



تحلیل سه‌بعدی خمش ورق هدفمند ضخیم با استفاده از روش بدون المان گلرکین در شرایط مرزی مختلف

صلاح‌الدین میکاییلی^۱ و بشیر بهجت^{۲*}

^۱ کارشناس ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

^۲ استادیار، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۹/۰۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۱۱/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۴/۱۲

چکیده

در این مقاله روش بدون المان گلرکین، برای تحلیل رفتار استاتیکی سه‌بعدی ورق‌های هدفمند ضخیم ارائه شده است. ضریب پواسون، ثابت فرض شده، مدول یانگ در راستای ضخامت ورق، توسط یک تابع نمایی در نظر گرفته شده است. تابع شکل نیز، با استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک سه‌بعدی محاسبه شده است. از آنجایی که تقریب حداقل مربعات متحرک فاقد خاصیت دلتای کرونگر است، بنابراین فرم ضعیف گلرکین، مقید به کار گرفته شده است. برای اعمال شرایط مرزی هندسی، از روش ضریب لاگرانژ استفاده شده است. اثرات توابع وزن، تراکم گره‌ها و اندازه‌ی بی‌بعد دامنه پشتیبان بررسی شده و مقدار مطلوب برای اندازه بی‌بعد دامنه پشتیبان محاسبه شده است. همچنین یک تابع وزن مثلثاتی جدید معرفی شده است. اثرات شاخص ماده هدفمند، ضخامت بی‌بعد و شرایط مرزی روی تنش و خیز ورق بررسی شده است. چندین مثال برای ورق هدفمند ضخیم تحت بار استاتیکی ارائه و جهت تأیید صحت نتایج به‌دست‌آمده، نتایج حاضر با نتایج ارائه شده در مراجع دیگر مقایسه شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که نرخ همگرایی روش ارائه شده، بالاتر از روش المان محدود است.

کلمات کلیدی: تحلیل خمش؛ روش بدون المان گلرکین؛ ورق هدفمند ضخیم؛ حداقل مربعات متحرک سه‌بعدی.

3-D Bending Analysis of Thick Functionally Graded Plate in Different Boundary Conditions using Element-Free Galerkin (EFG) Method

S. Mikaeeli¹, Ba. Behjat^{2,*}

¹ Msc., Faculty of Mech. Eng., Sahand University of Technology., Tabriz, Iran.

² Assist. Prof., Faculty of Mech. Eng., Sahand University of Technology., Tabriz, Iran.

Abstract

In this paper, the Element-Free Galerkin (EFG) method is employed to obtain three dimensional static behavior of thick functionally graded plates. The Poisson's ratio is taken to be constant and the Young's modulus is considered to be graded through the thickness of plate by an exponential function. The shape function is calculated using the 3D moving least squares (MLS) approximation. Because the MLS approximation lacks the Kronecker delta function property, therefore the constrained Galerkin weak-form is used. The Lagrange multiplier method is employed to enforce the essential boundary condition. Effects of weight functions, nodal density and the dimensionless size of the support domain are investigated and favorable value for the dimensionless size of the support domain is calculated. Also a new trigonometric weight function is introduced. Effects of functionally grading index, dimensionless thickness and boundary conditions on the stress and deformation of the plate are investigated. Several examples are presented for thick functionally graded plates under static load. Also in order to verify the obtained results, they are compared with the results of other data reported in the literature. Numerical results indicate that the rate of convergence of the proposed method is higher than that of finite element method especially for stress calculation.

Keywords: Bending Analysis; Element Free Galerkin Method; Thick Functionally Graded Plate; Three-Dimensional Moving Least Square Approximation.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۴۱۳-۳۴۵۹۴۶۵؛ فکس: ۰۴۱۳۳۴۴۴۳۰۹.

آدرس پست الکترونیک: behjat@sut.ac.ir

۱- مقدمه

مواد هدفمند^۳، موادی پیشرفته و از نظر ریزساختاری غیر همگن بوده، خواص مکانیکی با تغییر موقعیت تدریجاً تغییر می‌کنند. این تغییر خواص به علت ترکیب شیمیایی، وابسته به موقعیت در سطح ریزساختاری یا اتمی ظاهر می‌شود [۳]. این مواد در ساخت راکتورهای هسته‌ای، ایمپلنت‌های دندان، ابزارهای ترموالکتریک و پیزوالکتریک، صفحات و پوسته‌های مخازن، دیگر اجزای ماشین‌ها کاربرد زیادی دارند [۴]. با توجه به کاربرد گسترده، این مواد مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند.

در سال ۲۰۰۵، چینگ و همکاران [۵] با استفاده از روش پتروف گلرکین محلی، به تحلیل جامدات الاستیک هدفمند دوبعدی، تحت بار حرارتی و مکانیکی پرداختند، همچنین برای اعمال شرایط مرزی هندسی از روش پنالتی استفاده شد و نتایج به‌دست آمده با روش‌های تئوری و عددی مقایسه گردید. در سال ۲۰۰۴، کیان و همکاران [۶، ۷]، با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا و نرمال ورق^۴ و نیز روش بدون المان پتروف گلرکین محلی، به تحلیل خمش ترموالاستیک، تحلیل استاتیکی و دینامیکی و همچنین ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های ضخیم هدفمند پرداختند. تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت متغیر در نظر گرفته شد. در این روش، از تقریب حداقل مربعات متحرک برای میان‌یابی متغیرهای میدان و برای اعمال شرایط مرزی هندسی از روش پنالتی استفاده شد. در سال ۲۰۰۵، فریرا و همکاران [۸] با استفاده از روش بدون المان، بر اساس توابع پایه شعاعی چنددرجی^۵، با کمک تئوری برشی مرتبه سوم به تحلیل استاتیکی ورق‌های هدفمند با شرایط مرزی ساده پرداختند و نیز تأثیر ضخامت و ضریب حجمی متفاوت بر خیز ورق بررسی گردید. تغییرات مدول یانگ و ضریب پواسون، بر اساس مدل موری تاکانا فرض شد. در سال ۲۰۰۵، اسلادک و همکاران [۹]، با استفاده از روش پتروف گلرکین محلی به تحلیل دوبعدی تنش، در جامدات الاستیک یا ویسکوآلستیک خطی و غیرایزوتروپیک با تغییرات پیوسته خواص مکانیکی پرداختند و از تقریب حداقل مربعات متحرک برای میان‌یابی مقادیر فیزیکی، در

پدیده‌های فیزیکی را می‌توان با معادلات جبری، دیفرانسیلی یا انتگرالی شرح داد. اغلب ترجیح داده می‌شود که این معادلات به‌صورت دقیق حل شود. متأسفانه تنها بخش کوچکی از مسائل ساده را می‌توان به‌صورت دقیق حل کرد. از آنجایی که اکثر مسائل کاربردی، پیچیده هستند، لذا باید روند حل عددی را برای محاسبه جواب تقریبی به کار گرفت. یکی از مهم‌ترین پیشرفت‌ها در زمینه روش‌های عددی، توسعه روش المان محدود است. این روش به‌عنوان یک روش قوی و کارآمد با انعطاف‌پذیری بالا در حل مسائل خطی و غیرخطی به کار رفته است؛ اما این روش محدودیت‌هایی از جمله، دقت کم در محاسبه تنش، محدودیت تحلیل مسائل ترک و شکست و هزینه بالای ساخت المان را دارد، به‌طوری که در مسائل پیچیده، تحلیل گر بیشترین زمان را صرف المان بندی هندسه سه بعدی می‌کند، لذا جهت رفع نقص‌های آن، روش‌های بدون المان^۱ شکل گرفت. این روش‌ها، روش‌های عددی قدرتمند و درحال توسعه‌ای هستند تا برای سیستم‌های پیچیده‌تر،^۲ جواب دقیق‌تری را به‌دست آورند [۲].

بلیچکو و همکارانش در سال ۱۹۹۴، روش بدون المان گلرکین را پیشنهاد کردند و تقریب حداقل مربعات متحرک را در شکل ضعیف گلرکین برای ساخت معادلات جبری به کار گرفتند. از آنجایی که توابع درون‌یاب به‌کار رفته در این روش برخلاف روش اجزای محدود فاقد خاصیت دلتای کرونکر است، بنابراین بلیچکو و همکارانش از ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی سود جستند. این روش نسبت به روش‌های فاقد المان دقیق‌تر است و همگرایی این روش نسبت به روش المان محدود، بالاتر است [۱، ۲].

به‌طور کلی، نسبت دقت روش به زمان محاسبات (کارایی) در روش بدون المان گلرکین از روش پتروف گلرکین (ماتریس سیستم نامتقارن) و المان محدود بیشتر است، همچنین نرخ همگرایی روش بدون المان گلرکین، از المان محدود بالاتر است و برای تعداد گره‌های برابر زمان محاسبات المان محدود، از بدون المان گلرکین کمتر است [۲].

³ Functionally Graded Materials (FGM)

⁴ HOSNDPT

⁵ Multiquadrics (MQ)

¹ Meshfree Methods

² Complex Systems

همکاران [۱۶]، با استفاده از روش بدون المان بر اساس توابع پایه شعاعی به تحلیل غیرخطی خمش ورق‌های هدفمند تحت بارگذاری‌های متفاوت پرداختند. از تئوری غیرخطی ون کارمن و تئوری تغییر شکل برشی لوینسون استفاده کردند. سال ۲۰۱۴، ژو و همکاران [۱۷]، با استفاده از روش پتروف گلرکین محلی به تحلیل ترمودینامیکی غیرخطی ورق‌های هدفمند نسبتاً ضخیم با استفاده از درون‌یاب کریچینگ پرداختند. در سال ۲۰۱۴، اردستانی و همکاران [۱۸] با استفاده از روش بازتولید تابع کرنل، به تحلیل ورق‌های تقویت شده هدفمند با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پرداختند و اثرات شرایط مرزی و ضریب حجمی و نوع بارگذاری، مورد بررسی قرار گرفت و خواص مواد بر اساس مدل موری تاکا در نظر گرفته شد. دستجردی و همکاران [۱۹]، از روش بدون المان برای تحلیل استاتیکی استوانه‌های هدفمند اورتوتروپیک با طول کوتاه استفاده کردند، همچنین نظری و همکاران [۲۰]، با استفاده از روش بدون المان گلرکین، به تحلیل شکست مواد مرکب هدفمند حاوی ترک، تحت بارگذاری حرارتی پرداختند.

در مقاله حاضر، روش بدون المان گلرکین با فرمول‌بندی سه‌بعدی برای تحلیل استاتیکی ورق هدفمند ضخیم با در نظرگیری اثرات شرایط مرزی مختلف بر پاسخ استاتیکی بررسی شده است. از آنجایی که روش بدون المان گلرکین از تقریب حداقل مربعات متحرک بهره می‌گیرد و این تقریب فاقد خاصیت دلتای کرونکر است، لذا برای اعمال شرایط مرزی از روش ضریب لاگرانژ استفاده گردید، زیرا روش ضرایب لاگرانژ دقیق است، درحالی‌که روش پنالتی دقت کمتری دارد [۲]. مدول یانگ در راستای ضخامت ورق توسط یک تابع نمایی در نظر گرفته شده است. توابع شکل با استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک سه‌بعدی در نظر گرفته شده است و تأثیر شرایط مرزی مختلف روی جابه‌جایی و تنش‌ها در راستای ضخامت ورق بررسی شده است. همچنین تأثیر تابع وزن، ابعاد دامنه پشتیبان و تراکم گره‌ها در همگرایی نتایج بررسی گردیده است. برای صحت‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده، نتایج مقاله حاضر با نتایج مراجع دیگر مقایسه گردیده است و نتایج نشان می‌دهد که همگرایی این روش نسبت به روش المان محدود بالاتر است.

معادله‌های انتگرال مرزی محلی^۱ استفاده شد. در سال ۲۰۰۷، اسلادک و همکاران [۱۰]، با استفاده از روش پتروف گلرکین محلی، ورق‌های هدفمند را تحت بارهای دینامیکی و استاتیکی با شرایط مرزی ساده و گیردار تحلیل کردند و همچنین تأثیر خواص ماده به‌صورت ایزوتروپ و اورتوتروپ بررسی گردید. در سال ۲۰۰۷، گیلهولی و همکاران [۱۱]، تئوری برشی مرتبه بالا و نرمال ورق و نیز روش بدون المان پتروف گلرکین محلی را برای تحلیل ورق‌های ضخیم هدفمند به کار بردند، همچنین از توابع اسپیلاین مرتبه چهارم، به‌عنوان تابع تست و تابع وزن استفاده شد و تابع شکل بر اساس توابع پایه شعاعی محاسبه گردید. در سال ۲۰۰۹، واقفی و همکاران [۱۲]، به تحلیل استاتیکی سه‌بعدی، ورق‌های ضخیم با استفاده از روش بدون المان پتروف گلرکین محلی پرداختند. فرم ضعیف محلی با استفاده از معادلات تعادل الاستیسیته سه‌بعدی محاسبه گردید. اثر تغییرات ضخامت، کسر حجمی و شرایط مرزی مختلف بررسی گردید. در سال ۲۰۰۹، ژائو و همکاران [۱۳]، با استفاده از روش بدون المان KP-ریتز به تحلیل غیرخطی هندسی ورق‌های هدفمند تحت بار حرارتی و مکانیکی پرداختند و فرمول‌بندی غیرخطی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و کرنش‌های ون کارمن در نظر گرفته شد. در سال ۲۰۱۰، واقفی و همکاران [۴]، به تحلیل استاتیکی سه‌بعدی ورق‌های ضخیم هدفمند با استفاده از روش‌های بدون المان پتروف گلرکین محلی پرداختند. مدول یانگ در راستای ضخامت ورق توسط یک تابع نمایی در نظر گرفته شده، علاوه بر این متغیرهای میدان با استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک سه‌بعدی در نظر گرفته شد. در سال ۲۰۱۱، وو و همکاران [۱۴] با استفاده از روش کالوکیشن بدون المان به تحلیل استاتیکی مسائل صفحه‌ای ورق‌ها و تیرهای هدفمند تحت بار مکانیکی عرضی با استفاده از درون‌یاب بازتولید کرنل پرداختند. در سال ۲۰۱۲، ون و همکاران [۱۵] با استفاده از روش معادلات انتگرال مرزی محلی و تئوری میندلین، به تحلیل ورق‌های هدفمند تحت بارهای دینامیکی و استاتیکی پرداختند. در این روش، متغیر میدان بر اساس توابع پایه شعاعی در نظر گرفته شد. در سال ۲۰۱۲، جیوت و

^۱ LBIE

m تعداد ترم‌های چندجمله‌ای پایه، $P^T(x)$ چندجمله‌ای پایه و $a(x)$ برداری از ضرایب است. تفاوت بین حداقل مربعات و حداقل مربعات متحرک در همین ثابت یا متغیر بودن ضرایب $a(x)$ است. چندجمله‌ای پایه برای مسائل سه‌بعدی، از رابطه (۳) به‌دست می‌آید.

$$P^T(X) = [1, x, y, z, x^2, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz] \quad (3)$$

$m = 10$ به بیانی دیگر، m تعداد ترم‌های لازم برای ساخت یک چندجمله‌ای کامل است که شرط ثبات را برقرار می‌سازد. بردار ضرایب $a(x)$ با حداقل کردن تابع باقی‌مانده وزنی، از رابطه (۴) به‌دست می‌آید.

$$J_{MLS} = \sum_{i=1}^n W(x_i - x_I) [u^h(x_i) - u(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n W(x_i - x_I) [P^T(x_i) a(x_I) - u_i]^2 \quad (4)$$

برای حداقل کردن مقدار خطا مشتق، عبارت (۴) نسبت به بردار ضرایب محاسبه و برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$\frac{\partial J_{MLS}}{\partial a(x_I)} = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n W(x_i - x_I) P(x_i) [P^T(x_i) a - u_i] = 0 \quad (6)$$

رابطه (۶) را می‌توان به صورت رابطه (۷) نوشت:

$$A(x_I) a(x_I) = B(x_I) \times u_s \quad (7)$$

که داریم:

$$A(x_I) = \sum_{i=1}^n W(x_i - x_I) P(x_i) P^T(x_i) \quad (8)$$

$$B(x_I) = [W(x_1 - x_I) P(x_1) \dots W(x_n - x_I) P(x_n)] \quad (9)$$

با استفاده از روابط (۲) و (۷) خواهیم داشت:

$$u^h(x_I) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x_I) u_i = \psi^T(x_I) \times u_s \quad (10)$$

که $\psi^T(x_I)$ تابع شکل گره Λ ، از رابطه (۱۱) به‌دست می‌آید.

$$\psi^T(x_I) = \frac{P^T(x_I)}{1 \times n} \times \frac{A^{-1}(x_I)}{m \times m} \times \frac{B(x_I)}{m \times n} \quad (11)$$

در نهایت تابع تقریب به‌صورت رابطه (۱۲) ارائه می‌شود.

$$u^h = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \psi_i & 0 & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & \psi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \Psi_i U_i \quad (12)$$

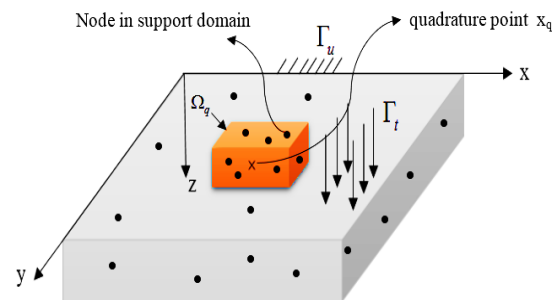
در رابطه (۱۰)، n تعداد گره‌های موجود در دامنه پشتیبان، $W(x_i - x_I)$ تابع وزن در گره x_I و u_s مقادیر

۲- معادلات حاکم

یک مسئله سه‌بعدی مکانیک جامدات (ورق ضخیم) با دامنه Ω ، محدود به مرز Γ ، فرم ضعیف شده گلرکین مقید^۱ به‌صورت رابطه (۱) ارائه می‌شود [۱].

$$\int_{\Omega} \delta(Lu)^T (DLu) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (1)$$

دو جمله آخر در رابطه (۱) برای اعمال شرایط مرزی هندسی توسط روش ضریب لاگرانژ به‌کار گرفته شده است. در رابطه (۱)، Ω دامنه مسئله، b نیروهای حجمی، \bar{t} نیروهای سطحی، Γ_t مرز طبیعی، Γ_u مرز هندسی، λ ضریب لاگرانژ، D ماتریس ضرایب الاستیک در حالت کرنش صفحه‌ای و L اپراتور مشتق گیرنده است. در شکل ۱، هندسه کلی ورق مستطیلی شش‌وجهی است، لذا دامنه پشتیبان به‌صورت مکعبی در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱- دامنه پشتیبان مکعبی شکل، در ناحیه کلی یک ورق مستطیلی

۲-۱- تقریب متغیر میدان با حداقل مربعات متحرک

سه‌بعدی (MLS)

از مهم‌ترین مزایای تقریب حداقل مربعات متحرک، خاصیت ثبات^۲ و سازگاری^۳ است. تابع تقریب در این روش، به‌صورت رابطه (۲) ارائه می‌شود [۱].

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m P_j(x) a_j = P^T(x) a(x) \quad (2)$$

¹ Constrained

² Consistency

³ Compatibility

توابع شکل در گره I ام است؛ لذا با ساده‌سازی رابطه (۱۸) به رابطه (۲۰) خواهیم رسید.

$$\delta U^T [K U + G \lambda - F] - \delta \lambda^T [G^T U - q] = 0 \quad (20)$$

به خاطر دلخواه بودن δU^T و $\delta \lambda^T$ ، رابطه (۲۰) فقط در صورتی ارضا می‌شود که رابطه (۲۱) صادق باشد.

$$\begin{cases} K U + G \lambda - F = 0 \\ G^T U - q = 0 \end{cases} \quad (21)$$

اگر رابطه (۲۱) به فرم ماتریسی نوشته شود، خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix}_{wr \times wr} \begin{Bmatrix} U \\ \lambda \end{Bmatrix}_{wr \times 1} = \begin{Bmatrix} F \\ q \end{Bmatrix}_{wr \times 1} \quad (22)$$

که wr به صورت رابطه (۲۳) ارائه می‌شود.

$$wr = (3n_t + s \times n_\lambda) \quad (23)$$

$$\begin{cases} s = 2 & \text{شرایط مرزی ساده} \\ s = 3 & \text{شرایط مرزی گیردار} \end{cases} \quad (24)$$

K_{IJ} ماتریس سختی گره‌ای، G_{IJ} ماتریس سختی گره‌ای مربوط به اعمال شرایط مرزی، s کمیتی اسکالر مربوط به شرایط مرزی، U مقادیر گره‌ای مجهول محاسبه شده، n_t تعداد کل گره‌ها، n_λ تعداد گره‌هایی لازم برای درون‌یابی در راستای مرز هندسی، F بردار نیرو عمومی، q بردار نیروی مربوط به اعمال شرایط مرزی هندسی است که به صورت روابط (۲۵) تا (۲۸) تعریف می‌شود.

$$K_{IJ} = \int_{\Omega_q} B_I^T D B_J d\Omega \quad (25)$$

$$G_{IJ} = - \int_{\Gamma_u} N_J^T \Psi_I d\Gamma \quad (26)$$

$$F_I = \int_{\Gamma_t} \Psi_I^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_q} \Psi_I^T b d\Omega \quad (27)$$

$$q_J = - \int_{\Gamma_u} N_J^T \bar{U} d\Gamma \quad (28)$$

این ماتریس‌ها و بردارها طبق رابطه (۲۹) تعریف می‌شود.

$$B_I^T = \begin{bmatrix} \Psi_{I,x} & 0 & 0 & \Psi_{I,y} & 0 & \Psi_{I,z} \\ 0 & \Psi_{I,y} & 0 & \Psi_{I,x} & \Psi_{I,z} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{I,z} & 0 & \Psi_{I,y} & \Psi_{I,x} \end{bmatrix};$$

$$\Psi_I = \begin{bmatrix} \psi_I & 0 & 0 \\ 0 & \psi_I & 0 \\ 0 & 0 & \psi_I \end{bmatrix};$$

$$U = \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ w_I \end{Bmatrix}_{3n_t \times 1}; \quad F = \begin{Bmatrix} f_{xI} \\ f_{yI} \\ f_{zI} \end{Bmatrix}_{3n_t \times 1} \quad (29)$$

گره‌ای محاسبه شده (تغییر مکان‌های تعمیم یافته) است. همچنین توابع وزن استفاده شده در این پژوهش، به صورت زیر است. لازم به ذکر است که رابطه (۱۴) یک تابع وزن پیشنهادی است.

$$W_1(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{r}^2 + 4\bar{r}^3 & \bar{r} \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4\bar{r} + 4\bar{r}^2 - \frac{4}{3}\bar{r}^3 & 0 < \bar{r} \leq 1 \\ 0 & \bar{r} > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$W_2(\bar{r}) = \begin{cases} 1 - \sin\left(\frac{\pi\bar{r}}{2}\right) & \bar{r} \leq 1 \\ 0 & \bar{r} > 1 \end{cases} \quad (14)$$

$$W_3(\bar{r}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{r}^2 + 8\bar{r}^3 - 3\bar{r}^4 & \bar{r} \leq 1 \\ 0 & \bar{r} > 1 \end{cases} \quad (15)$$

W_3, W_2, W_1 به ترتیب، تابع وزن اسپیلاین مکعبی، تابع وزن مثلثاتی و تابع وزن اسپیلاین مرتبه چهارم است و نیز \bar{r} از رابطه (۱۶) به دست آمده که d_{max} اندازه بی‌بعد دامنه پشتیبان است.

$$\bar{r}_x = \frac{\|x_i - x_j\|}{d_{max} \times dx}; \quad \bar{r}_y = \frac{\|y_i - y_j\|}{d_{max} \times dy}; \quad \bar{r}_z = \frac{\|z_i - z_j\|}{d_{max} \times dz} \quad (16)$$

$$W(x, y, z) = w(\bar{r}_x) \times w(\bar{r}_y) \times w(\bar{r}_z) \quad (17)$$

که dx, dy, dz به ترتیب، فاصله بین گره‌های همسایه در جهت‌های x, y و z است.

۲-۲- گسسته سازی فرم ضعیف گلرکین مقید

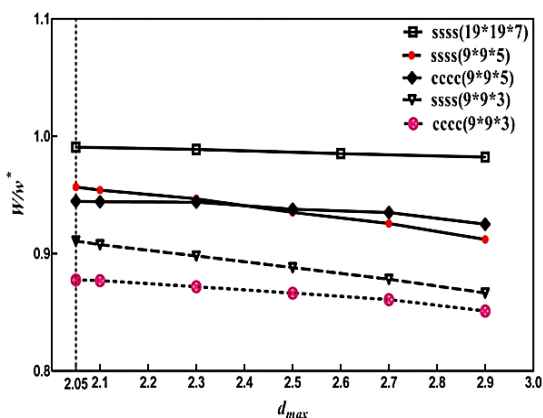
در این روش، تابع شکل استفاده شده برای تقریب جابه‌جایی هر نقطه، بر اساس مجموعه‌ای از گره‌های واقع در دامنه پشتیبان محاسبه می‌شود. تابع تقریب به دست آمده از رابطه (۱۲) را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم که رابطه (۱۸) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_q} \delta \left(\sum_{I=1}^n B_I U_I \right)^T \left(D \sum_{I=1}^n B_I U_I \right) d\Omega - \\ & \int_{\Omega_q} \delta \left(\sum_{I=1}^n \Psi_I U_I \right)^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \left(\sum_{I=1}^n \Psi_I U_I \right)^T \bar{t} d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \left(\sum_{I=1}^n \Psi_I U_I - \bar{U} \right) - \delta \left(\sum_{I=1}^n \Psi_I U_I \right)^T \lambda d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\lambda = \sum_{J=1}^{n_\lambda} N_J \lambda_J = \sum_{J=1}^{n_\lambda} \begin{bmatrix} N_J & 0 & 0 \\ 0 & N_J & 0 \\ 0 & 0 & N_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{uJ} \\ \lambda_{vJ} \\ \lambda_{wJ} \end{bmatrix} \quad (19)$$

N_J تابع شکل گره J ام، روی مرز هندسی (ضروری) است و بصورت خطی درون‌یابی می‌شود، در حالی که Ψ_I ماتریس

بی‌بعد دامنه پشتیبان به کار برده می‌شود. همچنین w^* مقدار دقیق خیز در تحلیل ورق ضخیم است که توسط سرینیواس و همکاران [۲۱] ارائه شده است.



شکل ۳- تأثیر پارامتر بی‌بعد دامنه پشتیبان در خیز مرکزی نرمال شده در ورق مربعی ($\frac{E_h}{E_0} = 0.5, \frac{h}{a} = 0.3$)

۲-۴- تعریف شرایط مرزی و هندسه مسئله

یک ورق ضخیم سه‌بعدی به طول a ، عرض b و ضخامت h که از ماده هدفمند ساخته شده، در شکل ۴ نشان داده شده است. شرایط مرزی هندسی در لبه‌های ورق یا $x = 0, a$ و $y = 0, b$ به صورت روابط (۳۳) تا (۳۵) تعریف می‌شود.

برای شرایط مرزی ساده (S)

$$\sigma_{xx} = v = w = 0 \quad \forall x = 0, x = a \quad (33)$$

$$\sigma_{yy} = u = w = 0 \quad \forall y = 0, y = b$$

برای شرایط مرزی گیردار (C)

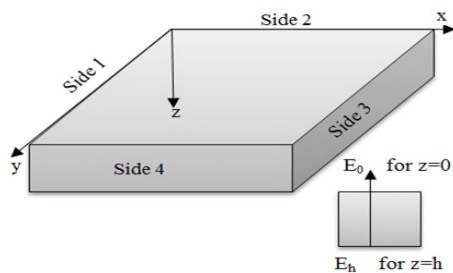
$$u = v = w = 0 \quad (34)$$

$$\forall x = 0, a ; y = 0, b$$

برای شرایط مرزی آزاد (F)

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0 \quad \forall x = 0, x = a \quad (35)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yz} = 0 \quad \forall y = 0, y = b$$



شکل ۴- ابعاد هندسی و مختصات مورد استفاده در مسئله

$$D(z) = D_0(z) \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{22} \end{bmatrix}$$

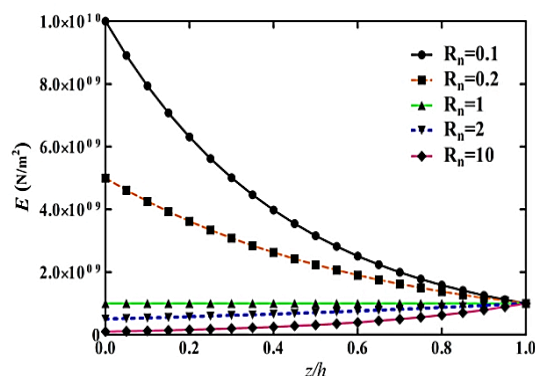
$$D_0(z) = \frac{E(z)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad D_{11} = 1; \quad (30)$$

$$D_{12} = \frac{\nu}{(1-\nu)}; \quad D_{22} = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}$$

$$E(z) = E_h e^{R_n(\frac{z}{h}-1)} \quad 0 \leq z \leq h \quad (31)$$

$$R_n = Ln\left(\frac{E_h}{E_0}\right) \quad (32)$$

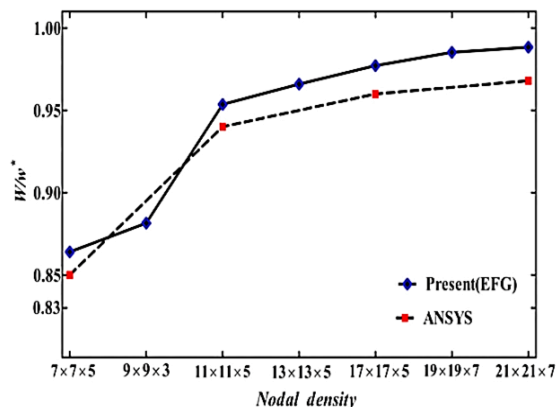
طبق رابطه (۳۱)، تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت ورق بر اساس مدل نمایی در نظر گرفته شده است که بر اساس رابطه (۳۲)، E_h مدول یانگ در سطح پایین ورق و E_0 مدول یانگ در سطح بالای ورق است. شکل ۲، تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت ورق برای مقادیر مختلف پارامتر R_n نشان داده شده است.



شکل ۲- تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت ورق برای مقادیر مختلف R_n

۲-۳- تعیین اندازه بی‌بعد دامنه پشتیبان

دامنه پشتیبان مختص یک نقطه (نقطه کوادریچر) هست، که در شکل ۳ تأثیر اندازه بی‌بعد دامنه پشتیبان روی مقادیر خیز مرکزی نرمال شده نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که به‌ازای شرایط مرزی ساده و گیردار، بهترین حل‌ها در $d_{max} = 2.05$ به‌دست می‌آید، زیرا همواره باید تعداد گروه‌های دامنه پشتیبان از تعداد جملات توابع پایه ($n > m$) بیش‌تر باشد؛ لذا در این تحلیل، این مقدار به‌عنوان اندازه



شکل ۵- همگرایی نتایج برای خیز مرکزی نرمال شده ورق مربعی CCCC، $(\frac{E_h}{E_0} = 1; \frac{h}{a} = 0.2)$

جدول ۱- خیز بیشینه بی‌بعد (W_{max})، ورق ضخیم هدفمند

مربعی SSSS با تغییر مقادیر در $\frac{E_h}{E_0}$				$\frac{E_h}{E_0}$
$W_{max}(\frac{h}{a} = 0.3)$		$W_{max}(\frac{h}{a} = 0.2)$		
مرجع [4]	روش حاضر	مرجع [4]	روش حاضر	
۰/۹۷۰۷	۰/۹۴۶۸	۴/۰۹۱۶	۴/۰۷۹۱	۰/۱
۲/۱۳۷۸	۲/۰۸۲۵	۸/۹۷۵۱	۸/۹۱۲۴	۰/۵
۲/۹۸۵۳	۲/۹۰۰۱	۱۲/۵۹۹۷	۱۲/۴۸۵۹	۱
۴/۱۲۰۸	۴/۰۲۳۷	۱۷/۶۶۴۰	۱۷/۵۴۰۱	۲
۸/۷۱۳۴	۸/۵۲۲۸	۳۹/۰۶۰۵	۳۸/۷۶۸۱	۱۰

جدول ۲- خیز بیشینه بی‌بعد (W_{max})، ورق ضخیم هدفمند

مربعی CFCF با تغییر مقادیر در $\frac{E_h}{E_0}$				$\frac{E_h}{E_0}$
$W_{max}(\frac{h}{a} = 0.3)$		$W_{max}(\frac{h}{a} = 0.2)$		
مرجع [4]	روش حاضر	مرجع [4]	روش حاضر	
۰/۹۶۲۴	۰/۹۷۷۷	۳/۵۶۲۷	۳/۵۸۸۴	۰/۱
۲/۲۸۱۸	۲/۳۳۳۰	۸/۱۳۱۹	۸/۱۸۸۱	۰/۵
۳/۲۹۴۷	۳/۳۶۳۸	۱۱/۶۴۷۳	۱۱/۶۴۰۴	۱
۴/۷۱۰۴	۴/۸۳۲۷	۱۶/۳۷۶۲	۱۶/۵۵۵۳	۲
۱۰/۶۳۷۳	۱۱/۱۳۷۳	۳۶/۹۳۴۶	۳۷/۳۵۴۵	۱۰

براساس رابطه (۲۷)، مشخصات ورودی مسئله، شرایط مرزی طبیعی و بار خارجی که به‌طور یکنواخت بر سطح فوقانی ورق اعمال شده، به‌صورت رابطه (۳۶) و (۳۷) بیان شده است.

$$v = 0.3; E_h = 10^9 \left(\frac{N}{m^2} \right)$$

$$ql = -10^4 \left(\frac{N}{m^2} \right) \quad (36)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0; \quad \forall z = h$$

$$\sigma_{zz} = ql; \quad \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0; \quad \forall z = 0$$

$$\sigma_{zz} = 0; \quad \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0; \quad \forall z = h \quad (37)$$

۳- نتایج عددی و بحث

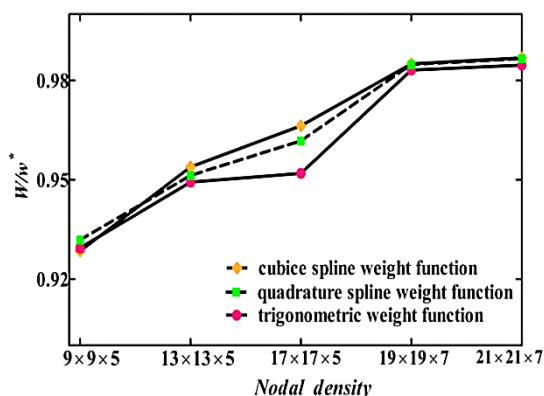
۳-۱- بررسی همگرایی نتایج

در این بخش، تأثیر تراکم گره‌ها در همگرایی مقادیر خیز نقطه مرکزی در سطح بالای ورق، برای ورق ضخیم مربعی که تحت بار گسترده یکنواخت قرار گرفته، بررسی شده است. در شکل ۵، مقدار خیز بی‌بعد برحسب تعداد گره‌ها بررسی شده است. همچنین در این شکل، نرخ همگرایی دو روش بدون المان گلرکین و المان محدود نشان داده شده است. در مورد مدل المان محدود در مسئله از تحلیل نرم افزار انسیس استفاده شده است و المان Solid-Brick 185 با ۸ گره برای انجام تحلیل استفاده شده است. مشاهده می‌شود که همگرایی روش ارائه شده نسبت به روش المان محدود بالاتر است و با افزایش تراکم گره‌ها، خیز بیشینه به سمت جواب تحلیلی میل می‌کند؛ لذا در این تحلیل، تراکم گره‌ها به‌صورت $19 \times 19 \times 7$ و با آرایش منظم به کار برده می‌شود و نیز تراکم نقاط گوسی به‌صورت $(4 \times 4 \times 4)$ در نظر گرفته شده است. مقادیر بی‌بعد شده به‌صورت رابطه (۳۸) تعریف می‌شوند:

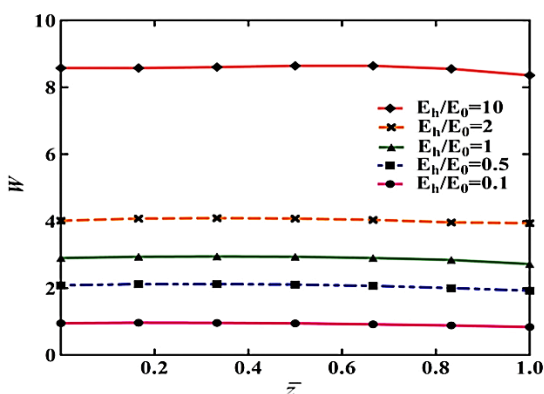
$$W = \frac{G \times w}{h \times ql}; \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{ql}; \quad \bar{z} = \frac{z}{h}$$

$$U = u_{max} \times 10^8; \quad V = v_{max} \times 10^8 \quad (38)$$

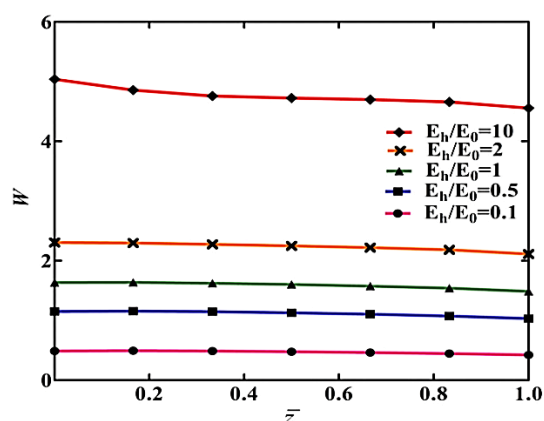
به‌منظور صحت‌سنجی نتایج روش ارائه شده برای تحلیل ورق ضخیم هدفمند، نتایج حاصل با نتایج به‌دست‌آمده در سایر مقالات، در جدول ۱ و ۲ مقایسه شده است. مقادیر بی‌بعد خیز بیشینه محاسبه شده توسط این روش با نتایج مرجع مطابقت بسیار خوبی دارد. همچنین اثرات تغییر خواص ماده هدفمند $(\frac{E_h}{E_0})$ ، تغییرات ضخامت و شرایط مرزی بررسی شده است.



شکل ۶- تأثیر توابع وزن در همگرایی نتایج برای خیز مرکزی نرمال شده ورق مربعی CCCC. ($\frac{E_h}{E_0} = 1; \frac{h}{a} = 0.2$)



شکل ۷- خیز بی‌بعد $W(a/2, b/2, z)$ در ورق مربعی SSSS به‌ازای ضخامت بی‌بعد، با تغییر مقادیر $\frac{E_h}{E_0}$



شکل ۸- خیز بی‌بعد $W(a/2, b/2, z)$ در ورق مربعی CCCC به‌ازای ضخامت بی‌بعد، با تغییر مقادیر $\frac{E_h}{E_0}$

در شکل ۶، تأثیر توابع وزن مختلف بر همگرایی خیز مرکزی نرمال شده، به ازای $\frac{E_h}{E_0} = 1, \frac{h}{a} = 0.2$ ، آورده شده است و با در نظرگیری تأثیر تراکم گره‌ها، تابع وزن مناسب انتخاب خواهد شد. با توجه به نتایج به‌دست آمده در این تحلیل، تابع وزن اسپلاین مکعبی را انتخاب شده است که در همگرایی نتایج تأثیر بیشتری دارد.

با توجه به جدول ۱ و ۲ مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ خیز بیشینه به‌ازای شرایط مرزی مختلف افزایش پیدا می‌کند و همچنین کاهش ضخامت ورق سبب افزایش خیز بیشینه می‌شود. از آنجایی که مدول یانگ در انتهای ورق (E_h) ثابت است، لذا افزایش نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ سبب نرم‌تر شدن سطح ورق، در نتیجه افزایش خیز در ورق می‌شود. در شکل ۷ و ۸، تأثیر مقادیر مختلف نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ روی خیز بیشینه، به ازای ضخامت

بی‌بعد نشان داده شده است. همچنین تأثیر نوع شرایط مرزی به‌ازای $(\frac{h}{a} = 0.3)$ بررسی شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ به‌ازای شرایط مرزی داده شده، مقدار خیز بیشینه افزایش می‌یابد؛ به‌طوری‌که هرچه نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ افزایش پیدا کند، سختی سطح بالایی ورق ($\bar{z} = 0$) کاهش و خیز بیشینه افزایش پیدا می‌کند.

با استفاده از روش ارائه شده، مقادیر جابه‌جایی بیشینه در جهت x و جابه‌جایی بیشینه در جهت y در $\frac{E_h}{E_0} = 1$ به‌ازای شرایط مرزی مختلف و ضخامت‌های متفاوت بررسی شده، نتایج به‌دست آمده با نتایج نرم‌افزار انسیس در جدول ۳ و ۴ مقایسه شده است. تراکم المان‌ها در تحلیل انسیس، $10 \times 36 \times 36$ در نظر گرفته شده است. نتایج به‌دست آمده مطابقت خوبی با نتایج انسیس دارد. در شکل ۹، تأثیر تغییرات شرایط مرزی بر خیز بیشینه بی‌بعد، به‌ازای مقادیر $\frac{E_h}{E_0} = 0.5, \frac{h}{a} = 0.3$ بررسی شده است. در تحلیل انجام شده از نرم‌افزار انسیس، نسخه ۱۴ و المان سالیید مکعبی (Solid-185) استفاده شده است. در شکل ۱۰، جهت صحت‌سنجی نتایج روش ارائه شده، این نتایج با انسیس مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که روش بدون المان گلرکین به‌ازای تراکم گره کمتر، نسبت به روش المان محدود، جواب‌های دقیق‌تری را می‌دهد؛ لذا این گویای برتری و همگرایی خوب روش ارائه شده، نسبت به روش المان محدود است.

جدول ۳- مقادیر جابجایی بیشینه در جهت x در ورق مربعی

با شرایط مرزی مختلف				
$u_{max} (\frac{h}{a} = 0.3)$		$u_{max} (\frac{h}{a} = 0.2)$		Bc
انسیس (mm)	روش حاضر (mm)	انسیس (mm)	روش حاضر (mm)	
۸/۴۸	۸/۳۸	۱۸/۸۰	۱۸/۶۰	SSSS
۶/۵۳	۶/۴۳	۱۲/۱۰	۱۱/۹۰	SCSC
۲/۶۴	۲/۵۹	۵/۵۹	۵/۶۰	CCCC

جدول ۴- مقادیر جابجایی بیشینه در جهت y در ورق مربعی

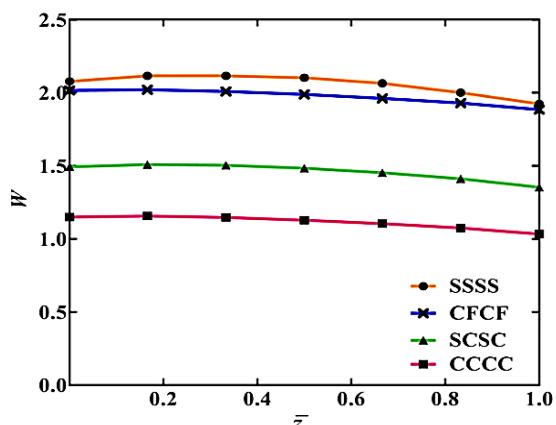
با شرایط مرزی مختلف				
$v_{max} (\frac{h}{a} = 0.3)$		$v_{max} (\frac{h}{a} = 0.2)$		Bc
انسیس (mm)	روش حاضر (mm)	انسیس (mm)	روش حاضر (mm)	
۸/۴۸	۸/۳۸	۱۸/۸۰	۱۸/۶۰	SSSS
۳/۴۸	۳/۴۲	۷/۹۱	۷/۷۱	SCSC
۲/۶۴	۲/۵۹	۵/۵۹	۵/۶۰	CCCC

جدول ۵- تنش نرمال درون صفحه‌ای بی‌بعد، در ورق ضخیم

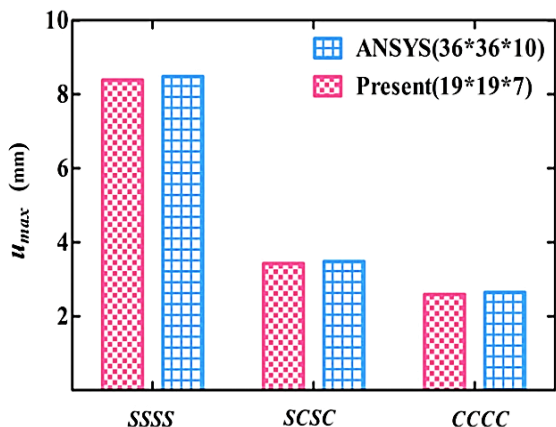
هدفمند مربعی SSSS با تغییر مقادیر در $\frac{E_h}{E_0}$				
$\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, 0)$		$\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, 0)$		$\frac{E_h}{E_0}$
مرجع [4]	روش حاضر	مرجع [4]	روش حاضر	
-۱۵/۳۵۶۴	-۱۵/۴۲۳۶	-۱۵/۳۵۶۴	-۱۵/۴۲۳۶	۰/۱
-۹/۲۹۰۲	-۹/۳۳۸۰	-۹/۲۹۰۲	-۹/۳۳۸۰	۰/۵
-۷/۴۴۶۲	-۷/۴۲۳۶	-۷/۴۴۶۲	-۷/۴۲۳۶	۱
-۵/۹۴۱۰	-۵/۸۸۱۷	-۵/۹۴۱۰	-۵/۸۸۱۷	۲
-۳/۴۶۶۵	-۳/۳۵۹۲	-۳/۴۶۶۵	-۳/۳۵۹۲	۱۰

جدول ۶- تنش نرمال درون صفحه‌ای بی‌بعد، در ورق ضخیم

هدفمند مربعی CCCC با تغییر مقادیر در $\frac{E_h}{E_0}$				
$\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, 0)$		$\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, 0)$		$\frac{E_h}{E_0}$
مرجع [4]	روش حاضر	مرجع [4]	روش حاضر	
-۸/۳۳۰۳	-۸/۳۳۰۳	-۸/۳۳۰۳	-۸/۳۳۰۳	۰/۱
-۵/۰۲۴۴	-۵/۰۲۴۴	-۵/۰۲۴۴	-۵/۰۲۴۴	۰/۵
-۴/۰۲۹۵	-۴/۰۲۹۵	-۴/۰۲۹۵	-۴/۰۲۹۵	۱
-۳/۲۲۵۲	-۳/۲۲۵۲	-۳/۲۲۵۲	-۳/۲۲۵۲	۲
-۱/۹۰۶۰	-۱/۹۰۶۰	-۱/۹۰۶۰	-۱/۹۰۶۰	۱۰

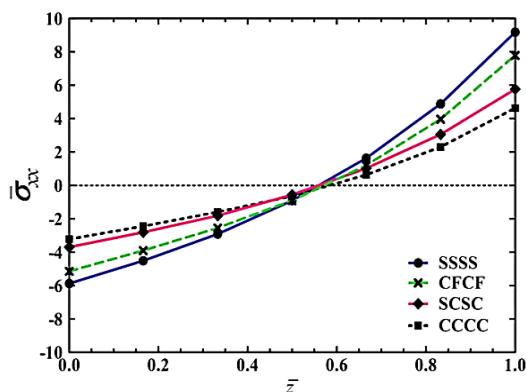


شکل ۹- خیز بی‌بعد $W(a/2, b/2, z)$ به‌ازای ضخامت بی‌بعد با شرایط مرزی مختلف

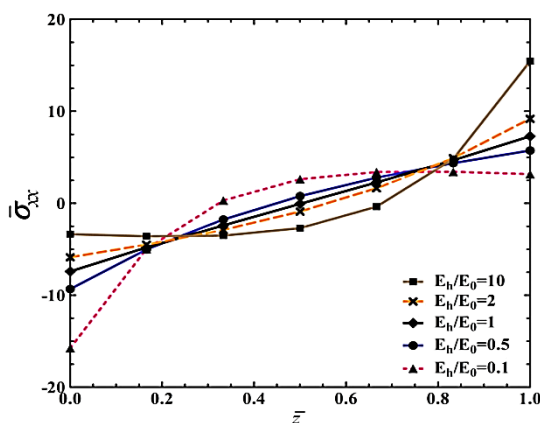


شکل ۱۰- مقایسه نتایج روش حاضر با انسیس در ورق با شرایط مرزی مختلف ($\frac{E_h}{E_0} = 1, \frac{h}{a} = 0.3$)

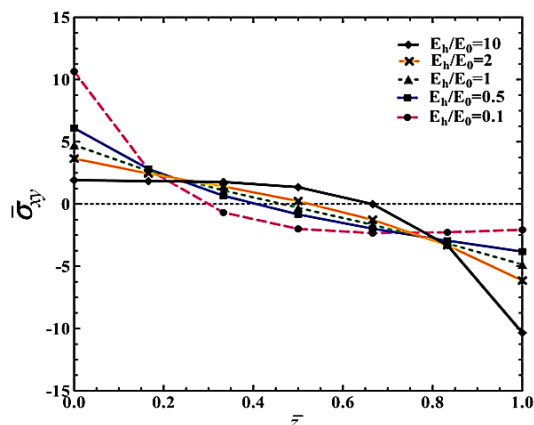
مقادیر تنش نرمال درون صفحه‌ای بی‌بعد، به‌ازای شرایط مرزی مختلف با نتایج به‌دست‌آمده در سایر مقالات در جداول ۵ تا ۸ مقایسه شده است. مقادیر محاسبه شده توسط این روش با نتایج مرجع مطابقت بسیار خوبی دارد. همچنین اثرات نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ بر تنش نرمال درون صفحه‌ای به‌ازای شرایط مرزی مختلف برای حالتی که ورق تحت بار یکنواخت قرار گرفته، بررسی شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ ، تنش نرمال درون صفحه‌ای به‌ازای کل شرایط مرزی مختلف کاهش پیدا می‌کند، زیرا این افزایش سبب نرم‌تر شدن ورق و کاهش تنش نرمال می‌شود.



شکل ۱۱- تنش نرمال درون صفحه‌ای بی‌بعد $\bar{\sigma}_{xx}$ به‌ازای ضخامت بی‌بعد با شرایط مرزی مختلف



شکل ۱۲- تنش نرمال درون صفحه‌ای بی‌بعد $\bar{\sigma}_{xx}$ در ورق مربعی SSSS به‌ازای ضخامت بی‌بعد، با تغییر $\frac{E_h}{E_0}$



شکل ۱۳- تنش برشی درون صفحه‌ای بی‌بعد $\bar{\sigma}_{xy}$ در ورق مربعی SSSS به‌ازای ضخامت بی‌بعد، با تغییر مقادیر $\frac{E_h}{E_0}$

جدول ۷- تنش نرمال درون صفحه‌ای بی‌بعد، در ورق ضخیم هدمند مربعی CFCF با تغییر مقادیر در $\frac{E_h}{E_0}$

$\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, 0)$	$\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, 0)$	$\frac{E_h}{E_0}$
-۱۳/۷۸۲۰	-۳/۳۶۴۴	۰/۱
-۸/۱۷۶۵	-۲/۰۳۱۹	۰/۵
-۶/۴۹۷۹	-۱/۶۵۴۳	۱
-۵/۱۴۵۱	-۱/۳۵۹۶	۲
-۲/۹۳۷۰	-۰/۸۹۵۶	۱۰

جدول ۸- تنش نرمال درون صفحه‌ای بی‌بعد، در ورق ضخیم هدمند مربعی SCSC با تغییر مقادیر در $\frac{E_h}{E_0}$

$\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, 0)$	$\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, 0)$	$\frac{E_h}{E_0}$
-۹/۳۹۰۲	-۱۱/۴۳۴۳	۰/۱
-۵/۷۴۰۹	-۶/۷۹۱۰	۰/۵
-۴/۶۱۶۹	-۵/۴۰۵۰	۱
-۳/۶۹۵۹	-۴/۲۹۰۱	۲
-۲/۱۶۰۹	-۲/۴۷۴۲	۱۰

در شکل ۱۱، تأثیر شرایط مرزی مختلف بر تنش نرمال درون صفحه‌ای بی‌بعد، به‌ازای مقادیر $\frac{h}{a} = 0.2$, $\frac{E_h}{E_0} = 2$ نشان داده شده است. در شکل ۱۲، تأثیر نسبت مقادیر مختلف $\frac{E_h}{E_0}$ بر $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, z)$ در ورق با شرایط مرزی SSSS، نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، به‌ازای ضخامت ثابت $\frac{h}{a} = 0.2$ در $z = h$ ، افزایش نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ سبب افزایش تنش نرمال درون صفحه‌ای می‌شود. در شکل ۱۳، تأثیر نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ بر تنش برشی درون صفحه‌ای $\bar{\sigma}_{xy}(0, 0, z)$ در ورق SSSS به‌ازای $\frac{h}{a} = 0.2$ نشان داده شده است.

در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود، افزایش نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ در $z = 0$ ، سبب کاهش تنش برشی درون صفحه‌ای می‌شود. به‌طور کلی در $z = 0$ ، کاهش نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ سبب افزایش سختی ورق و در نتیجه افزایش تنش برشی درون صفحه‌ای می‌شود. همچنین افزایش سختی ورق (کاهش $\frac{E_h}{E_0}$) سبب می‌شود که تنش برشی درون صفحه‌ای در z کمتری صفر شود، زیرا تنش برشی درون صفحه‌ای همواره روی تار خنثی صفر است.

۴- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

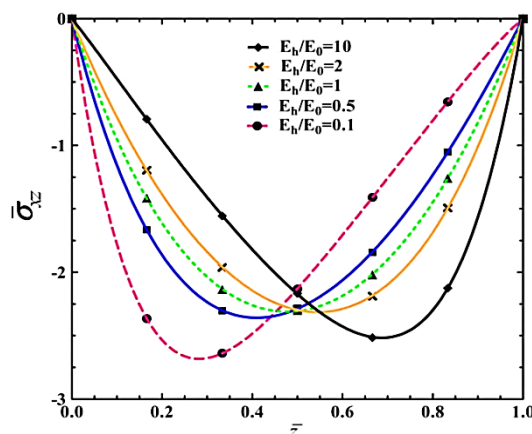
در این پژوهش، پاسخ استاتیکی ورق هدفمند با استفاده از روش بدون المان گلرکین با در نظرگیری اثرات شرایط مرزی مختلف بررسی شده است. همچنین این روش با فرمول‌بندی سه‌بعدی برای ورق ضخیم هدفمند ارائه شده است و تأثیر شرایط مرزی، ضخامت و شاخص ماده هدفمند بر پاسخ استاتیکی ورق هدفمند بررسی شده است. جهت نشان دادن اعتبار معادلات به‌دست آمده، نتایج با مقالات ارائه شده مقایسه گردید. نتایج بدست آمده دقت و همگرایی خوب روش بدون المان گلرکین را در مقایسه با روش المان محدود نشان می‌دهد. در روش ارائه شده افزایش تراکم گره‌ها سبب همگرایی نتایج شده، این روش برای گره‌های کمتر، نتایج بهتری را نسبت به المان محدود دارد. در این پژوهش، تأثیر سه تابع وزن اسپیلاین درجه سوم، اسپیلاین درجه چهارم و مثلثاتی در نظر گرفته شده که تابع وزن اسپیلاین درجه سوم، بهترین جواب‌ها را نشان می‌دهد. همچنین تأثیر پارامتر بی‌بعد دامنه پشتیبان بر پاسخ ورق بررسی شد و مقدار بهینه این پارامتر برای مسائل استاتیکی سه‌بعدی تعیین شد؛ همان‌طور که ملاحظه شد، افزایش نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ موجب کاهش سختی ورق و در نتیجه افزایش خیز بیشینه و کاهش تنش نرمال درون صفحه‌ای در سطح ورق می‌شود.

۵- فهرست علائم

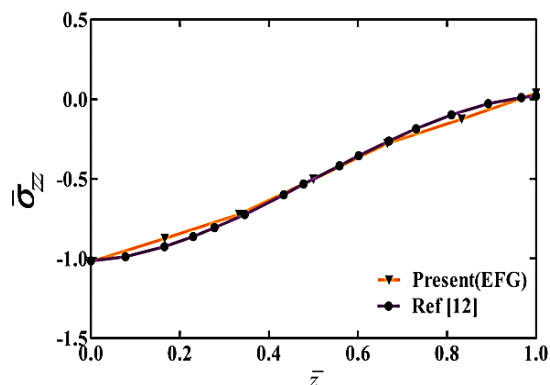
نیروهای حجمی، (N/m^3)	b
شرایط مرزی	Bc
ماتریس سختی الاستیک، (N/m^2)	D
مدول یانگ سطح فوقانی ورق، (N/m^2)	E_0
مدول یانگ سطح زیرین ورق، (N/m^2)	E_h
بردار نیرو عمومی	F
ماتریس سختی گره‌ای مربوط به شرایط مرزی	G_{IJ}
ماتریس سختی گره‌ای	K_{IJ}
تعداد ترم‌های تابع پاسکال	m
بردار نیروی مربوط به اعمال شرایط مرزی هندسی	q
نیروهای سطحی، (N/m^2)	\bar{t}
جابجایی ورق در جهت x ، (mm)	U
جابجایی ورق در جهت y ، (mm)	V
جابجایی ورق در جهت z ، (mm)	W

در شکل ۱۴، تأثیر نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ بر تنش برشی بی‌بعد $\bar{\sigma}_{xz}(0, b/2, z)$ به ازای $\frac{h}{a} = 0.2$ در ورق SSSS نشان داده شده است. در شکل ۱۵، با استفاده از روش ارائه شده، مقادیر تنش نرمال برون صفحه‌ای به‌ازای $\frac{h}{a} = 0.3$ ، $\frac{E_h}{E_0} = 1$ در ورق مربعی SSSS نشان داده شده است.

در شکل ۱۴، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت $\frac{E_h}{E_0}$ (کاهش سختی ورق)، تار خنثی در \bar{z} بزرگ‌تری قرار گیرد، از آنجایی که تنش برشی عرضی بی‌بعد روی تار خنثی بیشینه است، لذا تنش برشی در \bar{z} بزرگ‌تری بیشینه می‌شود. همچنین در شکل ۱۵، مقادیر $\bar{\sigma}_{zz}(a/2, b/2, z)$ محاسبه شده توسط این روش با نتایج مرجع مطابقت بسیار خوبی دارد.



شکل ۱۴- تنش برشی عرضی بی‌بعد $\bar{\sigma}_{xz}(0, b/2, z)$ در ورق مربعی SSSS به‌ازای ضخامت بی‌بعد، با تغییر $\frac{E_h}{E_0}$



شکل ۱۵- تنش نرمال برون صفحه‌ای $\bar{\sigma}_{zz}(a/2, b/2, z)$ در ورق مربعی SSSS به‌ازای ضخامت بی‌بعد

- [9] Sladek J, Sladek V, Zhang C (2005) Stress analysis in anisotropic functionally graded materials by the MLPG method. *Eng Anal Bound Elem* 29(6): 597-609.
- [10] Sladek J, Sladek V, Hellmich C, Eberhardsteiner J (2007) Analysis of thick functionally graded plates by local integral equation method. *Commun Numer Meth En* 23(8): 733-754.
- [11] Gilhooley DF, Batra RC, Xiao JR, McCarthy MA, Gillespie JW (2007) Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions. *Compos Struct* 80(4): 539-552.
- [12] Vaghefi R, Baradaran G, Koohkan H (2009) Three-dimensional static analysis of rectangular thick plates by using the meshless local Petrov–Galerkin method. *P I Mech Eng C-J Mec* 223(9): 1983-1996.
- [13] Zhao X, Liew KM (2009) Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Comput Method Appl M* 198(33-36): 2796-2811.
- [17] Zhu P, Zhang LW, Liew KM (2014) Geometrically nonlinear thermomechanical analysis of moderately thick functionally graded plates using a local Petrov–Galerkin approach with moving Kriging interpolation. *Compos Struct* 107: 298-314.
- [18] Memar Ardestani M, Soltani B, Shams S (2014) Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method. *Compos Struct* 112: 231-240.
- [۱۹] مرادی دستجردی ر، فروتن م، عبداللهی بکتاش س (۱۳۹۰) تحلیل استاتیکی استوانه‌هایی از جنس مواد هدفمند ارتوتروپیک با طول کوتاه به روش بدون المان. فصلنامه علمی پژوهشی مهندسی مکانیک جامدات، سال چهارم، شماره اول.
- [۲۰] نظری م.م، شریعتی م، اسلامی م، حسنی ب (۱۳۹۲) تحلیل بدون المان مواد مرکب هدفمند حاوی ترک تحت بارگذاری حرارتی. فصلنامه مکانیک هوافضا ۱۶-۱: ۹(۴).
- [21] Srinivas S, Rao AK (1973) Flexure of thick rectangular plates. *J Appl Mech-T ASME* 40(1): 298-299.

تابع شکل گره I ام	ψ_I
دامنه مسئله	Ω
دامنه کوادریچر	Ω_q
ضریب پواسون	N
شرایط مرزی	Γ
ضریب لاگرانژ	λ

۶- مراجع

- [1] Belytschko T, Lu YY, Gu L (1994) Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Meth Eng* 37(2): 229-256.
- [2] Liu GR, Gu YT (2005) An introduction to meshfree methods and their programming. Springer Science & Business Media 145, 196, 237, 254.
- [3] Kieback B, Neubrand A, Riedel H (2003) Processing techniques for functionally graded materials. *Mat Sci Eng A-Struct* 362(1): 81-106.
- [4] Vaghefi R, Baradaran GH, Koohkan H (2010) Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates by using meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method. *Eng Anal Bound Elem* 34(6): 564-573.
- [5] Ching HK, Yen SC (2005) Meshless local Petrov–Galerkin analysis for 2D functionally graded elastic solids under mechanical and thermal loads. *Compos Part B-Eng*, Vol. 36, No. 3, pp. 223-240.
- [6] Qian LF, Batra RC, Chen LM (2004) Analysis of cylindrical bending thermoelastic deformations of functionally graded plates by a meshless local Petrov–Galerkin method. *Comput Mech* 33(4): 263-273.
- [7] Qian LF, Batra RC, Chen LM (2004) Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Compos Part B-Eng* 35(6-8): 685-697.
- [8] Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Martins PALS (2005) Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. *Compos Struct* 69(4): 449-457.