



## تحلیل خمش ورق کامپوزیتی و ساندویچی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری عمومی-محلی اصلاح شده

ایرج رجبی<sup>۱\*</sup>، سید محمدرضا خلیلی<sup>۲</sup> و محمد شریعتی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شیراز

<sup>۲</sup> استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

<sup>۳</sup> دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۴/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۷/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۲/۱۶

### چکیده

در این مقاله، از یک مدل اجزاء محدود بر مبنای یک مدل ترکیبی برای مدل‌سازی اثرات کوپل ورق‌های کامپوزیتی و ساندویچی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک استفاده شده است. در این مدل ترکیبی، مولفه‌های مکانیکی با استفاده از تئوری عمومی-محلی<sup>۱</sup> پیشنهادی که در آن شرایط سطوح آزاد و پیوستگی جابه‌جایی بین لایه برآورده می‌شود و مولفه‌های الکتریکی به کمک تئوری لایه‌ای خطی مدل‌سازی شده است. در این تئوری، میدان جابه‌جایی عمومی خطی و میدان جابه‌جایی محلی به صورت تکه‌ای خطی است. تنش‌های عرضی برشی با استفاده از انتگرال‌گیری معادلات تعادل الاستیسیته محاسبه شده است. دقت تئوری معرفی شده با مقایسه نتایج آن و نتایج تئوری الاستیسیته سه بعدی، تئوری عمومی-محلی مرتبه بالا و تئوری لایه‌ای مرتبه بالا ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهد که تئوری پیشنهادی برای تحلیل خمش ورق کامپوزیتی و ساندویچی، حاوی لایه‌های پیزوالکتریک تحت بارگذاری مکانیکی و الکتریکی مناسب است.

**کلمات کلیدی:** تحلیل خمش؛ ورق ساندویچی؛ پیزوالکتریک؛ تئوری عمومی-محلی.

## Bending Analysis of Sandwich and Laminated Composite Plates Containing Piezoelectric Layers by Improved Global-Local Theory

I. Rajabi<sup>1,\*</sup>, S. M. R. Khalili<sup>2</sup>, M. Shariyat<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ph.D., Mech. Eng., M.A. University of Technology, Shiraz, Iran

<sup>2</sup> Prof., Mech. Eng., K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

<sup>3</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

### Abstract

In the present study, A finite element method based on the mixed theory is developed for the coupled-field analysis of sandwich and laminated plates containing piezoelectric layers. The concept of mixed theory is that the mechanical component is modeled by the global-local theory which satisfies the free surface conditions and the geometric continuity conditions at interfaces, whereas the electric field is modeled with layerwise theory. In the present theory, The global displacement components are assumed to be linear and the local components are considered to be piecewise linear. The transverse shear stresses are derived based on the three-dimensional theory of elasticity instead of the constitutive equations.

Accuracy of the present approach has been verified by comparing the present results with those of the three-dimensional theory of elasticity, the higher-order global-local and layerwise shear deformation theory available in the literature. The numerical examples analysis show that the present theory is suitable in predicting coupled behaviors of sandwich and laminated plates containing piezoelectric layers under mechanical and electric loadings.

**Keywords:** Bending Analysis; Sandwich Plate; Piezoelectric; Global-Local Theory.

<sup>1</sup> Global-Local

## ۱- مقدمه

سازه‌های ساندویچی، از دو رویه سفت و قوی و یک هسته نرم و انعطاف‌پذیر تشکیل شده‌اند. این رویه‌ها به وسیله هسته از هم جدا می‌شوند [۱]. رویه‌ها معمولاً از ورق‌های فلزی یا ورق‌های کامپوزیتی ساخته می‌شوند و هسته این مواد می‌تواند از پلیمرهای سبک، فوم‌ها، سازه‌های لانه زنبوری یا مواد با خاصیت توزیع تابعی تشکیل شود. سازه‌های ساندویچی رویه‌ها و هسته به ترتیب، توانایی تحمل بارهای کششی و بارهای برشی را دارند.

سازه‌های کامپوزیتی و ساندویچی با توجه به مزایای متعددی همچون، نسبت استحکام به وزن و مقاومت به وزن بالا به طور وسیع در صنایع امروزی از جمله: هوافضا، هوایی، دریایی، حمل و نقل جاده‌ای و سازه‌های ساختمانی، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

اخیراً ورق‌های کامپوزیتی تقویت شده با پیزوالکتریک کاربرد گسترده‌ای در صنایع هوایی و هوا فضا دارند. اثرات کوپل خواص مکانیکی و الکتریکی پیزوالکتریک‌ها، خواص ارتوتروپیک لایه‌های کامپوزیتی و رفتار انعطاف‌پذیر هسته میانی در سازه‌های ساندویچی، سبب پیچیدگی مطالعه رفتار سازه‌های ساندویچی حاوی مواد پیزوالکتریک می‌شود؛ بنابراین جهت پیش‌بینی دقیق رفتار این سازه‌های پیچیده، می‌بایست تئوری‌ها و مدل‌های المان محدود توسعه داده شوند.

معمولاً برای تحلیل ورق‌های حاوی پیزوالکتریک از تئوری‌های ورق استفاده می‌شود. در تئوری‌های ورق، تغییرات توابع جابه‌جایی در جهت ضخامت تخمین زده شده، برای یافتن تغییرات آن‌ها در جهت درون صفحه‌ای، از روابط الاستیسیته دو بعدی یا روش‌های هم‌ارز مانند اصل جابه‌جایی‌های مجازی استفاده می‌شود. به طور کلی تئوری‌های دو بعدی را می‌توان در قالب چهار گروه کلی دسته بندی کرد: تئوری‌های تک لایه معادل، تئوری‌های لایه‌ای، تئوری‌های زیگزاگ، تئوری‌های عمومی- محلی مبتنی بر اصل برهم نهی میدان جابجایی‌های عمومی و لایه‌ای.

ابتدا پاگانو [۲]، حل تحلیلی دقیق برای تحلیل ورق‌های کامپوزیتی ارائه داد. براساس این روش رای [۳-۴] و هی-لیگر [۵]، حل دقیق استاتیکی ورق‌های کامپوزیتی حاوی پیزوالکتریک را گزارش دادند. برخی محققان نیز، از مدل سه

بعدی اجزاء محدود برای حل مساله استفاده کردند [۶-۷]. در این روش، با وجود حجم محاسبات سنگین، ضخامت نازک پیزوالکتریک در برابر هسته نیز ایجاد چالش می‌کند. از تئوری‌های تک لایه معادل شامل تئوری کلاسیک [۸]، مرتبه اول برشی [۹-۱۰]، مرتبه بالای برشی [۱۱-۱۲]، برای تحلیل صفحات دارای لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک استفاده نموده‌اند. به علت استفاده از تئوری تک لایه ورق، پیوستگی جابجایی‌ها و تنش‌های برشی عرضی در مرز مشترک لایه‌ها برقرار نمی‌شود.

برای عبور از این چالش، تئوری لایه‌ای [۱۳-۱۵] به کار گرفته شد. نتایج نشان داد که دقت تئوری‌های لایه‌ای مناسب است؛ اما وابستگی تعداد متغیرها به تعداد لایه‌ها، سبب افزایش حجم محاسبات می‌شود. برای افزایش کارایی و کاهش هزینه محاسبات، ردی و همکاران [۱۶-۱۸] تئوری مخلوط به کار گرفتند. در این روش، مولفه‌های مکانیکی به کمک تئوری تک لایه و مولفه‌های الکتریکی با استفاده از تئوری لایه‌ای مدل‌سازی شده است. به دلیل استفاده از تئوری تک لایه معادل، حجم محاسبات کاهش یافته است؛ اما پیوستگی تنش عرضی بین لایه‌ها ایجاد نمی‌شود.

چو و همکارانش [۱۹-۲۰]، مدل فوق را با استفاده از تئوری زیگزاگ به جای تئوری تک‌لایه، اصلاح کردند. نتایج تنش صفحه‌ای در این تئوری، دقت بهتری نسبت به حل سه بعدی نشان می‌دهد؛ اما مقادیر تنش برشی عرضی که با استفاده از معادلات ساختاری به طور مستقیم محاسبه شده است، دقت کافی ندارد.

بیشتر مطالعات انجام شده در خصوص ورق‌های کامپوزیتی، حاوی لایه‌های پیزوالکتریک است و کمتر به سازه‌های ساندویچی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک پرداخته شده است.

بهشتی اول و همکارانش [۲۱-۲۲] با استفاده از تئوری عمومی-محلی مرتبه بالا به تحلیل تیرهای ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و پیزوالکتریک دارای هسته فوم پرداخته‌اند. به دلیل استفاده از تئوری عمومی-محلی و برقراری پیوستگی جابجایی و تنش عرضی در فصل مشترک لایه‌ها و شرایط سطوح آزاد، تعداد مجهولات کاهش یافته و مستقل از تعداد لایه‌ها است، بنابراین حجم محاسبات کاهش یافته است. نتایج نشان‌دهنده دقت قابل قبول این تئوری در

در ادبیات فنی، این پدیده به پیوستگی بین لایه‌های تنش‌های عرضی معروف است.

در واقع جابه‌جایی‌ها و تنش‌های عرضی به دلیل الزامات سازگاری و تعادل، توابعی با پیوستگی  $C^0$  در راستای ضخامت  $Z$  می‌باشند. الزامات  $C_z^0$  از جمله موارد بسیار مهمی است که می‌بایست در هر تئوری مرتبط با صفحات مرکب برآورده گردند.

گرچه تاکنون مدل‌ها و تئوری‌های زیادی برای تحلیل سازه‌های چند لایه و ساندویچی ارائه شده‌اند، با این حال مرور کارهای انجام شده توسط محققان نشان می‌دهد که کاستی‌هایی در این راستا مطرح است.

در تئوری‌های تک‌لایه معادل، جابه‌جایی‌ها به صورت توابعی از راستای ضخامت در نظر گرفته می‌شوند که سبب می‌شود کرنش‌های عرضی به صورت پیوسته بدست آید؛ ولی تنش‌های عرضی در مرز مشترک بین لایه‌ها (تنش‌های بین-لایه‌ای) ناپیوسته می‌باشد. در واقع در تئوری‌های تک‌لایه معادل، همه مولفه‌های تنش عرضی در مرز مشترک بین لایه‌ها ناپیوسته می‌باشند. در این تئوری‌ها، از پیوستگی تنش‌های بین صفحه‌ای صرف‌نظر می‌شود و همچنین اثرات زیگزاگ در سطوح تماس بین لایه‌ها نیز، در نظر گرفته نمی‌شود. برای چندلایه‌های نازک خطای مربوط به ناپیوسته شدن تنش‌های بین‌لایه‌ای قابل صرف‌نظر کردن است؛ در حالی که برای چندلایه‌های ضخیم، به خصوص برای پنل‌های ساندویچی، استفاده از این تئوری‌ها جهت یافتن همه مولفه‌های تنش، دارای خطای قابل ملاحظه‌ای خواهد بود. ارائه و توسعه تئوری‌های تک لایه معادل مرتبه بالا تا حدودی خطای ناشی از بالا بودن ضخامت در سازه‌های همگن را کاهش داده است؛ اما به طور کلی، تئوری‌های تک لایه معادل (با هر مرتبه‌ای) به دلیل ناهمسانگردی عرضی ناشی از تفاوت سفتی لایه‌های ورق‌های ساندویچی حاوی لایه‌های پیژوالکتریک، برای تحلیل تنش‌های بین صفحه‌ای این سازه‌ها مناسب نمی‌باشند.

در تئوری لایه‌ای اگرچه مشکلات ناشی از ناهمسانگردی عرضی مرتفع می‌شود، اما به دلیل وابستگی مجهولات مساله به تعداد لایه‌ها حجم محاسبات افزایش می‌یابد.

در تئوری‌های عمومی-محلی با استفاده از ترکیب تئوری‌های تک‌لایه معادل و لایه‌ای، نواقص تئوری‌های تک-

تحلیل تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی شامل، پیژوالکتریک تحت شرایط مرزی و بارگذاری الکترومکانیکی مختلف است.

تای و همکاران در مرجع [۲۳]، انواع تئوری‌های متداول ورق و پوسته را بررسی و مقایسه نموده‌اند. در این مقاله، نتایج انواع تئوری‌های تک لایه معادل، ترکیبی و الاستیسیته با هم مقایسه شده‌اند.

لای و لیو [۲۴]، تئوری عمومی-محلی مرتبه بالا جهت تحلیل ورق‌های کامپوزیتی توسعه دادند. سپس این تئوری در مرجع [۲۵]، برای تحلیل ورق کامپوزیتی حاوی پیژوالکتریک، استفاده شده است. نتایج نشان‌دهنده دقت قابل قبول این تئوری در پیش‌بینی رفتار ورق کامپوزیتی حاوی لایه‌های پیژوالکتریک تحت خمش است.

اخیراً [۲۶] در سال ۲۰۱۵، ورق کامپوزیتی و ساندویچی حاوی لایه‌های پیژوالکتریک با استفاده از تئوری مرتبه بالای دوبعدی و سه بعدی لایه‌ای، تحلیل شده است. در حالت سه-بعدی از میدان جابه‌جایی، همه مولفه‌ها مرتبه بالا است و در حالت دوبعدی جابه‌جایی عرضی ثابت فرض شده است. ورق به صورت ۳ لایه، ۵ لایه و ۳۰ لایه به روش تحلیلی و اجزاء محدود تحلیل شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل‌سازی ورق به صورت ۵ لایه، در تحلیل ورق ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و پیژوالکتریک، مطابقت بسیار خوبی با حل دقیق دارد.

خواص غیرایزوتروپیک رویه‌های کامپوزیتی در صفحه (ناهمسانگردی درون صفحه‌ای)، خواص متفاوت مواد رویه‌ها در راستای ضخامت به خصوص تفاوت خواص رویه‌ها و هسته در سازه‌های ساندویچی و تفاوت خواص لایه‌های پیژوالکتریک با لایه‌های کامپوزیتی (ناهمسانگردی عرضی)، سبب پیچیدگی مطالعه رفتار سازه‌های ساندویچی حاوی لایه‌های پیژوالکتریک می‌شود.

وجود ویژگی‌های مکانیکی متفاوت سبب می‌شود که میدان‌های جابه‌جایی در راستای ضخامت از خود تغییرات شیب بسیار محسوسی در محل تماس لایه‌ها نشان دهند. این اثر به شکل زیگزاگ میدان جابه‌جایی در راستای ضخامت معروف است. تنش‌های درون صفحه‌ای در سطح تماس لایه‌ها ناپیوسته هستند. با این وجود، تنش‌های عرضی جهت حفظ تعادل می‌بایست در سطح تماس لایه‌ها پیوسته باشند.

با توجه به اینکه محاسبه تنش‌های عرضی از معادلات تعادل همواره دقت بالاتری نسبت به محاسبه مستقیم با استفاده از توابع جابجایی دارد، لذا در این مطالعه نیز پس از یافتن مولفه‌های جابجایی و تنش درون‌صفحه‌ای (به کمک تئوری عمومی-محلّی خطی)، از معادلات تعادل جهت یافتن تنش‌های عرضی استفاده خواهد شد؛ همچنین به دلیل استفاده از معادلات تعادل برای محاسبات تنش‌های عرضی، شرایط پیوستگی تنش برشی بین لایه‌ها و صفر بودن تنش برشی روی سطوح خارجی لایه‌ها برقرار خواهد شد و نیازی به ضریب تصحیح برش نمی‌باشد.

در مدل‌سازی ورق ساندویچی، با توجه با نازک بودن رویه‌ها و پایین بودن نسبت ضخامت رویه‌ها به هسته، جهت کاهش حجم محاسبات نسبت به تئوری لایه‌ای، معمولاً ورق ساندویچی به صورت ۳ لایه در نظر گرفته می‌شود و از اثرات برشی رویه‌ها و اثرات درون صفحه‌ای هسته نیز صرف‌نظر می‌شود. در این تحقیق، ورق ساندویچی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک با ۵ لایه مدل‌سازی می‌شود تا بتوان رفتار رویه‌های هیبریدی (شامل کامپوزیت و پیزوالکتریک) را تحلیل نمود و اثرات برشی رویه‌ها و اثرات درون صفحه‌ای هسته نیز، در نظر گرفته می‌شود.

پس از اعمال پیوستگی‌ها در مرز مشترک لایه‌ها، معادلات حاکم بر اساس سایر توابع استخراج خواهد شد. پس از استخراج معادلات حاکم به صورت مدل‌سازی اجزای محدود، معادلات توسط برنامه‌نویسی حل شده، نتایج مختلف پس از صحت‌گذاری ارائه خواهند شد. جهت افزایش دقت برای محاسبه تنش عرضی برشی، از معادلات تعادل استفاده می‌شود.

تحلیل ورق‌های کامپوزیتی ضخیم و ساندویچی پوشانده شده با الیاف پیزوالکتریک، نشان می‌دهد نتایج مدل پیشنهادی با استفاده از قابلیت تئوری عمومی-محلّی با میدان جابجایی خطی، تطابق خوبی با روش سه‌بعدی و تئوری‌های مرتبه بالای لایه‌ای و عمومی-محلّی دارد، در حالی که هزینه محاسبات بسیار کمتری دارد.

## ۲- معرفی تئوری عمومی-محلّی

در این تحقیق، از مزایای تئوری‌های عمومی-محلّی، تئوری مرتبه‌بالای ساندویچی و معادلات تعادل استفاده می‌شود؛ به

لایه معادل (اثرات زیگزاگ، پیوستگی جابجایی و تنش بین لایه‌ای) و تئوری‌ها لایه‌ای (وابستگی مجهولات به تعداد لایه-ها) برطرف گردیده است. در این تئوری‌ها، معمولاً از توابع مرتبه بالا (مرتبه سوم و بالاتر) برای تخمین جابجایی استفاده شده است تا به کمک معادلات سازگاری تنش‌های عرضی به طور مستقیم محاسبه شوند، لذا در مدل المان محدود شرایط  $C^1$  برقرار می‌شود.

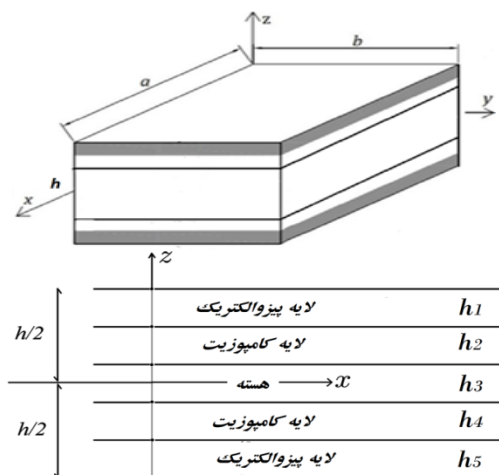
در مقاله حاضر، با استفاده از یک مدل جدید بر اساس ایده تئوری مخلوط و قابلیت‌های تئوری عمومی-محلّی، مرتبه بالای ساندویچی و معادلات تعادل، ورق چند لایه کامپوزیتی و ساندویچی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک بررسی می‌شود.

برای مدل‌سازی مولفه‌های الکتریکی، از تئوری لایه‌ای خطی استفاده شده است. برای مدل‌سازی مولفه‌های مکانیکی، بر مبنای الگوی تئوری عمومی-محلّی به جای افزایش مرتبه تئوری، یک بخش محلّی به میدان جابجایی تک لایه معادل (بخش عمومی) افزوده می‌شود.

برخلاف تئوری‌های عمومی-محلّی (مرتبه بالا) که تاکنون ارائه شده، جهت کاهش حجم محاسبات موارد زیر در نظر گرفته شده است:

- استفاده از تئوری خطی در بخش عمومی و محلّی (کاهش حجم محاسبات)
- استفاده از معادلات تعادل جهت محاسبه تنش‌های عرضی (افزایش دقت محاسبات و عدم نیاز به ضریب تصحیح برشی)
- مدل‌سازی ورق ساندویچی به صورت ۵ لایه (کاهش حجم محاسبات، افزایش قابلیت مدل‌سازی رویه‌های هیبریدی)

در این تئوری، میدان جابجایی خطی برای کل لایه‌ها (بخش عمومی) و میدان به صورت تکه‌ای خطی برای هر یک از لایه‌ها (بخش محلّی)، بصورت مجزا در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین به دلیل مرتبه خطی استفاده شده، حجم محاسبات نسبت به تئوری‌های مرتبه بالا کمتر است؛ در حالی که علاوه بر چرخش کلی لایه‌ها حول محور ورق، چرخش محلّی هر لایه حول محور خودش را نظر می‌گیرد؛ لذا اثرات زیگزاگ جابجایی و ناپیوستگی تنش‌های نرمال در محل تغییر جنس لایه‌ها را به خوبی مدل‌سازی می‌کند.



شکل ۱- هندسه، ابعاد و موقعیت دستگاه مختصات در ورق ساندویچی

بسیار خوبی دارند، لذا می‌توان جهت شبیه‌سازی رویه‌ها را به عنوان یک لایه نازک از تئوری تک لایه معادل خطی استفاده کرد.

در این مدل، از میدان جابجایی مرتبه اول هم برای تابع عمومی و هم برای بخش محلی لایه استفاده می‌شود و برای یافتن معادلات حاکم، از تنش قائم عرضی صرف‌نظر شده و جابجایی عرضی ورق نیز، در راستای ضخامت ثابت در نظر گرفته می‌شود.

در این حالت، اگرچه به طور مستقیم نمی‌توان پیوستگی تنش برشی بین لایه‌ها را اعمال کرد و از اثر انعطاف‌پذیری هسته صرف نظر شده، ولی به دلیل دقت بسیار خوب آن در محاسبه خیز و تنش‌های درون صفحه‌ای می‌توان از معادلات تعادل الاستیسیته، مقادیر تنش‌های عرضی را محاسبه کرد. در این مدل، نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی نیز نمی‌باشد و برخلاف فرضیات تئوری‌های مرتبه بالای ساندویچی، از اثرات برشی رویه‌ها و اثرات خمش صفحه‌ای هسته صرف‌نظر نمی‌شود.

$$\begin{aligned} u_G(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) && \text{بخش عمومی:} \\ v_G(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} w_G(x, y, z) &= w_0(x, y) \\ u_L^k(x, y, z) &= u_0^k(x, y) + z\varphi_x^k(x, y) && \text{بخش محلی:} \\ v_L^k(x, y, z) &= v_0^k(x, y) + z\varphi_y^k(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

با توجه به هندسه و مبدا مختصات در شکل (۱) و با جایگذاری متغیرها برای هر یک از لایه‌ها:

نحوی که دقت نتایج تحلیل مناسب باشد و حجم محاسبات نیز افزایش نیابد.

ایده اساسی در تئوری‌های عمومی- محلی بدین گونه است که ابتدا یک میدان جابجایی یکسان برای همه‌ی لایه-های ورق چندلایه و ساندویچی در نظر گرفته شده (مشابه مدل تک لایه معادل)، سپس برای لحاظ کردن رفتار متفاوت هر یک از لایه‌ها بعلاوه خواص متفاوتشان (اثر زیگزاگ)، توابع جابجایی مستقلی نیز، برای هر یک از لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود (مشابه تئوری لایه‌ای). در نهایت با اعمال شرط‌های پیوستگی بین لایه‌های تعداد مجهولات کاهش می‌یابد. معادله جابجایی در این تئوری‌ها به صورت روابط (۱) است.

$$u_i = u_i^{ELS} + u_i^{LWT} \quad (1)$$

$u_i^{ELS}$  مولفه جابجایی عمومی سازه است که برای تمام لایه‌ها بصورت یکسان در نظر گرفته می‌شود.  $u_i^{LWT}$  مولفه جابجایی محلی مربوط به هر یک از لایه‌های سازه است که باید شرایط پیوستگی را برقرار سازد. در واقع، ابتدا یک تابع جابجایی عمومی  $u_i^{ELS}$  در نظر گرفته می‌شود و سپس توسط جابجایی مستقل مربوط به هر یک از لایه‌ها ( $u_i^{LWT}$ )، پاسخ برای لایه‌های مختلف اصلاح شده و پاسخی مناسب‌تر بدست خواهد آمد.

### ۳- هندسه مسأله

در شکل ۱، هندسه ورق‌های ساندویچی مورد مطالعه و موقعیت دستگاه مختصات نشان داده شده است. طول و عرض ورق در راستای  $x$  و  $y$  به ترتیب  $a$  و  $b$ ، ضخامت کل ورق  $h$  است و مبدأ دستگاه مختصات در صفحه میانی ورق قرار دارد. ورق کامپوزیتی یا ساندویچی به صورت ۵ لایه مدل‌سازی می‌شود. ضخامت هر یک از لایه‌ها به صورت دلخواه، مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود.

### ۴- مدل‌سازی ریاضی

#### ۴-۱- استخراج معادلات مولفه‌های مکانیکی ورق ۵

##### لایه با استفاده از تئوری عمومی-محلی

در ساختار ورق‌های ساندویچی معمولاً ضخامت رویه‌ها نسبت به هسته خیلی نازک است و می‌دانیم که استفاده از تئوری-های تک‌لایه معادل ساده (مرتبه اول برشی) برای تحلیل محاسبات خیز و تنش‌های صفحه‌ای ورق‌های نازک دقت

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + z\varphi_x + (z - \frac{h_3}{2})\varphi_x^{(3)} \\ v_3 = v_0 + z\varphi_y + (z - \frac{h_3}{2})\varphi_y^{(3)} \\ -\frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} \\ u_4 = u_0 + z\varphi_x + (z + \frac{h_3}{2})\varphi_x^{(4)} - \frac{h_3}{2}\varphi_x^{(3)} \\ v_4 = v_0 + z\varphi_y + (z + \frac{h_3}{2})\varphi_y^{(4)} - \frac{h_3}{2}\varphi_y^{(3)} \\ -\frac{h_3}{2} - h_4 \leq z \leq \frac{h_3}{2} \\ u_5 = u_0 + z\varphi_x + (z + \frac{h_3}{2} + h_4)\varphi_x^{(5)} - h_4\varphi_x^{(4)} - \frac{h_3}{2}\varphi_x^{(3)} \\ v_5 = v_0 + z\varphi_y + (z - \frac{h_3}{2} - h_2)\varphi_y^{(5)} + h_2\varphi_y^{(4)} + \frac{h_3}{2}\varphi_y^{(3)} \\ -\frac{h_3}{2} - h_4 - h_5 \leq z \leq -\frac{h_3}{2} - h_4 \\ w = w_0 \end{cases} \quad (\Delta)$$

بر اساس توابع جابجایی بدست آمده، کرنش‌ها بصورت رابطه (۶) استخراج خواهند شد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(i)} &= \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy}^{(i)} &= \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \end{aligned} \quad (۶)$$

رابطه بین تنش و کرنش برای مواد ارتوتروپیک در حالت کلی برای هریک از لایه‌ها بصورت رابطه (۷) خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \sigma_z^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \\ \tau_{xz}^{(i)} \\ \tau_{yz}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(i)} & C_{12}^{(i)} & C_{13}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^{(i)} & C_{22}^{(i)} & C_{23}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}^{(i)} & C_{32}^{(i)} & C_{33}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \varepsilon_z^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \\ \gamma_{xz}^{(i)} \\ \gamma_{yz}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (۷)$$

در حالت تنش صفحه‌ای به رابطه (۸) تبدیل خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xz}^{(i)} \\ \tau_{yz}^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^{(i)} & \bar{C}_{12}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{21}^{(i)} & \bar{C}_{22}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{44}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xz}^{(i)} \\ \gamma_{yz}^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + z\varphi_x + u_0^{(1)} + z\varphi_x^{(1)} \\ v_1 = v_0 + z\varphi_y + v_0^{(1)} + z\varphi_y^{(1)} \\ \frac{h_3}{2} + h_2 \leq z \leq \frac{h_3}{2} + h_2 + h_1 \\ u_2 = u_0 + z\varphi_x + u_0^{(2)} + z\varphi_x^{(2)} \\ v_2 = v_0 + z\varphi_y + v_0^{(2)} + z\varphi_y^{(2)} \\ \frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} + h_2 \\ u_3 = u_0 + z\varphi_x + u_0^{(3)} + z\varphi_x^{(3)} \\ v_3 = v_0 + z\varphi_y + v_0^{(3)} + z\varphi_y^{(3)} \\ -\frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} \\ u_4 = u_0 + z\varphi_x + u_0^{(4)} + z\varphi_x^{(4)} \\ v_4 = v_0 + z\varphi_y + v_0^{(4)} + z\varphi_y^{(4)} \\ \frac{h_3}{2} - h_4 \leq z \leq -\frac{h_3}{2} \\ u_5 = u_0 + z\varphi_x + u_0^{(5)} + z\varphi_x^{(5)} \\ v_5 = v_0 + z\varphi_y + v_0^{(5)} + z\varphi_y^{(5)} \\ -\frac{h_3}{2} - h_4 - h_5 \leq z \leq -\frac{h_3}{2} - h_4 \\ w = w_0 \end{cases} \quad (۴)$$

که در آن،  $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$  به ترتیب، جابجایی‌ها و چرخش عمومی لایه‌ها،  $u^{(k)}$  و  $v^{(k)}$  جابجایی محلی لایه‌ها،  $\varphi_x^{(k)}$  و  $\varphi_y^{(k)}$  چرخش محلی لایه‌ها به ترتیب در راستای x و y ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) و نیز،  $w$  خیز عمومی سازه است که برای همه لایه‌ها یکسان در نظر گرفته شده است. با اعمال شرایط پیوستگی جابجایی بین لایه‌های همجوار، معادله (۴) بصورت رابطه (۵) تبدیل خواهد شد:

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + z\varphi_x + (z - \frac{h_3}{2} - h_2)\varphi_x^{(1)} + h_2\varphi_x^{(2)} + \frac{h_3}{2}\varphi_x^{(3)} \\ v_1 = v_0 + z\varphi_y + (z - \frac{h_3}{2} - h_2)\varphi_y^{(1)} + h_2\varphi_y^{(2)} + \frac{h_3}{2}\varphi_y^{(3)} \\ \frac{h_3}{2} + h_2 \leq z \leq \frac{h_3}{2} + h_2 + h_1 \\ u_2 = u_0 + z\varphi_x + (z - \frac{h_3}{2})\varphi_x^{(2)} + \frac{h_3}{2}\varphi_x^{(3)} \\ v_2 = v_0 + z\varphi_y + (z - \frac{h_3}{2})\varphi_y^{(2)} + \frac{h_3}{2}\varphi_y^{(3)} \\ \frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} + h_2 \end{cases}$$

$$\phi^{(4)} = \frac{(z + \frac{h_3}{2} + h_4)\phi_4}{h_4} - \frac{(z + \frac{h_3}{2})\phi_4}{h_4}$$

$$-\frac{h_3}{2} - h_4 \leq z \leq -\frac{h_3}{2}$$

$$\phi^{(5)} = \frac{(z + \frac{h_3}{2} + h_4 + h_5)\phi_4}{h_5}$$

$$-\frac{(z + \frac{h_3}{2} + h_4)\phi_4}{h_5}$$

$$-\frac{h_3}{2} - h_4 - h_5 \leq z \leq -\frac{h_3}{2} - h_4 \quad (11)$$

۳-۴- استخراج معادلات ترکیبی ورق کامپوزیتی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک

در ورق‌های کامپوزیتی حاوی پیزوالکتریک، تنش و جابجایی-های الکتریکی بصورت رابطه (۱۲) براساس کرنش و میدان-های الکتریکی قابل بیان است.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]\{E\}$$

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [\varepsilon]\{E\} \quad (12)$$

همچنین رابطه (۱۲) بصورت کامل‌تر، بصورت رابطه (۱۳) نیز قابل بیان خواهد بود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^{(i)} & \bar{C}_{12}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12}^{(i)} & \bar{C}_{22}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{44}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{36} \\ e_{14} & e_{24} & 0 \\ e_{15} & e_{25} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & e_{25} \\ e_{31} & e_{32} & e_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (13)$$

با تعریف ماتریس‌های جدید برای تنش و کرنش، می‌توان فرم خلاصه (۱۴) را برای روابط فوق ارائه نمود:

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{C}]\{\bar{\varepsilon}\} : \quad \{\bar{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{D\} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{E\} \end{Bmatrix} \quad [\bar{C}] = \begin{bmatrix} [C] & -[e] \\ [e^T] & [\varepsilon] \end{bmatrix} \quad (14)$$

ماتریس مربوط به خواص ماده بصورت رابطه (۹) محاسبه خواهند شد:

$$\bar{C}_{11}^{(i)} = \frac{E_x^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}}, \bar{C}_{22}^{(i)} = \frac{E_y^{(i)}}{1 - \nu_{xy}^{(i)}\nu_{yx}^{(i)}}, \bar{C}_{12}^{(i)} = \bar{C}_{21}^{(i)} = \nu_{yx}^{(i)}\bar{C}_{11}^{(i)} = \nu_{xy}^{(i)}\bar{C}_{22}^{(i)},$$

$$\bar{C}_{44}^{(i)} = G_{xz}^{(i)}, \bar{C}_{55}^{(i)} = G_{yz}^{(i)}, \bar{C}_{66}^{(i)} = G_{xy}^{(i)}. \quad (9)$$

۲-۴- استخراج معادلات مولفه‌های الکتریکی ورق کامپوزیتی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری لایه‌ای

روابط مربوط به سازه ۵ لایه حاوی پیزوالکتریک، برای کلی-ترین حالت ارائه خواهد شد که در آن لایه‌های پیزوالکتریک می‌تواند هم از لحاظ تعداد و هم از لحاظ محل قرارگیری، بصورت دلخواه باشد.

$$\phi^{(1)} = \phi_0^{(1)} + z\phi_1^{(1)} \quad \frac{h_3}{2} + h_2 \leq z \leq \frac{h_3}{2} + h_2 + h_1$$

$$\phi^{(2)} = \phi_0^{(2)} + z\phi_1^{(2)} \quad \frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} + h_2$$

$$\phi^{(3)} = \phi_0^{(3)} + z\phi_1^{(3)} \quad -\frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2}$$

$$\phi^{(4)} = \phi_0^{(4)} + z\phi_1^{(4)} \quad -\frac{h_3}{2} - h_4 \leq z \leq -\frac{h_3}{2}$$

$$\phi^{(5)} = \phi_0^{(5)} + z\phi_1^{(5)}$$

$$-\frac{h_3}{2} - h_4 - h_5 \leq z \leq -\frac{h_3}{2} - h_4 \quad (10)$$

در واقع در این مدل‌سازی بین هریک از لایه‌ها، یک الکتروود قرار گرفته است که قابلیت اعمال پتانسیل در هر یک از آنها بصورت مستقل وجود دارد. در این مدل‌سازی، پتانسیل الکتریکی بصورت خطی و مستقل برای هر یک از لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود.

با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی و نام‌گذاری پتانسیل بین لایه‌ها بر اساس شکل (۱)، تابع پتانسیل مربوط به هر لایه بصورت رابطه (۱۱) بازنویسی می‌شود:

$$\phi^{(1)} = \frac{(z - \frac{h_3}{2} - h_2)\phi_1}{h_1} - \frac{(z - \frac{h_3}{2} - h_2 - h_1)\phi_2}{h_1}$$

$$\frac{h_3}{2} + h_2 \leq z \leq \frac{h_3}{2} + h_2 + h_1$$

$$\phi^{(2)} = \frac{(z - \frac{h_3}{2})\phi_2}{h_2} - \frac{(z - \frac{h_3}{2} - h_2)\phi_2}{h_2}$$

$$\frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} + h_2$$

$$\phi^{(3)} = \frac{(z + \frac{h_3}{2})\phi_3}{h_3} - \frac{(z - \frac{h_3}{2})\phi_3}{h_3}$$

$$-\frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2}$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_V \left( \delta \begin{Bmatrix} \{\epsilon\} \\ \{E\} \end{Bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} [C] & -[e] \\ -[e^T] & -[\epsilon] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon\} \\ \{E\} \end{Bmatrix} \right) dV \\ &- \int_A p \delta w dA + \int q \delta \phi ds \\ &= (\delta \{\bar{\epsilon}\}^T [\hat{C}] \{\bar{\epsilon}\}) dV \\ &- \int_A p \delta w dA + \int q \delta \phi ds, \\ &[\hat{C}] = \begin{bmatrix} [C] & -[e] \\ -[e^T] & -[\epsilon] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

میدانین الکتریکی را می‌توان بصورت رابطه (۲۱) براساس اختلاف پتانسیل نوشت:

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

با توجه به روابط تنش- کرنش و میدان الکتریکی/مغناطیسی-پتانسیل الکتریکی/مغناطیسی و همچنین با توجه به نحوه بیان توابع در روش اجزای محدود بصورت حاصل ضرب ماتریس توابع شکل در مقادیر نقاط گره، کرنش بصورت روابط ماتریسی بر اساس مقادیر نقاط گره بیان می‌شود:

$$\{\bar{\epsilon}\} = [T] \{\delta^{(e)}\} \quad (22)$$

$\{\delta^{(e)}\}$  معرف مقادیر توابع در نقاط گره المان، ماتریس T شامل عملگرهای مشتق‌گیری و توابع شکل مربوط به مدل اجزاء محدود است.

با یافتن ماتریس کرنش بر اساس مقادیر نقاط گره و جایگذاری آن در رابطه انرژی کرنشی، رابطه (۲۳) بدست خواهد آمد:

$$\delta U = \int_V \left( \delta \{\delta^{(e)}\}^T [T]^T [\hat{C}] [T] \{\delta^{(e)}\} \right) dV \quad (23)$$

بر اساس رابطه (۲۳)، ماتریس سفتی به صورت رابطه (۲۴) خواهد بود:

$$K = \int_V ([T]^T [\hat{C}] [T]) dV \quad (24)$$

از طرف دیگر، ماتریس نیروها براساس کار نیروهای خارجی استخراج خواهد شد:

$$\delta V = \int_A p \delta w dA + \int q \delta \phi ds$$

و

$$f = \int_A p < N > dA \quad (25)$$

جهت یافتن معادلات حاکم بر اساس اصل کمینه‌سازی انرژی خواهیم داشت:

$$\delta \Pi = \delta \Pi_S + \delta \Pi_E + \delta \Pi_{EXT}. \quad (15)$$

$\delta \Pi_S$ ،  $\delta \Pi_E$  و  $\delta \Pi_{EXT}$  به ترتیب انرژی کرنشی، انرژی الکتریکی و کار نیروهای خارجی است.

$$\delta \Pi_S = \int_V (\delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\}) dV \quad (16)$$

$$\delta \Pi_E = - \int_V (\delta \{E\}^T \{D\}) dV$$

$$\delta \Pi_{EXT} = - \int_A p \delta w dA + \int q \delta \phi ds$$

با جایگذاری تنش و جابجایی‌های الکتریکی براساس کرنش و میدان‌های الکتریکی در رابطه (۱۶)، رابطه (۱۷) استخراج خواهد شد.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_S &= \int_V (\delta \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\}) dV \\ &- \int_V (\delta \{\epsilon\}^T [e] \{E\}) dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_E &= - \int_V (\delta \{E\}^T [e]^T \{\epsilon\}) dV \\ &- \int_V (\delta \{E\}^T [\epsilon] \{E\}) dV \end{aligned}$$

$$\delta \Pi_{EXT} = - \int_A p \delta w dA \quad (17)$$

در نهایت با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۵)، تغییرات انرژی سازه قابل استخراج خواهد بود:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_V (\delta \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\}) dV \\ &- \int_V (\delta \{\epsilon\}^T [e] \{E\}) dV \\ &- \int_V (\delta \{E\}^T [e]^T \{\epsilon\}) \\ &- \int_V (\delta \{E\}^T [\epsilon] \{E\}) dV - \int_A p \delta w dA \end{aligned} \quad (18)$$

با توجه به روابط ماتریسی بدست آمده در رابطه (۱۴)، رابطه فوق را می‌توان به فرم خلاصه (۱۹) نیز بیان کرد:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_V \left( \delta \begin{Bmatrix} \{\epsilon\} \\ \{E\} \end{Bmatrix} \right)^T \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{D\} \end{Bmatrix} \right) dV \\ &= \left( \delta \begin{Bmatrix} \{\epsilon\} \\ -\{E\} \end{Bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} [C] & -[e] \\ [e^T] & [\epsilon] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon\} \\ \{E\} \end{Bmatrix} \right) dV \\ &- \int_A p \delta w dA + \int q \delta \phi ds \end{aligned} \quad (19)$$

همچنین رابطه (۱۹) بصورت رابطه (۲۰) نیز قابل بازنویسی است:



$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{(3)} &= -\int_{-\frac{h_3}{2}}^z (\tau_{xy,x}^{(3)} + \sigma_{y,y}^{(3)}) dz \\ &\quad -\frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} \\ \tau_{xz}^{(4)} &= -\int_{-h_4-\frac{h_3}{2}}^z (\tau_{xy,x}^{(4)} + \sigma_{y,y}^{(4)}) dz \\ &\quad -\frac{h_3}{2} - h_4 \leq z \leq -\frac{h_3}{2} \\ \tau_{xz}^{(5)} &= -\int_{-h_5-h_4-\frac{h_3}{2}}^z (\tau_{xy,x}^{(5)} + \sigma_{y,y}^{(5)}) dz \\ &\quad -\frac{h_3}{2} - h_4 - h_5 \leq z \leq -\frac{h_3}{2} - h_4 \end{aligned} \quad (28)$$

### ۵- نتایج عددی و صحت سنجی

برای مطالعه رفتار خمش الاستیک صفحات ساندویچی هوشمند، از مثال‌هایی استفاده شده است. ورق کامپوزیتی شامل، لایه‌های پیزوالکتریک تحت بار گسترده یکنواخت و سینوسی قرار گرفته است. پارامترهای بدون بعد استفاده شده در مقاله مطابق رابطه (۲۹) هستند:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{100 E_2 h^3}{q L^4} w, \quad u = \frac{E_2 h^2}{q L^2} u, \\ (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}) &= \frac{h^2}{q L^2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \\ (\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}) &= \frac{h}{q L} (\tau_{zx}, \tau_{zy}) \end{aligned} \quad (29)$$

### ۵-۱- مثال اول

در این مثال، یک ورق کامپوزیتی پنج لایه شامل سه لایه گرافیت-اپوکسی که با دو لایه پیزوالکتریک پوشانده شده است، با چیدمان لایه‌های (Piezo/90/0/90/ Piezo) مورد تحلیل قرار گرفته است و دارای مشخصات زیر است [۲۵]:

$$\begin{aligned} (E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{13}, G_{23}) &= (132.42, 10.75, 5.654, 5.654, 3.6) GPa \\ \nu_{12} &= 0.24 \end{aligned}$$

$$(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_0) = (3.5\epsilon_0, 3\epsilon_0, 3\epsilon_0, 8.85e^{-12}) c^2 / Nm^2$$

$$\begin{aligned} (E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{13}, G_{23}) &= (236.99, 23.2, 6.43, 4.4, 2.15) GPa \\ \nu_{12} &= 0.154 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_0) &= (12.5\epsilon_0, 11.98\epsilon_0, 11.98\epsilon_0, 8.85e^{-12}) c^2 / Nm^2 \\ (e_{13}, e_{23}, e_{24}, e_{15}) &= (0.0722, 0.0893, 0.01, 0.01) c / m^2 \end{aligned}$$

ضخامت هریک از لایه‌های پیزوالکتریک ۰/۱h و مجموع ضخامت لایه‌های گرافیت-اپوکسی یکسان ۰/۸ h است. ضخامت کل سازه h=1m است. همچنین نسبت ضخامت به طول ورق (a/h=۴) و a=b است. نتایج برای دو حالت بار گذاری و تکیه‌گاه ساده استخراج شده، با نتایج بدست آمده توسط مرجع [۲۵] مقایسه شده است.

در نهایت مدل اجزای محدود به صورت رابطه (۲۶) خواهد بود:

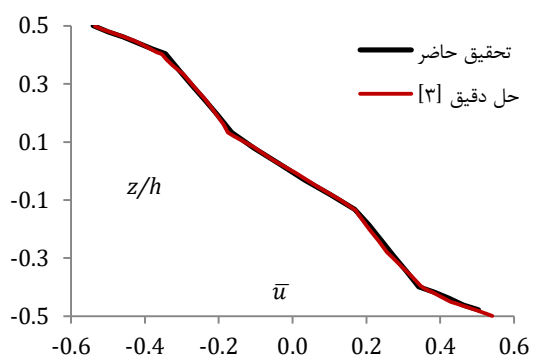
$$[K]\{\delta^{(e)}\} = \{f\} \quad (26)$$

### ۴-۴- محاسبه تنش برشی عرضی با استفاده از معادلات تعادل

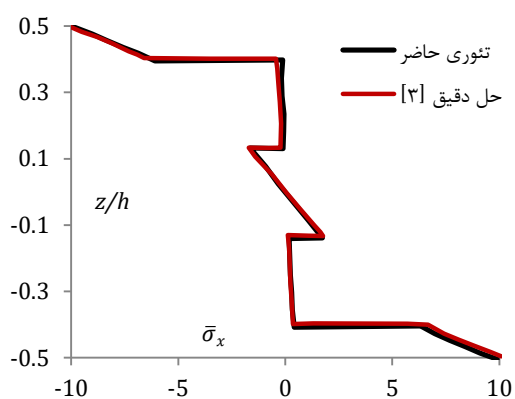
پیش‌بینی صحیح رفتار تنش برشی عرضی بین لایه‌ها در ورق کامپوزیتی، از موارد مهم در تحلیل ورق است. به دلیل متفاوت بودن خواص مکانیکی در لایه‌های مجاور در ورق‌های کامپوزیتی، مقادیر تنش نرمال و برشی در محل اتصال لایه‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. محاسبه تنش‌های عرضی با استفاده از معادلات سازگاری در تئوری مرتبه اول برشی، دارای خطای زیادی است و همچنین توزیع تنش برشی در راستای ضخامت را ثابت در نظر می‌گیرد و به فاکتور اصلاح تنش برشی نیز نیاز است. برای جلوگیری از این خطا، از معادلات تعادل سه بعدی برای محاسبه تنش‌های برشی عرضی استفاده می‌شود. سپس با اعمال شرایط سطوح آزاد و پیوستگی تنش برشی عرضی بین لایه مقادیر تنش محاسبه می‌شود. در غیاب نیروهای حجمی معادلات به شرح روابط (۲۷-۲۸) ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} &= 0 \Rightarrow \\ \tau_{xz}^{(1)} &= -\int_{h_2+\frac{h_3}{2}}^z (\sigma_{x,x}^{(1)} + \tau_{xy,y}^{(1)}) dz \\ &\quad \frac{h_3}{2} + h_2 \leq z \leq h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} \\ \tau_{xz}^{(2)} &= -\int_{\frac{h_3}{2}}^z (\sigma_{x,x}^{(2)} + \tau_{xy,y}^{(2)}) dz \\ &\quad \frac{h_3}{2} \leq z \leq h_2 + \frac{h_3}{2} \\ \tau_{xz}^{(3)} &= -\int_{-\frac{h_3}{2}}^z (\sigma_{x,x}^{(3)} + \tau_{xy,y}^{(3)}) dz \\ &\quad -\frac{h_3}{2} \leq z \leq \frac{h_3}{2} \\ \tau_{xz}^{(4)} &= -\int_{-h_4-\frac{h_3}{2}}^z (\sigma_{x,x}^{(4)} + \tau_{xy,y}^{(4)}) dz \\ &\quad -\frac{h_3}{2} - h_4 \leq z \leq -\frac{h_3}{2} \\ \tau_{xz}^{(5)} &= -\int_{-h_5-h_4-\frac{h_3}{2}}^z (\sigma_{x,x}^{(5)} + \tau_{xy,y}^{(5)}) dz \\ &\quad -\frac{h_3}{2} - h_4 - h_5 \leq z \leq -\frac{h_3}{2} - h_4 \end{aligned} \quad (27)$$

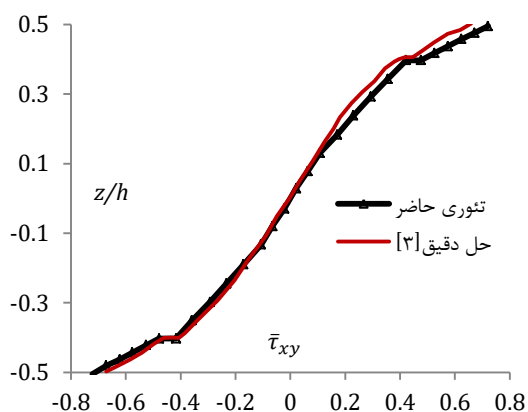
$$\begin{aligned} \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} &= 0 \Rightarrow \\ \tau_{yz}^{(1)} &= -\int_{h_2+\frac{h_3}{2}}^z (\tau_{xy,x}^{(1)} + \sigma_{y,y}^{(1)}) dz \\ &\quad \frac{h_3}{2} + h_2 \leq z \leq h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} \\ \tau_{yz}^{(2)} &= -\int_{\frac{h_3}{2}}^z (\tau_{xy,x}^{(2)} + \sigma_{y,y}^{(2)}) dz \\ &\quad \frac{h_3}{2} \leq z \leq h_2 + \frac{h_3}{2} \end{aligned}$$



شکل ۲ - جابجایی بی بعد درون صفحه‌ای  $\bar{u}$  ورق تحت بارگذاری مکانیکی سینوسی و شرایط تکیه‌گاهی ساده



شکل ۳- تنش عمودی درون صفحه‌ای بی بعد  $\bar{\sigma}_x$  ورق در راستای ضخامت



شکل ۴- تنش برشی درون صفحه‌ای بی بعد  $\bar{\tau}_{xy}$  در راستای ضخامت

### ۵-۱-۱- اعمال بارمکانیکی بصورت تابع سینوسی دو جهته و اتصال لایه‌های رویین و زیرین سازه به زمین (صفر قرار دادن پتانسیل سطوح آزاد)

مقادیر بدست آمده برای خیز مرکزی ورق توسط تحلیل حاضر و تحلیل انجام شده توسط مراجع [۱۸، ۲۵، ۳]، در جدول ۱ مقایسه شده است. نتایج ارائه شده در مرجع [۳]، بر اساس حل دقیق صورت گرفته است و در مرجع [۲۵]، از تئوری عمومی- محلی مرتبه بالا برای تحلیل سازه چند لایه استفاده شده است. نتایج نشان‌دهنده دقت بسیار خوب تئوری حاضر در محاسبه خیز است.

جابجایی درون صفحه‌ای سازه در راستای x و در نقطه  $(x=a, y=b/2)$  در شکل ۲ رسم شده است. تطابق کامل نتایج تئوری حاضر با حل دقیق [۳]، حاکی از دقت تئوری پیشنهادی در پیش‌بینی رفتار جابه‌جایی درون صفحه‌ای است.

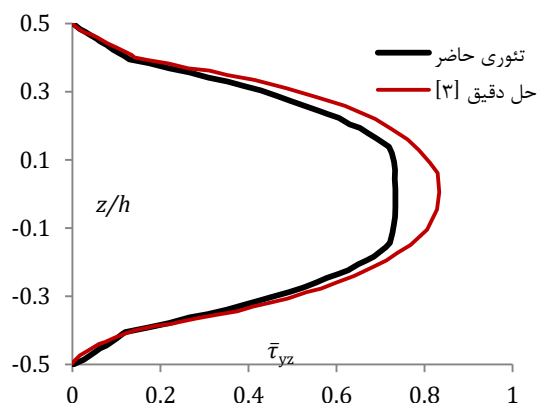
همچنین در شکل ۳، تنش‌های عمودی درون صفحه‌ای سازه در راستای x در مرکز سازه، در شکل ۴، تنش برشی درون صفحه‌ای سازه در نقطه  $(x=y=a)$  و در شکل ۵، تنش برشی عرضی سازه  $(\tau_{yz})$  در نقطه  $(x=a/2, y=b)$  رسم شده‌اند.

نتایج نشان می‌دهد، تئوری حاضر قادر است، نتایج تنش صفحه‌ای را مطابق با حل دقیق پیش‌بینی کند. در نتایج تنش برشی عرضی اگرچه در لایه‌های میانی به دلیل فرضیات در نظر گرفته شده، با حل دقیق اختلاف قابل انتظاری مشاهده می‌شود، اما رفتار تنش برشی به خوبی محاسبه می‌شود.

جدول ۱ - خیز مرکز سازه تحت بارگذاری مکانیکی و اتصال سطوح آزاد به زمین

$a/h=4$		تئوری
درصد خطا	خیز $w \times 10^{12}$	
-	۰/۳۵۵۲۷۴	حل دقیق [۳]
۰/۶	۰/۳۵۷۴۸۳	تئوری حاضر
۰/۲۹	۰/۳۵۶۳۱۶	تئوری لایه‌ای [۱۷]
۱/۵۷	۰/۳۶۰۸۶۰	تئوری عمومی- محلی مرتبه بالا [۲۵]

تنش برشی عرضی را مانند تئوری‌های سه‌بعدی نمایش دهد. پیوستگی تنش برشی بین لایه‌ها رعایت شده است. تنش‌های عمودی درون صفحه‌ای در مرکز سازه نیز، در شکل‌های ۸ تا ۹ رسم شده‌اند. عدم پیوستگی تنش‌های نرمال به دلیل تفاوت در جنس یا زاویه لایه‌ها به خوبی در نمودارها نمایان است. نحوه تغییرات پتانسیل الکتریکی مرکز سازه، در شکل ۱۰ نشان داده شده است. تغییرات پتانسیل الکتریکی در لایه‌ها با متفاوت شدن جنس یا زاویه در لایه‌ها نشان از دقت مناسب تئوری حاضر است. خطی بودن تغییرات به دلیل معادلات در نظر گرفته شده در مدل‌سازی میدان الکتریکی است.



شکل ۵- تنش برشی عرضی بی بعد  $\bar{\tau}_{yz}$  در راستای ضخامت

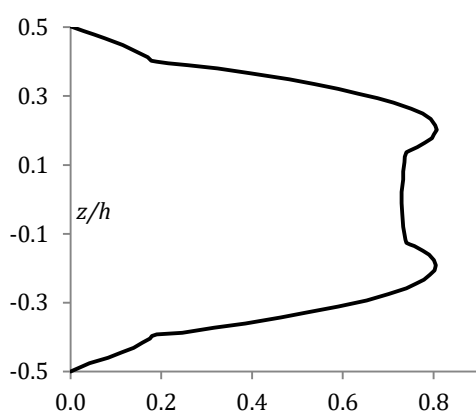
۵-۱-۲- اعمال پتانسیل الکتریکی بصورت تابع سینوسی بر سطح آزاد بالا و اتصال لایه زیرین سازه به زمین (صفر قرار دادن پتانسیل سطح آزاد زیرین) مقادیر بدست آمده برای خیز مرکزی سازه چندلایه توسط تحلیل حاضر و تحلیل‌های ارائه شده در مراجع [۳]، [۱۸] و [۲۵] در جدول ۲ مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، همانند حالت قبل، نتایج بدست آمده از دقت خوبی برخوردار است.

جدول ۲- خیز مرکز سازه حاصل از بارگذاری مکانیکی و بارگذاری الکتریکی

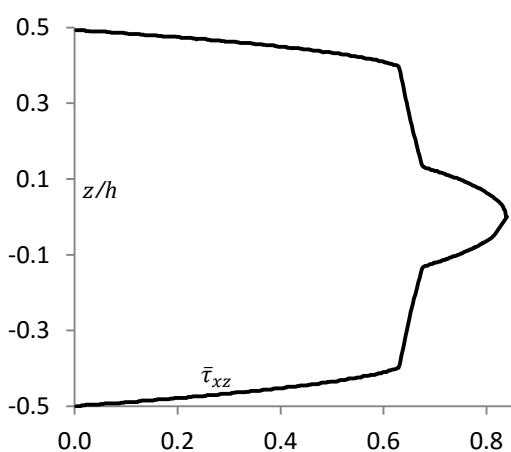
$a/h=4$		تئوری
درصد خیز خطا %	$w \times 10^{12}$	
-	۰/۲۲۰۰۶۲	حل دقیق [۳]
۰/۶	۰/۲۱۸۷۵	تئوری حاضر
۶/۹	۰/۲۳۵۳۹۲	تئوری لایه‌ای [۱۷]
۱/۵۷	۰/۱۹۶۰	تئوری عمومی-محلی مرتبه بالا [۲۵]

بررسی نوع بار اعمالی و شرایط تکیه‌گاهی: در ادامه جهت حالتی که شرایط تکیه‌گاهی به صورت گیردار و بارگذاری بصورت یکنواخت باشد، نتایج ارائه می‌شود.

تنش‌های برشی عرضی  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  در نقطه  $x=y=3L/4$  به ترتیب، در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است. نمودارها نشان می‌دهد که تئوری تکه‌ای خطی حاضر قادر است، رفتار



شکل ۶- تنش برشی عرضی سازه  $(\bar{\tau}_{yz})$  تحت بار مکانیکی یکنواخت



شکل ۷- تنش برشی عرضی  $(\bar{\tau}_{xz})$  تحت بار مکانیکی یکنواخت و تکیه‌گاه گیردار

۵-۲- مثال دوم

در این مثال، یک ورق کامپوزیتی حاوی دو لایه پیزوالکتریک با چیدمان متقارن (Piezo/0/90/0/ Piezo) تحت بارگذاری الکترومکانیکی قرار گرفته است. در این حالت، بار مکانیکی  $IN/m^2$  و پتانسیل الکتریکی ۱۰۰ بصورت سینوسی بر لایه رویین اعمال شده، هسته آن با اتصال به زمین دارای پتانسیل صفر است. ضخامت هر یک از لایه‌های کامپوزیتی ۳ میلی-متر، ضخامت لایه‌های پیزو الکتریک  $0.4$  میلی‌متر و نسبت ضخامت به طول ورق نیز  $h/a = 0.25$  است.

خواص لایه‌های کامپوزیتی [۳]:

$E_1/E_2=25, E1=172.5 GPa$

$E_2= E_3=6.9 GPa$

$\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.25$

$G_{12}= G_{13}=3.45E_2=3.45 GPa$

$G_{23}=0.2E_2=1.38GPa$

$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 8.85 \times 10^{12} F/m$

خواص لایه‌های پیزوالکتریک [۳]:

$E=200 GPa$

$\nu=0.29$

$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1.062 \times 10^{10} F/m$

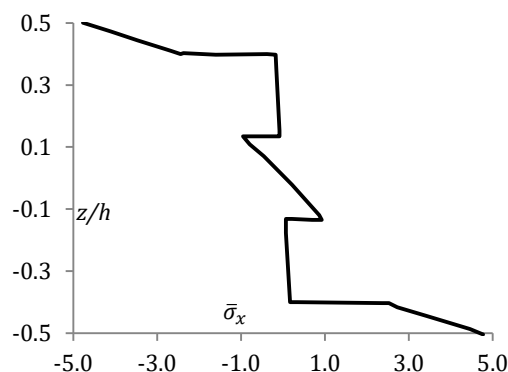
$e_{31} = e_{32} = 0.0046 C/m^2$

$e_{33} = e_{24} = e_{15} = 0$

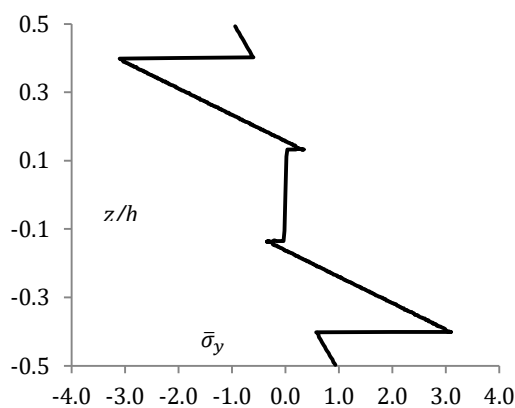
مقادیر بدست آمده برای جابجایی‌ها و تنش‌های صفحه‌ای توسط تحلیل حاضر و تحلیل انجام شده توسط دیگر محققان [۳، ۱۸، ۲۵] در جدول ۳ مقایسه شده است. تنش‌های عمودی درون‌صفحه‌ای در مرکز ورق و تنش برشی درون-صفحه‌ای ورق در نقطه  $(x=y=L)$  در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ رسم و با نتایج حاصل از حل دقیق [۳] مقایسه شده است.

جدول ۳ - مقایسه مقادیر جابجایی و تنش‌های صفحه‌ای

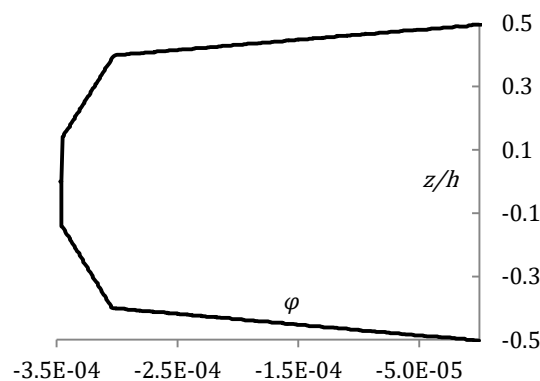
$\bar{u}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$(z = \pm \frac{h}{2})$		تئوری
		$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\sigma}_x$	
۰/۳۵۸	۲/۷۰۶	-۲۹/۲۶		حل دقیق [۳]
-۰/۱۴۶	-۰/۷۲۸	۱۱/۷۸		
۰/۳۴۲	۲/۷۸۵	-۲۵/۱۳		تئوری حاضر
-۰/۱۴۷	-۰/۹۳۲	۱۱/۱۳		
-	-	-		زیگزاگ مرتبه بالا [۱۸]
	-۱/۱۵۳	۱۳/۰۳		
۰/۳۵۸	۲/۷۰	-۲۸/۲۴		عمومی-محلی مرتبه بالا [۲۵]
-۰/۱۴۶	-۰/۷۲۷	۱۱/۶۵		



شکل ۸ - تنش عمودی درون صفحه‌ای ( $\bar{\sigma}_x$ ) تحت بار مکانیکی یکنواخت



شکل ۹ - تنش عمودی درون صفحه‌ای ( $\bar{\sigma}_y$ ) تحت بار مکانیکی یکنواخت



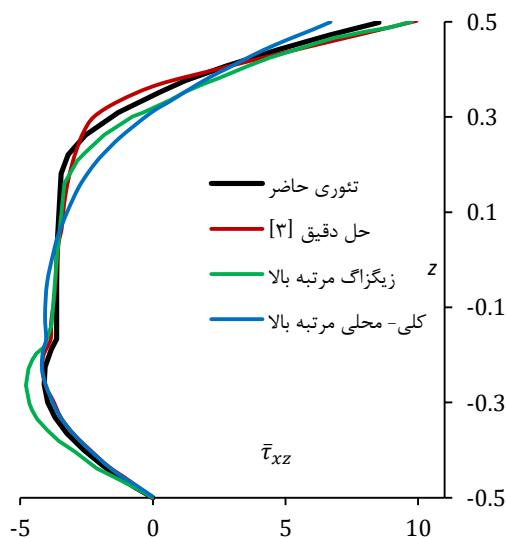
شکل ۱۰ - توزیع عرضی پتانسیل در مرکز ورق تحت بار مکانیکی یکنواخت

در جدول ۴، مقادیر خیز و تنش‌های برشی عرضی در مرکز ورق با نتایج تئوری‌های مرتبه بالا و حل دقیق مقایسه شده است. همچنین در شکل‌های ۱۴ و ۱۵، به ترتیب نمودار تنش‌های برشی عرضی  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  در نقاط  $(x=L, y=L/2)$  و  $(x=L/2, y=L)$  با مراجع [۳، ۱۸، ۲۵] مقایسه شده است. در تئوری حاضر، به دلیل استفاده از معادلات تعادل برای محاسبه تنش‌های عرضی، نتایج بهتری نسبت به تئوری‌های مرتبه بالای زیگزاگ و عمومی-محلّی دارد.

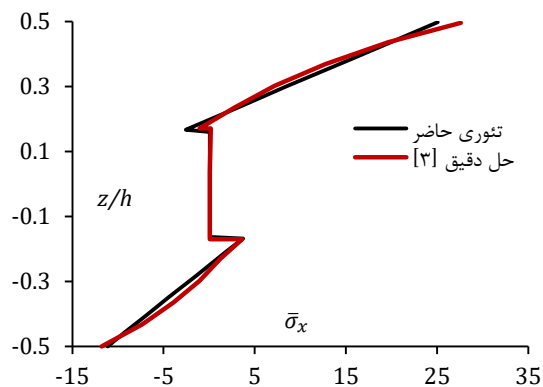
همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج تئوری حاضر با میدان جابجایی تکه‌ای خطی با نتایج حل دقیق و تئوری‌هایی که از میدان جابجایی مرتبه بالا استفاده کرده‌اند، تطابق بسیار خوبی در تحلیل پارامترهای درون صفحه‌ای ورق دارند.

جدول ۴ - مقایسه مقادیر خیز و تنش‌های برشی عرضی

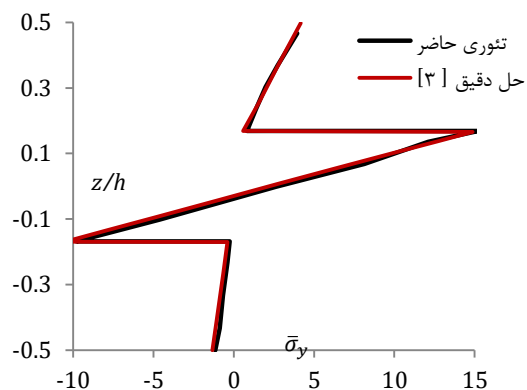
$(z = 0)$			تئوری
$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$w$	
-۰/۹۱	-۳/۶۲۵	۳۰/۴۸۱	حل دقیق [۳]
-۰/۸۷	-۳/۶۱۰	۳۰/۹۴	تئوری حاضر
۲/۱۶۳	-۳/۶۰۶	۳۱/۵۶	زیگزاگ مرتبه بالا [۱۸]
۰/۶۹۹	-۳/۴۱۶	۳۰/۶۰	عمومی-محلّی مرتبه بالا [۲۵]



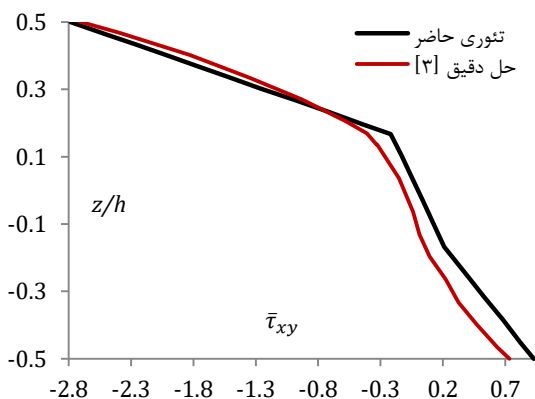
شکل ۱۴ - تنش برشی عرضی بی‌بعد  $\bar{\tau}_{xz}$  ورق تحت بار الکترومکانیکی سینوسی و تکیه‌گاه ساده



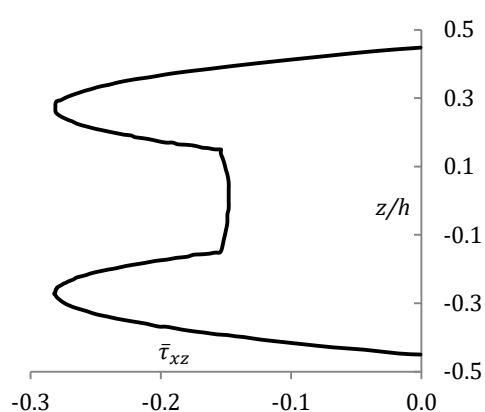
شکل ۱۱- تنش عمودی درون صفحه‌ای بی‌بعد  $(\bar{\sigma}_x)$  ورق تحت بار الکترومکانیکی سینوسی و تکیه‌گاه ساده



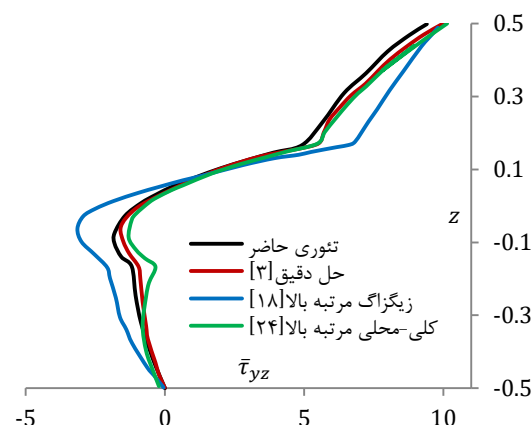
شکل ۱۲- تنش عمودی درون صفحه‌ای بی‌بعد  $(\bar{\sigma}_y)$  ورق تحت بار الکترومکانیکی سینوسی و تکیه‌گاه ساده



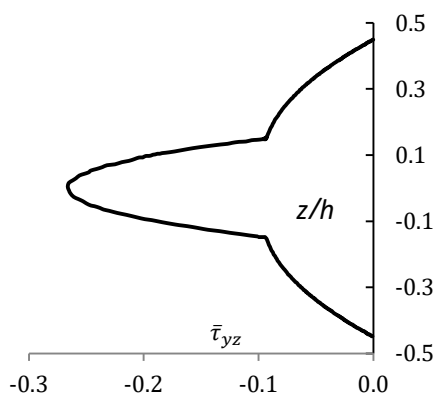
شکل ۱۳ - تنش برشی درون صفحه‌ای بی‌بعد  $\bar{\tau}_{xy}$  ورق تحت بار الکترومکانیکی سینوسی و تکیه‌گاه ساده



شکل ۱۷ - تنش برشی عرضی بی‌بعد (\$\bar{\tau}\_{xz}\$) تحت بار الکترومکانیکی گسترده یکنواخت و تکیه‌گاه گیردار



شکل ۱۵ - تنش برشی عرضی بی‌بعد (\$\bar{\tau}\_{yz}\$) ورق تحت بار الکترومکانیکی سینوسی و تکیه‌گاه ساده



شکل ۱۸ - تنش برشی عرضی بی‌بعد (\$\bar{\tau}\_{yz}\$) تحت بار الکترومکانیکی گسترده یکنواخت و تکیه‌گاه گیردار

در ادامه برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و بارگذاری الکترومکانیکی تنش‌های عمودی درون صفحه‌ای در مرکز سازه و تنش‌های برشی عرضی در نقطه  $(x=3L/4, y=3L/4)$  رسم شده‌اند. بار مکانیکی  $1N/m^2$  و پتانسیل ۱۰۰ در دو حالت روی لایه رویین اعمال شده است.

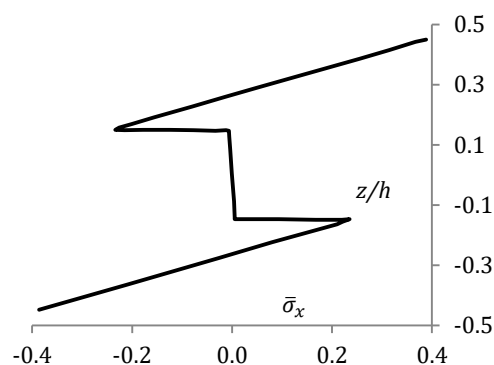
در حالت اول، هر دو بصورت سینوسی اعمال شده‌اند و در حالت دوم، بصورت یکنواخت توزیع شده‌اند. مشابه حالت قبل، لایه‌های میانی به زمین متصل شده‌اند. نمودار تنش عمودی صفحه‌ای و تنش‌های برشی عرضی ورق به ترتیب، در شکل‌های ۱۶ تا ۱۸ ترسیم شده است. نمودارها، نشان‌دهنده دقت بسیار خوب تئوری حاضر در پیش‌بینی رفتار تنش‌های صفحه‌ای و برشی عرضی تحت شرایط مرزی مختلف است.

صفر بودن تنش برشی در سطوح بیرونی و پیوستگی تنش برشی بین لایه‌ها، در نمودارها به خوبی نمایان است.

### ۳-۵- مثال سوم

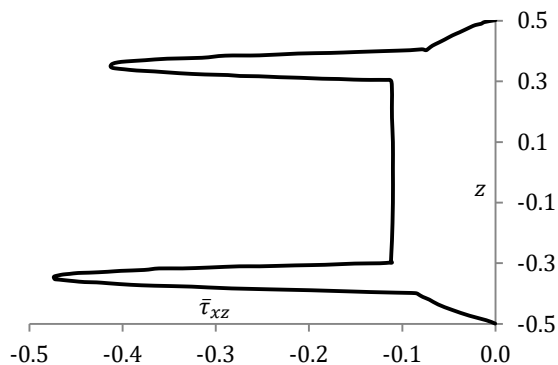
در مثال ۳-۵، اثر لایه‌های پیزوالکتریک روی سازه ساندویچی با چیدمان (Piezo/0/Core/0/Piezo)، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. خواص لایه‌های پیزو الکتریک و کامپوزیت مشابه مثال قبل است. همچنین خواص هسته نیز معادل  $0.1$  خواص روکش در جهت عرضی، در نظر گرفته شده است:

$$E_C = 690 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.3, \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 8.85 \times 10^{12} \text{ F/m}$$

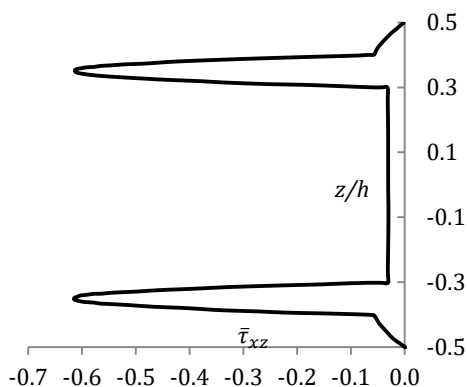


شکل ۱۶ - تنش عمودی درون صفحه‌ای بی‌بعد (\$\bar{\sigma}\_x\$) تحت بار الکترومکانیکی گسترده یکنواخت و تکیه‌گاه گیردار

می‌دهند، سهم هسته در تحمل تنش عمودی ناچیز است. نتایج تنش برشی عرضی، حاکی از آن است که در تئوری حاضر پیوستگی تنش برشی بین لایه‌های ورق برقرار شده است. همچنین با استفاده از میدان جابجایی مرتبه اول، می‌توان رفتار تنش برشی عرضی را پیش‌بینی کرد.



شکل ۲۱ - تنش برشی عرضی بی‌بعد ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) سازه ساندویچی با تکیه‌گاه ساده تحت بار الکترومکانیکی یکنواخت



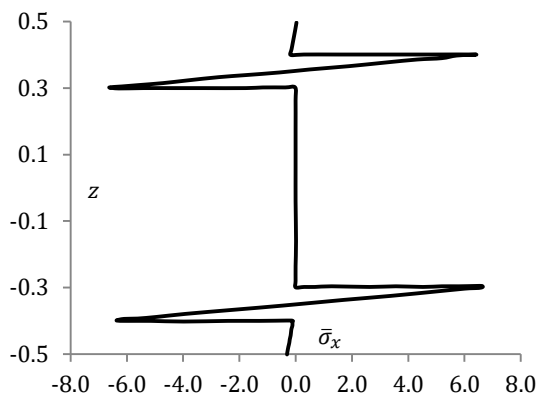
شکل ۲۲ - تنش برشی عرضی بی‌بعد ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) سازه ساندویچی با تکیه‌گاه گیردار تحت بار الکترومکانیکی یکنواخت

#### ۶- نتیجه‌گیری

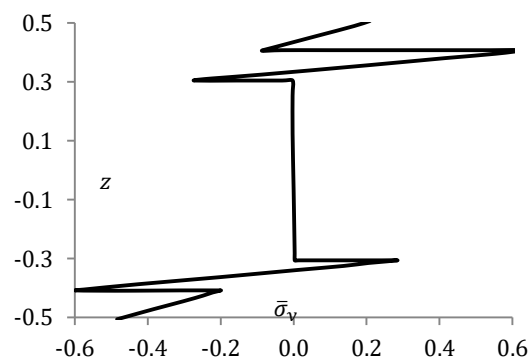
مدل‌سازی ورق ساندویچی به دلیل ناهمسانگردی درون صفحه‌ای و ناهمسانگردی عرضی، فرایندی پیچیده بوده، مستلزم استفاده از تئوری‌های بسیار دقیق است؛ گرچه تاکنون مدل‌ها و تئوری‌های زیادی برای تحلیل ورق‌های ساندویچی ارائه شده‌اند، در این پژوهش، تئوری با دقت بالا و در عین حال حجم محاسبات پایین مورد نظر قرار گرفت.

ضخامت هر یک از لایه‌های پیزوالکتریک و رویه‌های کامپوزیتی  $0/1h$  و ضخامت هسته  $0/6h$  است. نسبت ضخامت به طول ورق نیز،  $0/25$  لحاظ شده است.

در شکل‌های ۱۹ تا ۲۲ به ترتیب، تنش‌های عمودی در مرکز ورق و تنش‌های برشی عرضی در نقطه  $(x=3L/4, y=3L/4)$  برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده تحت بارگذاری الکترومکانیکی رسم شده‌اند. بار مکانیکی  $1N/m^2$  و پتانسیل  $100$  بصورت یکنواخت روی لایه رویین اعمال شده است. مشابه حالت قبل لایه‌های میانی به زمین متصل شده‌اند.



شکل ۱۹ - تنش عمودی بی‌بعد ( $\bar{\sigma}_x$ ) سازه ساندویچی با تکیه‌گاه گیردار تحت بار الکترومکانیکی یکنواخت



شکل ۲۰ - تنش عمودی صفحه‌ای بی‌بعد ( $\bar{\sigma}_y$ ) سازه ساندویچی با تکیه‌گاه ساده تحت بار الکترومکانیکی یکنواخت

رفتار تنش‌های عمودی در دو حالت تکیه‌گاهی مشابه است و ناپیوستگی این تنش‌ها در محل لایه‌ها، نشان از ترسیم صحیح نمودار است. همان‌طور که در نمودارها نشان

و ورق ساندویچی به صورت ۵ لایه مدل‌سازی شده است (کاهش حجم محاسبات). همچنین جهت محاسبه تنش‌های عرضی از معادلات تعادل استفاده شده است، بنابراین دقت محاسبات افزایش یافته است. اگرچه از تئوری خطی استفاده شده است اما نیازی به اعمال ضریب تصحیح برشی نمی‌باشد.

#### ۷- مراجع

- [1] Pagano NJ (1969) Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J Compos Mater* 3: 398-411.
- [2] Ray MC, Rao KM, Samanta B (1992) Exact analysis of coupled electroelastic behavior of a piezo-electric plate under cylindrical bending. *Composite Structures* 45(4):667-77.
- [3] Heyliger P, Brooks S (1996) Exact solutions for laminated piezoelectric plates in cylindrical bending. *J Appl Mech* 63(4): 903-10.
- [4] Ray MC, Bhattacharya R, Samanta B (1993) Exact solutions for static analysis of intelligent structures. *AIAA J* 31(9): 1684-91
- [5] Heyliger P, Brooks S (1995) Free vibration of piezo-electric laminates in cylindrical bending. *Int J Solids Struct* 32(20): 2945-60.
- [6] Allik H, Hughes TJR (1970) Finite element method for piezoelectric vibration. *Int J Num Methods Eng* 2: 151-157.
- [7] Xu KM, Noor AK, Tang Y (1995) Three-dimensional solutions for coupled thermoelectroelastic response of multi-layered plates. *Comput Meth Appl Mech Eng* 126: 355-71.
- [8] V Suleman, B Venkayya (1995) A simple finite element formulation for a laminated composite plate with piezoelectric layers. *J Intel Mat Syst Str* 6: 776-782.
- [9] Kapuria S, Dube GP, Dumir PC, Sengupta S (1997) Levy-type piezothermoelastic solution for hybrid plate by using first-order shear deformation theory. *Composites: Part B* 28: 535-546.
- [10] Behjati B, Salehi M, Sadighi M, Abbasi M (2009) Static, dynamic, and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric panels using finite element method, *J Intel Mat Syst Str* 20(13): 1635-1646.
- [11] Simões Moita JM, Mota Soares CM, Mota Soares CA (2009) Analyses of magneto-electro-elastic plates using a higher order finite element model. *Compos Struct* 91: 421-426.
- [12] Tahani M, Mirzababae M (2009) Higher-order coupled and uncoupled analyses of free edge effect in piezoelectric laminates under mechanical loadings. *Mater Design* 30: 2473-2482.

تحلیل خمش ورق کامپوزیتی و ساندویچی حاوی پیزوالکتریک در شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار، تحت بارگذاری مکانیکی عرضی یکنواخت و سینوسی و بارهای الکترومکانیکی انجام شده است. در این تحلیل، علاوه بر پیوستگی جابجایی بین لایه‌ای، پیوستگی تنش برشی عرضی بین لایه‌ها و صفر بودن تنش برشی روی سطوح بیرونی نیز برقرار شده است.

به منظور ارزیابی عملکرد مدل معرفی شده، نمونه‌های مختلفی از ورق‌های کامپوزیتی و ساندویچی پوشانیده شده با لایه‌های پیزوالکتریک انتخاب شده، با استفاده از مدل پیشنهادی تحلیل و با نتایج مراجع معتبر مقایسه شده‌اند. نتایج حاکی از آن است که این تئوری، رفتار خمشی ورق‌های کامپوزیتی و ساندویچی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک را در شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی مختلف با دقت بسیار بالایی پیش‌بینی می‌کند.

نکته حایز اهمیت این است که به رغم اینکه تئوری از میدان تکه‌ای خطی استفاده می‌کند و حجم محاسبات کم است، با دقت بسیار خوبی قادر به پیش‌بینی نتایج تنش‌های نرمال و تنش‌های برشی عرضی است.

معمولاً محققان برای دستیابی به نتایج مناسب سعی داشتند با بالا بردن مرتبه تئوری، نتایج را اصلاح کنند؛ اما افزایش مرتبه تئوری، فقط مشکل ضخامت ورق را تا حدودی برطرف می‌کند، اما قادر به رفع مشکلات ناشی از تفاوت سفتی لایه‌ها نمی‌باشد. در این تحقیق، با افزودن بخش محلی (مرتبه خطی) به تئوری‌های تک لایه معادل نتایج نزدیک به 3D دست یافتیم؛ بنابراین افزودن بخش محلی (مرتبه خطی)، مهمتر از افزایش مرتبه تئوری است.

با توجه با نازک بودن رویه‌ها و پایین بودن نسبت ضخامت رویه‌ها به هسته، جهت کاهش حجم محاسبات نسبت به تئوری لایه‌ای، معمولاً ورق ساندویچی به صورت ۳ لایه در نظر گرفته می‌شود و از اثرات برشی رویه‌ها و اثرات درون صفحه‌ای هسته نیز صرف‌نظر می‌شود. در این تحقیق، ورق ساندویچی حاوی لایه‌های پیزوالکتریک، با ۵ لایه مدل‌سازی می‌شود تا بتوان رفتار رویه‌های هیبریدی (شامل کامپوزیت و پیزوالکتریک) را تحلیل کرد.

برخلاف تئوری عمومی - محلی مرتبه بالا که تاکنون ارائه شده، از تئوری خطی در بخش عمومی و محلی استفاده



- [20] Oh J, Cho M (2004) A finite element based on cubic zig-zag plate theory for the prediction of thermo- electric-mechanical behaviors. *Int J Solids Struct* 41(5-6): 1357-1375.
- [21] Beheshti-Aval SB, Lezgy-Nazargah M (2012) A new coupled refined high-order global-local theory and finite element model for electromechanical response of smart laminated /sandwich beams. *Arch. Appl. Mech.* 82(12): 1709-1752
- [22] Beheshti-Aval SB, Lezgy-Nazargah M (2012) A coupled refined high-order global- local theory and finite element model for static electromechanical response of smart multilayered/ sandwich beams. *Arch Appl Mech* 82 1709-1752.
- [23] Thai HT, Kim SE (2015) A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Composite Structures* 128:70-86.
- [24] Li XY, Liu D (1997) Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis. *Int J Numer Methods Eng* 40:1197-1212.
- [25] Zhen W, Wanji C (2007) Refined triangular element for laminated elastic-piezoelectric plates. *Composite Structures* 78: 129-139.
- [26] Plagianakos TS, Papadopoulos EG (2015) Higher-order 2-D/3-D layerwise mechanics and finite elements for composite and sandwich composite plates with piezoelectric layers. *Aerosp Sci Technol* 40 :150-163.
- [13] Semedo Garc JE, CM Mota Soares, Mota Soares CA, Reddy JN (2004) Analysis of laminated adaptive plate structures using layerwise finite element models. *Compos Struct* 82:1939-59.
- [14] Garcia Lage R, Mota Soares CM, Mota Soares CA, Reddy JN (2004) Analysis of adaptive plate structures by mixed layerwise finite elements. *Compos Struct.* 66: 269-76.
- [15] Garcia Lage R, Mota Soares CM, Mota Soares CA, Reddy JN (2004) Modeling of piezolaminated plates using layerwise mixed finite elements. *Comput Struct* 82: 1849-63.
- [16] Heyliger PR, Ramirez G, Saravanos DA (1994) Coupled discrete layer finite element for laminated piezoelectric plates. *Commun Num Methods Eng* Vol. 10, No. 12:pp. 971-81.
- [17] Mitchell JA, Reddy JN (1995) A refined plate theory for composite laminates with piezoelectric laminate. *Int J Solids Struct* 32(16): 2345-2367.
- [18] Cho M, Oh J (2004) Higher order zig-zag theory for fully coupled thermoelectric-mechanical smart composite plates. *Int J Solids Struct* 41(5-6): 1331-1356.
- [19] Sheikh AH, Topdar P, Halder S (2001) An appropriate FE model for through thickness variation of displacement and potential in thin/moderately thick smart laminates. *Compos Struct* 51: 401-409.