مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۵/ دوره ۶/ شماره ۲/ صفحه ۶۹-۸۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

تحلیل ارتعاشات مجموعه‌ای از چند تیر تیموشنکوی موازی با اتصالات انعطاف‌پذیر میانی تحت عبور جرم متحرک

سعید فروزنده[۱] و علیرضا آریایی[۲،*]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

[۲] استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۶/۰۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۱۰/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۳/۱۶

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات سیستمی از تیرهای تیموشنکوی موازی که توسط اتصالاتی انعطاف‌پذیر به هم متصل شده‌اند و جرمی متحرک از روی یک و یا تعدادی از تیرها عبور می‌کند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. تعداد تیرها و اتصالات میانی دلخواه است و بار عبوری از نوع جرم متحرک با سرعت یا شتاب ثابت در نظر گرفته می‌شود که در آن کلیهٔ ترم‌های نیرویی بین تیر و جرم متحرک همچون، کوریولیس، گریز از مرکز، اینرسی و شتاب جرم، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حل مسأله از تغییر متغیر خاصی جهت جدا کردن معادلات دیفرانسیل کوپل استفاده می‌شود. به روش ماتریس انتقال، مقادیر و توابع ویژه سیستم به‌دست می‌آیند و به روش توابع کمکی معادلات دیفرانسیل کوپل مرتبه دوم در تحلیل پاسخ نیرویی از هم جدا می‌شوند. جابجایی و ممان خمشی سیستم تحت عبور جرم بررسی می‌شود. همچنین جابجایی سیستم در دو حالت عبور جرم و نیرو با یکدیگر مقایسه و تأثیر هر یک از ترم‌های نیرویی به‌طور مجزا مشخص می‌شود. با در نظر گرفتن نیروی گرانشی به تنهایی و ساده‌سازی روابط، معادلات در حالت عبور نیروی متحرک به‌دست می‌آید. مشاهده می‌شود که با افزایش جرم، سرعت و شتاب، اختلاف پاسخ بین دو حالت عبور جرم و نیرو افزایش می‌یابد.

کلمات کلیدی: تیرهای تیموشنکوی موازی؛ جرم متحرک؛ اتصالات انعطاف‌پذیر میانی؛ روش ماتریس انتقال؛ روش توابع کمکی.

Vibration Analysis of Multiple Parallel Timoshenko Beams with Intermediate Flexible Connections subjected to a Moving Mass

S. Foroozande[1], A. Ariaei[2,*]

[1] MSc. Student, Mech. Eng., University of Isfahan, Isfahan, Iran.

[2] Assist. Prof., Mech. Eng., University of Isfahan, Isfahan, Iran.

Abstract

In this article, the vibration analysis of parallel Timoshenko beams connected by flexible connections is studied in which a moving mass passes from one or a number of the beams. In this system, the number of beams and flexible connections is arbitrary. The moving mass is considered to travel with a constant velocity or acceleration. All forces between the beam and the moving mass are considered such as gravity, coriolis, centrifugal, inertia and mass acceleration. The method involves a change of variables and modal analysis to decouple and to solve the governing differential equations, respectively. The eigenvalues and eigenfunctions of the system are obtained adopting transfer matrix method, andthe method of auxiliary functions is applied to separate the coupled second order differential equations. The displacements and the bending moments of the system subjected to the moving mass will be examined. The moving force formulation can be achieved by considering only the gravitational force. The system response by considering the moving mass is obtained and compared with the moving force problem and the effects of the inertia, coriolis, centrifugal and mass acceleration, is investigated, separately.

Keywords: Parallel Timoshenko Beams; Moving Mass; Intermediate Flexible Connections; Transfer Matrix Method; Auxiliary Functions Method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۱۳۷۹۳۴۰۵۴؛ فکس: ۰۳۱۳۷۹۳۲۷۴۶

آدرس پست الکترونیک: ariaei@eng.ui.ac.ir

۱- مقدمه

بیش از یک قرن، سیستم‌های الاستیک تحت عبور بارهای متحرک در علوم مختلفی همچون، مهندسی عمران و هوافضا مورد توجه بوده است [۱ و ۲] و از نظر تاریخی برای اولین بار در طراحی پل‌های راه‌آهن و سپس در زمینه‌های مهندسی حمل و نقل، همچون طراحی پل‌ها، بزرگراه‌ها، راه‌های کابلی، تونل‌ها و خطوط لوله‌ای مطرح شده است [۳ و ۴]. به عنوان کار مروری، فرایبا [۵] کتابی را در زمینه تحلیل عبور بار از روی تیر تحت شرایط مختلف بارگذاری منتشر کرد. تاریخچه‌ای وسیع تا پایان قرن بیستم توسط سیدیکویی و همکارانش [۶] ارائه شد و دینامیک تیر یک سر گیردار را تحت عبور سیستم جرم و فنر بررسی کردند. معادلات حرکت به روش گلرکین[1] و توسط یک حل‌گر معادلات دیفرانسیل حل شدند. نتایج عددی با حل تحلیلی به فرم بسته مقایسه گردید که با کاربرد روش اغتشاشی[2] به دست آمده بود.

تاکنون جنبه‌های گوناگونی از مسأله عبور بار متحرک همچون، تحلیل تنش، پایداری و کنترل، مورد بررسی قرار گرفته است. در تحلیل ارتعاشی جرم در حال عبور از روی یک سیستم پیوسته به معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای کوپل می‌انجامد که به مکان لحظه‌ای جرم عبوری بستگی دارند. هایاشیکاوا و واتانابه [۷]، روشی شبیه به روش سختی دینامیکی توسعه دادند تا بتوانند فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای چنین تیرهایی را به‌دست آورند و سپس آنها را برای پیش‌بینی رفتار تیرهای چند دهنه تحت عبور بارهای متحرک به کار برند. استانیسیک [۸]، روش دیگری گزارش کرد که شکل مودهای سیستم تحت عبور جرم را به‌دست می‌آورد. یک حل عددی برای مسأله مشابهی توسط خلیلی و همکارانش [۹] پیشنهاد شد. سیدیکویی و همکارانش [۱۰]، از یک روش نیمه تحلیلی- عددی بر پایه روش اغتشاشی استفاده و یک حل تحلیلی به فرم بسته برای مسأله ارائه کردند [۶]. دینامیک تیرهای پیوسته چند دهنه تحت اثر بار در حال حرکت، توسط یانگ و همکارانش [۱۱] بررسی شد. آنها فرمول موثری را برای وسایل نقلیه در حال عبور روی پل‌های ساده و پیوسته ارائه کردند. لی[۱۲]، از روش مودهای فرضی برای تحلیل تیر اویلر برنولی قرار گرفته روی چند تکیه‌گاه تحت عبور جرم استفاده کرد. ایچیکاوا و همکارانش [۱۳]، رفتار دینامیکی تیر اویلر برنولی پیوسته چند دهنه تحت عبور جرم در یک سرعت ثابت را بررسی کردند.

بسیاری از محققان، پایداری دینامیکی و کنترل سازه‌های پیوسته تحت اثر جرم متحرک را بررسی کرده‌اند که کاربردهایی همچون، پل‌های قطار سریع‌السیر دارد. روشی مبتنی بر روش المان محدود توسط سیفواتس [۱۴] به کار گرفته شد که در آن مجموعه‌ای از توابع کمکی جهت در نظر گرفتن اثر جرم متحرک در هر گره به عنوان جرمی در حال حرکت در طول تیر بسط داده شدند. لین و تریسوی [۱۵]، یک سیستم جرم و فنر و مستهلک‌کننده عبوری از روی تیر در نظر گرفتند که در آن مستهلک‌کننده و فنر در جهت جابجایی تیر عمل می‌کنند. شریتی و همکارش [۱۶] نیز، مسأله عبور چند جرمی را از روی تیر با روش المان محدود جدیدی در نظر گرفتند و نتایج عددی را برای عبور یک و دو جرم به‌دست آوردند که روی هر یک از جرم‌ها نیرویی ثابت وارد کرده بودند. افتخار ازم و همکارانش [۱۷]، یک تیر تیموشنکو در نظر گرفتند که ابتدا یک جرم را از روی آن عبور دادند و سپس نتایج را با عبور دادن جرم و فنر یک درجه آزادی و همچنین عبور نیرو از روی تیر به‌دست آوردند و با یکدیگر مقایسه کردند. اسماعیل‌زاده و قریشی [۱۸]، از روش تفاضل محدود برای تخمین پاسخ ارتعاشی تیرهای اویلر برنولی تحت عبور جرم گسترده استفاده کردند. مشاهده گردید که اینرسی جرم متحرک در رفتار دینامیکی چنین سازه‌هایی مهم است. یکی از نقایص ممکن کار ایشان، توسط لین در نامه‌ای به ویراستار تبیین شد [۱۹] که استفاده از تیر اویلر برنولی مناسب نیست و نسبت جرم نقش مهمی در خواص دینامیکی مسأله جرم متحرک ایفا می‌کند. آنها در مطالعه‌ای دیگر [۲۰]، فرمولاسیون خود را برای بررسی تیرهای تیموشنکو توسعه دادند. اوگوامانا و همکارانش [۲۱]، یک تیر اویلر برنولی حامل جرثقیل (اتاقک و بار) را که یکنواخت و دو سر مفصل بود، مدل کردند. اتاقک جرثقیل و بار به صورت بارهای نقطه‌ای مدل شدند و فرض گردید، بار با یک میله بدون جرم و صلب به اتاقک متصل است و می‌تواند در صفحه تیر حرکت کند. ممندی و همکارانش [۲۲]، یک تیر تیموشنکو را بر اثر عبور جرمی با سرعت متغیر و شتابدار

[1] Galerkin
[2] Perturbation Method

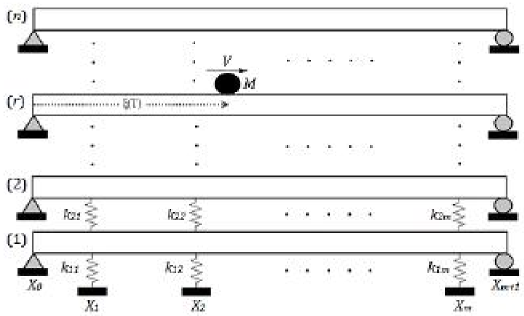
در نظر گرفتند، آنها جرمی را از روی تیری شیبدار و دارای زاویه با خط افق و برای شرایط مرزی مختلف عبور دادند.

تحلیل ارتعاشی چند تیر متصل به هم مورد توجه بعضی از محققان قرار گرفته است [۲۳-۲۶]. یکی از کاربردهای سیستم‌های چند تیری، استفاده از آنها در جاذب‌های ارتعاشی است [۲۳]. وو و همکارانش [۲۴]، روشی را جهت حل دقیق یک سیستم دو تیری تحت بار هارمونیک ارائه کردند که یک تیر به عنوان تیر اصلی تحت بارگذاری قرار می‌گیرد و تیر دیگر، در نقش پشتیبان است که با یک بستر ویسکوالاستیک به تیر اصلی اتصال می‌یابد. ابوهلال [۲۵]، پاسخ دینامیکی سیستمی مشابه را تحت عبور نیروی ثابت بررسی کرد، فرض شد که هر دو تیر در این سیستم دو تیری از نظر ویژگی‌های هندسی و شرایط مرزی مشابه هستند. آریایی و همکارانش [۲۶]، یک سیستم از تیرهای تیموشنکو به تعداد دلخواه در نظر گرفتند که توسط اتصالاتی الاستیک به هم متصل شده‌اند، در حالی‌که باری متحرک از نوع نیرویی از روی تیرها عبور می‌کرد و پاسخ سیستم برای سختی اتصالات متفاوت و سرعت‌های مختلف بررسی گردید.

در کارهای قبلی [۲۳-۲۵]، از دو تیر اویلر برنولی تحت عبور نیرو استفاده شده است که فنرها نه تنها به صورت جدا از هم، بلکه به شکل بستری الاستیک بین تیرها قرار گرفته بودند. در این مقاله، ضمن در نظر گرفتن تئوری تیموشنکو، تعداد تیرها و اتصالات میانی دلخواه است و بار عبوری از نوع جرم متحرک است که اثر ناشی از ترم‌های نیرویی اینرسی، کوریولیس و گریز از مرکز جرم بررسی می‌شود. سیستم مورد بررسی به دلیل وجود اتصالات میانی و n تیر تیموشنکو که هر تیر دارای دو معادله دیفرانسیلی حرکت است، در مجموع شامل $2n$ معادله دیفرانسیل پاره‌ای کوپل است که باید همزمان حل شود. در اینجا از تغییر متغیر خاصی جهت جدا کردن همزمان معادلات حرکت و پیوستگی استفاده می‌شود. با اعمال این تغییر متغیر، معادلاتی به وجود می‌آید که هر جفت از آن‌ها مربوط به یک تیر تیموشنکو است. در تحلیل نیرویی، از روش توابع کمکی برای جدا کردن معادلات، استفاده می‌شود. پاسخ سیستم به ازای افزایش جرم، سرعت و شتاب بررسی می‌شود و در دو حالت، عبور جرم و نیرو با یکدیگر مقایسه می‌شود. مشاهده می‌شود که جابجایی در حالت عبور جرم، بیشتر از عبور نیرو است.

۲- معادلات حرکت سیستم

هر تیر در شکل ۱، به طول L و دارای m اتصال انعطاف‌پذیر میانی در موقعیت‌های $X_1,X_2,\ldots,X_m$ است که $0<X_1<X_2<\cdots<X_m<L$ است. جابجایی عرضی و زاویهٔ پیچشی تیر iام در بازه $X_{j-1}\le X\le X_j$ به ترتیب، با $Y_{ij}(X,T)$ و $\Phi_{ij}(X,T)$ نشان داده می‌شود که در آن اندیس j به بخش jام تیر اشاره دارد و $j=1,2,\ldots,m+1$ است؛ بنابراین کل دامنه تیر به $m+1$ بخش تقسیم شده است که طول آنها به ترتیب برابر است با $L_1,L_2,\ldots,L_{m+1}$ و با m اتصال میانی از هم جدا شده‌اند.



شکل۱ مجموعه‌ای از تیرهای تیموشنکوی موازی با اتصالات انعطاف‌پذیر میانی تحت عبور جرم

معادلات حرکت هر بخش از تیر تیموشنکوی iام در بازه $X_{j-1}\le X\le X_j$ برای حالت عبور جرم از روی تیر rام در معادلات (۱) بیان می‌شود [۲۶]. r معرف تیری است که بار روی آن عبور می‌کند و می‌تواند شماره هر یک از تیرها باشد

$$\rho A\frac{\partial^2 Y_{ij}}{\partial T^2}-\kappa AG\left(\frac{\partial^2 Y_{ij}}{\partial X^2}-\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial X}\right)=P(T)\,\delta(X-\xi)\,\delta_{ir} \qquad (۱-۱)$$

$$EI\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial X^2}+\kappa AG\left(\frac{\partial Y_{ij}}{\partial X}-\Phi_{ij}\right)-\rho I\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial T^2}=0 \qquad (۲-۱)$$

در معادلات (۱-۲) ρ چگالی، I ممان اینرسی سطح مقطع حول محور عمود بر صفحه و عبورکننده از محل تار خنثی، A سطح مقطع، E مدول الاستیسیته یانگ، G مدول برشی و κ ضریب تصحیح برش در تئوری تیر تیموشنکو است که به صورت تابعی از سطح مقطع و ضریب پواسون ν بیان می‌شود. همچنین δ_{ir} نماد دلتای کرونیکر است.

$\delta(X-\xi(T))$، تابع دلتای دیراک است که در آن ξ معرف مکان جرم متحرک و تابعی اززمان است. مقدار تابع ξ

با سرعت اولیه V_0 و شتاب ثابت A برابر با $\frac{1}{2}AT^2+V_0T$ خواهد بود. عبارتی که برای $P(T)$ در نظر گرفته می‌شود، به مدلی بستگی دارد که برای بار متحرک به کار می‌رود. اگر بار عبوری از روی تیر، جرم متحرک در نظر گرفته شود، مقدار نیروی بین جرم و تیر برابر با رابطه (۲) است [۲۷]

$$P(T)=M\left\{g-\Lambda\left[Y_{ij}(X,T)\right]\Big|_{X=\xi(T)}\right\} \qquad (۲)$$

که در این معادله M مقدار جرم در حال حرکت، g شتاب گرانشی و $\Lambda[\bullet]$ یک عملگر دیفرانسیلی خطی است که عبارت است از

$$\Lambda[\bullet]=\left(\frac{\partial^2}{\partial T^2}+2\dot{\xi}\frac{\partial^2}{\partial X\partial T}+\dot{\xi}^2\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\ddot{\xi}\frac{\partial}{\partial X}\right)[\bullet] \qquad (۳)$$

در معادله (۳)، $\dot{\xi}$ و $\ddot{\xi}$ به ترتیب سرعت و شتاب جرم متحرک هستند. مفهوم فیزیکی ترم‌های معادله (۳) برای جرم متحرک این‌گونه بیان می‌شوند

- $\frac{\partial^2(Y_\xi)}{\partial T^2}$: ناشی از نیروی اینرسی است.
- $2\dot{\xi}\frac{\partial^2(Y_\xi)}{\partial X\,\partial T}$: ناشی از نیروی کوریولیس است که در معادلات نقشی همچون استهلاک ویسکوز را ایفا کند.
- $\dot{\xi}^2\frac{\partial^2(Y_\xi)}{\partial X^2}$: ناشی از نیروی گریز از مرکز است که در خلاف جهت مرکز انحنای تیر در نقطه‌ای که جرم است به تیر وارد می‌شود.
- $\ddot{\xi}\frac{\partial(Y_\xi)}{\partial X}$: ناشی از نیروی حاصل از شتاب جرم است.

در این مسأله، کلیه ترم‌های نیرویی مذکور در نظر گرفته می‌شود و هدف جدا کردن معادلات کوپل به‌وجود آمده بر اثر این ترم‌ها در تحلیل پاسخ نیرویی و مقایسه نتایج با حذف آنها در حالت نیروی متحرک است.

با صرف‌نظر از ترم‌های مربوط به سرعت و شتاب جرم (برای سرعت، شتاب و اجرام بسیار کم)، معادله (۳) به صورت معادله (۴) تقریب زده می‌شود [۲۸]

$$\Lambda[\bullet]\cong\frac{\partial^2[\bullet]}{\partial T^2} \qquad (۴)$$

۳- مدل اتصالات میانی و بی‌بعد سازی پارامترها

وجود اتصالات انعطاف‌پذیر میانی، منجر به ناپیوستگی نیروی برشی در محل آنها می‌شود. با توجه به شکل ۱ با فرض آنکه $Y_{0j}=0$ به عنوان جابجایی زمین و نیز سختی $k_{(n+1)j}=0$ در نظر گرفته می‌شود، شرایط سازگاری برای ایجاد پیوستگی به ترتیب در جابجایی عمودی، تغییر شکل زاویه‌ای، ممان خمشی و نیروی برشی بلافاصله قبل و بعد از محل اتصالات میانی، عبارتند از

$$Y_{i(j+1)}\left(X_j^+,T\right)=Y_{ij}\left(X_j^-,T\right) \qquad (۵-۱)$$

$$\Phi_{i(j+1)}\left(X_j^+,T\right)=\Phi_{ij}\left(X_j^-,T\right) \qquad (۵-۲)$$

$$EI\Phi'_{i(j+1)}\left(X_j^+,T\right)=EI\Phi'_{ij}\left(X_j^-,T\right) \qquad (۵-۳)$$

$$\begin{aligned}&\kappa AG\left[Y'_{i(j+1)}\left(X_j^+,T\right)-\Phi_{i(j+1)}\left(X_j^+,T\right)\right]\\&\quad-\kappa AG\left[Y'_{ij}\left(X_j^-,T\right)-\Phi_{ij}\left(X_j^-,T\right)\right]=\\&\quad=k_{ij}\left[Y_{ij}\left(X_j^-,T\right)-Y_{(i-1)j}\left(X_j^-,T\right)\right]\\&\qquad+k_{(i+1)j}\left[Y_{ij}\left(X_j^-,T\right)-Y_{(i+1)j}\left(X_j^-,T\right)\right]\end{aligned} \qquad (۵-۴)$$

که در این معادلات $i=1,2,\ldots,n$ و $j=1,2,\ldots,m$ است. حال به منظور بی‌بعد سازی پارامترهای مکانی و اعتبارسنجی نتایج عددی با مرجع [۲۶]، متغیرهایی جدید تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}&y_{ij}=\frac{Y_{ij}}{L}\ ,\ x_j=\frac{X_j}{L}\ ,\ x=\frac{X}{L}\ ,\ l_j=\frac{L_j}{L}\ ,\\&\zeta(t)=\frac{\xi(T)}{L}\ ,\ t=\frac{T}{\sqrt{L}}\ ,\ v=\frac{V}{\sqrt{L}}\end{aligned} \qquad (۶)$$

که معادلات (۱) به شکل معادلات (۷) تبدیل می‌شوند

$$\rho A\frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial t^2}-\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial x^2}-\frac{\partial\phi_{ij}}{\partial x}\right)=\frac{P(t)}{L}\delta(x-\zeta)\delta_{ir} \qquad (۷-۱)$$

$$\frac{EI}{L^3}\frac{\partial^2\phi_{ij}}{\partial x^2}+\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial y_{ij}}{\partial x}-\phi_{ij}\right)-\frac{\rho I}{L^2}\frac{\partial^2\phi_{ij}}{\partial t^2}=0 \qquad (۷-۲)$$

برای نیروی بین جرم و تیر می‌توان رابطه (۸) نوشت

$$P(t)=M\left\{g-\Gamma\left[y_{ij}(x,t)\right]\Big|_{x=\zeta(t)}\right\} \qquad (۸)$$

شکل بی‌بعد شده عملگر دیفرانسیلی $\Lambda[\bullet]$ رابطه (۹)است

$$\Gamma[\bullet]=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\dot{\zeta}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\dot{\zeta}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ddot{\zeta}\frac{\partial}{\partial x}\right)[\bullet]=L\Lambda[\bullet] \qquad (۹)$$

و همچنین برای معادلات پیوستگی (۵) می‌توان نوشت

$$y_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)=y_{ij}\left(x_j^-,t\right) \qquad (۱۰-۱)$$

$$\phi_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)=\phi_{ij}\left(x_j^-,t\right) \qquad (۱۰-۲)$$

$$\phi'_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)=\phi'_{ij}\left(x_j^-,t\right) \qquad (۱۰-۳)$$

$$\begin{aligned}&\left[y'_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)-\phi_{i(j+1)}\left(x_j^+,t\right)\right]-\left[y'_{ij}\left(x_j^-,t\right)-\phi_{ij}\left(x_j^-,t\right)\right]=\\&\quad=\frac{L}{\kappa AG}\Big(k_{ij}\left[y_{ij}\left(x_j^-,t\right)-y_{(i-1)j}\left(x_j^-,t\right)\right]\\&\qquad+k_{(i+1)j}\left[y_{ij}\left(x_j^-,t\right)-y_{(i+1)j}\left(x_j^-,t\right)\right]\Big)\end{aligned} \qquad (۱۰-۴)$$

۴- جداسازی معادلات

به طور کلی، حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل به راحتی امکان‌پذیر نمی‌باشد، اما با یک تغییر مناسب در متغیرها می‌توان معادلات را از هم جدا و از تحلیل مودال استفاده کرد. اکنون جابجایی عرضی و زاویهٔ پیچشی تیر pام در سیستم جدید به ترتیب با معادلات (۱۱) تعریف می‌شوند

$$u_p(x,t)=\sum_{i=1}^{n} c_{pi} y_i(x,t) \qquad (۱-۱۱)$$

$$\theta_p(x,t)=\sum_{i=1}^{n} c_{pi}\phi_i(x,t)\ ,\quad p,i=1,2,\dots,n \qquad (۲-۱۱)$$

تعاریف (۱۱) را به فرم ماتریسی (۱۲) می‌توان نمایش داد

$$\mathbf{U}=\mathbf{CY}\ \rightarrow\ \mathbf{Y}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U}=\bar{\mathbf{C}}\mathbf{U} \qquad (۱-۱۲)$$

$$\mathbf{\Theta}=\mathbf{C\Phi}\ \rightarrow\ \mathbf{\Phi}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{\Theta}=\bar{\mathbf{C}}\mathbf{\Theta} \qquad (۲-۱۲)$$

که در آن، ماتریس‌ها و بردارها عبارت‌اند از

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_n\end{bmatrix}^T,\ \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{bmatrix}^T,$$
$$\mathbf{\Theta}=\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n\end{bmatrix}^T,\ \mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n\end{bmatrix}^T,$$
$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & \dots & c_{1n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ c_{n1} & \dots & c_{nn}\end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{C}}=\mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix}\bar{c}_{11} & \dots & \bar{c}_{1n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \bar{c}_{n1} & \dots & \bar{c}_{nn}\end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

بنابراین می‌توان متغیرهای قدیم $y_i(x,t)$ و $\phi_i(x,t)$ را بر حسب متغیرهای جدید $u_p(x,t)$ و $\theta_p(x,t)$ بیان کرد

$$y_i(x,t)=\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{ip}u_p(x,t) \qquad (۱-۱۴)$$

$$\phi_i(x,t)=\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{ip}\theta_p(x,t) \qquad (۲-۱۴)$$

در تعریف متغیرهای جدید، ضرایب c_{pi} باید به گونه‌ای تعیین شوند که بتوان معادلات را از هم جدا کرد. بدین منظور، ابتدا هر یک از این ضرایب در معادلات (۷) اعمال و سپس با هم جمع می‌شوند

$$\sum_{i=1}^{n}c_{pi}\left\{\rho A\frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial t^2}-\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial^2 y_{ij}}{\partial x^2}-\frac{\partial\phi_{ij}}{\partial x}\right)=\frac{P}{L}\delta(x-\zeta)\delta_{ir}\right\}$$
(۱-۱۵)

$$\sum_{i=1}^{n}c_{pi}\left\{\frac{EI}{L^3}\frac{\partial^2\phi_{ij}}{\partial x^2}+\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial y_{ij}}{\partial x}-\phi_{ij}\right)-\frac{\rho I}{L^2}\frac{\partial^2\phi_{ij}}{\partial t^2}\right\}=0 \qquad (۲-۱۵)$$

با جایگزینی معادلات (۱۱) در (۱۵) رابطه (۱۶) را نوشت

$$\rho A\frac{\partial^2 u_{pj}}{\partial t^2}-\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial^2 u_{pj}}{\partial x^2}-\frac{\partial\theta_{pj}}{\partial x}\right)=c_{pr}\frac{P(t)}{L}\delta(x-\zeta) \qquad (۱-۱۶)$$

$$\frac{EI}{L^3}\frac{\partial^2\theta_{pj}}{\partial x^2}+\frac{\kappa AG}{L}\left(\frac{\partial u_{pj}}{\partial x}-\theta_{pj}\right)-\frac{\rho I}{L^2}\frac{\partial^2\theta_{pj}}{\partial t^2}=0 \qquad (۲-۱۶)$$

نیروی بین جرم و تیر پس از اعمال این ضرایب برابر است با

$$P(t)=M\left\{g-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+2\dot{\zeta}\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial t}\\ +\dot{\zeta}^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\ddot{\zeta}\dfrac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}\left[y_{rj}(x,t)\right]\Big|_{x=\zeta(t)}\right\} \qquad (۱۷)$$

که در آن، $y_{rj}(x,t)$ از معادله (۱-۱۴) به‌دست می‌آید

$$y_{rj}(x,t)=\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}u_{pj}(x,t) \qquad (۱۸)$$

به طریق مشابه این ضرایب بر معادلات سازگاری (۱۰) نیز اعمال می‌شوند و معادلات جدید (۱۹) به‌دست می‌آید

$$u_{p(j+1)}(x_j^+,t)=u_{pj}(x_j^-,t) \qquad (۱-۱۹)$$

$$\theta_{p(j+1)}(x_j^+,t)=\theta_{pj}(x_j^-,t) \qquad (۲-۱۹)$$

$$\theta'_{p(j+1)}(x_j^+,t)=\theta'_{pj}(x_j^-,t) \qquad (۳-۱۹)$$

$$\left[u'_{p(j+1)}(x_j^+,t)-\theta_{p(j+1)}(x_j^+,t)\right]-\left[u'_{pj}(x_j^-,t)-\theta_{pj}(x_j^-,t)\right]=$$
$$=\frac{L}{\kappa AG}\sum_{i=1}^{n}c_{pi}\begin{pmatrix}k_{ij}\left[y_{ij}(x_j^-,t)-y_{(i-1)j}(x_j^-,t)\right]\\ +k_{(i+1)j}\left[y_{ij}(x_j^-,t)-y_{(i+1)j}(x_j^-,t)\right]\end{pmatrix}$$
(۴-۱۹)

طرف راست معادله (۱۹-۴)، برای جدا شدن و به‌دست آمدن ضرایب باید بر حسب u_{pj} نوشته شود. بدین منظور، لازم است که معادله (۲۰) برقرار باشد

$$\frac{L}{\kappa AG}\sum_{i=1}^{n}c_{pi}\begin{pmatrix}k_{ij}\left[y_{ij}(x_j^-,t)-y_{(i-1)j}(x_j^-,t)\right]\\ +k_{(i+1)j}\left[y_{ij}(x_j^-,t)-y_{(i+1)j}(x_j^-,t)\right]\end{pmatrix}=\beta_{pj}u_{pj}(x_j^-,t)$$
(۲۰)

با جایگذاری این معادله در (۱۹-۴) و ساده‌سازی آن‌ها می‌توان رابطه (۲۱) را نوشت

$$\mathbf{K}_j\begin{Bmatrix}c_{p1}\\ c_{p2}\\ c_{p3}\\ \vdots\\ c_{p(n-1)}\\ c_{pn}\end{Bmatrix}=\frac{\kappa AG}{L}\beta_{pj}\begin{Bmatrix}c_{p1}\\ c_{p2}\\ c_{p3}\\ \vdots\\ c_{p(n-1)}\\ c_{pn}\end{Bmatrix}=\mu_{pj}\begin{Bmatrix}c_{p1}\\ c_{p2}\\ c_{p3}\\ \vdots\\ c_{p(n-1)}\\ c_{pn}\end{Bmatrix} \qquad (۲۱)$$

که در رابطه (۲۱)، ماتریس سختی $\mathbf{K}_j$ برابر است با

$$\mathbf{K}_j=\begin{bmatrix}k_{1j}+k_{2j} & -k_{2j} & 0 & \dots & \dots & 0\\ -k_{2j} & k_{2j}+k_{3j} & -k_{3j} & 0 & \dots & 0\\ 0 & -k_{3j} & k_{3j}+k_{4j} & -k_{4j} & \dots & 0\\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & -k_{(n-1)j} & k_{(n-1)j}+k_{nj} & -k_{nj}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & -k_{nj} & k_{nj}\end{bmatrix}$$
(۲۲)

رابطه (۲۱) یک مسأله مقدار ویژه است و μ_{pj} نشان‌دهنده مقادیر ویژه آن است که حل غیربدیهی آن این‌گونه است

$$\det\left(\mathrm{K}_j - \mu_{pj}\mathrm{I}\right)=0 \qquad (۲۳)$$

$\mathbf{K_j}$ از ستون jام اتصالات میانی در شکل ۱ بدست می‌آید که مولفه‌های بردار ویژه آن همان ضرایب c_{pi} در معادله (۱۱) هستند؛ چون هر ستون از اتصالات، ماتریس سختی مربوط به خود را دارد، برای به کار بردن تغییر متغیر و داشتن ضرایب c_{pi} یکسان در معادله (۱۱) لازم است، ماتریس‌های $\mathbf{K_j}$ بردارهای ویژه نرمالایز شده یکسانی داشته باشند، اما یکسان بودن مقادیر ویژه لازم نیست و این، یکی از شرایط جداسازی معادلات است که باید قبل از شروع حل بررسی شود.

با تعیین n مقدار ویژه μ_{pj} از معادله (۲۳)، n بردار ویژه نرمالیزه شده از معادله (۲۱) بدست می‌آید. این بردارهای ویژه ضرایب معادلات (۱۱)، جهت تعیین متغیرهای جدید هستند که معادلات حرکت را از هم جدا می‌کنند. اینک سیستم جدیدی از معادلات با متغیرهای جدید بدست آمده که شبیه یکدیگرند، بنابراین روش یکسانی برای حل دارند.

۵- تعیین مقادیر ویژه و توابع ویژه

برای تعیین فرکانس طبیعی و شکل مودها، عبارت نیرویی در معادلات حرکت سیستم جدید، صفر در نظر گرفته می‌شود. با قراردادن $u_{pj}(x,t)=w_{pj}(x)e^{i\omega_p t}$ و $\theta_{pj}(x,t)=\varphi_{pj}(x)e^{i\omega_p t}$ در معادلات (۱۶)، معادلات (۲۴) بدست می‌آید

$$-\rho A\omega_p^2 w_{pj}(x)-\frac{\kappa AG}{L}\left[w''_{pj}(x)-\varphi'_{pj}(x)\right]=0 \qquad (۱\text{-}۲۴)$$

$$\frac{EI}{L^3}\varphi''_{pj}(x)+\frac{\kappa AG}{L}\left[w'_{pj}(x)-\varphi_{pj}(x)\right]+\frac{\rho I}{L^2}\omega_p^2\varphi_{pj}(x)=0 \qquad (۲\text{-}۲۴)$$

با مرتب کردن روابط (۲۴)، معادلات (۲۵) بدست می‌آید

$$w_{pj}^{iv}+(\sigma_p+\tau_p)w''_{pj}-(\alpha_p-\sigma_p\tau_p)w_{pj}=0 \qquad (۱\text{-}۲۵)$$

$$\varphi_{pj}^{iv}+(\sigma_p+\tau_p)\varphi''_{pj}-(\alpha_p-\sigma_p\tau_p)\varphi_{pj}=0 \qquad (۲\text{-}۲۵)$$

که در آن $x_{j-1}<x<x_j$ است و کمیت‌ها عبارت‌اند از

$$\sigma_p=\frac{\rho L\omega_p^{\ 2}}{E}\ ,\ \tau_p=\frac{\rho L\omega_p^{\ 2}}{\kappa G}\ ,\ \alpha_p=\frac{A\rho L^3\omega_p^{\ 2}}{EI} \qquad (۲۶)$$

معادلات (۲۵) شبیه به یکدیگرند، بنابراین حل آنها نیز مانند هم خواهد بود. با حل این معادلات، شکل مودهای عرضی و زاویه‌ای تیر pام در بخش jام آن بدست می‌آید که عبارت است از [۲۶]:

$$\begin{aligned}w_{pj}=\{&A_{pj}\cosh\lambda_{1p}(x-x_{j-1})+B_{pj}\sinh\lambda_{1p}(x-x_{j-1})\\&+C_{pj}\cos\lambda_{2p}(x-x_{j-1})+D_{pj}\sin\lambda_{2p}(x-x_{j-1})\}\end{aligned} \qquad (۱\text{-}۲۷)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{pj}=\{&B_{pj}q_{1p}\cosh\lambda_{1p}(x-x_{j-1})+A_{pj}q_{1p}\sinh\lambda_{1p}(x-x_{j-1})\\&-D_{pj}q_{2p}\cos\lambda_{2p}(x-x_{j-1})+C_{pj}q_{2p}\sin\lambda_{2p}(x-x_{j-1})\}\end{aligned} \qquad (۲\text{-}۲۷)$$

که در آن کمیت‌ها عبارت‌اند از

$$\lambda_{1p}=\left[\sqrt{\left(\frac{\sigma_p-\tau_p}{2}\right)^2+\alpha_p}-\frac{\sigma_p+\tau_p}{2}\right]^{1/2},$$

$$\lambda_{2p}=\left[\sqrt{\left(\frac{\sigma_p-\tau_p}{2}\right)^2+\alpha_p}+\frac{\sigma_p+\tau_p}{2}\right]^{1/2}\ ,\lambda_{3p}=\sqrt{\tau_p}\ ,$$

$$q_{1p}=\frac{\left(\lambda_{3p}^2+\lambda_{1p}^2\right)}{\lambda_{1p}}\ ,\ q_{2p}=\frac{\left(\lambda_{3p}^2-\lambda_{2p}^2\right)}{\lambda_{2p}} \qquad (۲۸)$$

ضرایب A_{pj}، B_{pj}، C_{pj} و D_{pj} ثوابتی مرتبط به بخش jام از تیر pام هستند. هدف آن است که ثوابت آخرین بخش تیر یعنی $A_{p(m+1)}$، $B_{p(m+1)}$، $C_{p(m+1)}$ و $D_{p(m+1)}$، به اولین بخش آن یعنی A_{p1}، B_{p1}، C_{p1} و D_{p1} مربوط شود. با استفاده از معادلات (۱۹) و به کارگیری روش ماتریس انتقال، روابط بین ضرایب هر بخش با بخش‌های دیگر تیر تعیین می‌شود

$$\begin{Bmatrix}A_{m+1}\\B_{m+1}\\C_{m+1}\\D_{m+1}\end{Bmatrix}_p=\begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}&t_{14}\\t_{21}&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\t_{41}&\cdots&\cdots&t_{44}\end{bmatrix}_{pm}\begin{Bmatrix}A_m\\B_m\\C_m\\D_m\end{Bmatrix}_p=$$

$$=\begin{bmatrix}t_{11}&\cdots&t_{14}\\\vdots&\cdots&\vdots\\t_{41}&\cdots&t_{44}\end{bmatrix}_{pm}\cdots\begin{bmatrix}t_{11}&\cdots&t_{14}\\\vdots&\cdots&\vdots\\t_{41}&\cdots&t_{44}\end{bmatrix}_{p1}\begin{Bmatrix}A_1\\B_1\\C_1\\D_1\end{Bmatrix}_p=$$

$$=(\mathbf{T}_{4\times4})_{pm}(\mathbf{T}_{4\times4})_{p(m-1)}\cdots(\mathbf{T}_{4\times4})_{p1}\begin{Bmatrix}A_1\\B_1\\C_1\\D_1\end{Bmatrix}_p=(\mathbf{T}_{4\times4})_p\begin{Bmatrix}A_1\\B_1\\C_1\\D_1\end{Bmatrix}_p \qquad (۲۹)$$

که در آن، ماتریس $(\mathbf{T}_{4\times4})_{pj}$ به مقدار ویژه ω_p بستگی دارد و درایه‌های این ماتریس برابر است با

$$\mathbf{T}_{pj}=\begin{bmatrix}\cosh(\lambda_1 l_j)&\sinh(\lambda_1 l_j)&0&0\\\left(\beta_j\dfrac{q_1\cosh(\lambda_1 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}+\sinh(\lambda_1 l_j)\right)&\left(\beta_j\dfrac{q_1\sinh(\lambda_1 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}+\cosh(\lambda_1 l_j)\right)&\beta_j\dfrac{q_2\cos(\lambda_2 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}&\beta_j\dfrac{q_2\sin(\lambda_2 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}\\0&0&\cos(\lambda_2 l_j)&\sin(\lambda_2 l_j)\\\beta_j\dfrac{q_1\cosh(\lambda_1 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}&\beta_j\dfrac{q_1\sinh(\lambda_1 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}&\left(\beta_j\dfrac{q_1\cos(\lambda_2 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}-\sin(\lambda_2 l_j)\right)&\left(\beta_j\dfrac{q_1\sin(\lambda_2 l_j)}{\lambda_1 q_2+\lambda_2 q_1}+\cos(\lambda_2 l_j)\right)\end{bmatrix}_p \qquad (۳۰)$$

با مرتبط شدن ضرایب اولین بخش تیر به آخرین بخش آن، تعداد ثوابت مستقل به چهار ثابت کاهش می‌یابد که با ارضای شرایط مرزی تعیین می‌شوند. در این مقاله، شرط مرزی دو سر مفصل به طور کامل بیان می‌شود و برای شرایط مرزی دیگر می‌توان به طور مشابه عمل کرد [۲۶]

$$\begin{cases} Y_{i1}(0,T)=0 \rightarrow u_{p1}(0,t)=0 \rightarrow w_{p1}(0)=0 \\ \Phi'_{i1}(0,T)=0 \rightarrow \theta'_{p1}(0,t)=0 \rightarrow \varphi'_{p1}(0)=0 \\ Y_{i(m+1)}(L,T)=0 \rightarrow u_{p(m+1)}(1,t)=0 \rightarrow w_{p(m+1)}(1)=0 \\ \Phi'_{i(m+1)}(L,T)=0 \rightarrow \theta'_{p(m+1)}(1,t)=0 \rightarrow \varphi'_{p(m+1)}(1)=0 \end{cases} \tag{۳۱}$$

با ارضای معادلات در تکیه‌گاه سمت چپ تیر می‌توان نوشت

$$A_{p1}=C_{p1}=0 \tag{۳۲}$$

همچنین با ارضای معادلات در تکیه‌گاه سمت راست تیر و با توجه به معادلات (۲۹)، معادله (۳۳) به‌دست می‌آید

$$(\mathbf{S}_{2\times4})_p \begin{Bmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \\ C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{Bmatrix}_p = \mathbf{S}_p\mathbf{T}_p \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix}_p = (\mathbf{R}_{2\times4})_p \begin{Bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \\ D_1 \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۳۳}$$

که در آن درایه‌های ماتریس $(\mathbf{S}_{2\times4})_p$ برابر است با

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \end{bmatrix}_p ,$$

$$\begin{gathered} s_{11}=\cosh\lambda_1 l_{m+1} \quad , \quad s_{12}=\sinh\lambda_1 l_{m+1} \; , \\ s_{13}=\cos\lambda_2 l_{m+1} \quad , \quad s_{14}=\sin\lambda_2 l_{m+1} \; , \\ s_{21}=q_1\lambda_1\cosh\lambda_1 l_{m+1} \quad , \quad s_{22}=q_1\lambda_1\sinh\lambda_1 l_{m+1} \; , \\ s_{23}=q_2\lambda_2\cos\lambda_2 l_{m+1} \quad , \quad s_{24}=q_2\lambda_2\sin\lambda_2 l_{m+1} \end{gathered} \tag{۳۴}$$

$$\mathbf{R}_p=\mathbf{S}_p\mathbf{T}_p=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix}_p \tag{۳۵}$$

بنابراین جهت داشتن حل غیربدیهی این معادلات لازم است

$$\det\begin{vmatrix} r_{12} & r_{14} \\ r_{22} & r_{24} \end{vmatrix}_p = 0 \tag{۳۶}$$

این معادله مقادیر ω_p، فرکانس‌های طبیعی تیر pام را برای شرایط مرزی مفصلی می‌دهد. برای سایر تیرها در سیستم جدید معادلات مشابهی به‌دست می‌آید که باید جداگانه حل و فرکانس‌ها و شکل مودهای آنها تعیین شود.

۶- پاسخ اجباری به عبور جرم از سیستم

با کاربرد تئوری آنالیز مودال، می‌توان پاسخ اجباری $u_p(x,t)$ و $\theta_p(x\ t$ را برای pامین دسته از معادلات سیستم جدید بسط داد

$$u_p(x,t)=\sum_{k=1}^{N} w_{kp}(x)p_{kp}(t) \tag{۱-۳۷}$$

$$\theta_p(x,t)=\sum_{k=1}^{N} \varphi_{kp}(x)p_{kp}(t) \tag{۲-۳۷}$$

در معادلات (۳۷)، $p_{kp}(t)$ مختصات تعمیم‌یافته یا عمومی برای شیب و جابجایی تیر pام، با در نظر گرفتن تابع یکسان زمانی است. دادفرنیا و همکارانش [۲۹] نشان دادند که استفاده از تابع یکسان زمانی برای جابجایی و شیب، خطای قابل چشم‌پوشی را وارد معادلات می‌کند.

توابع ویژه $w_{kp}(x)$ و $\varphi_{kp}(x)$ به ترتیب، شکل مودهای جابجایی و زاویه‌ای تیر pام می‌باشند که خود به $m+1$ ضابطه تقسیم و در محل فنرهای میانی جدا می‌شوند و عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} w_{kp}&=f_{kp(j)}(x)= \\ &=\{A_{kp(j)}\cosh\lambda_{1kp}(x-x_{j-1})+B_{kp(j)}\sinh\lambda_{1kp}(x-x_{j-1}) \\ &\quad +C_{kp(j)}\cos\lambda_{2kp}(x-x_{j-1})+D_{kp(j)}\sin\lambda_{2kp}(x-x_{j-1})\} \end{aligned} \tag{۱-۳۸}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{kp}&=g_{kp(j)}(x)= \\ &=\{q_{1kp}(B_{kp(j)}\cosh\lambda_{1kp}(x-x_{j-1})+A_{kp(j)}\sinh\lambda_{1kp}(x-x_{j-1})) \\ &\quad +q_{2kp}(-D_{kp(j)}\cos\lambda_{2kp}(x-x_{j-1})+C_{kp(j)}\sin\lambda_{2kp}(x-x_{j-1}))\} \end{aligned} \tag{۲-۳۸}$$

معادلات (۳۸) برای کل تیر نوشته شده‌اند. در ادامه برای سادگی کار از اندیس j که به بخش jام تیر مربوط می‌شود صرف‌نظر می‌شود. حال با جایگذاری معادلات (۳۷) در (۱۶) روابط (۳۹) به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N}\left\{\rho A w_{kp}(x)\ddot{p}_{kp}(t)-\frac{\kappa AG}{L}\left(w''_{kp}-\phi'_{kp}\right)p_{kp}(t)\right\}= \\ &\qquad = c_{pr}\frac{P(t)}{L}\delta\left(x-\zeta(t)\right) \end{aligned} \tag{۱-۳۹}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{EI}{L^3}\phi''_{kp}p_{kp}(t)+\frac{\kappa AG}{L}\left(w'_{kp}-\phi_{kp}\right)p_{kp}(t)\right. \\ &\qquad \left. -\frac{\rho I}{L^2}\phi_{kp}(x)\ddot{p}_{kp}(t)\right\}=0 \end{aligned} \tag{۲-۳۹}$$

از تحلیل ارتعاشات آزاد می‌توان نوشت

$$-\frac{\kappa AG}{L}\left(w''_{kp}-\phi'_{k}\right)=\rho A\omega_{kp}^2 w_{kp}(x) \tag{۱-۴۰}$$

$$\frac{EI}{L^3}\phi''_{kp}(x)+\frac{\kappa AG}{L}\left(w'_{kp}-\phi_{kp}\right)=-\frac{\rho I}{L^2}\omega_{kp}^2\phi_k(x) \tag{۲-۴۰}$$

ω_{kp} در این معادلات، kامین فرکانس طبیعی تیر pام است. با جایگزینی معادلات (۴۰) در (۳۹)، معادلات (۴۱) به‌دست می‌آید

$$\rho A\sum_{k=1}^{N} w_{kp}\left[\ddot{p}_{kp}(t)+\omega_{kp}^{2}p_{kp}(t)\right]=c_{pr}\frac{P(t)}{L}\delta\left(x-\zeta\right)$$
(۴۱-۱)

$$\rho I\sum_{k=1}^{N}\varphi_{kp}\left[\ddot{p}_{kp}(t)+\omega_{kp}^{2}p_{kp}(t)\right]=0 \qquad (۴۱-۲)$$

شرط تعامد مودها برای $k,q=1,2,\ldots,N$ عبارتست از [۲۹ و ۳۰]

$$\int_{0}^{1}\left[w_{kp}(x)w_{qp}(x)+\frac{I}{AL^{2}}\varphi_{kp}(x)\varphi_{qp}(x)\right]dx=\delta_{kq} \qquad (۴۲)$$

با به کارگیری شرط تعامد در معادلات (۴۱) می‌توان نوشت

$$\ddot{p}_{qp}(t)+\omega_{qp}^{2}p_{qp}(t)=c_{pr}\frac{P(t)}{\rho AL}\int_{0}^{1}w_{qp}(x)\delta\left(x-\zeta\right)dx= =c_{pr}\frac{P(t)}{\rho AL}w_{qp}(\zeta(t))=Q_{qp}(t) \qquad (۴۳)$$

که با توجه به معادله (۳۸-۱) برای نیروی تعمیم‌یافته $Q_{qp}(t)$ به ازای $x_{j-1}<\zeta(t)<x_{j}$ می‌توان نوشت

$$Q_{qp}(t)=c_{pr}\frac{P(t)}{\rho AL}w_{qp}(\zeta(t))=c_{pr}\frac{P(t)}{\rho AL}f_{qp(j)}(\zeta(t)) \qquad (۴۴)$$

با جایگذاری معادله (۳۷-۱) در (۱۸) می‌توان نشان داد که

$$y_{r}(x,t)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}w_{kp}(x)p_{kp}(t) \qquad (۴۵)$$

و با جایگذاری معادله (۴۵) در (۱۷) می‌توان نوشت

$$P(t)=M\left\{g-\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}\begin{bmatrix}w_{kp}(\zeta)\ddot{p}_{kp}+2\dot{\zeta}w_{kp}'(\zeta)\dot{p}_{kp}\\+\left(\dot{\zeta}^{2}w_{kp}''(\zeta)+\ddot{\zeta}w_{kp}'(\zeta)\right)p_{kp}\end{bmatrix}\right\} \qquad (۴۶)$$

با توجه به این رابطه، طرف راست معادله (۴۳) که به $P(t)$ بستگی دارد، خود وابسته به $p_{qp}(t)$ است. پس معادله (۴۳)، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل کوپل مرتبه دوم است که برای حل، باید روشی متفاوت مورد استفاده قرار گیرد. محمود [۲۸]، یک روش تکرار برای حل این معادلات ارائه کرد، اما پیللو [۲۷]، روش سریع‌تری به کار گرفت که در اینجا نیز استفاده می‌شود. در این روش، توابعی کمکی مشابه رابطه (۴۷) تعریف می‌شود که جهت حل معادلات با رسیدن به یک معادله ماتریسی، نیازی به روش تکرار نیست.

$$\vartheta_{kp,e}(x)=w_{kp}^{(e)}(x) \qquad k=1,2,\ldots,N;\ p=1,2,\ldots,n \qquad (۴۷)$$

که در اینجا (e)، نشان‌دهنده مرتبه مشتق نسبت به x است.

با جایگزینی معادله (۴۶) در (۴۴) و استفاده از رابطه (۴۷)، می‌توان رابطه (۴۸) را اینگونه نوشت

$$Q_{qp}=c_{pr}\frac{M}{\rho AL}\vartheta_{qp,0}(\zeta)\left\{g-\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_{rp}\begin{pmatrix}\vartheta_{kp,0}(\zeta)\ddot{p}_{kp}+2\dot{\zeta}\vartheta_{kp,1}(\zeta)\dot{p}_{kp}\\+\left[\dot{\zeta}^{2}\vartheta_{kp,2}(\zeta)+\ddot{\zeta}\vartheta_{kp,1}(\zeta)\right]p_{kp}\end{pmatrix}\right\}$$
(۴۸)

که در آن $p=1,2,\ldots,n$ و $q=1,2,\ldots,N$ می‌باشد.

در اینجا هدف جدا کردن ترم‌های $p_{kp}(t)$ و مشتقاتش است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، طرف چپ معادله (۴۳) جدا می‌شود، اما طرف راست آن در ارتعاشات نیرویی، به دلیل درهم‌پیچیدگی و کوپل‌شدن کلیه جملات در معادله (۴۸)، مستقیماً قابل جدا شدن نمی‌باشد؛ بنابراین معادله (۴۳) به‌صورت دستگاهی از معادلات دیفرانسیل کوپل برای هر تیر، $p=1,2,\ldots,n$، بسط داده می‌شود

$$\begin{cases}\ddot{p}_{q1}(t)+\omega_{q1}^{2}p_{q1}(t)=c_{1r}\dfrac{P(t)}{\rho AL}w_{q1}\left(\zeta(t)\right)=Q_{q1}(t)\\ \ddot{p}_{q2}(t)+\omega_{q2}^{2}p_{q2}(t)=c_{2r}\dfrac{P(t)}{\rho AL}w_{q2}\left(\zeta(t)\right)=Q_{q2}(t)\\ \vdots\quad\cdots\quad\vdots\quad\cdots\quad\vdots\quad\cdots\quad\vdots\\ \ddot{p}_{qn}(t)+\omega_{qn}^{2}p_{qn}(t)=c_{nr}\dfrac{P(t)}{\rho AL}w_{qn}\left(\zeta(t)\right)=Q_{qn}(t)\end{cases} \qquad (۴۹)$$

مجموعه دستگاه معادلات (۴۹) شامل، n ردیف است (تعداد تیرها) که در هر ردیف N معادله (تعداد جملات در روابط (۳۷))، و در کل $n\times N$ معادله وجود دارد. می‌توان این دستگاه معادلات را به فرم ماتریسی (۵۰) نشان داد

$$\begin{cases}\ddot{\mathbf{P}}_{1}(t)+\mathbf{\Omega}_{1}^{2}\mathbf{P}_{1}(t)=\mathbf{Q}_{1}(t)\\ \ddot{\mathbf{P}}_{2}(t)+\mathbf{\Omega}_{2}^{2}\mathbf{P}_{2}(t)=\mathbf{Q}_{2}(t)\\ \vdots\quad\cdots\quad\vdots\quad\cdots\quad\vdots\\ \ddot{\mathbf{P}}_{n}(t)+\mathbf{\Omega}_{n}^{2}\mathbf{P}_{n}(t)=\mathbf{Q}_{n}(t)\end{cases} \qquad (۵۰)$$

که برای دسته pام از این معادلات، ماتریس‌ها عبارت‌اند از

$$\mathbf{P}_{p}(t)=\begin{Bmatrix}p_{1}\\p_{2}\\\vdots\\p_{N}\end{Bmatrix}_{p},\ \mathbf{Q}_{p}(t)=\begin{Bmatrix}Q_{1}\\Q_{2}\\\vdots\\Q_{N}\end{Bmatrix}_{p},\ \mathbf{\Omega}_{p}^{2}=\begin{bmatrix}\omega_{1}^{2}&0&\cdots&0\\0&\omega_{2}^{2}&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\omega_{N}^{2}\end{bmatrix}_{p}$$
(۵۱)

لازم است معادله (۴۸) برای به‌کارگیری در دستگاه معادلات (۵۰) به فرم ماتریسی نوشته شود؛ لذا برای دسته pام از دستگاه معادلات می‌توان نوشت

$$\mathbf{Q}_{p}=c_{pr}\frac{M}{\rho AL}\mathbf{V}_{p,0}(\zeta)\left\{\mathbf{g}-\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{rp}\begin{pmatrix}\mathbf{V}_{p,0}^{T}(\zeta)\ddot{\mathbf{P}}_{p}+2\dot{\zeta}\mathbf{V}_{p,1}^{T}(\zeta)\dot{\mathbf{P}}_{p}\\+\begin{pmatrix}\dot{\zeta}^{2}\mathbf{V}_{p,2}^{T}(\zeta)\\+\ddot{\zeta}\mathbf{V}_{p,1}^{T}(\zeta)\end{pmatrix}\mathbf{P}_{p}\end{pmatrix}\right\}$$
(۵۲)

که در آن بردار $\mathbf{V}_{p,e}$ این‌گونه تعریف می‌شود

$$\mathbf{V}_{p,e}(x)=\left[\vartheta_{k}(x)\right]_{p,e}=\left[\vartheta_{1}(x)\quad\vartheta_{2}(x)\quad\cdots\quad\vartheta_{N}(x)\right]_{p,e}^{T}$$
(۵۳)

با جایگذاری معادله (۵۲) در (۵۰) و با مرتب کردن جملات آن، یک مجموعه دستگاه معادلات بدست می‌آید. به دلیل پیچیدگی معادلات برای رعایت اختصار، فقط دسته pام از این دستگاه معادلات بیان می‌شود

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{M}_{pi}(t)\ddot{\mathrm{P}}_i(t)+\mathrm{D}_{pi}(t)\dot{\mathrm{P}}_i(t)+\mathrm{K}_{pi}(t)\mathrm{P}_i(t)\right)=\mathrm{q}_p(t)$$ (۵۴)

که در آن بردارها و ماتریس‌ها عبارت‌اند از

$$\mathbf{q}_p(t)=c_{pr}\frac{Mg}{\rho AL}\mathbf{V}_{p,0}(\zeta(t))$$ (۱-۵۵)

$$\mathbf{M}_{pi}(t)=\mathbf{I}_N\delta_{pi}+c_{pr}\bar{c}_{ri}\frac{M}{\rho AL}\mathbf{V}_{p,0}(\zeta)\mathbf{V}_{i,0}^T(\zeta)$$ (۲-۵۵)

$$\mathbf{D}_{pi}(t)=2\dot{\zeta}c_{pr}\bar{c}_{ri}\frac{M}{\rho AL}\mathbf{V}_{p,0}(\zeta)\mathbf{V}_{i,1}^T(\zeta)$$ (۳-۵۵)

$$\mathbf{K}_{pi}(t)=\mathbf{\Omega}_p^2\delta_{pi}+c_{pr}\bar{c}_{ri}\frac{M}{\rho AL}\mathbf{V}_{p,0}(\zeta)\left[\dot{\zeta}^2\mathbf{V}_{i,2}^T(\zeta)+\ddot{\zeta}\mathbf{V}_{i,1}^T(\zeta)\right]$$ (۴-۵۵)

که $p,i=1,2,\ldots,n$ و $\mathbf{I}_N$ ماتریس همانی N بعدی است. سرانجام با مرتب کردن معادلات (۵۴)، می‌توان آن‌ها را به فرم نهایی (۵۶) نشان داد

$$\mathrm{M}(t)\ddot{\mathrm{P}}(t)+\mathrm{D}(t)\dot{\mathrm{P}}(t)+\mathrm{K}(t)\mathrm{P}(t)=\mathrm{q}(t)$$ (۵۶)

در رابطه (۵۶) $\mathbf{P}(t)$ مجهول است که شامل کلیه بردارهای مختصات تعمیم‌یافته تیرهاست. ماتریس‌ها و بردارها در این رابطه عبارت‌اند از

$$\mathbf{M}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \cdots & \mathbf{M}_{1n}\\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \cdots & \mathbf{M}_{2n}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ \mathbf{M}_{n1} & \cdots & \cdots & \mathbf{M}_{nn}\end{bmatrix},\ \mathbf{P}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_1\\ \mathbf{P}_2\\ \vdots\\ \mathbf{P}_n\end{Bmatrix},\ \mathbf{q}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{q}_1\\ \mathbf{q}_2\\ \vdots\\ \mathbf{q}_n\end{Bmatrix},$$
$$\mathbf{D}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \cdots & \mathbf{D}_{1n}\\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \cdots & \mathbf{D}_{2n}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ \mathbf{D}_{n1} & \cdots & \cdots & \mathbf{D}_{nn}\end{bmatrix},\ \mathbf{K}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1n}\\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2n}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ \mathbf{K}_{n1} & \cdots & \cdots & \mathbf{K}_{nn}\end{bmatrix}$$ (۵۷)

حل معادله نهایی (۵۶)، نیاز به شرایط اولیه $\mathbf{P}(0)$ و $\dot{\mathbf{P}}(0)$ دارد. با اعمال شرط تعامد (۴۲) در معادلات (۳۷)، بردار شرایط اولیه برای دسته pام از معادلات به‌دست می‌آید

$$\mathrm{P}_p(0)=\int_0^1\left[u_{0p}(x)\mathrm{V}_{p,0}(x)+\frac{I}{AL}\theta_{0p}(x)\psi_{p,0}(x)\right]dx$$ (۱-۵۸)

$$\dot{\mathrm{P}}_p(0)=\int_0^1\left[\dot{u}_{0p}(x)\mathrm{V}_{p,0}(x)+\frac{I}{AL}\dot{\theta}_{0p}(x)\psi_{p,0}(x)\right]dx$$ (۲-۵۸)

که در آن بردار $\psi_{p,0}(x)$ این‌گونه تعریف می‌شود

$$\mathbf{\Psi}_{p,0}(x)=\left[\varphi_1(x)\quad \varphi_2(x)\quad \cdots\quad \varphi_N(x)\right]_p^T$$ (۵۹)

$u_{0p}(x)$، $\dot{u}_{0p}(x)$، $\theta_{0p}(x)$ و $\dot{\theta}_{0p}(x)$ شرایط اولیه سیستم جدید هستند که از معادلات (۱۱) بر حسب شرایط اولیه سیستم اصلی $y_{0i}(x)$، $\dot{y}_{0i}(x)$، $\phi_{0i}(x)$ و $\dot{\phi}_{0i}(x)$ به‌دست می‌آیند و عبارت‌اند از

$$u_{0p}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_{pi}y_{0i}(x)\ ,\ \dot{u}_{0p}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_{pi}\dot{y}_{0i}(x)$$ (۱-۶۰)

$$\theta_{0p}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_{pi}\phi_{0i}(x)\ ,\ \dot{\theta}_{0p}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_{pi}\dot{\phi}_{0i}(x)$$ (۲-۶۰)

حال باید شرایط اولیه (۵۸) را برای استفاده در حل معادله نهایی (۵۶)، به فرم برداری بیان کرد

$$\mathbf{P}(0)=[\mathbf{P}_1(0)\quad \mathbf{P}_2(0)\quad \cdots\quad \mathbf{P}_n(0)]^T$$ (۱-۶۱)

$$\dot{\mathbf{P}}(0)=[\dot{\mathbf{P}}_1(0)\quad \dot{\mathbf{P}}_2(0)\quad \cdots\quad \dot{\mathbf{P}}_n(0)]^T$$ (۲-۶۱)

پس از حل معادله (۵۶) با استفاده از شرایط اولیه و به دست آوردن مختصات تعمیم یافته کامل $\mathbf{P}(t)$، مختصات تعمیم‌یافته $\mathbf{P}_p(t)$ برای تیر pام محاسبه و پاسخ نیرویی سیستم جدید تعیین می‌شود

$$u_p(x,t)=\mathrm{V}_{p,0}^T(x)\mathrm{P}_p(t)$$ (۱-۶۲)

$$\theta_p(x,t)=\Psi_{p,0}^T(x)\mathrm{P}_p(t)$$ (۲-۶۲)

اینک با استفاده از معادلات (۱۱ و ۱۲) می‌توان پاسخ سیستم اصلی را محاسبه کرد. در ادامه، برای تیر iام از سیستم اصلی، می‌توان ممان خمشی $M_i(x,t)$ و نیروی برشی $Q_i(x,t)$ را به‌دست آورد

$$M_i(x,t)=\frac{EI}{L}\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{ip}\Psi_{p,1}^T(x)\mathrm{P}_p(t)\qquad i=1,2,\ldots,n$$ (۱-۶۳)

$$Q_i(x,t)=\kappa AG\sum_{p=1}^{n}\bar{c}_{ip}\left(\mathrm{V}_{p,1}^T(x)-\Psi_{p,0}^T(x)\right)\mathrm{P}_p(t)$$ (۲-۶۳)

۶-۲- جایگزینی نیروی متحرک به جای جرم متحرک

با فرض نیرو به جای جرم متحرک از اثر ترم‌های کوریولیس، گریز از مرکز، اینرسی و شتاب، چشم‌پوشی می‌شود. در بسیاری از کارهای گذشته از این فرض ساده‌کننده استفاده شده است. نیروی بین تیر و جرم در معادله (۱۷) با صرف‌نظر از این ترم‌ها، فقط به نیروی گرانشی کاهش می‌یابد

$$P(t)=Mg$$ (۶۴)

همچنین برای معادلات (۴۸، ۵۲ و ۵۵-۱) می‌توان نوشت

$$Q_{qp}(t)=c_{pr}\frac{Mg}{\rho AL}\vartheta_{qp,0}(\zeta)\rightarrow \mathbf{Q}_p(t)=\mathbf{q}_p(t)=c_{pr}\frac{Mg}{\rho AL}\mathbf{V}_{p,0}(\zeta)$$ (۶۵)

ماتریس‌ها در معادلات (۵۵) در حالت عبور نیرو عبارت‌اند از

$$\mathbf{M}_{pi}(t)=\mathbf{I}_N\delta_{pi}\ ,\ \mathbf{D}_{pi}(t)=\mathbf{0}\ ,\ \mathbf{K}_{pi}(t)=\mathbf{\Omega}_p^2\delta_{pi} \qquad (۶۶)$$

بنابراین معادله (۵۴) که کوپل بود، نیز کاهش می‌یابد

$$\ddot{\mathbf{P}}_p(t)+\mathbf{\Omega}_p^2\mathbf{P}_p(t)=\mathbf{q}_p(t) \qquad (۶۷)$$

که معادله (۶۷)، یک معادله غیرکوپل برای دسته pام از دستگاه معادلات است و با استفاده از شرایط مرزی (۵۸) قابل حل است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که ماتریس‌های (۵۷) نیز کاهش می‌یابند و عبارت‌اند از

$$\mathbf{M}(t)=\mathbf{I}_{(n\times N)*(n\times N)}\ ,\ \mathbf{D}(t)=\mathbf{0}\ ,$$

$$\mathbf{K}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{\Omega}_1^2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_2^2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_n^2\end{bmatrix} \qquad (۶۸)$$

بنابراین معادله نهایی (۵۶) این‌گونه بیان می‌شود

$$\ddot{\mathbf{P}}(t)+\mathbf{K}(t)\mathbf{P}(t)=\mathbf{q}(t) \qquad (۶۹)$$

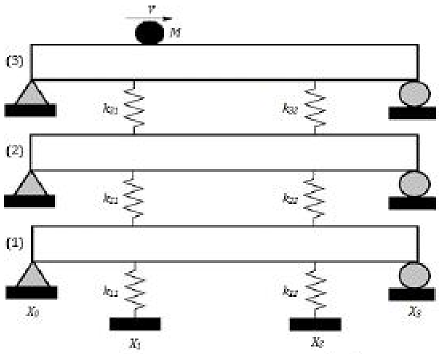
این معادله همچون (۶۷) غیرکوپل است، با این تفاوت که دربردارنده کلیه دسته معادلات در یک فرم کلی ماتریسی و برداری است و با استفاده از شرایط مرزی (۶۱)، به‌طور مشابه می‌توان مختصات تعمیم یافته کامل $\mathbf{P}(t)$ و سپس پاسخ نیرویی را برای سیستم جدید و اصلی محاسبه کرد.

۷- نتایج عددی

مطابق شکل ۲، سیستمی متشکل از سه تیر تیموشنکو با مقاطع مستطیلی شکل به ارتفاع H=1m و پهنای W=0.5m، L=50m ، L_1=0.3L ، L_2=0.4L ، $E=2.1\times10^{11}\frac{N}{m^2}$ ، $\nu=0.3$ ، $\rho=7860\frac{kg}{m^3}$ ، $M=0.2\rho AL$ و اتصالات انعطاف‌پذیر میانی $k_{11}=k$ ، $k_{21}=2k$ ، $k_{31}=3k$ ، $k_{12}=2k$ ، $k_{22}=4k$ ، $k_{32}=6k$ و شرایط مرزی مفصلی در نظر گرفته می‌شود.

به عنوان اولین قدم در حل این مسأله، باید یکسان بودن بردارهای ویژه نرمالایز شده دو ماتریس $\mathbf{K}_1$ و $\mathbf{K}_2$ برای دو ستون فنر بررسی گردد. طبق معادله (۲۳)، $\mathbf{K}_2$=2$\mathbf{K}_1$ است، بنابراین بردارهای ویژه نرمالیزه شده این دو ماتریس برابرند و روش ارائه شده برای این مثال مناسب است.

در این بخش، جابجایی نقاط میانی تیرها به‌دست می‌آید و نسبت به جابجایی ماکزیمم استاتیکی تیر اویلر برنولی دو سر مفصل، بی‌بعد می‌شود. این جابجایی استاتیکی به صورت بی‌بعد شده، در رابطه (۷۰) تعریف می‌شود



شکل ۲ مجموعه‌ای از سه تیر و دو ستون فنر، تحت عبور جرم

$$y_{st}=\frac{MgL^3}{48EI} \qquad (۷۰)$$

سرعت بار متحرک نسبت به سرعت بحرانی V_{cr}، بی‌بعد می‌شود؛ یعنی سرعتی که عبور متوالی نیروی متحرک با آن سرعت از روی یک تیر اویلر برنولی افزایش نامحدود دامنه را به همراه دارد [۳۱] و عبارت است از

$$V_{cr}=\frac{\omega_1 L}{\pi}\ ,\ \omega_1=\sqrt{\frac{EI}{m}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \qquad (۷۱)$$

۷-۱- بررسی پاسخ سیستم تحت عبور جرم متحرک

در شکل‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌شود که در حالت $k=k_l=0$ جابجایی نقاط میانی تیرهایی با یکدیگر برابر است که بار از روی آنها عبور می‌کند. این نتیجه منطقی است، زیرا در این حالت، مسأله به حل سیستم تک تیری تبدیل می‌شود که تمام تیرها مشابهند و ارتباطی با یکدیگر ندارند و تیرهایی که بار از روی آنها عبور نمی‌کند، ساکن باقی می‌مانند.

با مقایسه حالت‌های k=0 و k≠0 می‌توان مشاهده کرد که ماکزیمم جابجایی برای سیستم چند تیری، کمتر از یک تیر به تنهایی است. همچنین در این شکل‌ها دیده می‌شود که با افزایش در مقادیر سختی k، جابجایی نقطه میانی تیری که بار از روی آن عبور می‌کند کاهش می‌یابد، اما روند متفاوتی در سایر تیرها مشاهده می‌شود. برای مقادیر بسیار ناچیز k، افزایش در مقدار سختی باعث افزایش جابجایی نقاط میانی سایر تیرها می‌شود؛ اما به ازای مقادیر بالای سختی، افزایش در مقدار آن از جابجایی نقاط میانی تیرهای دیگر می‌کاهد که البته به مقادیر سختی در این مثال بستگی دارد.

در این شکل‌ها مشاهده می‌شود که با افزایش در پارامتر r و عبور بار از روی تیر بالاتر، ماکزیمم جابجایی نقاط میانی

سیستم افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، ماکزیمم جابجایی با عبور بار از روی تیر نزدیک‌تر به زمین کاهش می‌یابد.

همچنین با مقایسه شکل‌های ۳ و ۴ دیده می‌شود که با افزایش k، به علت تغییر در فرکانس‌های طبیعی سیستم، نقاط ماکزیمم جابجایی به سمت چپ و با افزایش سرعت به سمت راست سیستم جابجا می‌شوند.

برای تحلیل بهتر پاسخ سیستم، نیروی برشی و ممان خمشی ماکزیمم تیر اویلر برنولی دو سر مفصل در حالت استاتیکی برای بی‌بعدسازی، این‌گونه تعریف می‌شود

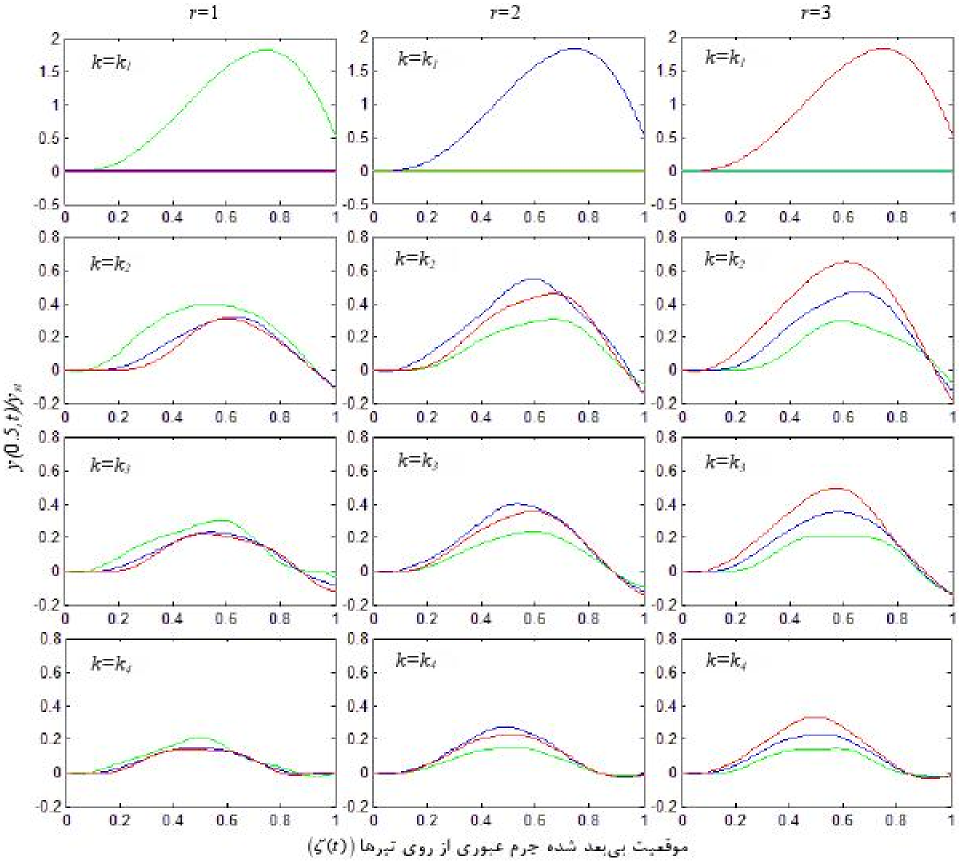
$$Q_{st}=\frac{Mg}{2} \quad , \quad M_{st}=\frac{MgL}{2} \tag{۷۲}$$

در شکل ۵ مشاهده می‌شود که ماکزیمم ممان خمشی نقاط میانی سیستم، مربوط به تیری است که جرم از روی آن عبور می‌کند که این مقدار با افزایش در سختی k، کاهش می‌یابد. در سایر تیرها با افزایش سختی برای مقادیر ناچیز آن، ماکزیمم ممان خمشی افزایش و برای مقادیر بالای سختی کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که ماکزیمم ممان خمشی نقاط میانی سیستم با افزایش سختی به سمت چپ تیرها جابجا می‌شود.

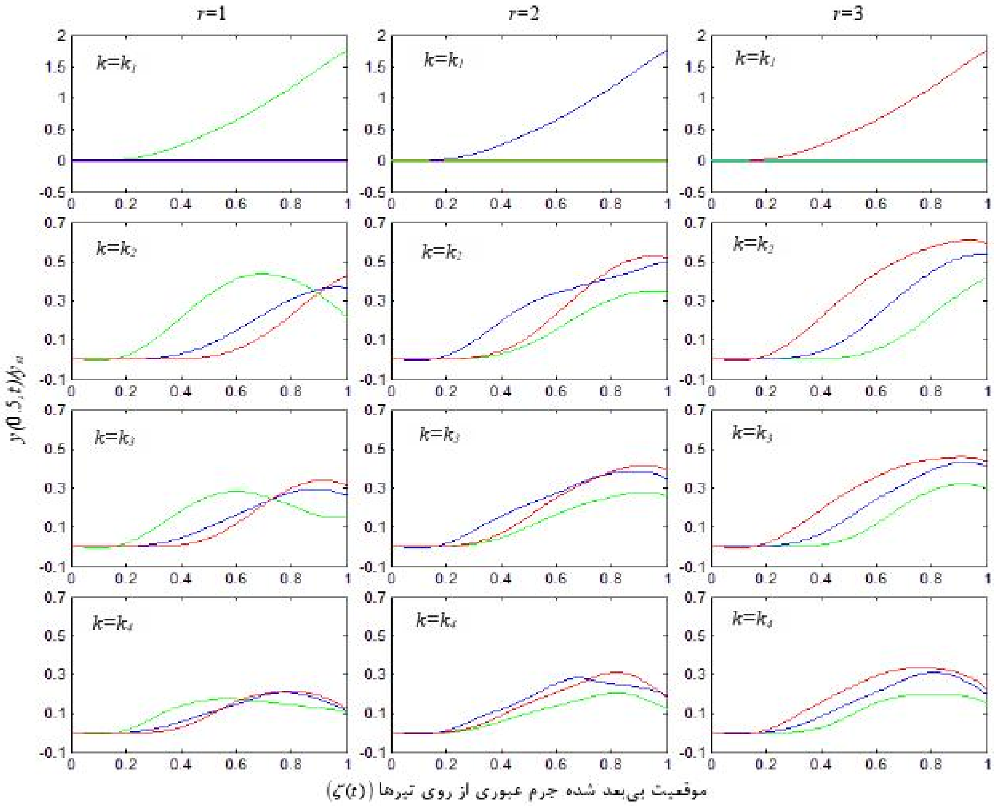
۷-۲- اعتبارسنجی نتایج با مقایسه پاسخ سیستم بین دو حالت عبور جرم و عبور نیرو

در این قسمت، اعتبارسنجی نتایج این مقاله با مرجع [۲۶]، با مقایسه دو حالت عبور جرم و نیرو، به ازای افزایش جرم، سرعت و شتاب بار متحرک، مورد بررسی قرار می‌گیرد و اختلاف پاسخ بین دو حالت نیرو [۲۶] و جرم متحرک، به‌طور کامل تشریح می‌شود. در ادامه برای ساده‌سازی، پارامتری جدید تعریف می‌شود که نشان‌دهنده جرم هر تیر است

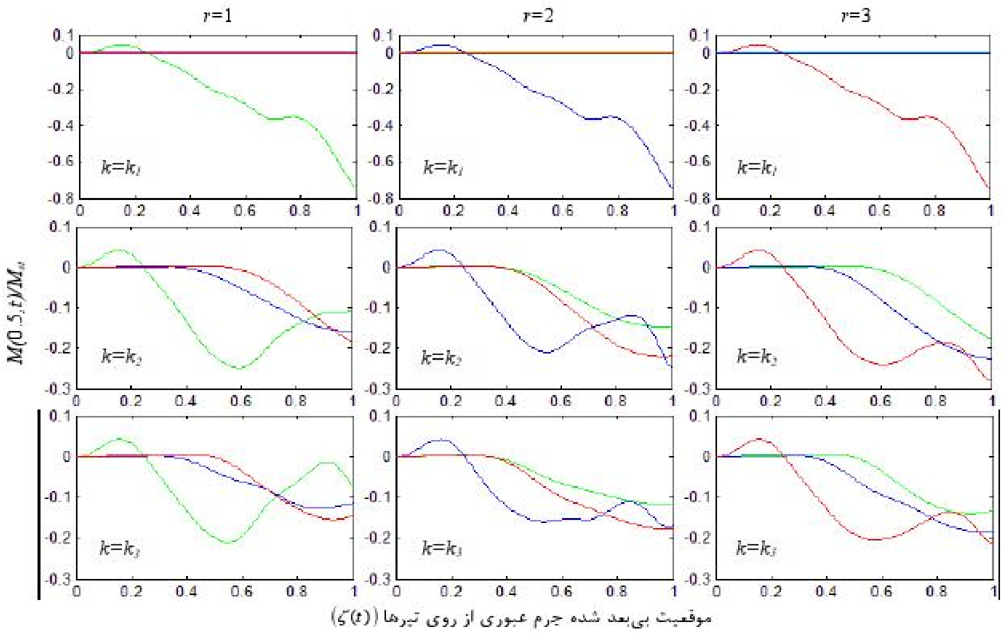
$$m_b=\rho AL \tag{۷۳}$$



شکل ۳ مقایسه نمودارهای جابجایی عرضی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها برحسب موقعیت بی‌بعد شده جرم متحرک با سرعت $V=0.5V_{cr}$ به ازای افزایش سختی تیر ۱ (سبز)، تیر ۲ (آبی)، تیر ۳ (قرمز) $\left(k_1=0,\ k_2=2.5\times10^6,\ k_3=5\times10^6,\ k_4=10\times10^6\ \frac{N}{m}\right)$



شکل۴ مقایسه نمودارهای جابجایی عرضی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها بر حسب موقعیت بی‌بعد شده جرم متحرک با سرعت $V=V_{cr}$ به ازای افزایش سختی تیر ۱ (سبز)، تیر ۲ (آبی)، تیر ۳ (قرمز) $\left(k_1=0,\ k_2=2.5\times10^6,\ k_3=5\times10^6,\ k_4=10\times10^6\,\frac{N}{m}\right)$



شکل۵ مقایسه نمودارهای ممان خمشی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها بر حسب موقعیت بی‌بعد شده جرم متحرک با سرعت $V=V_{cr}$ به ازای افزایش سختی تیر ۱ (سبز)، تیر ۲ (آبی)، تیر ۳ (قرمز) $\left(k_1=0,\ k_2=2.5\times10^6,\ k_3=5\times10^6\,\frac{N}{m}\right)$

در شکل ۶ مشاهده می‌شود که با افزایش جرم، اختلاف پاسخ عبور جرم و نیرو افزایش می‌یابد، به گونه‌ای که برای اجرام بسیار سبک اختلاف ناچیز است و با افزایش جرم، زیاد می‌شود. همچنین ماکزیمم جابجایی با افزایش جرم زیاد شده و به سمت راست جابجا می‌شود و ماکزیمم جابجایی در حالت عبور جرم همواره ازحالت عبور نیرو بیشتر است. این امر به این علت است که با در نظر گرفتن نیرو به جای جرم متحرک، تنها ترم گرانشی جرم وارد محاسبات می‌شود و از سایر ترم‌های نیرویی صرف‌نظر می‌شود.

در شکل ۷ نیز مشاهده می‌شود که با افزایش شتاب، اختلاف پاسخ و ماکزیمم جابجایی نقاط میانی سیستم زیاد می‌شود. در شکل ۷ نیز، ماکزیمم جابجایی مربوط به حالت عبور جرم بیشتر از عبور نیرو است.

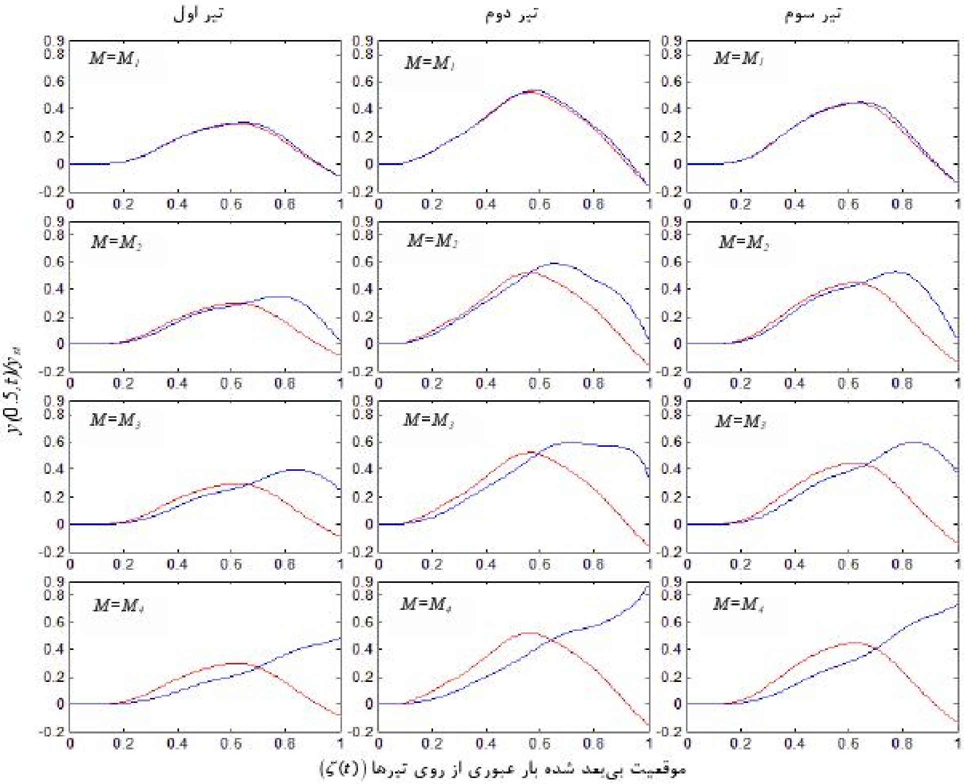
همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، برای سرعت بسیار پایین و شبه استاتیکی بار متحرک، اختلاف پاسخ بین دو حالت عبور جرم و نیرو تقریبا صفر است و با افزایش سرعت زیاد می‌شود. افزایش سرعت، باعث افزایش جابجایی در هر دو حالت می‌شود، ولی این افزایش جابجایی برای حالت عبور جرم بیشتر از حالت عبور نیرو است.

۷-۳- تأثیر هر یک از ترم‌های نیرویی به‌طور مجزا بر پاسخ سیستم

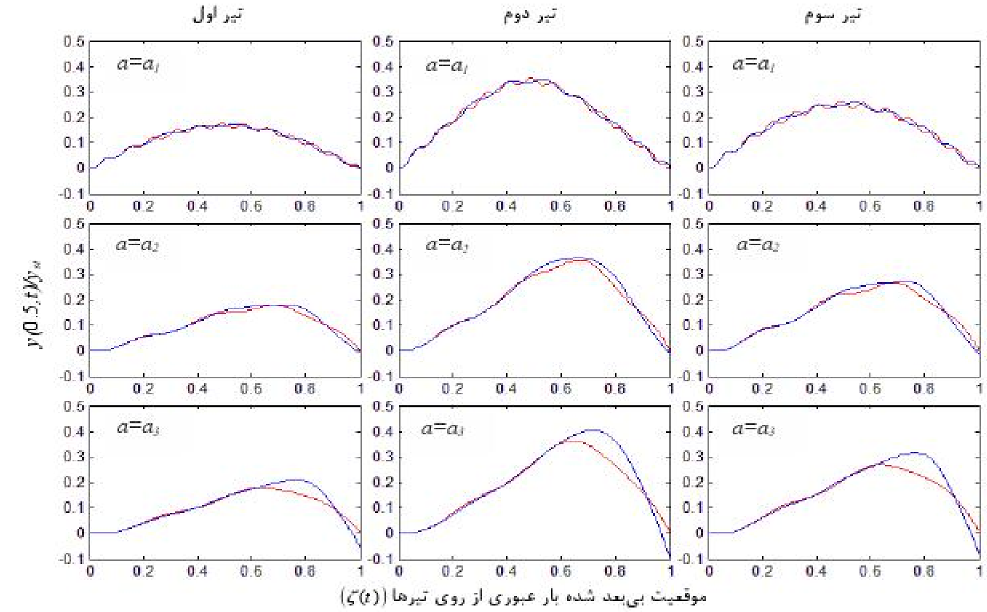
در این قسمت، اختلاف پاسخ بین عبور نیرو یعنی فقط ترم گرانشی را با سایر ترم‌های نیرویی دیگر در معادله (۳) و تأثیر آنها بر پاسخ سیستم به‌طور مجزا بررسی می‌شود. بدین منظور پارامتری جدید تعریف می‌شود

$$\Delta(0.5,t)=\frac{y(0.5,t)-y_f(0.5,t)}{y_{st}} \tag{۷۴}$$

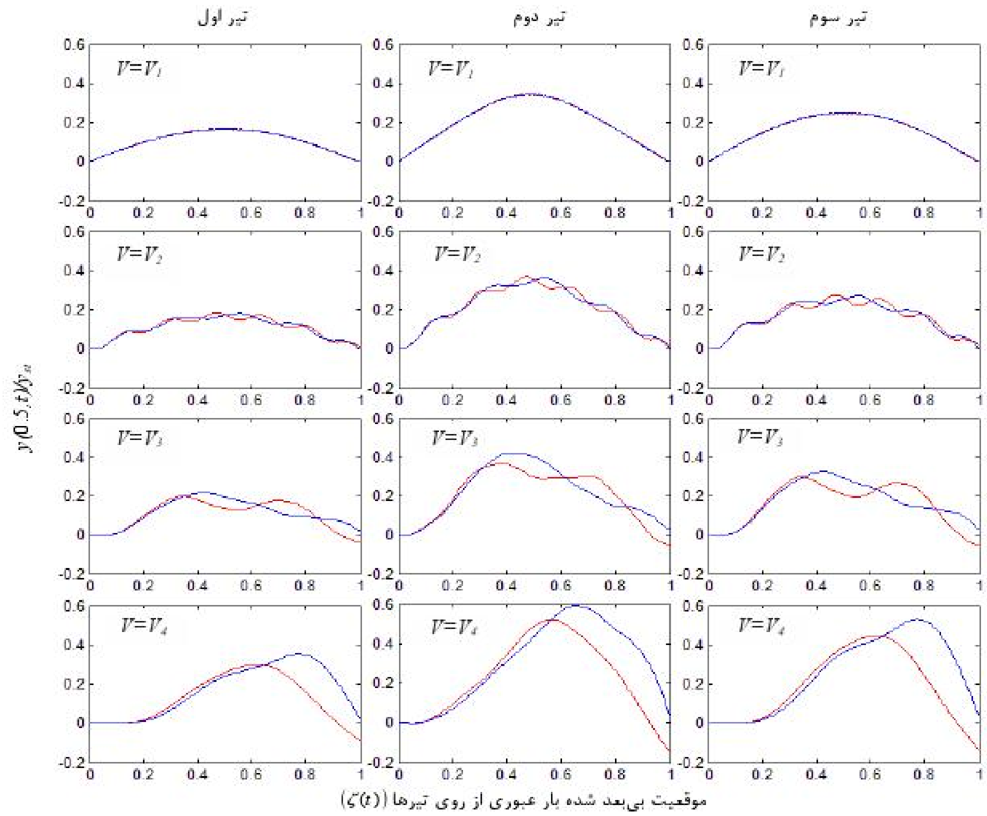
که در آن، y_f جابجایی برای عبور نیرو با در نظر گرفتن تنها ترم گرانشی و y جابجایی با در نظر گرفتن ترم‌های نیرویی دیگر به‌طور مجزا است.



شکل۶ مقایسه نمودارهای جابجایی عرضی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها بر حسب موقعیت بی‌بعد شده بار روی تیر دوم (r=2) با سرعت $V=0.5V_{cr}$ و $k=2.5\times10^6\,\frac{N}{m}$، به ازای افزایش جرم عبور جرم (آبی)، عبور نیرو [۲۶] (قرمز) $(M_1=0.1, M_2=1, M_3=2, M_4=4)\times m_b$



شکل ۷ مقایسه نمودارهای جابجایی عرضی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها بر حسب موقعیت بی‌بعد شده بار بر روی تیر دوم (r=2) با سرعت ورودی $V_0=0.05V_{cr}$، $k=2.5\times10^6\frac{N}{m}$ ، $M=2m_b$ ، به ازای افزایش شتاب عبور جرم (آبی)، عبور نیرو [۲۶] (قرمز) $(a_1=0,\ a_2=5,\ a_3=10\frac{m}{s^2})$



شکل ۸ مقایسه نمودارهای جابجایی عرضی بی‌بعد شده نقطه وسط تیرها بر حسب موقعیت بی‌بعد شده بار بر روی تیر دوم (r=2)، $M=m_b$، $k=2.5\times10^6\frac{N}{m}$ ، به ازای افزایش سرعت عبور جرم (آبی)، عبور نیرو [۲۶] (قرمز)

$(V_1=0.01V_{cr}, V_2=0.1V_{cr}, V_3=0.25V_{cr}, V_4=0.5V_{cr})$

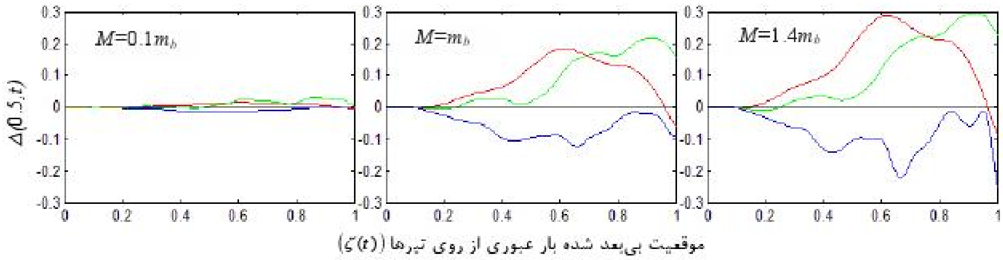
در شکل‌های ۹ و ۱۰، اختلاف پاسخ یا جابجایی سیستم با در نظر گرفتن هر یک از ترم‌های اینرسی، کوریولیس و گریز از مرکز به‌طور جداگانه با ترم گرانشی مقایسه می‌شود. که در حالت جرم متحرک همگی این نیروها با هم، ولی در حالت نیروی متحرک فقط گرانشی در نظر گرفته شده است.

در شکل ۹ مشاهده می‌شود که اختلاف پاسخ سیستم با افزایش جرم زیاد می‌شود. برای اجرام سبک، $M=0.1m_b$ تأثیر اینرسی بر اختلاف پاسخ سیستم نسبت به ترم‌های دیگر بیشتر است، ولی با افزایش جرم، اثر هر یک از ترم‌های نیرویی افزایش می‌یابد تا جایی‌که ترم‌های اینرسی و گریز از مرکز به‌طور یکسان بر پاسخ سیستم بیشترین تأثیر را دارند.

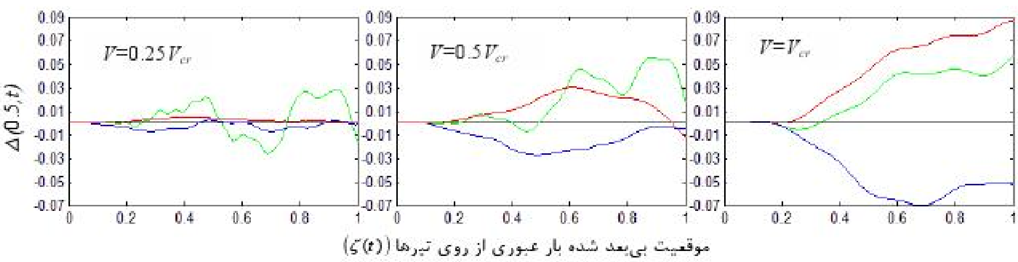
در شکل ۱۰ نیز مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت، اختلاف پاسخ سیستم افزایش می‌یابد. برای سرعت‌های $V=0.25V_{cr}$ و $V=0.5V_{cr}$، ترم اینرسی بیشترین تأثیر را بر پاسخ سیستم دارد. با افزایش سرعت تأثیر همه ترم‌های نیرویی زیاد می‌شود، ولی رشد منحنی‌های ناشی از نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس بیشتر است، تا جایی‌که برای سرعت‌های زیاد، ترم‌های گریز از مرکز و کوریولیس بر پاسخ سیستم بیشتر از اینرسی تأثیرگذار هستند. همچنین دیده می‌شود که با افزایش سرعت، همزمان با افزایش دامنه نوسانات، نقاط اکسترمم در این مثال به سمت راست و قسمت انتهایی و بیرونی سیستم جابجا می‌شوند.

۷-۴- مقایسه نتایج حاصل از تئوری تیر تیموشنکو با تئوری تیر اویلر برنولی

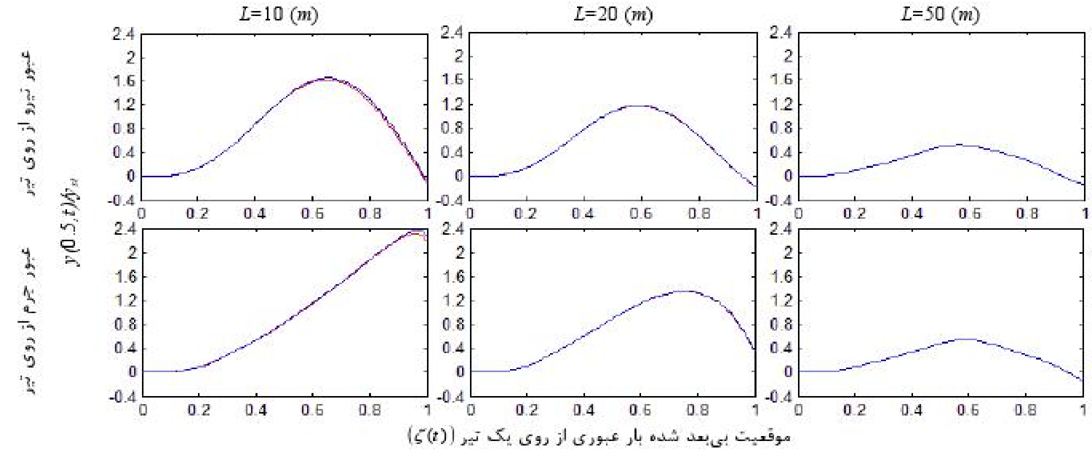
در شکل‌های ۱۱، ۱۲ و ۱۳، نتایج عددی حاصل از دو تئوری تیر تیموشنکو و اویلر برنولی برای عبور دو نوع بار متحرک و به ازای افزایش طول تیرها مقایسه شده است. برای به‌دست آوردن نتایج با تئوری تیر اویلر برنولی کافی است، از اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی در تئوری تیر تیموشنکو صرف‌نظر شود ($G\to\infty$, $\rho I\to 0$). مطابق انتظار مشاهده می‌شود که با افزایش طول تیر، اختلاف نتایج حاصل از دو تئوری کاهش می‌یابد تا جایی‌که برای طول‌های زیاد تیر، نمودارهای حاصل از دو تئوری تیر تیموشنکو و اویلر برنولی تقریبا بر هم منطبق می‌شوند.



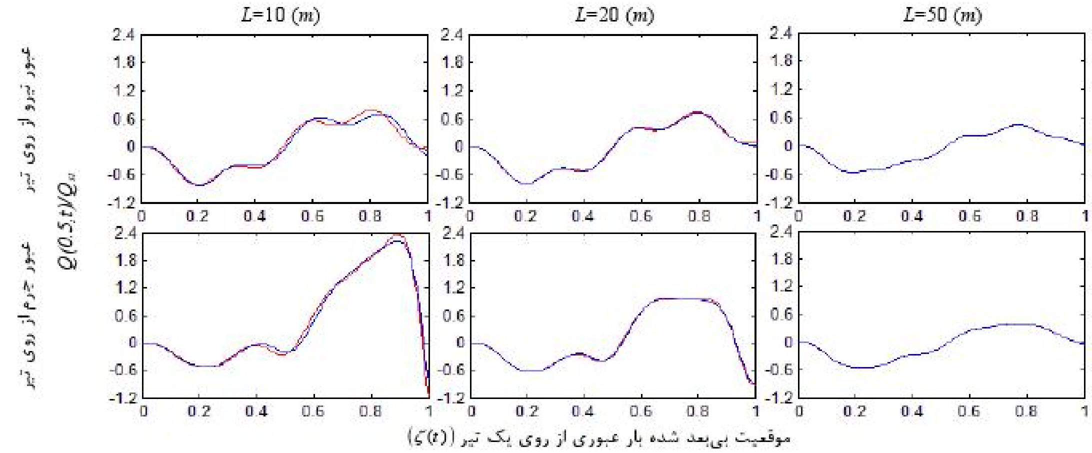
شکل۹ اختلاف پاسخ بین ترم نیروی گرانشی و سایر ترم‌های نیرویی $P(t)$ بین دو حالت عبور جرم و نیرو، به ازای افزایش جرم عبور بار با سرعت ثابت $V=0.5V_{cr}$ از روی تیر دوم ($r=2$) و بررسی نتایج روی همان تیر، سختی $k=2.5\times10^6\,\frac{N}{m}$ گرانشی (خط $\Delta=0$)، گرانشی + اینرسی (سبز)، گرانشی + کوریولیس (آبی)، گرانشی + مرکزگریز (قرمز)



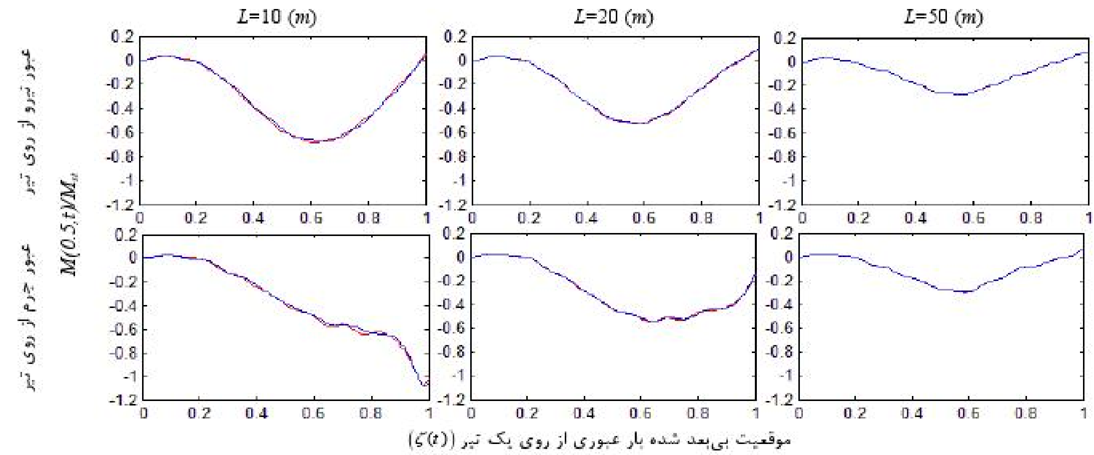
شکل۱۰ اختلاف پاسخ بین ترم نیروی گرانشی و سایر ترم‌های نیرویی $P(t)$ بین دو حالت عبور جرم و نیرو، به ازای افزایش سرعت عبور بار با شتاب صفر از روی تیر دوم ($r=2$) و بررسی نتایج روی همان تیر، سختی $k=2.5\times10^6\,\frac{N}{m}$ گرانشی (خط $\Delta=0$)، گرانشی + اینرسی (سبز)، گرانشی + کوریولیس (آبی)، گرانشی + مرکزگریز (قرمز)



شکل۱۱ مقایسه نمودارهای جابجایی عرضی بی‌بعد شده نقطه وسط تیر دوم بر حسب موقعیت بی‌بعد شده بار متحرک با سرعت $V=0.5V_{cr}$.
عبور بار از روی تیر دوم ($r=2$). $M=10\rho A$, $k=2.5\times10^{6}\frac{N}{m}$. به ازای افزایش طول تیر تیر اویلر برنولی (قرمز). تیر تیموشنکو (آبی)



شکل۱۲ مقایسه نمودارهای نیروی برشی بی‌بعد شده نقطه وسط تیر دوم بر حسب موقعیت بی‌بعد شده بار متحرک با سرعت $V=0.5V_{cr}$.
عبور بار از روی تیر دوم ($r=2$). $M=10\rho A$, $k=2.5\times10^{6}\frac{N}{m}$. به ازای افزایش طول تیر تیر اویلر برنولی (قرمز). تیر تیموشنکو (آبی)



شکل۱۳ مقایسه نمودارهای ممان خمشی بی‌بعد شده نقطه وسط تیر دوم بر حسب موقعیت بی‌بعد شده بار متحرک با سرعت $V=0.5V_{cr}$.
عبور بار از روی تیر دوم ($r=2$). $M=10\rho A$, $k=2.5\times10^{6}\frac{N}{m}$. به ازای افزایش طول تیر تیر اویلر برنولی (قرمز). تیر تیموشنکو (آبی)

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مجموعه‌ای از تیرهای تیموشنکوی موازی در نظر گرفته شد که توسط اتصالاتی انعطاف‌پذیر به یکدیگر متصل بودند و تحت عبور جرم متحرک ارتعاش می‌کردند.

پاسخ سیستم در حالت عبور جرم به ازای مقادیر مختلف سختی اتصالات انعطاف‌پذیر میانی و سرعت بار متحرک تحلیل شد، مشاهده شد که ماکزیمم جابجایی در سیستم چند تیری کمتر از یک تیر به تنهایی است، و این جابجایی با عبور بار متحرک از روی تیر نزدیک‌تر به زمین کاهش می‌یابد که البته می‌تواند به مقدار سختی اتصالات بستگی داشته باشد. افزایش جرم، جابجایی ماکزیمم سیستم را افزایش داده و باعث می‌شود نقاط ماکزیمم جابجایی به سمت راست و انتهایی سیستم جابجا شوند.

همچنین پاسخ سیستم به منظور اعتبارسنجی نتایج، در دو حالت عبور نیرو و جرم، به ازای مقادیر مختلف جرم، سرعت و شتاب بار با یکدیگر مقایسه و تأثیر ترم‌های اینرسی، کوریولیس، گریز از مرکز و شتاب جرم به‌صورت مجزا مورد بررسی قرار داده شد. مشاهده شد که با افزایش جرم، سرعت و شتاب، ماکزیمم جابجایی نقاط میانی سیستم و اختلاف پاسخ بین حالت عبور جرم و نیرو افزایش می‌یابد، و اینکه ماکزیمم جابجایی در حالت عبور جرم بیشتر از عبور نیرو است. همچنین مشاهده شد که برای اجرام و سرعت‌های کم، ترم اینرسی نسبت به سایر ترم‌های نیرویی تأثیر بیشتری بر پاسخ سیستم می‌گذارد، ولی با افزایش جرم و سرعت بار متحرک، اثر ترم‌های دیگر نیز افزایش می‌یابد تا جایی‌که برای اجرام و سرعت‌های زیاد، ترم‌های گریز از مرکز و کوریولیس می‌توانند بیشترین تأثیر را بر پاسخ سیستم داشته باشند.

همچنین پاسخ سیستم برای دو تئوری مختلف تیر تیموشنکو و تیر اویلر برنولی با یکدیگر مقایسه گردید و مشاهده شد که برای تیرهای کوتاه اختلاف پاسخ بیشتری بین این دو تئوری وجود دارد.

۹- مراجع

[1] Stokes GG (1849) Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges. Transactions of the Cambridge Philosophical Society 8: 707-735. Reprinted in Mathematical and Physical Papers (1883) 2: 178-220.

[2] Zarbaf S, Shojaee T, Madoliat R (1394) Solving the inverse problem of identification of FE model parameters of a non-uniform beam using genetic algorithms. Journal of Solid and Fluid Mechanics 5(1): 39-48, (In Persian).

[3] Willis R (1949) Report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures. London, Stationary Office.

[4] Darzi-Naftchali R, Mosayebi-Dorcheh S (1392) Application of differential transform method to determine natural frequencies of variable width Euler-Bernoulli beam with various support conditions. Journal of Solid and Fluid Mechanics 3(2): 41-50, (In Persian).

[5] Fryba L (1999) Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. 3ed edn, Groningen, Thomas Telford, Czech Republic.

[6] Siddiqui SAQ, Golnaraghi MF, Heppler GR (2000) Dynamics of a flexible beam carrying a moving mass using perturbation, numerical and time-frequency analysis techniques. J Sound Vib 229: 1023-1055.

[7] Hayashikava T, Watanabe N (1981) Dynamic behaviour of continuous beams with moving loads. J Eng Mech Div-ASCE 107: 229-246.

[8] Stanisic MM (1985) On a new theory of the dynamical behavior of structures carrying moving masses. Inginieur-Archiv 55: 176-185.

[9] Khalily F, Golnaraghi MF, Heppler GR (1994) On the dynamic behaviour of a flexible beam carrying a moving mass. Nonlinear Dynam 5: 493-513.

[10] Siddiqui SAQ, Golnaraghi MF, Heppler GR (1998) Dynamics of a flexible cantilever beam carrying a moving mass. Nonlinear Dynam 15: 137-154.

[11] Yang YB, Liao SS, Lin BH (1995) Impact formulas for vehicles moving over simple and continuous beams. J Struct Eng-ASCE 121: 1644-1650.

[12] Lee HP (1996) Dynamic response of a beam on multiple supports with a moving mass. Struct Eng Mech 4(3): 303-312.

[13] Ichikawa M, Miyakawa Y, Matsuda A (2000) Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass. J Sound Vib 230: 493-506.

[14] Cifuentes AO (1989) Dynamic response of a beam excited by a moving mass. Finite Elem Anal Des 5: 237-246.

[15] Lin YH, Tretheway MW (1990) Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads. J Sound Vib 136: 323-342.

[16] Sharbati E, Szyszkowski W (2011) A new FEM approach for analysis of beams with relative

movements of masses. Finite Elem Anal Des 47: 1047-1057.

[17] Eftekhar Azam S, Mofid M, Afghani Khoraskani R (2013) Dynamic response of Timoshenko beam under moving mass. Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering 20: 50-56.

[18] Esmailzadeh E, Ghorashi M (1995) Vibration analysis of beams traversed by uniform partially distributed moving masses. J Sound Vib 184: 9-17.

[19] Lin YH (1997) Letter to the Editor: Comments on vibration analysis of beams traversed by uniform partially distributed moving masses. J Sound Vib 199: 697-700.

[20] Esmailzadeh E, Ghorashi M (1997) Vibration analysis of Timoshenko beam subjected to a traveling mass. J Sound Vib 199: 615-628.

[21] Oguamana DCD, Hansen JS, Heppler GR (1998) Dynamic response of an overhead crane system. J Sound Vib 213: 889-906.

[22] Mamandi A, Kargarnovin MH, Farsi S (2010) An investigation on effects of traveling mass with variable velocity on nonlinear dynamic response of an inclined Timoshenko beam with different boundary conditions. Int J Mech Sci 52:1694-1708.

[23] Oniszczuk Z (2003) Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system. J Sound Vib 264: 273-286.

[24] Vu HV, Ordonez AM, Karnopp BH (2000) Vibration of a double-beam system. J Sound Vib 229: 807-822.

[25] Abu-Hilal M (2006) Dynamic response of a double Euler-Bernoulli beam due to a moving constant load. J Sound Vib 297: 477-491.

[26] Ariaei A, Ziaei-Rad S, Ghayour M (2010) Transverse vibration of a multiple-Timoshenko beam system with intermediate elastic connections due to a moving load. Arch Appl Mech 81: 263-281.

[27] Bilello C, Bergman LA (2004) Vibration of damaged beams under a moving mass: theory and experimental validation. J Sound Vib 274: 567-582.

[28] Mahmoud MA, Zaid MA (2002) Dynamic response of a beam with a crack subject to a moving mass. J Sound Vib 256: 591-603.

[29] Dadfarnia M, Jalili N, Esmailzadeh E (2005) A comparative study of the Galerkin approximation utilized in the Timoshenko beam theory. J Sound Vib 280: 1132-1142.

[30] Ariaei A, Ziaei-Rad S, Malekzadeh M (2013) Dynamic response of a multi-span Timoshenko beam with internal and external flexible constraints subject to a moving mass. Arch Appl Mech 83: 1257-1272.

[31] Fryba L (2001) A rough assessment of railway bridges for high speed trains. Eng Struct 23(5): 548-556.