه  $x=0$  بوده، بقیه حروف در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت به ترتیب، نوع تکیه‌گاه در سایر لبه‌ها را مشخص می‌کنند.

#### ۴- اعتبارسنجی و بحث و بررسی نتایج عددی

##### ۴-۱- اعتبارسنجی نتایج عددی

در این قسمت، به منظور اعتبارسنجی و تایید مدل ارائه شده در این مقاله و نشان دادن کارایی و دقت روش توسعه داده شده در حل، معادله (۳۳) در چند حالت ساده مورد بررسی قرار گرفته، نتایج تحلیل با نتایج قابل استناد ارائه شده در سایر مقالات منتشر شده در مجلات معتبر مقایسه شده‌اند. در همین راستا در جدول ۳ و جدول ۴، پارامترهای فرکانسی بی‌بعد  $\Omega$  برای ورق مرکب مستطیلی چهار لایه متقارن متعامد  $[0,90]_s$  تحت اثر کرنش‌های رطوبتی و دمایی با تکیه‌گاه‌های دارای شرایط مرزی ساده محاسبه شده‌اند، نتایج به دست آمده با پاسخ مقالات ویتنی و اشتون [۱]، رام و سینها [۷]، شن و همکاران [۲۳] و راث و ساهو [۲۴]، مقایسه شده است.

که در معادله ۳۳،  $\Omega^2 = \rho\omega^2 \frac{a^4}{h^2 E_2}$  و مؤلفه‌های ماتریس‌های

سفتی ورق  $\mathbf{K}^p$  و جرم ورق  $\mathbf{M}^p$  به ترتیب عبارتند از:

$$K_{ijkl} = \bar{D}_{11} P_{ik}^{(2,2)} Q_{jl}^{(0,0)} + r^2 \bar{D}_{12} (P_{ik}^{(2,0)} Q_{jl}^{(0,2)} + P_{ik}^{(0,2)} Q_{jl}^{(2,0)}) + r^4 \bar{D}_{22} P_{ik}^{(0,0)} Q_{jl}^{(2,2)} + 2r \bar{D}_{16} (P_{ik}^{(2,1)} Q_{jl}^{(0,1)} + P_{ik}^{(1,2)} Q_{jl}^{(1,0)}) + 2r^3 \bar{D}_{26} (P_{ik}^{(0,1)} Q_{jl}^{(2,1)} + P_{ik}^{(1,0)} Q_{jl}^{(1,2)}) + 4r^2 \bar{D}_{66} P_{ik}^{(1,1)} Q_{jl}^{(1,1)} + (-\Delta M) [\delta^2 (\bar{A}_{11}^h + \bar{A}_{21}^h + 2\bar{A}_{61}^h) P_{ik}^{(1,1)} Q_{jl}^{(0,0)} + r^2 \delta^2 (A_{12}^h + A_{22}^h + 2A_{62}^h) P_{ik}^{(0,0)} Q_{jl}^{(1,1)} + r \delta^2 (A_{16}^h + A_{26}^h + 2A_{66}^h) (P_{ik}^{(0,1)} Q_{jl}^{(1,0)} + P_{ik}^{(1,0)} Q_{jl}^{(0,1)})]$$
 (۳۴)

$$M_{ijkl} = P_{ik}^{(0,0)} Q_{jl}^{(0,0)} \quad (۳۵)$$

که  $r = \frac{a}{b}$ ،  $\bar{A}_{ij} = \frac{1}{h E_2} A_{ij}$ ،  $\bar{D}_{ij} = \frac{1}{h^3 E_2} D_{ij}$  نسبت طول

به عرض ورق و  $\delta = \frac{a}{h}$  نسبت ضخامت ورق هستند.

هریک از عبارات انتگرالی در روابط (۳۴-۳۵) به شکل روابط (۳۶-۳۷) تعریف می‌شوند:

$$P_{ik}^{(r,s)} = \int_0^1 \frac{d^r p_i(\xi)}{d\xi^r} \frac{d^s p_k(\xi)}{d\xi^s} d\xi \quad (۳۶)$$

$$Q_{jl}^{(r,s)} = \int_0^1 \frac{d^r q_j(\eta)}{d\eta^r} \frac{d^s q_l(\eta)}{d\eta^s} d\eta \quad (۳۷)$$

روش ریتز مثلثاتی، مبتنی بر توابع قابل قبول رابطه (۳۸) است [۲۲]:

$$\psi_i(\xi) = \sin(a_i(2\xi-1) + b_i) \sin(c_i(2\xi-1) + d_i) \quad (۳۸)$$

که ضرایب  $a_i$ ،  $b_i$ ،  $c_i$  و  $d_i$  در جدول ۱ ارائه شده‌اند. برای استفاده از تابع ریتز مثلثاتی در حل مسئله ارتعاش ورق مستطیلی لازم است که توابع قابل قبول در دو جهت  $x$  و  $y$  تعریف شوند. به همین منظور، می‌توان برای یک جهت از تابع (۳۸) استفاده کرد و در جهت دیگر کافی است، به جای  $\xi$  و  $i$  به ترتیب  $\eta$  و  $j$  جایگذاری شوند. در رابطه (۳۸) توابع اول و سوم  $\psi_1(\xi)$  و  $\psi_3(\xi)$  به ترتیب، در  $\xi=0$  و  $\xi=1$  به ورق امکان جابجایی آزاد می‌دهند. از طرفی توابع دوم و چهارم  $\psi_2(\xi)$  و  $\psi_4(\xi)$  نیز، امکان شیب آزاد به لبه‌های  $\xi=0$  و  $\xi=1$  می‌دهند؛ بنابراین برای ارضای

روش اجزای محدود در تحلیل این مسئله استفاده کرده‌اند. در تحلیل از ماده مرکب گرافیت/اپوکسی استفاده شده که خواص مکانیکی آن  $E_1 = 130\text{GPa}$ ،  $E_2 = 9.5\text{GPa}$ ،  $G_{12} = 6\text{GPa}$ ،  $\nu_{12} = 0.3$ ،  $\beta_1 = 0$ ،  $\beta_2 = 0.44$ ،  $\alpha_1 = -0.3 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$  و  $\alpha_2 = 28.1 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$  هستند. همان‌طور که از جدول ۳ و جدول ۴ مشاهده می‌شود، توافق خوبی بین نتایج به دست آمده با روش ارائه شده در این مقاله و نتایج موجود در سایر مقالات وجود دارد. در ادامه نتایج بیشتری از تحلیل ارائه می‌شود.

جدول ۴- مقایسه فرکانس‌های بی‌بعد ورق مربعی  $[0,90]_s$  و

گرادیان دما $\Delta T = 25$				
شماره مود	۱	۲	۳	۴
مدل ارائه شده	۸/۰۶۷۶	۱۸/۳۷۸۰	۳۸/۷۷۸۴	۴۴/۷۷۸۶
فرکانس	۸/۰۶۸	۱۸/۳۷۸	۳۸/۷۷۸	۴۴/۷۷۸
درصد اشتون [۱]	۰/۰۰۴۹	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱۳
فرکانس	۸/۰۸۸	۱۹/۱۹۶	۳۹/۳۲۴	۴۵/۴۳۱
درصد اشتون [۷]	۰/۲۵۲۲	۴/۲۶۱	۱/۳۸۷	۱/۴۳۶
فرکانس	۷/۷۰۲	۱۷/۶۵۸	۳۸/۳۱۲	۴۵/۰۳۸
درصد اشتون [۲۳]	-۴/۷۴۶	-۴/۰۷۷	-۱/۲۱۷	-۱/۶۸۱
فرکانس	۸/۰۷۹	۱۹/۱۰۰	۳۹/۳۳۵	۴۵/۳۵۰
درصد اشتون [۲۴]	۰/۱۴۱۱	۳/۷۸۰	۱/۴۱۵	۱/۲۵۹

#### ۴-۲- فرکانس‌ها و شکل مودهای ارتعاشی

در این قسمت فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی ورق مرکب چند لایه تحت اثر کرنش‌های انبساطی ناشی از وجود رطوبت یا گرادیان دما ارائه می‌شود. در جدول ۵ و جدول ۶، مقادیر فرکانس‌های طبیعی ورق مرکب چهار لایه متقارن  $[0,90]_s$  در هر شکل مود ارتعاشی ارائه شده است. در این جدول‌ها، رفتار ارتعاشی ورق برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. چنانچه مشاهده می‌شود، کمترین فرکانس‌ها در هر مود، مربوط به شرایط مرزی SSSS بوده، بیشترین مقادیر در شرایط مرزی CCCC به دست می‌آیند که علت آن بالاتر بودن سفتی کل ورق در

جدول ۱- ضرایب  $(d_i, c_i, b_i, a_i)$  در توابع ریتز مثلثاتی

i	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$
۱	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$
۲	$\pi/4$	$3\pi/4$	$-\pi/2$	$-3\pi/2$
۳	$\pi/4$	$-3\pi/4$	$\pi/4$	$-3\pi/4$
۴	$\pi/4$	$-3\pi/4$	$\pi/2$	$-3\pi/2$
$>4$	$\pi/2(i-4)$	$\pi/2(i-4)$	$\pi/2$	$\pi/2$

جدول ۲- ترکیب چهار تابع اول در مجموعه مثلثاتی به گونه‌ای که شرایط مرزی مربوطه ارضا شوند.

شرایط مرزی	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$
FF	•	•	•	•
FS	•	•	-	•
FC	•	•	-	-
SF	-	•	•	•
SS	-	•	-	•
SC	-	•	-	-
CF	-	-	•	•
CS	-	-	-	•
CC	-	-	-	-

جدول ۳- مقایسه فرکانس‌های بی‌بعد ورق مربعی  $[0,90]_s$

و درصد رطوبت $\Delta M = 0.1\%$				
شماره مود	۱	۲	۳	۴
مدل ارائه شده	۹/۴۱۱	۱۹/۹۱۱۳	۳۹/۵۲۸۱	۴۵/۸۱۵۵
فرکانس	۹/۴۱۱	۱۹/۹۱۱	۳۹/۵۲۸	۴۵/۸۱۵
درصد اشتون [۱]	-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۱۱
فرکانس	۹/۴۲۹	۲۰/۶۷۹	۴۰/۰۶۸	۴۶/۷۵۲
درصد اشتون [۷]	۰/۱۹۰۲	۳/۷۱۲	۱/۳۴۷	۲/۰۰۳
فرکانس	۹/۴۱۳	۱۹/۸۶۷	۳۹/۲۷۷	۴۵/۵۱۸
درصد اشتون [۲۳]	۰/۰۲۰۱	-۰/۲۲۲۹	-۰/۶۳۹۳	-۰/۶۵۳۵
فرکانس	۹/۴۲۲	۲۰/۵۹۷	۴۰/۰۸۴	۴۶/۷۰۸
درصد اشتون [۲۴]	۰/۱۱۵۶	۳/۳۲۹	۱/۳۸۶	۱/۹۱۰

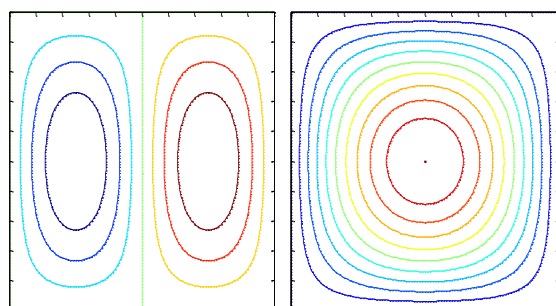
لازم به توضیح است که ویتنی و اشتون [۱]، از روش ریتز، رام و سینها [۷]، از روش اجزای محدود مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDPT)، شن و همکاران [۲۳]، از روش تحلیلی مبتنی بر تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی (HSDPT) و راث و ساهو [۲۴]، هم از

گرادیان دما در شکل ۳ ارائه شده‌اند. در شکل ۳، تغییرات فرکانس مبنای ورق مرکب از جنس گرافیت/اپوکسی در مقابل درصد رطوبت/گرادیان دما و با در نظر گرفتن شرایط مرزی کاملاً ساده (SSSS)، کاملاً گیردار (CCCC) و ترکیبی از تکیه‌گاه ساده و گیردار (SCSC)، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

حالت CCCC است. در حالت کلی، شرط مرزی گیردار نسبت به تکیه‌گاه ساده و شرط مرزی ساده نسبت به تکیه‌گاه آزاد، مقیدتر هستند که افزایش قید، باعث افزایش سفتی سیستم می‌شود [۲۵]. در شکل ۲ شش شکل مود اول ورق مرکب مربعی با چیدمان متقارن لایه‌ها  $[0,90]_s$  تحت اثر محیط مرطوب با درصد رطوبت  $\Delta M = 0.1\%$  و شرایط مرزی ساده SSSS نمایش داده شده‌اند.

جدول ۵- ده فرکانس اول بی بعد ورق مرکب مربعی  $[0,90]_s$  تحت اثر گرادیان دما  $\Delta T = 25^\circ$  با شرایط مرزی مختلف

شماره مود	شرایط مرزی		
	SCSC	CCCC	SSSS
۱	۱۲/۱۹۸۹	۲۳/۵۷۷۴	۸/۰۶۷۷
۲	۲۸/۵۴۴۹	۳۵/۲۵۳۵	۱۸/۳۷۸۱
۳	۴۰/۰۶۴۹	۵۹/۵۰۳۲	۳۸/۷۷۸۴
۴	۵۰/۳۱۳۵	۶۲/۲۷۰۴	۴۰/۴۶۴۳
۵	۵۵/۵۱۵۱	۶۹/۷۱۸۹	۴۴/۷۷۸۶
۶	۷۲/۱۶۵۲	۸۷/۳۱۷۳	۶۰/۷۱۱۶
۷	۸۹/۳۳۹۶	۹۴/۶۸۹۱	۷۲/۳۳۱۷
۸	۹۲/۰۲۳۷	۱۱۶/۹۹۲۶	۸۸/۳۹۷۲
۹	۹۶/۶۳۳۳	۱۲۱/۶۵۹۹	۸۸/۶۳۶۴
۱۰	۱۰۵/۶۲۳۶	۱۲۷/۴۵۵۲	۹۳/۴۸۲۳

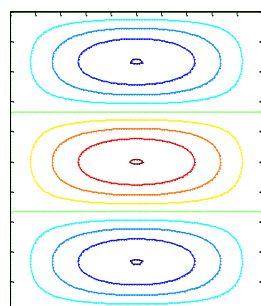


شکل مود (۱و۱) - فرکانس

۱۸/۳۷۸۱

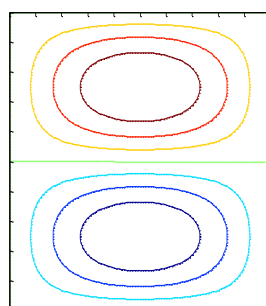
شکل مود (۱و۱) - فرکانس

۸/۰۶۷۷



شکل مود (۱و۳) - فرکانس

۴۰/۴۶۴۳

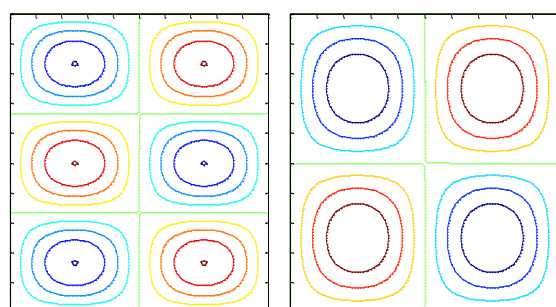


شکل مود (۱و۲) - فرکانس

۳۸/۷۷۸۴

جدول ۶- ده فرکانس اول بی بعد ورق مرکب مربعی  $[0,90]_s$  تحت اثر رطوبت با  $\Delta M = 0.1\%$  با شرایط مرزی مختلف

شماره مود	شرایط مرزی		
	SCSC	CCCC	SSSS
۱	۱۳/۳۳۸۹	۲۴/۱۹۰۹	۹/۴۱۱۲
۲	۲۹/۶۸۹۲	۳۶/۲۳۳۴	۱۹/۹۱۱۳
۳	۴۰/۸۲۱۰	۶۰/۶۰۲۵	۳۹/۵۲۸۲
۴	۵۱/۳۰۸۴	۶۲/۸۲۱۳	۴۱/۸۹۰۱
۵	۵۶/۶۶۹۳	۷۰/۴۹۳۵	۴۵/۸۱۵۵
۶	۷۳/۲۹۵۰	۸۸/۲۹۴۵	۶۱/۹۵۶۰
۷	۹۰/۰۰۵۱	۹۵/۸۳۵۱	۷۳/۶۹۸۶
۸	۹۳/۱۹۰۰	۱۱۸/۰۸۹۹	۸۹/۲۹۶۳
۹	۹۷/۴۵۲۰	۱۲۲/۱۹۸۴	۸۹/۷۱۵۷
۱۰	۱۰۶/۸۰۵۱	۱۲۸/۱۲۳۱	۹۴/۲۹۵۲



شکل مود (۲و۳) - فرکانس

۶۰/۷۱۱۶

شکل مود (۲و۲) - فرکانس

۴۴/۷۷۸۶

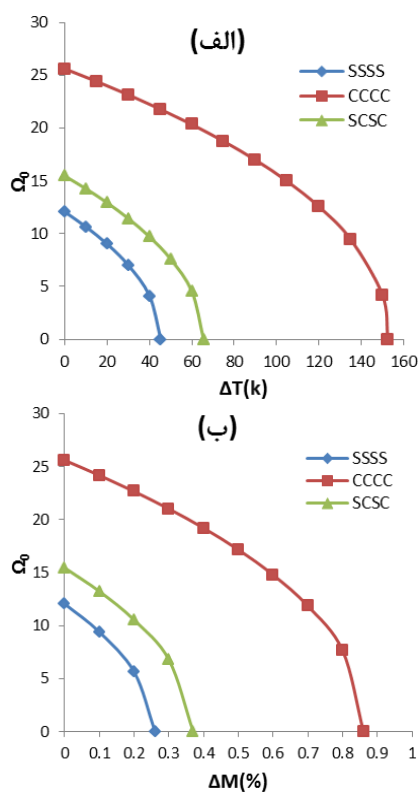
شکل ۲- شکل مدهای ارتعاشی برای ورق مرکب  $[0,90]_s$  با شرایط مرزی SSSS تحت اثر رطوبت  $\Delta M = 0.1\%$

#### ۴-۳- اثر رطوبت و دما روی فرکانس‌های طبیعی

تغییرات فرکانس‌های ارتعاشی یک ورق چند لایه متقارن مرکب تحت اثر محیط مرطوب، نسبت به درصد رطوبت و



نمایش داده شده است. از این شکل مشاهده می‌شود که فرکانس‌های طبیعی ورق در سه حالت تکیه‌گاهی SSSS، CCCC و SCSC با افزایش نسبت جانبی، افزایش می‌یابند. در واقع هر قدر ورق از حالت مستطیلی به حالت مربعی نزدیک‌تر می‌شود، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. در شکل ۵، فرکانس طبیعی مبنای ورق مرکب مربعی  $[0,90]_s$  با درصد رطوبت  $\Delta M = 0.1\%$ ، بر حسب نسبت ضخامت  $\delta = a/h$  نمایش داده شده است. از شکل ۵ می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش نسبت ضخامت، فرکانس‌های طبیعی کاهش پیدا می‌کنند که کاهش فرکانس‌ها، ناشی از کم شدن سفتی ورق است.



شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی مبنای ورق مرکب  $[0,90]_s$  با شرایط مرزی مختلف بر حسب (الف) گرادیان دما و (ب) درصد رطوبت

برای مطالعه اثر زاویه الیاف روی رفتار مودال ورق مرکب، یک ورق تک لایه مرکب با تکیه‌گاه‌های مختلف و تحت اثر محیط مرطوب با رطوبت  $\Delta M = 0.1\%$ ، مورد بررسی قرار

از نتایج ارائه شده در شکل ۳ مشاهده می‌شود که با افزایش درصد رطوبت/گرادیان دما، فرکانس‌های کاهش می‌یابند که این امر، ناشی از کاهش سفتی ورق در اثر وجود کرنش‌های انبساطی است. روند نزولی فرکانس‌ها تا جایی ادامه دارد که نمودارها به محور افقی می‌رسند که در این نقطه، رفتار ارتعاشی ورق ناپایدار می‌شود. در این حالت فرکانس‌ها صفر می‌شوند و در اثر وجود کرنش‌های انبساطی، ورق شروع به کمانش می‌کند. در رابطه با پایداری سیستم در بخش‌های بعد بیشتر بحث خواهد شد.

در جدول ۷، دماهای بحرانی حاصل از تحلیل حاضر با نتایج مقاله شاطرزاده و همکاران [۲۶]، در چند حالت چیدمان مختلف لایه‌ها با شرایط مرزی CCCC و نسبت طول به عرض ورق  $a/b = 1$  مقایسه شده‌اند، همانطور که ملاحظه می‌شود، توافق خوبی بین نتایج وجود دارد. لازم به توضیح است که نتایج حاصل از [۲۶]، مبتنی بر تحلیل کمانشی ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی تحت اثر بار حرارتی با تغییرات یکنواخت دما با استفاده از روش اجزاء محدود است.

در منبع [۲۶]، برای تحلیل کمانشی ورق و محاسبه دماهای بحرانی، از ماده مرکب از جنس ایگلس/اپوکسی استفاده شده که خواص مکانیکی و حرارتی ماکروسکوپی آن  $\nu_{12} = 0.3$ ،  $G_{12} = 3\text{GPa}$ ،  $E_2 = 6\text{GPa}$ ،  $E_1 = 15\text{GPa}$ ،  $\alpha_2 = 2.3 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$  و  $\alpha_1 = 7 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$  هستند.

جدول ۷- گرادیان دمای بحرانی ورق مرکب چند لایه با شرایط مرزی CCCC و چیدمان مختلف لایه‌ها

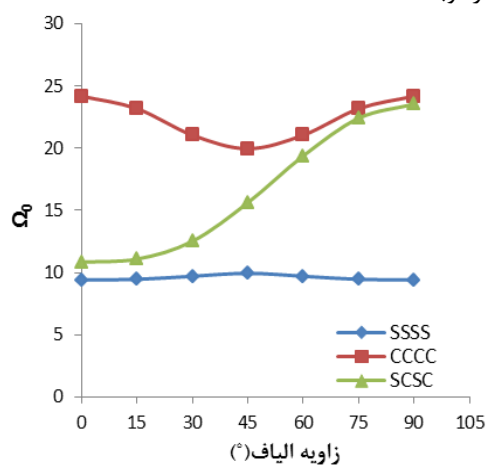
	چیدمان لایه‌ها		
	$[90,-90]_s$	$[45,-45]_s$	$[0,90]_s$
Ref[26]	۲۱/۵	۲۴/۱	۲۲/۳
تحقیق حاضر	۲۲/۶۱۶۷	۲۶/۴۹۲۷	۲۳/۷۲۷۵
درصد اختلاف	۴/۹۴	۹/۰۲	۶/۰۱

#### ۴-۴- اثر پارامترهای هندسی ورق

در این قسمت، اثر پارامترهای هندسی ورق شامل نسبت جانبی یا نسبت طول به عرض ورق  $r = a/b$ ، نسبت ضخامت  $\delta = a/h$  و زاویه الیاف روی فرکانس‌های طبیعی سیستم، مورد بررسی قرار می‌گیرند. در شکل ۴، تغییرات فرکانس طبیعی اول ورق بر حسب نسبت جانبی  $r = a/b$

## ۴-۵- پایداری ورق

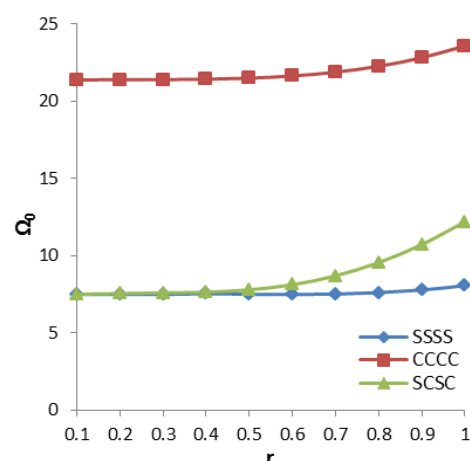
در این بخش، پایداری ورق مرکب مستطیلی تحت اثر گرادیان دما و محیط مرطوب، مورد بررسی قرار می‌گیرد و نواحی ناپایدار ورق بدست می‌آیند. چنانچه در بخش قبل در شکل ۳ مشاهده شد، با افزایش گرادیان دما و درصد رطوبت فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند تا در نقطه بحرانی فرکانس‌ها صفر می‌شوند. این نقاط بحرانی در واقع مرز پایداری سیستم هستند و در این نقاط، نیروهای صفحه‌ای ناشی از کرنش‌های انبساطی به قدری زیاد می‌شود که سیستم دیگر قادر به تحمل آنها نبوده، شروع به کم‌انحراف می‌کند. از این رو تحلیل و محاسبه این مقادیر بحرانی مهم است. برای بدست آوردن این مقادیر بحرانی از معادله (۳۳) با توجه به اینکه فرکانس طبیعی صفر می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که  $K_{ijkl}^p = 0$  که اگر در این عبارت ماتریس سفتی بر حسب ماتریس سفتی ناشی از انرژی کرنشی خمشی ورق و کار نیروهای صفحه‌ای نوشته شود، می‌توان به یک مسئله مقدار ویژه رسید که مقادیر ویژه آن، همان مقادیر بحرانی دما و یا رطوبت هستند.



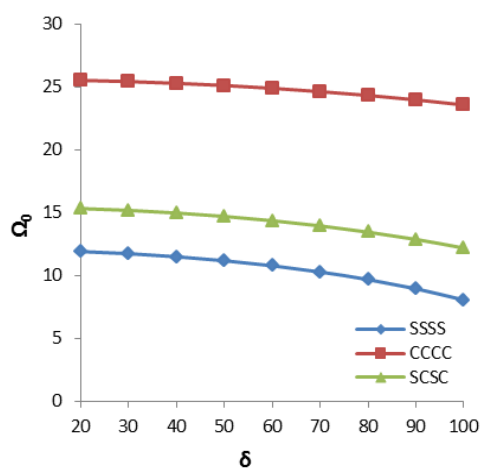
شکل ۴- تغییرات فرکانس مبنای ورق مرکب تک لایه بر حسب زاویه الیاف

در جدول ۸، مقادیر بحرانی گرادیان دما که به ازای آنها ورق ناپایدار می‌شود به ازای شرایط مرزی مختلف، چیدمان متفاوت لایه‌ها از نظر زاویه الیاف و تعداد لایه‌ها ارائه شده‌اند. چنانچه از این جدول مشاهده می‌شود، کمترین مقدار گرادیان دمای بحرانی، مربوط به ورق سه لایه  $[0,90,0]$  با

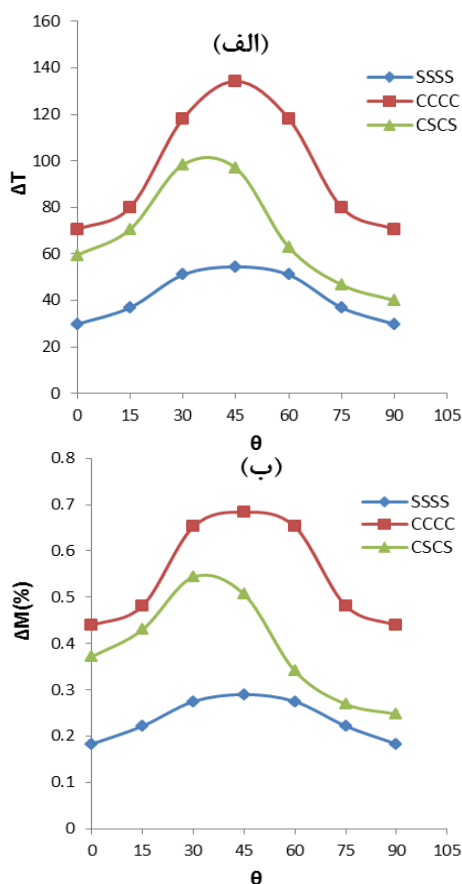
گرفته است که نتایج آن در شکل ۶ ارائه شده‌اند. همان طور که از شکل ۶ مشاهده می‌شود، تغییرات فرکانس برای شرایط مرزی SSSS و CCCC، حول زاویه ۴۵ درجه متقارن بوده، بر حسب شماره مود ارتعاشی، فرکانس‌ها از زاویه صفر تا ۴۵ درجه افزایش یا کاهش پیدا می‌کنند؛ اما برای شرایط مرزی SCSC به دلیل متغیر بودن تکیه‌گاه‌ها در حالت کلی، نمودار بدست آمده متقارن نیست. در مورد تغییرات فرکانس در مودهای دیگر یا در حالتی که کرنش انبساطی ناشی از وجود گرادیان دما باشد، هم می‌توان نتایج مشابهی دریافت کرد که برای جلوگیری از تکرار، از آوردن این نتایج خودداری شده است.



شکل ۵- تغییرات فرکانس مبنای ورق  $[0,90]_s$  بر حسب نسبت جانبی  $r = a/b$



شکل ۶- تغییرات فرکانس مبنای ورق  $[0,90]_s$  بر حسب نسبت ضخامت  $\delta = a/h$



شکل ۷- مقادیر بحرانی (الف) گرادیان دما (ب) درصد رطوبت؛ برای ورق مرکب تک لایه بر حسب زاویه الیاف

قرار گرفت. در همین راستا، فرکانس‌های طبیعی سیستم، شکل مودها و محدوده پایداری بر حسب پارامترهای مختلف سیستم از جمله، گرادیان دما و درصد رطوبت، ویژگی‌های، ابعاد هندسی ورق و چیدمان لایه‌ها بدست آمدند. چنانچه مشاهده شد، وجود رطوبت و دما باعث ایجاد نیروهای صفحه‌ای فشاری در ورق مقید می‌شوند. در اثر وجود این عوامل، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های چند لایه با افزایش درصد رطوبت و گرادیان دما کاهش پیدا می‌کنند که دلیل آن، کاهش سفتی ورق است. در مورد پایداری ورق مرکب تحت شرایط یاد شده نیز، عوامل مختلفی اثر دارند که تأثیر آنها روی پایداری بررسی شدند و محدوده پایداری ورق تحت اثر کرنش‌های انبساطی ارائه گردید. از تحلیل ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که روش تحلیل ارائه شده تحت عنوان ریتز مثلثاتی، از همگرایی و پایداری عددی خوبی برخوردار

مقدار ۴۳/۶۴ و بیشترین مقدار، مربوط به ورق چهار لایه  $[0,90]_s$  با مقدار ۱۵۲/۶۲ می‌باشند. چیدمان لایه‌ها نیز، روی محدوده پایداری اثر می‌گذارد که بیشتر این تغییرات، ناشی از تغییر زاویه الیاف است. برای مقادیر بحرانی رطوبت نیز، می‌توان جدول مشابهی ارائه کرد. در شکل ۷، مقادیر بحرانی دما و رطوبت که در آنها ورق ناپایدار می‌شود، برای یک ورق تک لایه به ازای شرایط مرزی مختلف بر حسب مقادیر زاویه الیاف ارائه شده است. همان طور که در شکل مشاهده می‌شود، برای شرایط مرزی کاملاً ساده و کاملاً گیردار، مقادیر بحرانی تا زاویه ۴۵ درجه افزایش پیدا می‌کنند و بعد از آن سیر نزولی دارند. در مورد تکیه‌گاه CSCS نیز می‌توان گفت، مقادیر بحرانی تقریباً در زاویه ۳۵ درجه به حداکثر مقدار خود می‌رسند. چنانچه انتظار می‌رود، بیشترین مقادیر بحرانی مربوط به ورق با تکیه‌گاه کاملاً گیردار به علت قیود بیشتر و کمترین مقادیر بحرانی نیز، مربوط به ورق با تکیه‌گاه کاملاً ساده است.

می‌توان برای اجتناب از ایجاد رطوبت و تغییرات ناخواسته دما و در نتیجه پیشگیری از پدیده ناپایداری در سازه‌های کامپوزیتی از عایق‌های مناسب استفاده کرد. با این وجود، همواره می‌بایست در طراحی‌ها این موضوع مدنظر قرار گیرد که افزایش دما و رطوبت از محدوده‌ای خاص نباید متجاوز گردند.

جدول ۸- گرادیان دمای بحرانی ورق مرکب چند لایه با شرایط مرزی، جنس و چیدمان مختلف لایه‌ها

شرایط مرزی	چیدمان لایه‌ها		
	$[45,-45,45]_s$	$[0,90,0]_s$	$[30,-30]_s$
SSS S	۵۲/۱۵	۴۳/۶۴	۵۴/۷۲
CCC C	۱۱۴/۴	۱۰۴/۰۱	۱۱۷/۶۹
SCS C	۸۷/۲۶	۵۲/۶۸	۶۶/۶۳

##### ۵- نتیجه‌گیری

هدف از این مقاله، تحلیل رفتار ارتعاشی ورق‌های مرکب تحت اثر کرنش‌های انبساطی دمایی و رطوبتی بوده است. به همین منظور، رفتار ارتعاشی ورق توسط روش انرژی مدل‌سازی شده، با استفاده از روش ریتز مثلثاتی، مورد بررسی

- [12] Chen B, Chou TW (1999) Free vibration analysis of orthogonal-woven fabric composites. *Compos Part A-Appl S* 30(3): 285-297.
- [13] Rao V, Sinha P (2004) Dynamic response of multidirectional composites in hygrothermal environments. *Compos Struct* 64(3): 329-338.
- [14] Kim YW (2005) Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. *J Sound Vib* 284(3): 531-549.
- [15] Matsunaga H (2007) Free vibration and stability of angle-ply laminated composite and sandwich plates under thermal loading. *Compos Struct* 77(2): 249-262.
- [16] Gupta AK, Panwar V, Vats R (2010) Vibrations of non-homogeneous rectangular plate of variable thickness in both directions with thermal gradient effect. *Int J Appl Math Mech* 6(16): 19-37.
- [17] Gupta AK, Sharma P (2012) Effect of linear thermal gradient on vibrations of trapezoidal plates whose thickness varies parabolically. *J Vib Control* 18(3): 395-403.
- [18] Kaviani F, Mirdamadi HR (2012) Free vibration analysis of laminated composite plate by a novel four variable refined theory. *Modares Mech Eng* 12(6) 147-158. (In Persion)
- [19] Halpin J, Pagano N (1967) Consequences of environmentally induced dilatation in solids. Technical rept 1969.
- [20] Reddy JN (2003) *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press,
- [21] Leissa A (1973) The free vibration of rectangular plates. *J Sound Vib* 31(3): 257-293.
- [22] Beslin O, Nicolas J (1997) A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. *J Sound Vib* 202(5): 633-655.
- [23] Shen HS, Zheng JJ, Huang XL (2004) The effects of hygrothermal conditions on the dynamic response of shear deformable laminated plates resting on elastic foundations. *J Reinf Plast Comp* 23(10): 1095-1113.
- [24] Rath M, Sahu S (2012) Vibration of woven fiber laminated composite plates in hygrothermal environment. *J Vib Control* 18(13): 1957-1970.
- [25] Meirovitch L (1967) *Analytical methods in vibration*. New York, NY.: The Mcmillan Company.
- [26] Shaterzadeh A, Abolghasemi S, Rezaei R (2014) Finite element analysis of thermal buckling of rectangular laminated composite plates with circular cut-out. *J Therm Stresses* 37(5): 604-623.
- است و علی‌رغم اینکه روش‌های عددی برای تحلیل مودهای مرتبه بالا مناسب نیستند، توسط روش ارائه شده می‌توان با دقت و سرعت محاسباتی خوبی فرکانس‌ها و شکل مودهای مرتبه بالا را تخمین زد. به عنوان یک پیشنهاد می‌توان با استفاده از تئوری‌های برشی در تحلیل حرکت ورق برای اعمال اثر برش و اینرسی دورانی در معادلات، دقت تحلیل را بالا برد؛ در این حالت می‌توان، رفتار ارتعاشی ورق‌های ضخیم را نیز مورد بررسی قرار داد.
- ۶- مراجع**
- [1] Whitney J, Ashton J (1971) Effect of environment on the elastic response of layered composite plates. *AIAA* 9(9): 1708-1713.
- [2] Dhotarad M, Ganesan N (1979) Influence of thermal gradient on natural frequency of rectangular plate vibration. *Nucl Eng Des* 52(1): 71-81.
- [3] Gandhi MV, Usman M, Chao L (1988) Nonlinear vibration of laminated composite plates in hygrothermal environments. *J Eng Mater-T ASME* 110: 140.
- [4] Chen LW, Lee JH (1989) Vibration of thermal elastic orthotropic plates. *Appl Acoust* 27(4): 287-304.
- [5] Chen LW, Chen Y (1988) Vibrations of hygrothermal elastic composite plates. *Eng Fract Mech* 31(2): 209-220.
- [6] Lyrantzis CS, Bofilios DA (1990) Hygrothermal effects on structure-borne noise transmission of stiffened laminated composite plates. *J Aircraft* 27(8): 722-730.
- [7] Ram K, Sinha P (1992) Hygrothermal effects on the free vibration of laminated composite plates. *J Sound Vib* 158(1): 133-148.
- [8] Noor AK, Burton WS (1992) Three-dimensional solutions for the free vibrations and buckling of thermally stressed multilayered angle-ply composite plates. *J Appl Mech-T ASME* 59: 868-877.
- [9] Adams R, Singh M (1995) The effect of immersion in sea water on the dynamic properties of fibre-reinforced flexibilised epoxy composites. *Compos Struct* 31(2): 119-127.
- [10] Liu CF, Huang CH (1996) Free vibration of composite laminated plates subjected to temperature changes. *Comput Struct* 60(1): 95-101.
- [11] Eslami H, Maerz S (1995) Thermally induced vibration of a symmetric cross-ply plate with hygrothermal effects. *AIAA* 33(10): 1986-1988.