



## بررسی تاثیر همزمان مدول‌های کششی - فشاری و برشی پیوندهای واندروالسی بر روی ارتعاشات نانوریبون‌های گرافنی دولایه با شرایط مرزی مختلف

رضا ناظم‌نژاد<sup>۱\*</sup>، کامران کمالی<sup>۲</sup> و شاهرخ حسینی‌هاشمی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه دامغان، دامغان

<sup>۲</sup> کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

<sup>۳</sup> استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۲/۲۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۱۲/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۶/۱۷

### چکیده

در این پژوهش، اثرات شرایط مرزی مختلف بر ارتعاشات آزاد نانوریبون‌های دو لایه برای حالتی بررسی شده است. که هر دو نوع اثرات کششی - فشاری و برشی پیوندهای واندروالسی بصورت همزمان در نظر گرفته شده باشند. به منظور مدل‌سازی نانوریبون دو لایه، از تئوری تیرهای ساندویچی استفاده شده است. در مراجع موجود، تنها یکی از دو اثر کششی - فشاری و یا برشی پیوندهای واندروالسی، مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش، پیوندهای واندروالسی که نقش هسته مدل ساندویچی را ایفا می‌کنند، به گونه‌ای مدل‌سازی می‌شوند که تحمل هر دو نوع نیروی کششی - فشاری و برشی را داشته باشند. با استفاده از اصل همپلتون، معادلات حاکم و شرایط مرزی استخراج می‌شوند. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای نانوریبون دولایه، به روش حل عددی مربعات دیفرانسیلی هارمونیک استخراج می‌گردند. به منظور صحت‌سنجی، نتایج بدست آمده با گزارش‌های موجود در مقالات در شرایطی مقایسه شده است که یکی از دو اثر حذف شده باشد و مطابقت خوب بدست آمده، حاکی از دقت و صحت فرمولاسیون و روش حل عددی است. تاثیرات تغییر شرایط مرزی و تغییر راستای برش بین لایه‌ای روی شکل مودها و ترتیب و اندازه فرکانس‌های طبیعی، مورد مطالعه قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** نانوریبون دولایه؛ اثر کششی - فشاری؛ اثر برشی؛ ارتعاشات آزاد؛ شرایط مرزی.

## Investigating Simultaneous Effects of Tensile-Compressive and Shear Moduli of Van Der Waals Interactions on the Vibration of Bilayer Graphene Nanoribbons for Different Boundary Condition

R. Nazemnezhad<sup>1,\*</sup>, K. Kamali<sup>2</sup>, S. Hosseini-Hashemi<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Assis. Pro., Mechanical Engineering, Damghan University, Damghan, Iran.

<sup>2</sup> MSc., Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Pro., Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

### Abstract

In this study, effects of various boundary conditions on the free vibration of double layer graphene nanoribbons (DLGNRs) are investigated by considering both of tensile-compressive and shear effects of van der Waals (vdWs) interactions. Sandwich beam theory is used to model the DLGNRs. In the references, only one of tensile-compressive or shear effects of vdWs interactions have been considered. Based on sandwich beams theory, vdWs interactions are equivalent to the sandwich core and are modeled in a way that they can withstand the tensile-compressive and shear forces simultaneously. Hamilton's principle is employed to extract governing equations of motion and boundary conditions. Harmonic differential quadrature method is utilized to investigate natural frequencies and related mode shapes of DLGNRs. In order to verify, results are compared to other literatures in a condition that one of the vdWs effects to be neglected. The effect of boundary condition and interlayer shear direction on the mode shape, sequence and value of DLGNRs natural frequencies are investigated.

**Keywords:** Bilayer Nanoribbon; Tensile-Compressive Effect; Shear Effect; Free Vibration; Boundary Condition

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: +۹۸۲۳۳۵۲۲۰۴۱۴؛ فکس: +۹۸۲۳۳۵۲۲۰۴۱۴

آدرس پست الکترونیک: [nazemnezhad@du.ac.ir](mailto:nazemnezhad@du.ac.ir)

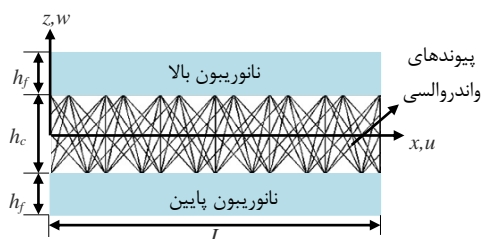
## ۱- مقدمه

گرافن، صفحه‌ای به ضخامت یک اتم کربن است که اتم‌های کربن، در رئوس شبکه‌های لانه زنبوری توسط پیوندهای کووالانسی به یکدیگر متصل شده‌اند [۱]. گرافن، به علت وزن بسیار کم و استحکام بسیار بالایی که دارد، به سرعت توجه محققان را به عنوان یک ماده اصلی در سیستم‌های نانو الکترونیکی و مکانیکی در سنسورها به خود جلب کرد [۲،۳]. این صفحات دوبعدی به علت ویژگی‌های منحصر به فردی که دارد، در زمینه‌های متنوعی از جمله، علوم پزشکی و دارویی [۴-۷]، حرارتی [۸،۹]، اپتیکی [۱۰،۱۱]، الکترونیکی [۱۰،۱۲] و مکانیکی [۱۳-۱۵]، کاربردهای فراوانی دارند. از آنجایی که هنوز کنترل شرایط و مشخصه‌های آزمایشگاهی در ابعاد نانو کار دشواری است، در اغلب پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه بررسی رفتار مکانیکی گرافن‌ها، از روش‌های متنوع دیگری همچون، مکانیک مولکولی، دینامیک مولکولی و مکانیک محیط‌های پیوسته استفاده می‌شود؛ همچنین به دلیل زمان‌بر بودن و بالا بودن هزینه‌های مربوط به شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و مکانیک مولکولی، پژوهشگران توجه بیشتری به استفاده از روش‌های مکانیک محیط پیوسته نشان می‌دهند.

در گرافن‌های دو لایه، علاوه بر پیوندهای کووالانسی که اتم‌های کربن را در صفحه کنار یکدیگر نگه داشته‌اند، پیوندهای ضعیف واندروالسی، عامل اصلی نگه داشتن دو صفحه گرافن در کنار هم هستند. این پیوندهای ضعیف واندروالسی، می‌توانند موجب تغییر خواص مکانیکی و الکترونیکی گرافن چند لایه شوند [۱۶-۱۸]. با مروری روی پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه رفتار مکانیکی نانوریبون‌ها و گرافن‌های چند لایه، می‌توان این پژوهش‌ها را به دو گروه تقسیم‌بندی کرد. در گروه اول که بخش عمده‌ای از پژوهش‌ها را شامل می‌شود، تنها به بررسی اثرات کششی- فشاری پیوندهای واندروالسی روی رفتار مکانیکی نانوریبون‌ها [۱۹،۲۰] و گرافن‌ها [۲۱-۲۸] پرداخته شده است. برای مثال مورمو و ادھیکاری [۱۹]، با توسعه روشی تحلیلی، ارتعاشات آزاد یک نانوتیر دولایه را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها تنها با در نظر گرفتن یک شرط مرزی لولا- لولا، عبارت فرم بسته‌ای را برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی هم‌فاز و غیرهم‌فاز نانوتیر دولایه ارائه دادند. لین [۲۱]، با مطالعه بر ارتعاشات

آزاد صفحات گرافن سه لایه در شرایط مرزی هر چهار سمت گیردار، نتیجه گرفت که در فرکانس‌های پایین اثرات کششی- فشاری پیوندهای واندروالسی اثری روی رفتار ارتعاشاتی سیستم نخواهند داشت. انصاری و همکاران [۲۶]، تاثیر شرایط مرزی و تعداد لایه‌ها را روی رفتار ارتعاشاتی گرافن‌های چندلایه بررسی کردند. آن‌ها همچنین تاثیر پارامتر غیرمحلی و شرایط محیط الاستیک را روی ارتعاشات گرافن‌های چند لایه، مورد مطالعه قرار دادند؛ همچنین در پژوهش دیگری پرادهان و کومار [۲۷]، با در نظر گرفتن شرایط مرزی هر چهار طرف لولا برای گرافن چند لایه و استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، تاثیرات طول صفحات، تعداد لایه‌ها و محیط الاستیک را روی رفتار ارتعاشاتی گرافن چند لایه، مورد بررسی قرار دادند. گروه دوم، پژوهش‌هایی هستند که در آن‌ها تنها به بررسی اثرات برشی پیوندهای واندروالسی روی رفتار مکانیکی نانوریبون‌ها [۲۹-۳۳] پرداخته شده است. برای مثال، لیو [۳۲] با ارائه مدل تیر چندگانه برشی، بدون در نظر گرفتن جابجایی‌های طولی نانوریبون‌ها، مدلی جدید برای محاسبه فرکانس‌های نانوریبون‌های چندلایه ارائه داد. وی نشان داد که نتایج حاصل از مدل‌سازی با استفاده از مدل تیر چندگانه برشی، به خوبی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی هم‌خوانی دارند. در پژوهش دیگری، ناظم‌نژاد و همکاران [۳۱]، ارتعاشات نانوریبون‌های دو لایه در شرایط مرزی گیردار- آزاد را به ازای مقادیر مختلف مدول برشی بین‌لایه‌ای و صلیبیت خمشی نانوریبون، با کمک شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، مورد بررسی قرار دادند. لیو و همکارانش [۳۳]، با در نظر گرفتن نانوریبون‌های دو و سه لایه تحت شرایط مرزی گیردار- آزاد و استفاده از تئوری تیر کامپوزیتی نیومارک خمش، نانوریبون‌ها را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که نتایج حاصل از این تئوری، تطابق بسیار خوبی با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی دارد و در نظر گرفتن جابجایی درون صفحه‌ای نانوریبون، علاوه بر جابجایی برون صفحه‌ای نانوریبون در خمش نانوریبون‌ها، از اهمیت زیادی برخوردار است. در پژوهش دیگری با استفاده از مدل تیر چندگانه برشی، مدل مکانیک محیط پیوسته‌ای به منظور تحلیل استاتیکی نانوریبون‌های چندلایه تحت شرایط مرزی گیردار- آزاد و نیروی الکترواستاتیکی ارائه شده است [۲۹].

$h_c$  به ترتیب، نمایانگر طول تیر، عرض تیر، ضخامت هر لایه گرافن و ضخامت هسته می‌باشند.



شکل ۱- نمای شماتیک نانوریبون دو لایه

در مدل ساندویچ، لایه‌های گرافن بر اساس تئوری تیر اوپلر- برنولی مدل‌سازی می‌شوند و پیوندهای واندروالسی بین لایه‌ای، نسبت به حرکت‌های درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای لایه‌های گرافن از خود عکس‌العمل نشان می‌دهند؛ بنابراین، هسته سازه ساندویچی قادر به تحمل نیروهای کششی- فشاری و برشی است. به منظور مشخص کردن حرکت‌های درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای لایه‌های گرافن، از دستگاه مختصات کارتزین استفاده شده است. مرکز دستگاه مختصات، در سر گیردار تیر و در وسط هسته قرار داده شده است. مولفه‌های جابجایی در راستاهای طولی ( $x$ ) و عرضی ( $z$ ) به ترتیب با متغیرهای  $u$  و  $w$  نشان داده شده‌اند. بر اساس تئوری تیرهای اوپلر- برنولی، مولفه‌های جابه‌جایی برای لایه‌ی بالایی ( $u_t$  و  $w_t$ ) و لایه‌ی پایینی ( $u_b$  و  $w_b$ ) سازه ساندویچی به صورت روابط (۱) تا (۴) تعریف می‌گردند.

$$u_t(x, t, z) = u_1(x, t) - \left( z - \frac{h_f + h_c}{2} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} \quad (1)$$

$$w_t(x, t, z) = w_1(x, t) \quad (2)$$

$$u_b(x, t, z) = u_2(x, t) - \left( z + \frac{h_f + h_c}{2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad (3)$$

$$w_b(x, t, z) = w_2(x, t) \quad (4)$$

در روابط (۱-۴)،  $u_1$ ،  $w_1$  و  $u_2$ ،  $w_2$  به ترتیب، مولفه‌های جابجایی روی نقاط تار میانی لایه‌های بالایی و پایینی است. با استفاده از تئوری تیر اوپلر- برنولی و با مشتق گرفتن از روابط جابجایی، روابط کرنش- جابجایی به صورت روابط (۵) و (۶) بدست می‌آیند.

$$\varepsilon_{xx}^t = \frac{\partial u_t}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \left( z - \frac{h_f + h_c}{2} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad (5)$$

با مروری بر منابع موجود، هیچ مرجعی یافت نمی‌شود که به صورت همزمان اثرات کششی- فشاری و برشی پیوندهای واندروالسی را در بررسی رفتار مکانیکی نانوریبون‌ها و گرافن‌های چند لایه، مورد بررسی قرار داده باشد؛ همچنین با وجود اینکه اثرات تغییرات شرایط مرزی روی رفتار ارتعاشاتی گرافن‌های چند لایه مورد بررسی قرار گرفته است [۲۶، ۲۸]، هیچ مرجعی اثرات تغییرات شرایط مرزی را روی رفتار ارتعاشاتی نانوریبون چندلایه، مورد بررسی قرار نداده‌اند. تاثیر راستای برش بین لایه‌های نانوریبون دو لایه (زیگزاگ و آرمچیر) نیز، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این پژوهش، با استفاده از تئوری سازه‌های ساندویچی و اصل همیلتون، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی نانوریبون دولایه بدست می‌آید. به منظور مدل‌سازی نانوریبون دولایه با استفاده از تئوری سازه‌های ساندویچی، هر لایه نانوریبون با استفاده از تئوری تیر اوپلر- برنولی مدل‌سازی خواهد شد؛ همچنین برای لایه‌های نانوریبون، هر دو نوع حرکت طولی (درون صفحه‌ای) و عرضی (برون صفحه‌ای) در نظر گرفته می‌شود. پیوندهای واندروالسی نیز که نقش هسته سازه ساندویچی را ایفا می‌کنند، به گونه‌ای مدل‌سازی خواهند شد که توانایی تحمل هر دو نوع نیروی کششی- فشاری و برشی را داشته باشند. از آنجا که معادلات حاکم بر حرکت نانوریبون‌ها با یکدیگر کوپل هستند، از روش حل عددی مربعات دیفرانسیلی هارمونیک برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم و رسم شکل مودهای مربوطه استفاده می‌شود. در ادامه، شکل مودهای نانوریبون دو لایه از لحاظ ماهیت حرکتی، به چهار دسته منحصر به فرد تقسیم‌بندی شده، برای چهار شرط مرزی مختلف گیردار- گیردار، گیردار- لولا، لولا- لولا و گیردار آزاد، فرکانس‌های طبیعی مربوط به هر دسته شکل مود بدست خواهد آمد.

## ۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

با توجه به مدل تیر ساندویچی، یک نانوریبون دو لایه شامل، دو لایه گرافن است که توسط پیوندهای واندروالسی از یکدیگر جدا شده‌اند که نقش هسته سازه ساندویچی را ایفا می‌کنند. از اینرسی پیوندهای واندروالسی به دلیل چگالی بسیار اندک آنها صرف‌نظر می‌شود. شکل ۱، یک نانوریبون دو لایه را به صورت شماتیک نشان می‌دهد که در آن  $L$ ،  $b$ ،  $h_f$  و

می‌شوند. همان طور که بیان شد، به دلیل چگالی ناچیز پیوندهای واندروالسی از انرژی جنبشی هسته صرف نظر می‌شود که  $\rho$  چگالی لایه‌های گرافن و  $V$  حجم است. در روابط (۱۴) و (۱۵)، زیرنویس  $b$  و  $t$  به ترتیب، بیانگر لایه پایینی و بالایی است.

$$\delta U = \int \sigma_{xx}^t \delta \varepsilon_{xx}^t dV_t + \int \sigma_{xx}^b \delta \varepsilon_{xx}^b dV_b + \int \sigma_{zz}^c \delta \varepsilon_{zz}^c dV_c + \int \tau_{xz}^c \delta \gamma_{xz}^c dV_c \quad (14)$$

$$\delta T = \int \rho \left( \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} \delta u_t + \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} \delta w_t \right) dV_t + \int \rho \left( \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} \delta u_b + \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta w_b \right) dV_b \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در رابطه (۱۳) و استفاده از روابط تنش- کرنش و کرنش- جابجایی (روابط (۵) تا (۱۲)) و انتگرال‌گیری جزء به جزء از رابطه بدست آمده، معادلات حاکم بر حرکت سیستم به صورت روابط (۱۶) تا (۱۹) بدست می‌آید.

$$-E_f A_f \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{G_c A_c}{h_c^2} (u_1 - u_2) + \frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{2h_c^2} \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \rho A_f \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

$$-E_f A_f \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{G_c A_c}{h_c^2} (u_1 - u_2) - \frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{2h_c^2} \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \rho A_f \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

$$E_f I_f \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - \frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{2h_c^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - \frac{G_c A_c (h_f + h_c)^2}{4h_c^2} \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + \frac{G_c I_c}{h_c^2} \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + \frac{E_c A_c}{h_c^2} (w_1 - w_2) + \rho A_f \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

$$\varepsilon_{xx}^b = \frac{\partial u_b}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \left( z + \frac{h_f + h_c}{2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad (6)$$

در روابط (۵) و (۶)،  $\varepsilon_{xx}^b$  و  $\varepsilon_{xx}^t$  نشان دهنده کرنش طولی به ترتیب برای لایه بالایی و پایینی است. با در نظر گرفتن تغییرات جابجایی به صورت خطی در راستای ضخامت برای هسته، روابط جابجایی در راستای طولی و عرضی به صورت روابط (۷) و (۸) بدست می‌آیند.

$$u_c(x, t, z) = \frac{2z}{h_c} \left[ \frac{u_1 - u_2}{2} + \frac{h_f}{4} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right] + \left[ \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{h_f}{4} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right] \quad (7)$$

$$w_c(x, t, z) = (w_1 - w_2) \frac{z}{h_c} + \left( \frac{w_1 - w_2}{2} \right) \quad (8)$$

که  $u_c$  و  $w_c$  به ترتیب، بیانگر جابجایی‌های طولی و عرضی هسته است. از آنجا که هسته توانایی تحمل نیروهای درون صفحه‌ای را ندارد، کرنش طولی برای آن تعریف نمی‌شود. از طرفی، کرنش‌های برون صفحه‌ای و برشی هسته به صورت روابط (۹) و (۱۰) تعریف می‌گردند.

$$\varepsilon_{zz}^c = \frac{w_1 - w_2}{h_c} \quad (9)$$

$$\gamma_{xz}^c = \frac{2}{h_c} \left[ \frac{h_f}{4} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{u_1 - u_2}{2} \right] + \frac{h_c + 2z}{2h_c} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \quad (10)$$

که  $\varepsilon_{zz}^c$  و  $\gamma_{xz}^c$  به ترتیب، کرنش عرضی و برشی هسته می‌باشند. با توجه به رفتار الاستیک نانوریون گرافنی دولایه، روابط حاکم بین تنش و کرنش لایه‌های نانوریون و هسته، بترتیب بصورت روابط (۱۱) و (۱۲) بیان می‌شوند.

$$\sigma_{xx}^k = E_f \varepsilon_{xx}^k; k = t, b \quad (11)$$

$$\sigma_{zz}^c = E_c \varepsilon_{zz}^c; \tau_{xz}^c = G_c \gamma_{xz}^c \quad (12)$$

که  $E_f$ ،  $E_c$  و  $G_c$  به ترتیب، بیانگر مدول الاستیک لایه‌های نانوریون، مدول کششی- فشاری و مدول برشی پیوندهای واندروالسی هستند. به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی نانوریون دو لایه، از اصل همپلتون مطابق با رابطه (۱۳) استفاده می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)،  $U$  انرژی پتانسیل و  $T$  انرژی جنبشی سیستم است. تغییرات انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نانوریون دولایه، به ترتیب به صورت روابط (۱۴) و (۱۵) تعریف

$$\begin{aligned}
 & -E_f I_f \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + \frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{2h_c^2} (u_1 - u_2) \\
 & + \frac{G_c A_c (h_f + h_c)^2}{4h_c^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \\
 & + \frac{G_c I_c}{h_c^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) = 0 \quad (۲-۲۶)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -E_f I_f \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + \frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{2h_c^2} (u_1 - u_2) \\
 & + \frac{G_c A_c (h_f + h_c)^2}{4h_c^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \\
 & - \frac{G_c I_c}{h_c^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) = 0 \quad (۳-۲۶)
 \end{aligned}$$

$$u_1 = u_2 = w_1 = w_2 = \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \quad (۲۷)$$

$$u_1 = u_2 = w_1 = w_2 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \quad (۲۸)$$

در این پژوهش، به منظور پوشش تمامی شرایط مرزی کاربردی موجود، چهار نوع شرط مرزی گیردار-گیردار، آزاد-آزاد، گیردار-لولا و لولا-لولا مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

### ۳- روش حل

با توجه به اینکه معادلات حاکم بر سیستم کوپل هستند، روش حل تحلیلی برای حل معادلات و محاسبه فرکانس‌ها و رسم شکل مودهای سیستم وجود ندارد. در این پژوهش، برای حل معادلات (۱۶) تا (۱۹) به ازای شرایط مرزی (۲۶) تا (۲۸)، از روش حل عددی مربعات دیفرانسیلی هارمونیک استفاده شده است. بر اساس این روش، مشتق مرتبه  $n$  تابع دلخواهی چون  $f(x)$  در بازه  $0 \leq x \leq L$  به صورت رابطه (۲۹) تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x_i) = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(n)} \cdot f(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (۲۹)$$

که در آن،  $N$  تعداد نقاط گره‌ای،  $A_{ij}^{(n)}$  ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه  $n$  تابعی دلخواه همچون  $f(x)$  و  $x_i$  مختصات گره نام است. نشان داده شده است که نحوه انتخاب نقاط گره‌ای، تاثیر بسزایی در همگرایی نتایج دارد [۳۴]. به همین منظور، توزیع نقاط در دامنه به روش چبیشف<sup>۱</sup> انجام شده

$$\begin{aligned}
 & E_f I_f \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} - \frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{2h_c^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \\
 & - \frac{G_c A_c (h_f + h_c)^2}{4h_c^2} \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \\
 & + \frac{G_c I_c}{h_c^2} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) \\
 & - \frac{E_c A_c}{h_c^2} (w_1 - w_2) + \rho A_f \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۹)
 \end{aligned}$$

که  $A_f$  و  $A_c$  به ترتیب، مساحت سطح مقطع هر لایه گرافن و هسته است.  $I_f$  و  $I_c$  به ترتیب، ممان دوم سطح هر لایه نانوریون و هسته می‌باشند؛ همچنین شرایط مرزی در ابتدا و انتهای نانوریون دو لایه، به صورت روابط (۲۰) تا (۲۵) بدست می‌آید.

$$\delta u_1: E_f A_f \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (۲۰)$$

$$\delta u_2: E_f A_f \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_1: & -E_f I_f \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} \\
 & + \frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{2h_c^2} (u_1 - u_2) \\
 & + \frac{G_c A_c (h_f + h_c)^2}{4h_c^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \\
 & + \frac{G_c I_c}{h_c^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) = 0 \quad (۲۲)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_2: & -E_f I_f \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \\
 & + \frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{2h_c^2} (u_1 - u_2) \\
 & + \frac{G_c A_c (h_f + h_c)^2}{4h_c^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \\
 & - \frac{G_c I_c}{h_c^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) = 0 \quad (۲۳)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta w_1): E_f I_f \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad (۲۴)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta w_2): E_f I_f \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \quad (۲۵)$$

به همین ترتیب با توجه به روابط (۲۰) تا (۲۵)، شرایط مرزی آزاد به صورت روابط (۱-۲۶) تا (۳-۲۶) و شرایط مرزی گیردار و لولا به صورت روابط (۲۷) و (۲۸) تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \quad (۱-۲۶)$$

<sup>۱</sup> Chebyshev Method

$$\begin{aligned} & \frac{G_c A_c h^2}{E_f A_f h_c^2} \left\{ \frac{I_c}{L^2 A_c} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_2(X_k) \right) \right. \\ & - \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_1(X_k) \\ & - \left( \frac{h_c + h_f}{2L} \right)^2 \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_2(X_k) \right) \\ & + \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_1(X_k) \\ & + \left( \frac{h_c + h_f}{2L} \right) \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{U}_2(X_k) \right) \\ & - \left. \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{U}_1(X_k) \right\} \\ & + \frac{h^2 I_f}{A_f L^4} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(4)} \bar{W}_1(X_k) + \frac{E_c A_c h^2}{A_f E_f h_c^2} (\bar{W}_1(X_i) \\ & - \bar{W}_2(X_i)) = \frac{\rho h^2 \omega^2}{E_f} \bar{W}_1(X_i) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{G_c A_c h^2}{E_f A_f h_c^2} \left\{ \frac{I_c}{L^2 A_c} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_1(X_k) \right) \right. \\ & - \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_2(X_k) \\ & - \left( \frac{h_c + h_f}{2L} \right)^2 \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_2(X_k) \right) \\ & + \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_1(X_k) \\ & + \left( \frac{h_c + h_f}{2L} \right) \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{U}_2(X_k) \right) \\ & - \left. \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{U}_1(X_k) \right\} \\ & + \frac{h^2 I_f}{A_f L^4} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(4)} \bar{W}_2(X_k) - \frac{E_c A_c h^2}{A_f E_f h_c^2} (\bar{W}_1(X_i) \\ & - \bar{W}_2(X_i)) = \frac{\rho h^2 \omega^2}{E_f} \bar{W}_2(X_i) \end{aligned} \quad (36)$$

به همین ترتیب، با گسسته‌سازی روابط (۲۰) تا (۲۸) شرایط مرزی مختلف برای یک نانوریون دو لایه بدست می‌آید. به منظور نمایش فرم گسسته، تمامی شرایط مرزی در ابتدا یا انتهای تیر روابط (۳۷) و (۳۸) به ترتیب برای شرایط تکیه‌گاه گیردار، لولا و رابطه‌های (۳۹-۱) تا (۳۹-۳)

است که در این روش، مختصات نقاط گره‌ای به صورت رابطه (۳۰) تعریف می‌شود.

$$x_i = \frac{L}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right]; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

جزئیات کامل مربوط به این روش و توابع وزنی در نظر گرفته شده در مراجع [۳۴، ۳۵] ذکر شده است. به منظور تحلیل ارتعاشات آزاد، مولفه‌های جابه‌جایی به صورت رابطه (۳۱) در نظر گرفته می‌شود که  $\omega$ ، فرکانس طبیعی نانوریون دولایه است؛ همچنین به منظور بی‌بعد کردن مولفه‌های جابه‌جایی، پارامترهای بی‌بعدی به صورت رابطه (۳۲) تعریف شده است:

$$\{u_i(x, t), w_i(x, t)\} = \{U_i(x), W_i(x)\} e^{j\omega t}; \quad i = 1, 2 \quad (31)$$

$$X = \frac{x}{L}; \quad \bar{U}_i = \frac{U_i}{h}; \quad \bar{W}_i = \frac{W_i}{h}; \quad i = 1, 2 \quad (32)$$

که در رابطه (۳۱)،  $j$  پارامتر موهومی است. در رابطه (۳۲) نیز  $X$ ،  $\bar{U}$  و  $\bar{W}$  به ترتیب، بیانگر پارامترهای بی‌بعد راستای طولی، جابجایی طولی و جابجایی عرضی می‌باشند؛ همچنین  $h$  نیز، پارامتری دلخواه برای بی‌بعدسازی کمیت‌ها است که در اینجا همان ضخامت یک نانوریون در نظر گرفته شده است. با استفاده از پارامترهای بی‌بعدی که در رابطه (۳۲) نشان داده شده است و جایگذاری رابطه (۳۱) در روابط (۱۶) تا (۱۹)، فرم گسسته معادلات حاکم بر حرکت نانوریون دولایه به صورت روابط (۳۳) تا (۳۶) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} & \frac{G_c A_c h^2}{E_f A_f h_c^2} \left\{ \frac{h_c + h_f}{2L} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_1(X_k) \right) \right. \\ & + \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_2(X_k) \left. \right\} + \bar{U}_1(X_i) - \bar{U}_2(X_i) \\ & - \frac{h^2}{L^2} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{U}_1(X_k) = \frac{\rho h^2 \omega^2}{E_f} \bar{U}_1(X_k) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{G_c A_c h^2}{E_f A_f h_c^2} \left\{ - \frac{h_c + h_f}{2L} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_1(X_k) \right) \right. \\ & + \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_2(X_k) \left. \right\} + \bar{U}_2(X_i) - \bar{U}_1(X_i) \\ & - \frac{h^2}{L^2} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{U}_2(X_k) = \frac{\rho h^2 \omega^2}{E_f} \bar{U}_2(X_k) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{G_c A_c h (h_f + h_c)}{2 E_f A_f h_c^2} (\bar{U}_1(X_i) - \bar{U}_2(X_i)) \\
 & + \frac{G_c I_c h}{E_f A_f h_c^2 L} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_2(X_k) \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_1(X_k) \right) = 0; i = 1, N \quad (۳-۳۹)
 \end{aligned}$$

با نوشتن معادلات حاکم و شرایط مرزی به فرم ماتریسی، روابط (۴۰) و (۴۱) بدست خواهند آمد.

$$[A_{BB}]\{W_B\} + [A_{BI}]\{W_I\} = 0 \quad (۴۰)$$

$$[A_{IB}]\{W_B\} + [A_{II}]\{W_I\} = \omega^2\{W_I\} \quad (۴۱)$$

که  $\{W_B\}$  و  $\{W_I\}$  به ترتیب، مقادیر تابعی نقاط مرزی و داخلی دامنه هستند. با انجام برخی ساده‌سازی‌ها در روابط (۴۰) و (۴۱)، سیستم معادلات مقادیر ویژه نهایی، به صورت رابطه (۴۲) بدست می‌آید.

$$[[A_{II}] - [A_{IB}][A_{BB}]^{-1}[A_{BI}]]\{W_I\} = \omega^2\{W_I\} \quad (۴۲)$$

با حل رابطه (۴۲) و محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه معادله فوق، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مربوطه برای نانوریون دو لایه تحت چهار نوع شرایط مرزی مختلف بدست خواهد آمد.

#### ۴- نتایج

قبل از ارائه نتایج، بررسی صحت روابط و روش حل ضروری به نظر می‌رسد. از آنجایی که هیچ مرجعی یافت نمی‌شود که به صورت همزمان اثرات کششی- فشاری و برشی پیوندهای واندروالسی را مورد بررسی قرار داده باشد، نتایج پژوهش حاضر، با نتایج دو مرجعی مقایسه خواهد شد که هر یک به صورت جداگانه تنها یکی از اثرات را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در مرجع [۱۹]، تنها اثرات کششی- فشاری پیوندهای واندروالسی در نانوریون دولایه تحت شرایط مرزی لولا- لولا، مورد بررسی قرار گرفته است. در این مرجع، فرکانس‌های هم‌فاز و غیرهم‌فاز به شکل فرم بسته ارائه شده است. جدول ۱، نتایج را در حالتی که مدول برشی هسته برابر صفر در نظر گرفته شده است را با نتایج گزارش شده در مرجع [۱۹] مقایسه می‌کند.

در مرجع [۳۱]، هسته سازه ساندویچی در راستای کششی- فشاری صلب در نظر گرفته شده است و تنها اثرات

برای شرایط آزاد ارائه شده‌اند که در روابط زیر اگر شماره گره‌ای نام یک باشد نشان دهنده، شرایط مرزی در ابتدای نانوریون بوده، اگر  $N$  باشد، بیانگر شرایط مرزی در انتهای نانوریون است.

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_1(X_i) &= \bar{U}_2(X_i) = \bar{W}_1(X_i) = \bar{W}_2(X_i) \\
 &= \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_1(X_k) = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_2(X_k) \\
 &= 0; i = 1, N \quad (۳۷)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_1(X_i) &= \bar{U}_2(X_i) = \bar{W}_1(X_i) = \bar{W}_2(X_i) \\
 &= \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_1(X_k) = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_2(X_k) \\
 &= 0; i = 1, N \quad (۳۸)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{U}_1(X_k) &= \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{U}_2(X_k) \\
 &= \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_1(X_k) = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}_2(X_k) \\
 &= 0; i = 1, N \quad (۱-۳۹)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{I_f h}{A_f L^3} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(3)} \bar{W}_1(X_k) \\
 & + \frac{G_c A_c h (h_f + h_c)}{2 E_f A_f h_c^2} (\bar{U}_1(X_i) - \bar{U}_2(X_i)) \\
 & + \frac{G_c A_c h (h_f + h_c)^2}{4 E_f A_f h_c^2 L} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_2(X_k) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_1(X_k) \right) \\
 & + \frac{G_c I_c h}{E_f A_f h_c^2 L} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_1(X_k) \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_2(X_k) \right) = 0; i = 1: N \quad (۲-۳۹)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{I_f h}{A_f L^3} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(3)} \bar{W}_2(X_k) \\
 & + \frac{G_c A_c h (h_f + h_c)^2}{4 E_f A_f h_c^2 L} \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_2(X_k) \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}_1(X_k) \right)
 \end{aligned}$$

راستای آرمچیر و زیگزاگ به ترتیب، ۰/۴۸۲ و ۰/۶۰۹ گیگاپاسگال و مقدار مدول کششی- فشاری پیوندهای واندروالسی نیز در کرنش‌های کوچک، ۲۶/۶ گیگاپاسگال گزارش شده است. بر این اساس، نتایج گزارش شده در پژوهش حاضر به ازای مقادیر گزارش شده برای مدول کششی- فشاری و مدول برشی در مرجع [۱۸] است. در ادامه، به منظور بحث روی نتایج، خواص نانوریون دو لایه به صورت زیر در نظر گرفته شده است: طول، عرض و ضخامت هر لایه نانوریون به ترتیب، ۱۰، ۲ و ۰/۳۳۵ نانومتر، چگالی نانوریون برابر، ۲۲۶۰ کیلوگرم بر مترمکعب، ضلبيت خمشی هر لایه گرافن برابر، ۲/۱۴ الکترون‌ولت و ضخامت هسته سازه ساندویچی برابر، ۰/۳۳۵ نانومتر [۳۱]. از آنجایی که جابجایی‌های برون صفحه‌ای و درون صفحه‌ای لایه‌های نانوریون کوپل هستند (روابط (۱۶) تا (۱۹))، در هر شکل مود، هر دو نوع این جابجایی‌ها تحریک می‌شوند. برای تعیین اینکه در یک شکل مود مشخص، نسبت جابجایی درون صفحه‌ای به جابجایی برون صفحه‌ای چقدر است، رابطه (۴۳) تعریف شده است:

$$= \text{ضریب جابجایی } (p)$$

ماکزیمم حرکت برون صفحه - ماکزیمم حرکت درون صفحه

ماکزیمم (بیشترین حرکت درون صفحه، بیشترین حرکت

$$(۴۳) \quad \text{برون صفحه}$$

با توجه به رابطه (۴۳)، ضریب جابجایی می‌تواند بین ۱- و ۱ تغییر کند. اگر این ضریب منفی باشد، به این معنا است که حرکت برون صفحه‌ای لایه نانوریون از حرکت درون صفحه‌ای آن بیشتر است و اگر این ضریب مثبت باشد، به این معنا است که حرکت درون صفحه‌ای از حرکت برون صفحه‌ای بیشتر است. حال این ضریب، هرچه به ۱- یا ۱ نزدیک‌تر باشد، نشان دهنده غلبه حرکت برون صفحه یا درون صفحه بر حرکت نوع دیگر است و هرچه این ضریب به صفر نزدیک‌تر باشد، نشان‌دهنده تاثیر همزمان هر دو نوع جابجایی در فرم شکل مود است. با مطالعه روی شکل مودهای ارتعاشاتی نانوریون‌های دو لایه در حالتی که هر دو نوع اثرات کششی- فشاری و برشی پیوندهای واندروالسی و همچنین حرکت‌های درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای برای هر لایه گرافن در نظر گرفته شود، می‌توان نتیجه گرفت که چهار دسته شکل مود منحصر بفرد می‌توانند رخ دهند. دسته

برشی پیوندهای واندروالسی در شرایط مرزی گیردار- آزاد، مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت نیز، دو فرکانس ابتدایی به ازای دو مقدار مدول برشی پیوندهای واندروالسی محاسبه شده است. از آنجایی که مرجع [۳۱] اثرات پیوندهای واندروالسی را در راستای کششی- فشاری در نظر نگرفته است، برای رسیدن به نتایج این پژوهش، مقدار مدول کششی- فشاری پیوندهای واندروالسی در روابط این پژوهش، برابر ۴ تراپاسگال در نظر گرفته شده است تا هسته سازه ساندویچی در این راستا، رفتار صلب‌گونه داشته باشد. جدول ۲، مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده از این پژوهش با نتایج گزارش شده در مرجع [۳۱] را مورد بررسی قرار می‌دهد.

#### جدول ۱- مقایسه اولین و دومین فرکانس بی‌بعد هم‌فاز و

غیرهم‌فاز نانوریون دولایه،  $E_c = ۲۶/۶ \text{ GPa}$  و  $G_c = ۰ \text{ GPa}$

شماره فرکانس	نوع شکل‌مود	مدل تیر ساندویچی	مرجع [۱۹]
۱	هم‌فاز	۹/۸۶۹	۹/۸۶۹
۲	هم‌فاز	۳۹/۴۷۸	۳۹/۴۷۸
۱	ناهم‌فاز	۱۹۸۹/۸۰۰	۱۹۸۹/۸۰۰
۲	ناهم‌فاز	۱۹۹۰/۱۶۵	۱۹۹۰/۱۶۵

#### جدول ۲- مقایسه اولین و دومین فرکانس نانوریون دولایه

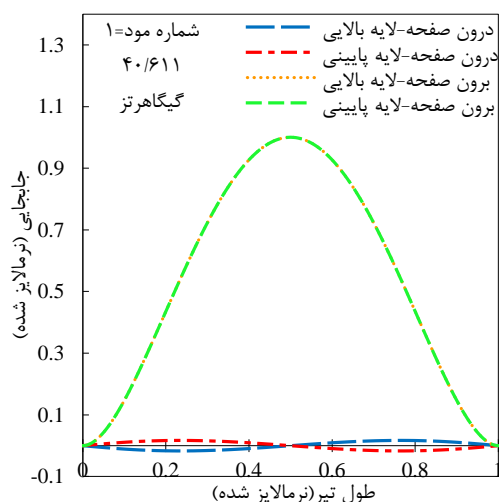
به ازای دو مقدار مدول برشی و  $E_c = ۴ \text{ TPa}$

شماره فرکانس	مدول برشی (گیگاپاسگال)	مدل تیر ساندویچی (گیگاهرتز)	مرجع [۳۱] (گیگاهرتز)
۱	۰/۲۵	۶/۳۲۴	۶/۳۲۴
۱	۴/۶	۱۰/۳۲۵	۱۰/۳۲۵
۲	۰/۲۵	۲۹/۳۶۰	۲۹/۳۶۰
۲	۴/۶	۶۲/۹۹۵	۶۲/۹۹۵

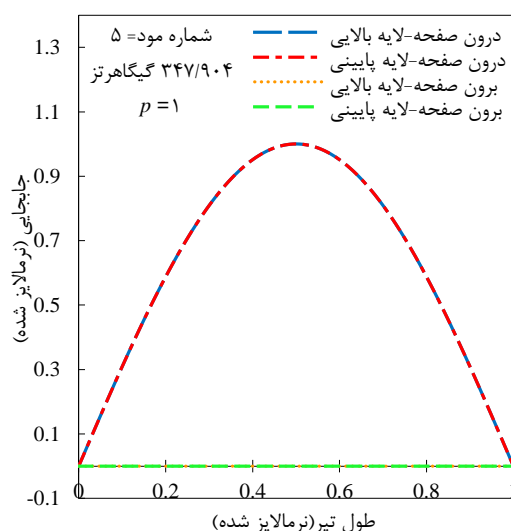
جداول ۱ و ۲، نشان می‌دهند که نتایج این پژوهش تطابق بسیار خوبی با نتایج سایر مقالات دارد و این موضوع صحت فرمولاسیون و روش حل را نشان می‌دهد. به منظور ارائه نتایج جدید، ضروری است که مقدار مدول‌های بین لایه‌های کششی-فشاری و برشی پیوندهای واندروالسی مشخص شود. در یکی از پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه خواص مکانیکی گرافن‌های دولایه، حسینی کردخیلی و مشرف‌زاده [۱۸]، با استفاده از روش مکانیک مولکولی، مدول برشی و مدول کششی-فشاری پیوندهای واندروالسی را محاسبه نموده‌اند. در پژوهش فوق، مقدار مدول برشی در دو



درون صفحه‌ای غیرهم‌فاز می‌باشند. همچنین همان‌گونه که مورد انتظار است، با نرم‌تر شدن شرایط مرزی، مقدار فرکانس نیز کاهش می‌یابد. این کاهش در ابتدا دارای شیب ثابتی است، اما با آزاد شدن شرط مرزی یک طرف از نانوریبون، کاهش فرکانس با شیب بیشتری رخ می‌دهد. این امر، تاثیر زیاد شرایط مرزی آزاد را بر این نوع فرکانس نشان می‌دهد. شکل ۷، تغییرات شماره و اندازه اولین



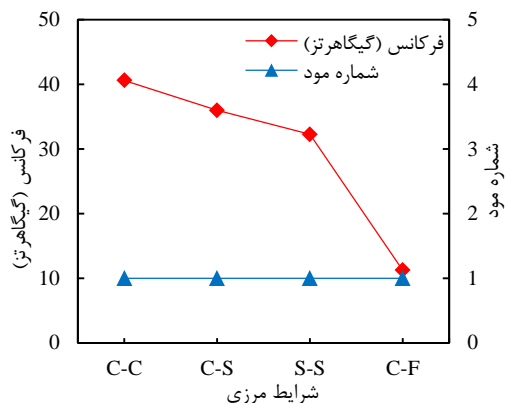
شکل ۲- شکل مود دسته اول، حرکت درون صفحه هم‌فاز - برون صفحه ناهم‌فاز



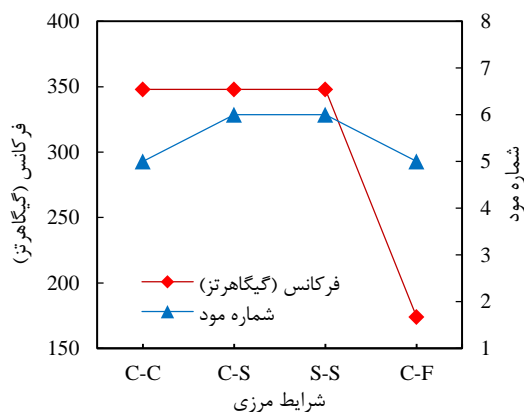
شکل ۳- شکل مود دسته دوم، حرکت درون صفحه هم‌فاز - برون صفحه هم‌فاز

اول و سوم، شکل مودهایی هستند که هر دو نوع حرکت، نقش مهمی در شکل‌گیری شکل مودها دارند؛ درحالی که در دسته دوم و چهارم به ترتیب جابجایی‌های برون صفحه‌ای و درون صفحه‌ای به قدری کوچک هستند که تاثیری در شکل‌گیری شکل مودهای این دو دسته نخواهند داشت. به منظور نمایش این نوع شکل مودها، اولین شکل مود از هر دسته برای یک نانوریبون دو لایه با شرایط مرزی گیردار-گیردار در شکل‌های ۲ تا ۵ نمایش داده شده است. دسته اول، شکل مودهایی هستند که دارای حرکت‌های برون صفحه‌ای هم‌فاز بوده، حرکت‌های درون صفحه‌ای آن‌ها، غیر هم‌فاز هستند (شکل ۲). در شکل مودهای دسته اول، حرکت‌های برون صفحه‌ای بر حرکت‌های درون صفحه‌ای هر لایه غرافن غالب می‌باشند. در شکل مودهای دسته دوم، هر دو نوع حرکت درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای هم‌فاز هستند.

در این دسته، شکل مودها از جابجایی‌های برون صفحه‌ای به دلیل کوچک بودن جابجایی‌هایشان صرف نظر می‌شود (شکل ۳). به همین دلیل، می‌توان دسته دوم از شکل مودها را شکل مودهای درون صفحه‌ای هم‌فاز نامید. دسته سوم، شکل مودهایی هستند که جابه‌جایی درون صفحه‌ای غیرهم‌فاز و برون صفحه‌ای هم‌فاز هر دو با هم تحریک می‌شوند، اما تفاوت آن با دسته اول در این است که در این نوع شکل مودها، حرکت درون صفحه‌ای غیرهم‌فاز، بر حرکت برون صفحه‌ای هم‌فاز غالب است (شکل ۴). دسته چهارم، شکل مودهایی هستند که حرکت‌های درون صفحه‌ای هم‌فاز و برون صفحه‌ای غیرهم‌فاز همزمان تحریک می‌شوند. در این دسته، حرکت‌های درون صفحه‌ای به قدری کوچک هستند که می‌توان از آن‌ها صرف نظر کرد و این دسته را شکل مودهای برون صفحه‌ای غیرهم‌فاز نامید (شکل ۵). برای بررسی هر چهار دسته شکل مودهای تحریک شده، شکل مود مربوط به اولین فرکانس هر دسته، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. ابتدا اثرات شرایط مرزی روی شماره مود و مقدار اولین فرکانس مربوط به شکل مودهای دسته اول، در شکل ۶ بررسی می‌شود. با توجه به شکل ۶، می‌توان دریافت که تغییر شرایط مرزی، شماره مود فرکانس اول از دسته اول را تغییر نخواهد داد و همواره اولین شکل مود نانوریبون دولایه، به گونه‌ای است که حرکت برون صفحه‌ای هم‌فاز و



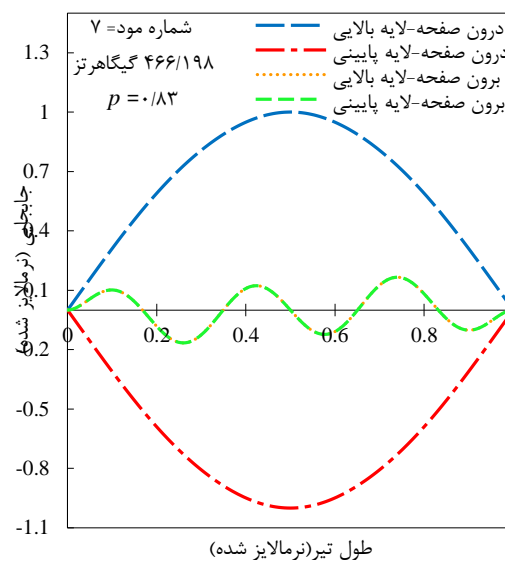
شکل ۶- تغییرات شماره مود و مقدار فرکانس شکل مودهای دسته اول به ازای تغییرات شرایط مرزی



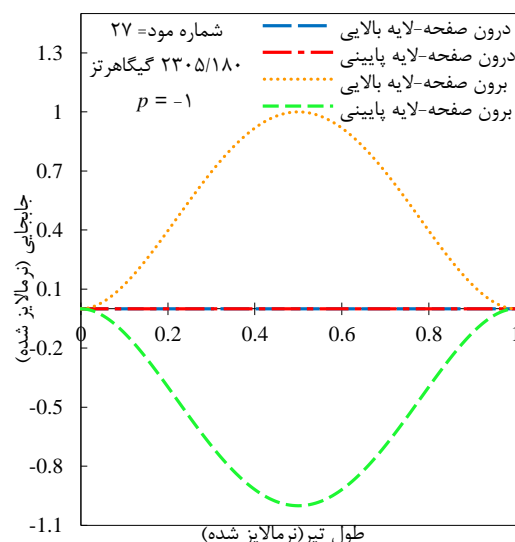
شکل ۷- تغییرات شماره مود و مقدار فرکانس شکل مودهای دسته دوم به ازای تغییرات شرایط مرزی

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، دسته دوم شکل مودهایی هستند که در آن‌ها حرکت برون صفحه‌ای هر لایه نانوریون بسیار اندک بوده، به نحوی که می‌توان از آن صرف‌نظر کرد و تنها حرکت درون صفحه‌ای لایه‌های گرافن در شکل‌گیری شکل مود این دسته نقش دارند. همچنین با توجه به تعریف شرایط مرزی گیردار و لولا (روابط (۲۷) و (۲۸))، مشاهده می‌شود که تفاوت این دو نوع شرط مرزی، در مرتبه مشتق حرکت برون صفحه‌ای بوده، حرکت درون صفحه‌ای این دو نوع شرط مرزی، با هم تفاوتی ندارد. به همین علت، تغییر شرایط مرزی از لولا به گیردار و بالعکس، تفاوتی در مقدار فرکانس‌های دسته دوم نخواهد داشت؛ اما همان‌طور که شکل ۷ نشان می‌دهد، شماره مود اولین فرکانس دسته دوم در حالت گیردار- گیردار نسبت به حالت‌های گیردار- لولا و

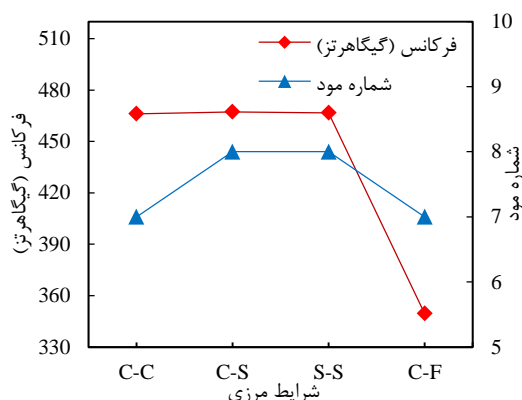
فرکانس شکل مودهایی که در دسته دوم قرار دارند را نسبت به تغییر شرایط مرزی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تغییر شرایط مرزی از حالت لولا به گیردار و بالعکس، هیچ‌گونه تغییری در مقدار اولین فرکانس دسته دوم نخواهد داشت. علت این موضوع را می‌توان با رفتار لایه‌های نانوریون در دسته دوم بیان کرد.



شکل ۴- شکل مود دسته سوم، حرکت درون صفحه ناهم‌فاز- برون صفحه هم‌فاز



شکل ۵- شکل مود دسته چهارم، حرکت درون صفحه هم‌فاز- برون صفحه ناهم‌فاز



شکل ۸- تغییرات شماره مود و مقدار فرکانس شکل مودهای دسته سوم به ازای تغییرات شرایط مرزی

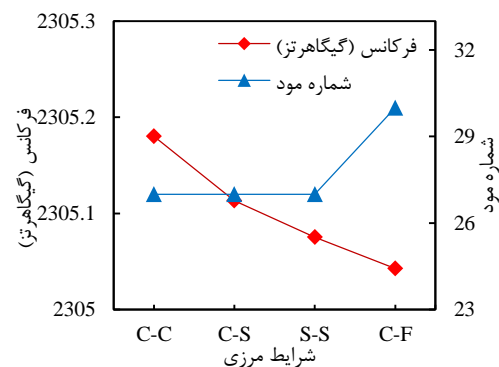
صفحه‌ای نخواهد گذاشت، این تغییرات اندک می‌باشند. مطابق با انتظار، نرم شدن شرایط مرزی مقدار فرکانس را کاهش می‌دهد که این امر، در تغییر مقدار فرکانس به حالت گیردار- آزاد به خوبی مشاهده می‌شود؛ همچنین دلایل تغییرات در شماره مودهای دسته سوم، همانند دلایلی است که پیشتر برای تغییرات شماره مودهای دسته دوم آورده شده است. شکل ۹، تغییرات اولین شماره مود و فرکانس دسته چهارم را نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که با نرم شدن شرایط مرزی، فرکانس‌ها نیز کاهش می‌یابند، اما مقدار تغییرات در این نوع شکل مودها کم است. تغییرات شماره مودها نیز، نشان می‌دهد زمانی که شرایط مرزی از گیردار به لولا یا بالعکس تغییر می‌کند، شماره مود تغییری نخواهد داشت، ولی با آزاد شدن یک سمت از شرایط مرزی مشاهده می‌شود، شماره مود این دسته از شکل مودها افزایش می‌یابد. علت این افزایش، این است که با آزاد شدن یک سمت از شرایط مرزی، جابجایی‌هایی درون صفحه‌ای راحت‌تر تحریک می‌شوند و به همین علت شکل مودهای دسته دوم و سوم زودتر از دسته چهارم رخ می‌دهند؛ زیرا در دسته دوم و سوم، حرکت غالب حرکت درون صفحه‌ای بوده، در دسته چهارم حرکت کاملاً برون صفحه‌ای است. به منظور پوشش جامع ارتعاشات نانوریبون‌های دولایه جداول ۴ تا ۷، پنج فرکانس اول را همراه با شماره مود و مقدار فرکانس و ضریب جابجایی به ترتیب برای شکل مودهای دسته اول تا چهارم نمایش می‌دهند. همان‌طور که از جداول ۴ تا ۷ مشاهده می‌شود، در تمامی شرایط مرزی ابتدا فرکانس‌های دسته اول و سپس

لولا- لولا کاهش یافته است. علت این کاهش شماره مود، این است که با محکم‌تر شدن شرایط مرزی، مقدار فرکانس‌های دسته اول افزایش می‌یابند؛ در حالی که همان‌طور توضیح داده شد، مقدار فرکانس‌های مربوط به دسته دوم ثابت باقی خواهند ماند؛ حال در صورتی که افزایش فرکانس‌ها به دلیل محکم‌تر شدن شرایط مرزی به قدری باشد که فرکانس ماقبل اولین فرکانس دسته دوم، از اولین فرکانس دسته دوم بیشتر شود، برای حفظ روند صعودی فرکانس‌ها، بایستی شماره مود اولین فرکانس دسته دوم کاهش یابد. حال به علت آنکه تغییر شرایط مرزی از لولا- لولا به لولا- گیردار، موجب افزایش فرکانس‌های دسته اول به میزان کمتری نسبت به تغییر شرایط مرزی از لولا- گیردار به گیردار- گیردار می‌شود، با تغییر شرایط مرزی از لولا- لولا به لولا- گیردار، شماره مود تغییری نکرده، ولی با تغییر شرایط مرزی از لولا- گیردار به گیردار- گیردار، شماره مود کاهش می‌یابد. با توجه به شکل ۷ مشاهده می‌شود که تغییر شرایط مرزی از لولا- لولا به گیردار- آزاد، موجب کاهش شماره مود می‌شود. علت این امر، این است که وقتی یکی از شرایط مرزی دارای شرایط آزاد باشد، شرایط برای حرکت درون صفحه‌ای لایه‌های گرافن بیشتر محیا می‌شود و این نوع شکل مود در این شرایط مرزی، راحت‌تر می‌تواند تحریک شود؛ زیرا همانند شرایط گیردار و یا لولا، میزان جابجایی درون صفحه‌ای در انتهای آزاد صفر نمی‌باشد و لایه گرافن می‌تواند راحت‌تر جابجایی درون صفحه‌ای داشته باشد؛ همچنین چون شرایط مرزی نسبت به قبل نرم‌تر شده است، مقدار فرکانس در این شرایط مرزی کاهش می‌یابد. شکل ۸ نیز، تغییرات اولین شماره مود و اولین فرکانس مربوط به دسته سوم را نشان می‌دهد. از آنجا که تغییر مقدار فرکانس‌ها در شرایط مرزی گیردار- گیردار، گیردار- لولا و لولا- لولا بهتر نشان داده شود، جدول ۳ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با تغییر شرایط مرزی از گیردار به لولا و بالعکس، تغییراتی در مقدار اولین فرکانس‌های دسته سوم ایجاد می‌شود. علت ایجاد تغییرات در مقدار فرکانس‌ها در دسته سوم، جابجایی‌های برون صفحه‌ای هستند که همراه با جابجایی‌های درون صفحه‌ای، موجب شکل‌گیری شکل مود مربوطه می‌شوند، اما چون جابجایی‌های درون صفحه‌ای غالب هستند و تغییرات در شرایط مرزی گیردار به لولا و بالعکس اثری بر رفتار درون

شده از دسته اول، شماره مود آن ۳ است، سپس سومین فرکانس دسته دوم، با شماره مود ۱۴ تحریک می‌شود. بعد از آن سومین فرکانس دسته سوم و چهارم، با شماره موده‌های ۱۵ و ۲۹ تحریک می‌شوند. به منظور بررسی راستای برش بین لایه‌ای، شماره مود و اندازه فرکانس اولین شکل مود از هر دسته، در جدول ۸ ارائه شده است. می‌توان نتیجه گرفت که به علت اینکه مدول برشی بین لایه‌ای در راستای زیگزاگ (۰/۶۰۹ گیگاپاسکال) از راستای آرمچیر (۰/۴۸۲ گیگاپاسکال) بزرگتر است [۱۸]، مقدار فرکانس‌ها در راستای زیگزاگ، بیشتر از مقدار فرکانس‌ها در راستای آرمچیر است؛ همچنین مشاهده می‌شود که تغییر راستای برش بین لایه‌ای از آرمچیر به زیگزاگ، تاثیری در مقادیر فرکانس‌های دسته دوم ندارد. همان‌طور که قبلاً توضیح داده شد، دسته دوم شکل موده‌های درون صفحه هم‌فاز هستند که بر اثر این نوع حرکت، نانوریبون‌ها کرنش برشی در هسته سازه ساندویچی ایجاد نمی‌گردد و به تبع آن تنش برشی رخ نخواهد داد؛ بنابراین راستای برش در فرکانس‌های دسته دوم، تاثیری نخواهد داشت؛ همچنین تغییر راستای برش تاثیر بسیار ناچیزی در مقادیر فرکانس‌های دسته چهارم خواهد گذاشت که علت این موضوع نیز، شکل حرکت نانوریبون‌ها است؛ زیرا در این دسته، شکل مودها حرکت برون صفحه غیرهم‌فاز بوده که برشی درون هسته در سازه ساندویچی رخ نمی‌دهد.

جدول ۳- تغییرات فرکانس و شماره مود شکل موده‌های

دسته سوم به ازای شرایط مرزی مختلف		
شرایط مرزی	فرکانس (گیگاهرتز)	شماره مود
گیردار-گیردار	۴۶۶/۲۰	۷
گیردار-لولا	۴۶۷/۲۹	۸
لولا-لولا	۴۶۶/۷۵	۸
گیردار-آزاد	۳۴۹/۲۱	۷



شکل ۹- تغییرات شماره مود و مقدار فرکانس شکل موده‌های دسته چهارم به ازای تغییرات شرایط مرزی

به ترتیب فرکانس‌های دسته دوم، سوم و چهارم تحریک می‌شوند. به این معنا که ابتدا  $n$  امین فرکانس دسته اول تحریک می‌شود، سپس  $n$  امین فرکانس دسته دوم بعد از آن،  $n$  امین فرکانس دسته سوم و در نهایت  $n$  امین فرکانس دسته چهارم تحریک می‌شود. برای مثال، سومین فرکانس تحریک

جدول ۴- پنج فرکانس ابتدایی از شکل موده‌های دسته اول به ازای شرایط مرزی متفاوت

گیردار-گیردار		لولا-لولا		گیردار-لولا		گیردار-گیردار	
شماره مود	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	فرکانس (گیگا هرتز)
۱	۴۰/۶۱	۱	۳۲/۲۶	۱	۲۵/۹۹	۱	۴۰/۶۱
۲	۹۲/۹۴	۲	۷۴/۰۵	۲	۸۲/۸۶	۲	۹۲/۹۴
۳	۱۶۳/۴۲	۳	۱۳۴/۰۰	۳	۱۴۸/۰۱	۳	۱۶۳/۴۲
۴	۲۵۲/۰۱	۴	۲۱۱/۸۲	۴	۲۳۱/۲۰	۴	۲۵۲/۰۱
۶	۳۶۰/۴۳	۶	۳۰۹/۳۰	۵	۳۳۴/۱۴	۵	۳۶۰/۴۳

جدول ۵- پنج فرکانس ابتدایی از شکل مودهای دسته دوم به ازای شرایط مرزی متفاوت

گیردار- آزاد			لولا- لولا			گیردار- لولا			گیردار- گیردار		
فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$
۱۷۳/۹۵	۵	۱	۳۴۷/۹۰	۶	۱	۳۴۷/۹۰	۶	۱	۳۴۷/۹۰	۵	۱
۵۲۱/۸۶	۱۰	۱	۶۹۵/۸۱	۱۰	۱	۶۹۵/۸۱	۱۰	۱	۶۹۵/۸۱	۱۰	۱
۸۶۹/۷۶	۱۴	۱	۱۰۴۳/۷۱	۱۴	۱	۱۰۴۳/۷۱	۱۴	۱	۱۰۴۳/۷۱	۱۴	۱
۱۲۱۷/۶۶	۱۸	۱	۱۳۹۱/۶۲	۱۸	۱	۱۳۹۱/۶۲	۱۸	۱	۱۳۹۱/۶۲	۱۷	۱
۱۵۶۵/۵۷	۲۱	۱	۱۷۳۹/۵۲	۲۱	۱	۱۷۳۹/۵۲	۲۱	۱	۱۷۳۹/۵۲	۲۱	۱

جدول ۶- پنج فرکانس ابتدایی از شکل مودهای دسته سوم به ازای شرایط مرزی متفاوت

گیردار- آزاد			لولا- لولا			گیردار- لولا			گیردار- گیردار		
فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$
۳۴۹/۲۱	۷	-۰/۹۰	۴۶۶/۷۵	۸	-۰/۶۹	۴۶۷/۲۹	۸	-۰/۸۳	۴۶۶/۲۰	۷	-۰/۲۶
۶۰۷/۹۴	۱۱	-۰/۹۴	۷۶۲/۲۸	۱۲	-۰/۸۷	۷۶۲/۲۵	۱۱	-۰/۹۵	۷۶۲/۲۹	۱۱	-۰/۷۶
۹۲۳/۸۴	۱۵	-۰/۸۷	۱۰۸۸/۹۷	۱۵	-۰/۹۴	۱۰۸۹/۱۲	۱۵	-۰/۹۶	۱۰۸۹/۱۴	۱۵	-۰/۸۸
۱۲۵۷/۶۲	۱۹	-۰/۹۶	۱۴۲۶/۰۹	۱۹	-۰/۹۳	۱۴۲۶/۱۵	۱۹	-۰/۸۶	۱۴۲۵/۷۷	۱۸	-۰/۷۷
۱۵۹۶/۴۱	۲۲	-۰/۹۷	۱۷۶۷/۲۱	۲۲	-۰/۹۷	۱۷۶۷/۲۲	۲۲	-۰/۹۵	۱۷۶۷/۲۵	۲۲	-۰/۹۴

جدول ۷- پنج فرکانس ابتدایی از شکل مودهای دسته چهارم به ازای شرایط مرزی متفاوت

گیردار- آزاد			لولا- لولا			گیردار- لولا			گیردار- گیردار		
فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$	فرکانس (گیگا هرتز)	شماره مود	$p$
۲۳۰۵/۰۴	۳۰	-۱	۲۳۰۵/۰۷	۲۷	-۱	۲۳۰۵/۱۱	۲۷	-۱	۲۳۰۵/۱۸	۲۷	-۱
۲۳۰۵/۲۱	۳۱	-۱	۲۳۰۵/۵۰	۲۸	-۱	۲۳۰۵/۷۴	۲۸	-۱	۲۳۰۶/۰۷	۲۸	-۱
۲۳۰۶/۱۳	۳۲	-۱	۲۳۰۷/۱۷	۲۹	-۱	۲۳۰۷/۹۲	۲۹	-۱	۲۳۰۸/۸۶	۲۹	-۱
۲۳۰۸/۹۴	۳۳	-۱	۲۳۱۱/۵۳	۳۰	-۱	۲۳۱۳/۲۴	۳۰	-۱	۲۳۱۵/۲۸	۳۰	-۱
۲۳۱۵/۳۹	۳۴	-۱	۲۳۲۰/۶۱	۳۱	-۱	۲۳۲۳/۸۶	۳۱	-۱	۲۳۲۷/۶۱	۳۱	-۱

جدول ۸- مقایسه فرکانس‌های طبیعی نانوریبون دو لایه در دو راستای برش بین لایه‌ای و تحت شرایط مرزی مختلف

لايه‌ای	شماره مود	گیردار- گیردار		گیردار- لولا		لولا- لولا		گیردار- آزاد	
		فرکانس	$p$	فرکانس	$p$	فرکانس	$p$	فرکانس	$p$
		(گیگاهرتز)	مود	(گیگاهرتز)	مود	(گیگاهرتز)	مود	(گیگاهرتز)	مود
دسته اول	آرمچیر	۴۰/۶۱	۱	-۰/۹۸	۱	-۰/۹۸	۱	۳۵/۹۹	۱
	زیگزاگ	۴۳/۲۶	۱	-۰/۹۷	۱	۰/۹۸	۱	۳۸/۸۹	۱
دسته دوم	آرمچیر	۳۴۷/۹۰	۵	۳۴۷/۹۰	۶	۳۴۷/۹۰	۶	۳۴۷/۹۰	۶
	زیگزاگ	۳۴۷/۹۰	۵	۳۴۷/۹۰	۶	۳۴۷/۹۰	۶	۳۴۷/۹۰	۶
دسته سوم	آرمچیر	۴۶۶/۲۰	۷	۰/۸۳	۸	۴۶۷/۲۹	۸	۰/۶۹	۸
	زیگزاگ	۴۹۱/۶۳	۷	۰/۵۱	۸	۴۹۳/۵۸	۸	۰/۸۲	۸
دسته چهارم	آرمچیر	۲۳۰۵/۱۸	۲۷	-۱	۲۷	۲۳۰۵/۱۱	۲۷	-۱	۲۳۰۵/۰۷
	زیگزاگ	۲۳۰۵/۱۹	۲۷	-۱	۲۷	۲۳۰۵/۱۲	۲۷	-۱	۲۳۰۵/۰۸

### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رفتار ارتعاشاتی نانوریبون‌های دولایه با در نظر گرفتن همزمان اثرات کششی-فشاری و برشی پیوندهای واندروالسی، تحت شرایط مرزی مختلف بررسی شد. در مدل‌سازی صورت گرفته در این پژوهش، فرض شد پیوندهای واندروالسی، توانایی تحمل هر دو نوع نیروی کششی-فشاری و برشی را به صورت همزمان دارند. برای مقایسه شرایط مرزی، از چهار نوع شرط مرزی متداول برای تیرها استفاده شد و فرکانس‌ها و شکل مودهای مربوط به تمامی شرایط مرزی مورد بحث قرار گرفت. مشاهده شد که شکل مودهای نانوریبون دو لایه را می‌توان به چهار دسته کلی تقسیم‌بندی کرد که در هر دسته از شکل مود، نوعی از رفتارهای درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای از نانوریبون‌ها اتفاق می‌افتند. در دسته اول، حرکت برون صفحه‌ای هم‌فاز و برون صفحه‌ای غیر هم‌فاز، به صورت همزمان تحریک می‌شوند که حرکت برون صفحه، غالب است. دسته دوم به گونه‌ای است که حرکت برون صفحه‌ای هم‌فاز، بسیار کمتر از حرکت درون صفحه‌ای هم‌فاز بوده، از حرکت‌های برون صفحه‌ای صرف نظر می‌شود. در دسته سوم، حرکت‌های درون صفحه غیر هم‌فاز، بر حرکت‌های برون صفحه هم‌فاز غالب است. دسته چهارم، شکل مودهایی هستند که حرکت درون صفحه‌ای هم‌فاز،

بسیار کمتر از حرکت برون صفحه‌ای غیر هم‌فاز است؛ همچنین ترتیب شکل مودها نیز، به ترتیب شماره دسته‌ها است. همواره اولین فرکانس نانوریبون‌های دولایه، به گونه‌ای است که دارای حرکت برون صفحه‌ای هم‌فاز و درون صفحه‌ای غیرهم‌فاز است و این نوع شکل مود با تغییر شرایط مرزی و راستای برش بین لایه‌ای تغییری نمی‌کند؛ همچنین مشاهده شد که راستای برش بین لایه‌ای، تاثیری در مقادیر فرکانس‌های دسته دوم و چهارم نخواهد داشت.

### ۶- علائم و نشانه‌ها

مساحت، $m^2$	$A$
ماتریس سختی گره‌های مرزی سیستم	$A_{BB}$
ماتریس سختی ترکیبی از گره‌های مرزی و درونی	$A_{BI}$
ماتریس سختی ترکیبی از گره‌های مرزی و درونی	$A_{IB}$
ماتریس سختی گره‌های درونی سیستم	$A_{II}$
ضریب وزنی مربوط به مشتق مرتبه $m$ یک تابع	$A_{ik}^{(n)}$
عرض نانوریبون، $m$	$b$
شرایط مرزی گیردار	$C$
مدول الاستیک، $N.m^2$	$E$
شرایط مرزی آزاد	$F$
تابعی دلخواه	$F(x)$

لایه‌های بالایی و پایینی	$f$	مدول برشی، $N.m^{-2}$	$G$
شماره گره	$i$	ضخامت، $m$	$h$
گره‌های درونی سیستم	$I$	ممان دوم سطح، $m^4$	$I$
شماره گره	$j$	متغیر موهومی	$j$
گرافن بالایی	$t$	طول نانوریبون، $m$	$L$
		تعداد نقاط گره‌ای	$N$
		ضریب جابه‌جایی	$p$
		شرایط مرزی لولا	$S$
		انرژی جنبشی سیستم، $N.m$	$T$
		زمان، $s$	$t$
		انرژی پتانسیل سیستم، $N.m$	$U$
		متغیر بی‌بعد جابه‌جایی طولی	$\bar{U}$
		جابه‌جایی طولی، $m$	$u$
		حجم، $m^3$	$V$
		بردار درجات آزادی گره‌های مرزی سیستم	$W_B$
		بردار درجات آزادی گره‌های درونی سیستم	$W_I$
		متغیر بی‌بعد جابه‌جایی عرضی	$\bar{W}$
		جابه‌جایی عرضی، $m$	$w$
		متغیر بی‌بعد در راستای $x$	$X$
		راستای طولی	$x$
		راستای عرضی	$z$
		علائم یونانی	
		کرنش برشی	$\gamma$
		کرنش محوری	$\varepsilon$
		چگالی گرافن، $kg.m^{-3}$	$\rho$
		تنش محوری، $N.m^{-2}$	$\sigma$
		تنش برشی، $N.m^{-2}$	$\tau$
		فرکانس طبیعی سیستم	$\omega$
		بالانویس‌ها	
		تعیین کننده لایه بالایی یا پایینی	$k$
		مرتبه مشتق	$n$
		زیرنویس‌ها	
		تار خنثی لایه بالایی	$1$
		تار خنثی لایه پایینی	$2$
		گرافن پایینی	$b$
		گره‌های مرزی سیستم	$B$
		هسته سازه ساندویچی	$c$

## ۷- مراجع

- [1] Geim AK, Novoselov KS (2007) The rise of graphene. Nat Mater 6: 183-191.
- [2] Bunch JS, van der Zande AM, Verbridge SS, Frank IW, Tanenbaum DM, Parpia JM (2007) Electromechanical resonators from graphene sheets. Science 80: 315 490-493.
- [3] Robinson JT, Zalalutdinov M, Baldwin JW, Snow ES, Wei Z, Sheehan P (2008) Wafer-scale reduced graphene oxide films for nanomechanical devices. Nano Lett 8 :3441-3445.
- [4] Sun X, Liu Z, Welscher K, Robinson JT, Goodwin A, Zaric S (2008) Nano-graphene oxide for cellular imaging and drug delivery. Nano Res 1: 203-212.
- [5] Song Y, Qu K, Zhao C, Ren J, Qu X (2010) Graphene oxide: intrinsic peroxidase catalytic activity and its application to glucose detection. Adv Mater 22: 2206-2210.
- [6] Hu W, Peng C, Luo W, Lv M, Li X, Li D (2010) Graphene-based antibacterial paper. ACS Nano 4: 4317-4323.
- [7] Yang L, Zhang L, Webster TJ (2011) Carbon nanostructures for orthopedic medical applications. Nanomedicine 6: 1231-1244.
- [8] Balandin A, Ghosh S, Bao W, Calizo I, Teweldebrhan D, Miao F (2008) Superior thermal conductivity of single-layer graphene. Nano Lett 8: 902-907.
- [9] Hu J, Ruan X, Chen YP (2009) Thermal conductivity and thermal rectification in graphene nanoribbons: a molecular dynamics study. Nano Lett 9: 2730-2735.
- [10] Jo G, Choe M, Lee S, Park W, Kahng YH, Lee T (2012) The application of graphene as electrodes in electrical and optical devices. Nanotechnology 23: 112001.
- [11] Chang H, Wu H (2013) Graphene-Based Nanomaterials: Synthesis, Properties, and Optical and Optoelectronic Applications. Adv Funct Mater 23: 1984-1997.
- [12] Worsley MA, Pauzaskie PJ, Olson TY, Biener J, Satcher JHJ, Baumann TF (2010) Synthesis of graphene aerogel with high electrical conductivity. J Am Chem Soc 132: 14067-14069.

- biaxial compression. *Phys. E Low-Dimensional Syst Nanostructures*. 47: 197-206.
- [25] Jomehzadeh E, Saidi ARR (2011) A study on large amplitude vibration of multilayered graphene sheets. *Comput Mater Sci* 50: 1043-1051.
- [26] Ansari R, Arash B, Rouhi H (2011) Vibration characteristics of embedded multi-layered graphene sheets with different boundary conditions via nonlocal elasticity. *Compos Struct* 93: 2419-2429.
- [27] Pradhan S, Phadikar J (2009) Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models. *Phys Lett A* 373: 1062-1069.
- [28] Ansari R, Arash B, Rouhi H (2011) Nanoscale vibration analysis of embedded multi-layered graphene sheets under various boundary conditions. *Comput Mater Sci* 50: 3091-3100.
- [29] Rokni H, Lu W (2013) A continuum model for the static pull-in behavior of graphene nanoribbon electrostatic actuators with interlayer shear and surface energy effects. *J Appl Phys* 113: 1-10.
- [30] Nazemnezhad R, Hosseini-hashemi S, Shokrollahi H (2014) Free vibration analysis of bilayer graphenes with interlayer shear effect. *Modares Mech Eng* 14: 131-138 (In Persian).
- [31] Nazemnezhad R, Shokrollahi H, Hosseini-Hashemi S (2014) Sandwich beam model for free vibration analysis of bilayer graphene nanoribbons with interlayer shear effect. *J Appl Phys* 115: 174303.
- [32] Liu Y, Xu Z, Zheng Q (2011) The interlayer shear effect on graphene multilayer resonators. *J Mech Phys Solids* 59: 1613-1622.
- [33] Liu DY, Chen WQ, Zhang C (2013) Improved beam theory for multilayer graphene nanoribbons with interlayer shear effect. *Phys. Lett. Sect. A Gen At Solid State Phys* 377: 1297-1300.
- [34] Shu C (2000) *Differential quadrature and its application in engineering*, Springer.
- [35] Striz AG, Wang X, Bert CW (1995) Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mech* 111: 85-94.
- [13] Huang X, Qi X, Boey F, Zhang H (2012) Graphene-based composites. *Chem Soc Rev* 41: 666-686.
- [14] Huang Y, Liang J, Chen Y (2012) The application of graphene based materials for actuators. *J Mater Chem* 22: 3671-3679.
- [15] Barton RA, Ilic B, Zande AM, Whitney WS, McEuen PL, Parpia JM (2011) High, size-dependent quality factor in an array of graphene mechanical resonators. *Nano Lett* 11: 1232-1236.
- [16] Georgantzinos SK, Giannopoulos GI, Anifantis NK (2010) Numerical investigation of elastic mechanical properties of graphene structures. *Mater Des* 31: 4646-4654.
- [17] Nilsson J, Castro Neto A, Guinea F, Peres NMR, Neto AHC, Guinea F (2008) Electronic properties of bilayer and multilayer graphene. *Phys Rev B* 78: 45405.
- [18] Hosseini Kordkheili SA, Moshrefzadeh-Sani H, Kordkheili SAH, Moshrefzadeh-Sani H (2013) Mechanical properties of double-layered graphene sheets. *Comput Mater Sci* 69: 335-343.
- [19] Murmu T, Adhikari S (2010) Nonlocal transverse vibration of double-nanobeam-systems. *J Appl Phys* 108: 83514.
- [20] Shi JXJ, Ni QQQ, Lei XXW, Natsuki T (2011) Nonlocal elasticity theory for the buckling of double-layer graphene nanoribbons based on a continuum model. *Comput Mater Sci* 50: 3085-3090.
- [21] Lin RM (2012) Nanoscale vibration characteristics of multi-layered graphene sheets. *Mech Syst Signal Process* 29: 251-261.
- [22] He XQQ, Wang JBB, Liu B, Liew KMKM (2012) Analysis of nonlinear forced vibration of multi-layered graphene sheets. *Comput Mater Sci* 61: 194-199.
- [23] Arghavan S, Singh A (2012) Effects of van der Waals interactions on the nonlinear vibration of multi-layered graphene sheets. *J Phys D Appl Phys* 45: 455305.
- [24] Farajpour A, Arab Solghar A, Shahidi A, Solghar AA, Shahidi A (2013) Postbuckling analysis of multi-layered graphene sheets under non-uniform